1 $y' = y\cot(x) + 2x - x^2\cot(x)$

★ PASSO I: COLOCAR A EQUAÇÃO NA FORMA $y' + p(x)y = f(x)$

$y' + (-\cot(x))\,y = 2x - x^2\cot(x)$

★ PASSO II: CALCULAR O FATOR INTEGRANTE $\mu(x)$

$\mu(x) = \exp\left(\int p(x)\,dx\right) = \exp\left(\int(-\cot(x))\,dx\right) = \exp(-\ln(\operatorname{sen}(x)))$

$\mu(x) = \csc(x)$

↑ COSSECANTE

★ PASSO III: MULTIPLICAR PELO FATOR INTEGRANTE E INTEGRAR

$\underbrace{\csc(x)\left(y' + (-\cot(x))\,y\right)}_{= \frac{d}{dx}\mu(x)y} = \csc(x)\left(2x - x^2\cot(x)\right)$

$\frac{d}{dx}(\csc(x)\,y) = \csc(x)\left(2x - x^2\cot(x)\right)$

$\Rightarrow \csc(x)\,y = \int \csc(x)\left(2x - x^2\cot(x)\right)dx$

$\Rightarrow \csc(x)\,y = \csc(x)\,x^2 + C$

$y = x^2 + \frac{C}{\csc(x)} = x^2 + C\operatorname{sen}(x)$

$$\boxed{y = x^2 + C\operatorname{sen}(x)}$$

PEDRO SADER AZEVEDO RA: 243245

② $y' = y^4 \cos(x) + y\tan(x)$

★ PASSO I: COLOCAR A EQUAÇÃO NA FORMA $y' + p(x)y = f(x)y^n$

$$y' + (-\tan(x))y = \cos(x)y^4$$

★ PASSO II: APLICAR A SUBSTITUIÇÃO DE BERNOULLI

$$\begin{cases} v = y^{1-n} \\ n = 4 \end{cases} \Rightarrow v = y^{1-4} = y^{-3}$$

ASSIM OBTEMOS A SEGUINTE EQUAÇÃO:

$$v' + 3\tan(x)v = -3\cos(x)$$

★ PASSO III: RESOLVER A NOVA EQUAÇÃO USANDO UM FATOR INTEGRANTE μ

$$\mu = \exp\left(\int p(x)\,dx\right) = \exp\left(\int 3\tan(x)\,dx\right) = \sec^3(x)$$

$$\mu(x) = \sec^3(x)$$

$$\sec^3(x)\,v = -3\int \sec^3(x)\cos(x)\,dx$$

$$v = -3\cos^3(x)\int \sec^3(x)\cos(x)\,dx = -3\cos^3(x)\int \sec^2(x)\,dx$$

$$v = -3\cos^3(x)\left(\tan(x) + C\right)$$

★ PASSO IV: RESOLVER PARA y

$$v = y^{-3} \Rightarrow v^{-\frac{1}{3}} = y \Rightarrow \boxed{y = \left(-3\cos^3(x)\left(\tan(x)+C\right)\right)^{-\frac{1}{3}}}$$

PEDRO SADER AZEVEDO RA: 243245

③ $\underbrace{\left(\frac{y}{x}\right)}_{M(x,y)} dx + \underbrace{(y^3 + \ln(x))}_{N(x,y)} dy = 0 \quad , \quad x > 0$

★ PASSO I: TESTAR SE A EQUAÇÃO É EXATA

$$\frac{\partial}{\partial y} M = \frac{1}{x} \quad , \quad \frac{\partial}{\partial x} N = \frac{1}{x}$$

$$\frac{\partial}{\partial y} M = \frac{\partial}{\partial x} N \Rightarrow \underline{\text{A EQUAÇÃO É EXATA}}$$

★ PASSO II: INTEGRAR M COM RELAÇÃO A X

SEJA F A SOLUÇÃO DA EQUAÇÃO DIFERENCIAL TAL QUE

$$F = \int M \, dx = y \ln(|x|) + C(y) \underset{x>0}{=} y \ln(x) + C(y)$$

★ PASSO III: DERIVAR F COM RELAÇÃO A Y PARA CALCULAR C(Y)

$$\frac{\partial}{\partial y} F = \frac{\partial}{\partial y}\left(y \ln(x) + C(y)\right) = \ln(x) + \frac{d}{dy} C(y)$$

$$\frac{\partial}{\partial y} F = N(x,y) \Rightarrow \ln(x) + \frac{d}{dy} C(y) = \ln(x) + y^3$$

$$\Rightarrow \frac{d}{dy} C(y) = y^3 \Rightarrow C(y) = \int y^3 \, dy = \frac{y^4}{4} + K$$

$$\boxed{y \ln(x) + \frac{y^4}{4} = K} \quad \text{PARA } K \in \mathbb{R}$$

PEDRO SADER AZEVEDO RA: 243245

$$④ \quad \underbrace{y(y^3+1)}_{M(x,y)}\,\partial x + \underbrace{x(y^3-2)}_{N(x,y)}\,\partial y = 0$$

★ PASSO I: VERIFICAR SE A EQUAÇÃO É EXATA

$$\frac{\partial}{\partial y}M = 4y^3+1 \quad , \quad \frac{\partial}{\partial x}N = y^3-2$$

$$\frac{\partial}{\partial y}M \neq \frac{\partial}{\partial x}N$$, ENTÃO A EQUAÇÃO NÃO É EXATA

★ PASSO II: CALCULAR UM FATOR INTEGRANTE QUE TORNE A EQUAÇÃO EXATA

$$\frac{\frac{\partial}{\partial x}N - \frac{\partial}{\partial y}M}{M} = \frac{(y^3-2)-(4y^3+1)}{y(y^3+1)} = \frac{-3(y^3+1)}{y(y^3+1)} = \frac{-3}{y}$$

$$\mu = \exp\left(\int \frac{-3}{y}\,\partial y\right) = \exp(-3\ln(y)) = y^{-3}$$

★ PASSO III: VERIFICAR QUE A EQUAÇÃO É AGORA EXATA

$$\frac{\partial}{\partial y}\mu(x)M(x,y) = \frac{\partial}{\partial y}y^{-3}\,y(y^3+1) = 1-2y^{-3}$$

$$\frac{\partial}{\partial x}\mu(x)N(x,y) = \frac{\partial}{\partial x}y^{-3}\,x(y^3-2) = -2y^{-3}+1$$

★ PASSO IV: INTEGRAR M COM RELAÇÃO A x

SEJA F A FUNÇÃO SOLUÇÃO IMPLÍCITA PARA O PROBLEMA, TAL QUE:

$$F = \int M\,\partial x = \int (y+y^{-2})\,\partial x = xy + xy^{-2} + C(y)$$

★ PASSO V: DERIVAR F COM RELAÇÃO A y PARA CALCULAR C(y)

$$\frac{\partial}{\partial y}F = \frac{\partial}{\partial y}(xy + xy^{-2} + C(y)) = x - 2xy^{-3} + C'(y) + K$$

$$\frac{\partial}{\partial y}F = N(x,y) \Rightarrow x - 2xy^{-3} + C'(y)\,\cancel{K} = x - 2xy^{-3}$$

$$\Rightarrow C'(y) = 0 \Rightarrow \int C'(y)\,dy = K$$

$$\boxed{F = xy + xy^{-2} + K}$$ PARA $K \in \mathbb{R}$

PEDRO SADER AZEVEDO RA: 243245