Esta lista tem como objetivo apresentar apenas alguns exercícios resolvidos que podem ajudar na compreensão da matéria. Esta lista não deve ser o seu único material de estudo!

Superfícies Cilíndricas

Exercício 1. Encontrar a equação da superfície cilíndrica $\mathcal{S}$ com curva diretriz $x^2 - 4y = 0$, $z = 0$, e reta geratriz paralela ao vetor $W = (1, -2, 3)$.

Iniciamos este exercício respondendo algumas perguntas:

- Qual é a equação da curva que gera a superfície cilíndrica?
  A equação da curva é dada por $x^2 - 4y = 0$. Perceba que esta equação só depende das variáveis x e y. Assim, a curva está no plano xy, e temos
  $$f(x, y) = x^2 - 4y = 0. \tag{1}$$
- Qual é o vetor que a reta geratriz deve ser paralela?
  O vetor dado é $W = (1, -2, 3)$.
- Sabemos que, da forma como desenvolvemos a teoria de superfícies cilíndricas, precisamos de um vetor $V = (a, b, 1)$, $V = (a, 1, c)$ ou $V = (1, b, c)$. Qual destes vetores se aplica a este exercício? O vetor dado W já está neste formato?
  Como a curva está no plano xy, devemos ter um vetor no formato $V = (a, b, 1)$. Portanto, W não se encontra neste formato, e então, fazemos
  $$V = \frac{1}{3}W = (\underbrace{1/3}_{a}, \underbrace{-2/3}_{b}, 1).$$
- Qual é a equação da superfície cilíndrica neste caso?
  Pela teoria desenvolvida em aula, sabemos que a equação desta superfície $\mathcal{S}$ é dada por
  $$f(x - az, y - bc) = 0.$$
  Recordando (1), temos então que
  $$\begin{aligned} f(x - az, y - bz) = 0 &\Rightarrow f(x - (1/3)z, y - (-2/3)z) = 0 \\ &\Rightarrow \left(x - \frac{z}{3}\right)^2 - 4\left(y + \frac{2z}{3}\right) = 0. \end{aligned}$$
  Portanto, a resposta deste exercício é:
  $$\left(x - \frac{z}{3}\right)^2 - 4\left(y + \frac{2z}{3}\right) = 0.$$

Exercício 2. Mostre que a equação abaixo representa uma superfície cilíndrica

$$17x^2 + 2y^2 + z^2 - 8xy - 6xz - 2 = 0. \tag{2}$$

Para mostrar que esta equação está relacionada com uma superfície cilíndrica, precisamos identificar a curva diretriz e o vetor associado com as retas geratrizes. Toda curva diretriz está no plano $x = 0$, $y = 0$, ou $z = 0$. Mas como decidir se devemos ter $x = 0$, $y = 0$, ou $z = 0$? **A dica é a seguinte: sempre comece zerando a variável que anula os termos mistos**. Observe que, escolhendo $x = 0$, temos que os termos mistos em (2) são, de fato, anulados. Assim, fazendo $x = 0$ em (2), obtemos a seguinte curva candidata a ser a nossa curva diretriz:

$$2y^2 + z^2 - 2 = 0.$$

Como a equação acima só depende de y e z, temos

$$f(y, z) = 2y^2 + z^2 - 2 = 0, \tag{3}$$

e, além disso, a curva deve estar no plano yz.

- Quando a curva está no plano yz, como deve ser o vetor ao qual as retas geratrizes são paralelas?
  Neste caso, o vetor deve ser $V = (1, b, c)$.

Precisamos então encontrar os valores de b e c. Se a curva que escolhemos está correta, devemos ter

$$f(y - bx, z - cx) = 17x^2 + 2y^2 + z^2 - 8xy - 6xz - 2.$$

Usando a informação de (3), temos

$$\begin{array}{rcl}
2\,(y - bx)^2 + (z - cx)^2 - 2 & = & 17x^2 + 2y^2 + z^2 - 8xy - 6xz - 2 \\
2\left(y^2 - 2bxy + b^2x^2\right) + \left(z^2 - 2cxz + c^2x^2\right) - 2 & = & 17x^2 + 2y^2 + z^2 - 8xy - 6xz - 2 \\
(2b^2 + c^2)x^2 + 2y^2 + z^2 - 4bxy - 2cxz - 2 & = & 17x^2 + 2y^2 + z^2 - 8xy - 6xz - 2 \\
(2b^2 + c^2)x^2 - 4bxy - 2cxz & = & 17x^2 - 8xy - 6xz.
\end{array}$$

Assim, para que a última igualdade acima seja válida, devemos ter

$$\begin{cases}
2b^2 + c^2 & = & 17 \\
-4b & = & -8 \\
-2c & = & -6.
\end{cases}$$

Resolvendo o sistema acima, vemos que $b = 2$ e $c = 3$ é solução das três equações acima. Logo, temos que, de fato, $f(y, z) = 2y^2 + z^2 - 2 = 0$ é a curva diretriz e $V = (1, 2, 3)$ é o vetor ao qual todas as retas geratrizes são paralelas.

Superfícies de Revolução

Exercício 3. Encontrar a equação da superfície de revolução $\mathcal{S}$ com curva geratriz $9x^2 + 4y^2 = 36$, $z = 0$, e y sendo o eixo de revolução.

Iniciamos este exercício respondendo algumas perguntas:

- Qual é a equação da curva que gera a superfície de revolução?
  A equação da curva é dada por $9x^2 + 4y^2 - 36 = 0$. Perceba que esta equação só depende das variáveis x e y. Assim, a curva está no plano xy, e temos
  $$f(x, y) = 9x^2 + 4y^2 - 36 = 0. \tag{4}$$
- Qual é o eixo de rotação?
  O eixo é o y.
- Qual é a equação da superfície de revolução neste caso?
  Pela teoria desenvolvida em aula, sabemos que a equação desta superfície $\mathcal{S}$ é dada por
  $$f(\pm\sqrt{x^2 + z^2}, y) = 0.$$
  Recordando (4), temos então que
  $$\begin{aligned} f(\pm\sqrt{x^2 + z^2}, y) = 0 &\Rightarrow 9\left(\pm\sqrt{x^2 + z^2}\right)^2 + 4y^2 - 36 = 0 \\ &\Rightarrow 9x^2 + 4y^2 + 9z^2 - 36 = 0. \end{aligned}$$
  Portanto, a resposta deste exercício é:
  $$9x^2 + 4y^2 + 9z^2 - 36 = 0.$$

Exercício 4. Mostre que a equação abaixo é uma superfície de revolução

$$x^2 + y^2 - z^3 = 0.$$

Para mostrar que esta equação está relacionada com uma superfície de revolução, precisamos identificar a curva geratriz e o eixo de revolução. Toda superfície de revolução é constituída por círculos de diferentes raios "empilhados" um em cima do outro, e crescendo em altura na direção do eixo de revolução. Olhando para a equação dada, vemos que se fixarmos o valor de z, digamos $z = k$, obtemos uma equação de uma circunferência:

$$x^2 + y^2 - k^3 = 0 \Rightarrow x^2 + y^2 = k^3.$$

Portanto, o eixo de revolução deve ser o eixo z.

Pela teoria apresentada em aula, quando a superfície de revolução é gerada por uma rotação no eixo z, temos duas possibilidades:

- A curva geratriz $f(x,z)=0$ está no plano xz:
  Neste caso, devemos ter $f(\pm\sqrt{x^2+y^2},z)=x^2+y^2-z^3$. Só nos resta então encontrar a expressão de $f(x,z)$. Observe que
  $$f(\pm\sqrt{x^2+y^2},z)=x^2+y^2-z^3 \Rightarrow f(\pm\sqrt{x^2+y^2},z)=(\pm\sqrt{x^2+y^2})^2-z^3.$$
  Assim, escolhendo $f(x,z)=x^2-z^3$, temos o desejado.
- A curva geratriz $f(y,z)=0$ está no plano yz:
  Neste caso, devemos ter $f(\pm\sqrt{x^2+y^2},z)=x^2+y^2-z^3$. Só nos resta então encontrar a expressão de $f(y,z)$. Observe que
  $$f(\pm\sqrt{x^2+y^2},z)=x^2+y^2-z^3 \Rightarrow f(\pm\sqrt{x^2+y^2},z)=(\pm\sqrt{x^2+y^2})^2-z^3.$$
  Assim, escolhendo $f(y,z)=y^2-z^3$, temos o desejado.

Superfície Cônica

Exercício 5. Encontrar a equação da superfície cônica $\mathcal{S}$ com curva diretriz $x^2=2y$ situada no plano $z=1$ e vértice $O=(0,0,0)$.

Iniciamos este exercício respondendo algumas perguntas:

- Qual é a equação da curva que gera a superfície cônica?
  A equação da curva é dada por $x^2-2y=0$. Perceba que esta equação só depende das variáveis x e y. Assim, a curva está no plano xy, e temos
  $$f(x,y)=x^2-2y=0. \tag{5}$$
- Toda curva que gera uma superfície cônica está no plano $x=a$, $y=b$, ou $z=c$. Qual é o caso deste exercício?
  Neste exercício, temos $z=\underbrace{1}_{c}$.
- Qual é a equação da superfície de revolução neste caso?
  Pela teoria desenvolvida em aula, sabemos que a equação desta superfície $\mathcal{S}$ é dada por
  $$f\left(\frac{cx}{z},\frac{cy}{z}\right)=0.$$
  Recordando (5) e usando $c=1$, temos
  $$\begin{aligned} f\left(\frac{cx}{z},\frac{cy}{z}\right)=0 &\Rightarrow f\left(\frac{x}{z},\frac{y}{z}\right)=0 \\ &\Rightarrow \left(\frac{x}{z}\right)^2-2\left(\frac{y}{z}\right)=0. \end{aligned}$$

Portanto, a resposta deste exercício é:

$$\frac{x^2}{z^2} - \frac{2y}{z} = 0 \Rightarrow x^2 - 2yz = 0.$$

Exercício 6. Mostre que a equação $4x^2 - y^2 + 4z^2 = 0$ descreve uma superfície cônica.

Pelo resultado apresentado em aula, basta mostrarmos que, se $P = (x, y, z)$ é um ponto desta superfície, então $P_\lambda = (\lambda x, \lambda y, \lambda z)$ também é um ponto desta superfície para todo número real λ.

Se $P = (x, y, z)$ está na superfície, segue que $4x^2 - y^2 + 4z^2 = 0$. Logo, para verificarmos que $P_\lambda = (\lambda x, \lambda y, \lambda z)$ também está na superfície, basta mostrarmos que

$$4(\lambda x)^2 - (\lambda y)^2 + 4(\lambda z)^2 = 0.$$

Façamos isto! De fato, temos que

$$4(\lambda x)^2 - (\lambda y)^2 + 4(\lambda z)^2 = \lambda^2 \underbrace{\left(4x^2 - y^2 + 4z^2\right)}_{=0}.$$

Como $4x^2 - y^2 + 4z^2 = 0$, o resultado segue. Portanto, esta equação descreve uma superfície cônica.

Identificação de Quádricas

Exercício 7. Seja $\mathcal{S}$ a superfície dada pela equação

$$4x^2 + y^2 + z^2 - 8x + 2y + 1 = 0.$$

a) Identifique esta quádrica.

b) Qual é a cônica dada pela interseção entre $\mathcal{S}$ e o plano $x = 1$?

c) Apresente a equação de $\mathcal{S}$ em coordenadas esféricas identificando o polo e os eixos.

a) Vamos completar quadrados:

$$\begin{aligned}
4x^2 + y^2 + z^2 - 8x + 2y + 1 = 0 &\Rightarrow 4x^2 - 8x + y^2 + 2y + z^2 + 1 = 0\\
&\Rightarrow 4(x^2 - 2x) + (y^2 + 2y) + z^2 + 1 = 0\\
&\Rightarrow 4\left[(x-1)^2 - 1\right] + \left[(y+1)^2 - 1\right] + z^2 + 1 = 0\\
&\Rightarrow 4(x-1)^2 - 4 + (y+1)^2 - 1 + z^2 + 1 = 0\\
&\Rightarrow 4(x-1)^2 + (y+1)^2 + z^2 = 4\\
&\Rightarrow \frac{(x-1)^2}{1} + \frac{(y+1)^2}{4} + \frac{z^2}{4} = 1.
\end{aligned}$$

Fazendo a mudança

$$\begin{cases} x' &= x-1 \\ y' &= y+1 \\ z' &= z, \end{cases}$$

com nova origem $O' = (1, -1, 0)$, temos

$$\frac{x'^2}{1} + \frac{y'^2}{4} + \frac{z'^2}{4} = 1.$$

Portanto, esta é a equação de um **elipsóide**.

b) Do item que fizemos acima, sabemos que

$$\frac{(x-1)^2}{1} + \frac{(y+1)^2}{4} + \frac{z^2}{4} = 1.$$

Portanto, quando $x = 1$, temos

$$\frac{(1-1)^2}{1} + \frac{(y+1)^2}{4} + \frac{z^2}{4} = 1 \Rightarrow \frac{(y+1)^2}{4} + \frac{z^2}{4} = 1.$$

Assim, temos a expressão de uma elipse. Portanto, a interseção de $\mathcal{S}$ com o plano $x = 1$ resulta em uma **elipse**.

c) Duas soluções são possíveis aqui. Se escolhermos trabalhar com a equação

$$\frac{(x-1)^2}{1} + \frac{(y+1)^2}{4} + \frac{z^2}{4} = 1,$$

fazemos $x = r \operatorname{sen} \phi \cos \theta$, $y = r \operatorname{sen} \phi \operatorname{sen} \theta$ e $z = r \cos \phi$, e obtemos

$$\frac{(r \operatorname{sen} \phi \cos \theta - 1)^2}{1} + \frac{(r \operatorname{sen} \phi \operatorname{sen} \theta + 1)^2}{4} + \frac{(r \cos \phi)^2}{4} = 1,$$

sendo o polo $O = (0, 0, 0)$ e os eixos dados por z e x.

Entretanto, se desejamos usar a equação mais simples

$$\frac{x'^2}{1} + \frac{y'^2}{4} + \frac{z'^2}{4} = 1,$$

fazemos $x' = r \operatorname{sen} \phi \cos \theta$, $y' = r \operatorname{sen} \phi \operatorname{sen} \theta$ e $z' = r \cos \phi$, e obtemos

$$\frac{(r \operatorname{sen} \phi \cos \theta)^2}{1} + \frac{(r \operatorname{sen} \phi \operatorname{sen} \theta)^2}{4} + \frac{(r \cos \phi)^2}{4} = 1,$$

sendo o polo $O' = (1, -1, 0)$ e os eixos dados por z' e x'.

Exercício 8. Seja $\mathcal{S}$ a superfície dada pela equação

$$2x^2 + z^2 - 18y - 2z - 53 = 0.$$

a) Identifique esta quádrica e apresente a sua equação canônica.

b) Qual é a cônica dada pela interseção entre $\mathcal{S}$ e o plano $x = 1$?

c) Apresente a equação de $\mathcal{S}$ em coordenadas cilíndricas identificando o polo e os eixos.

a) Vamos completar quadrados:

$$\begin{aligned}
2x^2 + z^2 - 18y - 2z - 53 = 0 &\Rightarrow 2x^2 + z^2 - 2z - 18y - 53 = 0 \\
&\Rightarrow 2x^2 + (z^2 - 2z) - 18y - 53 = 0 \\
&\Rightarrow 2x^2 + \left[(z-1)^2 - 1\right] - 18y - 53 = 0 \\
&\Rightarrow 2x^2 + (z-1)^2 - 18y - 54 = 0 \\
&\Rightarrow 2x^2 + (z-1)^2 - 18(y+3) = 0 \\
&\Rightarrow 2x^2 + (z-1)^2 = 18(y+3) \\
&\Rightarrow \frac{x^2}{9} + \frac{(z-1)^2}{18} = (y+3).
\end{aligned}$$

Fazendo a mudança

$$\begin{cases} x' &= x \\ y' &= y+3 \\ z' &= z-1, \end{cases}$$

com nova origem $O' = (0, -3, 1)$, temos

$$\frac{x'^2}{9} + \frac{z'^2}{18} = y'.$$

Portanto, esta é a equação de um **parabolóide elíptico**.

b) Do item que fizemos acima, sabemos que

$$\frac{x^2}{9} + \frac{(z-1)^2}{18} = (y+3).$$

Portanto, quando $x = 1$, temos

$$\frac{1^2}{9} + \frac{(z-1)^2}{18} = (y+3) \Rightarrow \frac{(z-1)^2}{18} = \left(y + \frac{26}{9}\right).$$

Assim, temos a expressão de uma parábola. Se você não conseguiu ver que a expressão acima é de uma parábola, basta fazer a seguinte mudança

$$\begin{cases} y'' &= y + \frac{26}{9} \\ z'' &= z-1, \end{cases}$$

e obter

$$\frac{(z-1)^2}{18} = \left(y + \frac{26}{9}\right) \Rightarrow \frac{z''^2}{18} = y'' \Rightarrow z''^2 = 18y'' \Rightarrow z''^2 = 4\left(\frac{9}{2}\right)y''.$$

Portanto, a interseção de $\mathcal{S}$ com o plano $x = 1$ resulta em uma **parábola**.

c) Duas soluções são possíveis aqui. Se escolhermos trabalhar com a equação

$$\frac{x^2}{9} + \frac{(z-1)^2}{18} = (y+3),$$

fazemos $x = r\cos\theta$, $y = r\,\mathrm{sen}\,\theta$ e $z = z$, e obtemos

$$\frac{(r\cos\theta)^2}{9} + \frac{(z-1)^2}{18} = (r\,\mathrm{sen}\,\theta + 3),$$

sendo o polo $O = (0,0,0)$ e os eixos dados por x e z.

Entretanto, se desejamos usar a equação mais simples

$$\frac{x'^2}{9} + \frac{z'^2}{18} = y',$$

fazemos $x' = r\cos\theta$, $y' = r\,\mathrm{sen}\,\theta$ e $z' = z'$, e obtemos

$$\frac{(r\cos\theta)^2}{9} + \frac{z'^2}{18} = r\,\mathrm{sen}\,\theta,$$

sendo o polo $O' = (0,-3,1)$ e os eixos dados por x' e z'.

Identificação de Cônicas

Rever os dois exercícios resolvidos no material do dia 30/05.

Parametrização

Rever todos os exercícios feitos em aula no dia 13/06.

Resumo das Principais Quádricas

Quádricas	**Equações**
Elipsóide	$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$
Hiperbolóide de 1 folha	$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1$ ou $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$ ou $-\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$
Hiperbolóide de 2 folhas	$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1$ ou $-\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1$ ou $-\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$
Cone	$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=0$ ou $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=0$ ou $-\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=0$
Parabolóide Elíptico	$\pm z=\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}$ ou $\pm y=\frac{x^2}{a^2}+\frac{z^2}{c^2}$ ou $\pm x=\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}$
Parabolóide Hiperbólico	$\pm z=\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}$ ou $\pm y=\frac{x^2}{a^2}-\frac{z^2}{c^2}$ ou $\pm x=\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}$