PEDRO SADER AZEVEDO RA: 243245

Pedro Sader Azevedo

CORRIGIR A QUESTÃO 2

---

1. PARA ESCREVER A NEGAÇÃO LÓGICA DA FRASE "TODO GARENTINO A QUEM TODO ZABRILEIRO DESAGRADA DESAGRADA A ALGUM ZABRILEIRO", DEVEMOS PRIMEIRO TRANSCREVÊ-LA PARA FORMA LÓGICA

$$\forall g \in G.\ (\forall z_1 \in Z,\ D(g, z_1)) \longrightarrow (\exists z_2 \in Z,\ D(z_2, g))$$

AGORA BASTA NEGAR A PROPOSIÇÃO ACIMA E SIMPLIFICÁ-LA COM EQUIVALÊNCIAS LÓGICAS

$\neg \forall g \in G.\ (\forall z_1 \in Z,\ D(g, z_1)) \rightarrow (\exists z_2 \in Z,\ D(z_2, g))$

$\equiv \exists g \in G\ \neg[(\forall z_1 \in Z,\ D(g, z_1)) \longrightarrow (\exists z_2 \in Z,\ D(z_2, g))]$ LEI DE MORGAN P/ QUANTIFICADORES

$\equiv \exists g \in G\ \neg[\neg(\forall z_1 \in Z,\ D(g, z_1)) \vee (\exists z_2 \in Z,\ D(z_2, g))]$ DEFINIÇÃO DE IMPLICAÇÃO

$\equiv \exists g \in G\ (\forall z_1 \in Z,\ D(g, z_1)) \wedge \neg(\exists z_2 \in Z,\ D(z_2, g))$ LEI DE MORGAN E DUPLA NEGAÇÃO

$\equiv \exists g \in G\ (\forall z_1 \in Z,\ D(g, z_1)) \wedge (\forall z_2 \in Z,\ \neg D(z_2, g))$ LEI DE MORGAN P/ QUANTIFICADORES

OBSERVE QUE z_1 E z_2 PERTENCEM AO MESMO CONJUNTO E ESTÃO QUANTIFICADOS UNIVERSALMENTE, ENTÃO PODEMOS USAR UMA ÚNICA QUANTIFICAÇÃO NO INÍCIO DA PROPOSIÇÃO

$$\boxed{\exists g \in G,\ \forall z \in Z.\ (D(g, z) \wedge \neg D(z, g))}$$

② PARA PROVAR QUE UMA PROPOSIÇÃO UNIVERSAL É FALSA USAREMOS A TÉCNICA DE PROVA DE CONTRAEXEMPLO

O CONTRAEXEMPLO NECESSÁRIO PARA A PROVA FICA MAIS CLARO QUANDO NEGAMOS E SIMPLIFICAMOS A PROPOSIÇÃO UNIVERSAL QUE QUEREMOS MOSTRAR FALSA:

$\neg \forall x \in \mathbb{R} \, (x^2(x-1) < 0 \leftrightarrow 7x - 8 < -1)$

$\equiv \exists x \in \mathbb{R} \, \neg (x^2(x-1) < 0 \leftrightarrow 7x - 8 < -1)$ LEI DE MORGAN PARA QUANTIFICADORES

$\equiv \exists x \in \mathbb{R} \, \neg ((x^2(x-1) < 0 \rightarrow 7x - 8 < -1) \wedge (7x - 8 < -1 \rightarrow x^2(x-1) < 0))$ DEFINIÇÃO DE BI-IMPLICAÇÃO

$\equiv \exists x \in \mathbb{R} \, \neg ((\neg (x^2(x-1) < 0) \vee 7x - 8 < -1) \wedge (\neg (7x - 8 < -1) \vee x^2(x-1) < 0))$ DEFINIÇÃO DE IMPLICAÇÃO

$\equiv \exists x \in \mathbb{R} \, \neg (\neg (x^2(x-1) < 0) \vee 7x - 8 < -1) \vee \neg (\neg (7x - 8 < -1) \vee x^2(x-1) < 0)$ LEI DE MORGAN

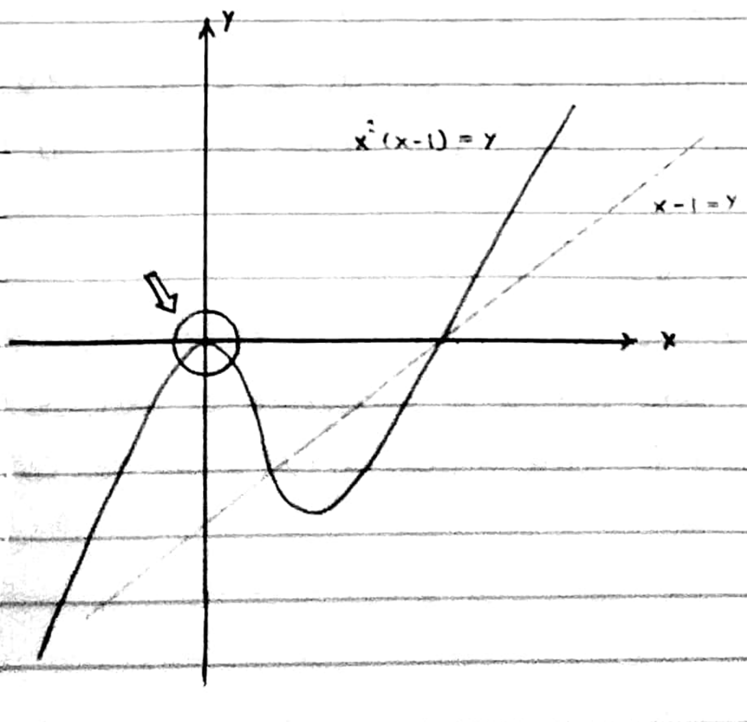
$\equiv \exists x \in \mathbb{R} \, (x^2(x-1) < 0 \wedge \neg (7x - 8 < -1) \vee (7x - 8 < -1 \wedge \neg (x^2(x-1) < 0)$ LEI DE MORGAN

$\equiv \exists x \in \mathbb{R} \, (x^2(x-1) < 0 \;\underline{\vee}\; 7x - 8 < -1)$ DEFINIÇÃO DE "OU EXCLUSIVO"

ISSO SIGNIFICA QUE O CONTRAEXEMPLO NECESSÁRIO É UM NÚMERO REAL QUE PERTENCE AO CONJUNTO-SOLUÇÃO DE APENAS UMA DAS DUAS INEQUAÇÕES INCLUÍDAS NA PROPOSIÇÃO. PARA ISSO, VALE A PENA SIMPLIFICAR A INEQUAÇÃO LINEAR:

$$7x - 8 < -1 \equiv 7x - 8 + 1 < -1 + 1 \equiv 7x - 7 < 0 \equiv x - 1 < 0 \quad (\mathrm{I})$$

$$x^2(x-1) < 0 \quad (\mathrm{II})$$



OBSERVE QUE QUANDO $x = 0$

$x - 1 < 0 \equiv 7x - 8 < -1 \equiv T$

E $x^2(x-1) < 0 \equiv F$

PORTANTO, O CONTRAEXEMPLO QUE PROCURÁVAMOS É $x = 0$

■

③ Para provar que o resto da divisão de qualquer número primo por 12 é 1 ou um número primo, convém formalizarmos essa proposição verbal em uma proposição lógica. Assim, sendo $P(t)$ um predicado que significa "t é primo" e $\%$ a operação de "resto da divisão", temos:

$$\forall x \in \mathbb{Z} \; (P(x) \longrightarrow x \% 12 = 1 \vee (\exists r \in \mathbb{Z} \; (x \% 12 = r \wedge P(r)))$$

Note que, devido à definição de implicação, a proposição acima será verdadeira sempre que $P(x) \equiv F$.

Um fato útil para nossa demonstração é que qualquer número inteiro pode ser reescrito como $12K + n$ para $n \in [0, 11]$ inteiro

$$\forall x \in \mathbb{Z}, \exists K \in \mathbb{Z}, \exists n \in \mathbb{Z} \; (n \in [0, 11] \wedge x = 12K + n)$$

Isso facilita a divisão em casos, para os diferentes valores que n pode assumir.

CASO I: $n \in \{0, 2, 4, 6, 8, 10\}$, $K \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$

Perceba que podemos reescrever n como $2m$ para $m \in \{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$

Assim, temos: $12K + n = 12K + 2m = 2(6K + m)$

Como $2(6K + m)$ é definitivamente par e diferente de 2 pois $K \neq 0$ é certo que $P(2(6K + m)) \equiv F$, então a proposição está provada para esse caso

CASO II: $n \in \{2\}$, $K \in \{0\}$

Nesse caso, $x = 0K + 2 = 2$

$P(2) \equiv T$, então precisamos verificar a consequência da implicação

$2 \% 12 = 2$ e $P(2) \equiv T$, então a proposição está provada para esse caso

CASO III : $n \in \{3, 9\}$, $K \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$

PERCEBA QUE PODEMOS REESCREVER n COMO $3w$ PARA $w \in \{1, 3\}$

ASSIM, TEMOS: $12K + n = 12K + 3w = 3(4K + w)$

COMO $3(4K + w)$ É DEFINITIVAMENTE MÚLTIPLO DE 3 E DIFERENTE DE 3 POIS $K \neq 0$, É CERTO QUE

$P(3(4K+w)) \equiv F$, ENTÃO A PROPOSICAO ESTÁ PROVADA PARA ESSE CASO

CASO IV : $n \in \{3\}$, $K \in \{0\}$

NESSE CASO, $x = 0K + 3 = 3$

$P(3) \equiv T$, ENTÃO PRECISAMOS VERIFICAR A CONSEQUÊNCIA DA IMPLICAÇÃO

$3 \% 12 = 3$ E $P(3) \equiv T$, ENTÃO A PROPOSICÃO ESTÁ PROVADA PARA ESSE CASO

CASO V : $n \in \{1\}$, $K \in \mathbb{Z}$

É POSSÍVEL QUE $P(12K + 1) \equiv T$, ENTÃO PRECISAMOS VERIFICAR A CONSEQUÊNCIA DA IMPLICAÇÃO

$12K + 1 \% 12 = 1$ E $1 = 1 \equiv T$, ENTÃO A PROPOSIÇÃO ESTÁ PROVADA PARA ESSE CASO

CASO VI : $n \in \{5\}$, $K \in \mathbb{Z}$

É POSSÍVEL QUE $P(12K+5) \equiv T$, ENTÃO PRECISAMOS VERIFICAR A CONSEQUÊNCIA DA IMPLICAÇÃO

$12K + 5 \% 12 = 5$ E $P(5) \equiv T$, ENTÃO A PROPOSICÃO ESTÁ PROVADA PARA ESSE CASO

CASO VII : $n \in \{7\}$, $K \in \mathbb{Z}$

É POSSÍVEL QUE $P(12K + 7) \equiv T$, ENTÃO PRECISAMOS VERIFICAR A CONSEQUÊNCIA DA IMPLICAÇÃO

$12K + 7 \% 12 = 7$ E $P(7) \equiv T$, ENTÃO A PRO

CASO VIII : $n \in \{11\}$, $K \in \mathbb{Z}$

É POSSÍVEL QUE $P(12K + 11 \equiv T$, ENTÃO PRECISAMOS VERIFICAR A CONSEQUÊNCIA DA IMPLICAÇÃO

$12K + 11 \% 12 = 11$ E $P(11) \equiv T$, ENTÃO A PROPOSIÇÃO ESTÁ PROVADA PARA ESSE CASO

COMO $\{0,2,4,6,8,10\} \cup \{3,9\} \cup \{1\} \cup \{5\} \cup \{7\} \cup \{11\} = [0, 11]$

E $(\mathbb{Z} \setminus \{0\}) \cup \{0\} = \mathbb{Z}$, ESGOTAMOS OS CASOS E A PROVA ESTÁ CONCLUÍDA

■