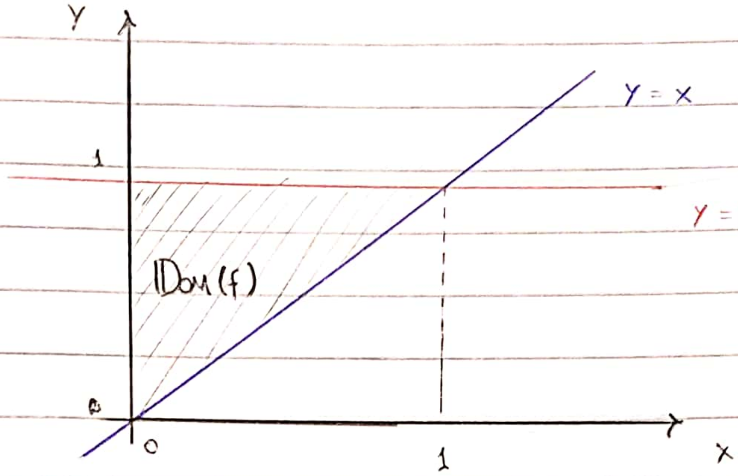
1. a) $f(x,y) = \sqrt{y-x} + \sqrt{1-y}$

A FUNÇÃO $r(t) = \sqrt{t}$ TEM $\mathbb{D}om = \mathbb{R}^+$ ENTÃO

$$\begin{cases} y - x \geqslant 0 \\ 1 - y \geqslant 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y \geqslant x \\ 1 \geqslant y \end{cases}$$



b) $$\lim_{\substack{x \to 0 \\ y \to 0}} \frac{x^3}{x^2 + y^2} = L$$

UTILIZANDO COORDENADAS POLARES TEMOS

$$\begin{cases} x = r\cos(\theta) \\ y = r\,\mathrm{sen}(\theta) \end{cases} \Rightarrow \lim_{\substack{x \to 0 \\ y \to 0}} \frac{x^3}{x^2 + y^2} = \lim_{r \to 0} \frac{r^3 \cos^3(\theta)}{r^2}$$

$$= \lim_{r \to 0} r \cos^3(\theta)$$

SABEMOS QUE $\mathbb{I}mag.(\cos^3) = [-1, 1]$, ENTÃO

PELO TEOREMA DO CONFRONTO

$$\lim_{r \to 0} (-1) r \leqslant \lim_{r \to 0} r \cos^3(\theta) \leqslant \lim_{r \to 0} 1 \cdot r$$

$$\Rightarrow \lim_{r \to 0} r \cos^3(\theta) = \boxed{0 = \lim_{\substack{x \to 0 \\ y \to 0}} \frac{x^3}{x^2 + y^2}}$$

2. USAREMOS UMA REGIÃO DO TIPO II

$$\iint_D y^2 \, dA = \underbrace{\int_{-1}^{1} \Big(\underbrace{\int_{(-y-2)}^{y} y^2 \, dx}_{I_A} \Big) dy}_{I_B}$$

$$* \quad I_A = \int_{(-y-2)}^{y} y^2 \, dx = y^2 \int_{(-y-2)}^{y} dx = y^2 \cdot x \Big|_{(-y-2)}^{y}$$

$$= y^2 \left(y - (-y-2) \right) = 2\left(y^3 + y^2\right)$$

$$* \quad I_B = \int_{-1}^{1} 2\left(y^3 + y^2\right) dy = 2 \int_{-1}^{1} \left(y^3 + y^2\right) dy$$

$$= 2 \left(\frac{y^4}{4} + \frac{y^3}{3} \right) \Big|_{-1}^{1} = \boxed{\frac{4}{3} = \iint_D y^2 \, dA}$$

3. VAMOS DEFINIR g TAL QUE $g = g(x,y) = x^2 + 2y^2 - 6$

ENTÃO, PELO MÉTODO DOS MULTIPLICADORES DE LAGRANGE, TEMOS:

$$\begin{cases} \nabla f = \lambda \nabla g \\ g = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \left(\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}\right) = \lambda \left(\frac{\partial g}{\partial x}, \frac{\partial g}{\partial y}\right) \\ x^2 + 2y^2 = 6 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} (2xy, x^2) = \lambda(2x, 4y) \\ x^2 + 2y^2 = 6 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2xy = 2x\lambda \\ x^2 = 4\lambda y \\ x^2 + 2y^2 = 6 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 2x(y - \lambda) = 0 \\ x^2 = 4\lambda y \\ x^2 + 2y^2 = 6 \end{cases}$$ $\Leftarrow$ USAREMOS ESSA EQUAÇÃO PARA DIVIDIR O SISTEMA EM CASOS.

CASO I: $x = 0$

$$\begin{cases} 4\lambda y = 0 \\ 0^2 + 2y^2 = 6 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \lambda = 0 \\ y = +\sqrt{3} \text{ ou } -\sqrt{3} \end{cases}$$

CASO II: $y = \lambda$

$$\begin{cases} x^2 = 4y^2 \\ x^2 + 2y^2 = 6 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x^2 = 4y^2 \\ 4y^2 + 2y^2 = 6 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = +2 \text{ ou } -2 \\ y = +1 \text{ ou } -1 \end{cases}$$

OS CANDIDATOS A PONTO DE MÁXIMO E DE MÍNIMO SÃO

$$\underbrace{(0, \sqrt{3})}_{a}, \underbrace{(0, -\sqrt{3})}_{b}, \underbrace{(2, 1)}_{c}, \underbrace{(-2, 1)}_{d}, \underbrace{(2, -1)}_{e}, \underbrace{(-2, -1)}_{p}$$

PERCEBA QUE EM $f(x,y) = x^2 y$ O TERMO x ESTÁ AO QUADRADO ENTÃO:

$f(c) = f(d) = 4$

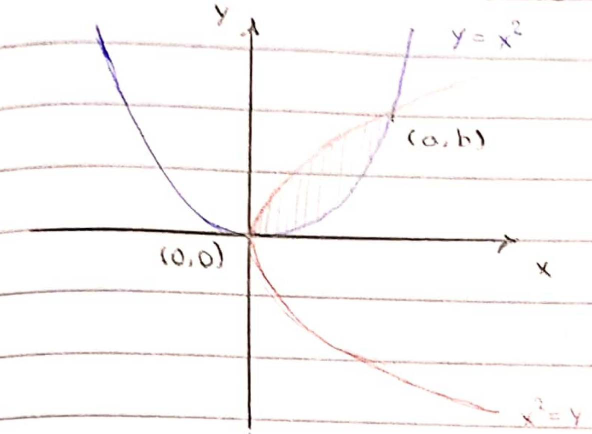
$f(e) = f(p) = -4$

$f(a) = 0$

$f(b) = 0$

$$\boxed{\begin{array}{l} 4 = f_{MÁX} = f(2,1) = f(-2,1) \\ -4 = f_{MÍN} = f(2,-1) = f(-2,-1) \end{array}}$$

4. ESBOÇO DA REGIÃO DE INTEGRAÇÃO :



PARA ENCONTRAR O PONTO (a, b) RESOLVEMOS $y = x^2 \cap x = y^2$:

$$\begin{cases} y = x^2 \\ x^2 = y \end{cases} \Rightarrow \quad x = 0 \text{ E } y = 0 \quad \text{OU} \quad x = 1 \text{ E } y = 1$$

$$\boxed{\begin{array}{c} 0 \leqslant x \leqslant 1 \\ x^2 \leqslant y \leqslant \sqrt{x} \end{array}}$$

USANDO UMA REGIÃO DO TIPO I TEMOS:

$$\iint_D (x^2 + y^2)\, dA = \underbrace{\int_0^1 \Big(\underbrace{\int_{x^2}^{\sqrt{x}} (x^2 + y^2)\, dy}_{I_A} \Big)\, dx}_{I_B}$$

$$I_A = \int_{x^2}^{\sqrt{x}} (x^2 + y^2)\, dy = \int_{x^2}^{\sqrt{x}} x^2\, dy + \int_{x^2}^{\sqrt{x}} y^2\, dy$$

$$= x^2 \cdot (y)\Big|_{x^2}^{\sqrt{x}} + \left(\frac{y^3}{3}\right)\Big|_{x^2}^{\sqrt{x}} =$$

$$x^2 (\sqrt{x} - x^2) + \left(\frac{\sqrt{x^3}}{3} - \frac{x^6}{3} \right) =$$

$$x^{2,5} - x^4 + \frac{x^{1,5}}{3} - \frac{x^6}{3}$$

$$I_B = \int_0^1 \left(x^{2,5} - x^4 + \frac{x^{1,5}}{3} - \frac{x^6}{3} \right)$$

$$= \left(\frac{x^{3,5}}{3,5} - \frac{x^5}{5} + \frac{x^{2,5}}{7,5} - \frac{x^7}{21} \right) \Bigg|_0^1$$

$$= \frac{1}{3,5} - \frac{1}{5} + \frac{1}{7,5} - \frac{1}{21} = \boxed{\frac{18}{105} = \iint_D (x^2 + y^2)\, dA}$$

5. ~~SABEMOS~~ PARA A EQUAÇÃO $xyz^2 = 6$ CONVÉM DEFINIR $F(x,y,z)$ TAL QUE

$$F(x,y,z) = xyz^2 - 6$$

SABEMOS QUE O GRADIENTE DA FUNÇÃO ACIMA TERÁ DIREÇÃO ORTOGONAL A F EM QUALQUER PONTO (a,b,c) DADO. POR ISSO USAREMOS ∇F COMO VETOR ~~DIRECIONAL DA RETA E COMO~~ ORTOGONAL AO PLANO TANGENTE:

$$\nabla F = \left(\frac{\partial F}{\partial x}, \frac{\partial F}{\partial y}, \frac{\partial F}{\partial z} \right) = (yz^2, xz^2, xy)$$

$$\Rightarrow \nabla F(3,2,1) = (2,3,6)$$

PARA DETERMINAR O COEF. INDEPENDENTE DA EQUAÇÃO DO PLANO, BASTA GARANTIR QUE $(3,2,1) \in \pi$:

$$\pi: 2x + 3y + 6z = k$$

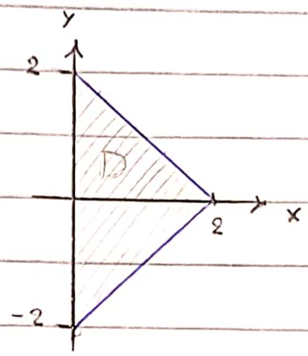
$$\Rightarrow 2 \cdot 3 + 2 \cdot 3 + 6 = k \Rightarrow k = 18$$

$$\boxed{\pi: 2x + 3y + 6z = 18}$$

PARA A RETA, USAMOS O MESMO VETOR COMO DIREÇÃO E O PONTO 6 COMO COEFICIENTE ~~INDEPE~~ INDEPENDENTE

$$\boxed{r: (2,3,6)t + 6 = 0, \quad t \in \mathbb{R}}$$

6. ESBOÇO DO CONJUNTO D



PERCEBA QUE D É SIMÉTRICA EM RELAÇÃO AO EIXO X E QUE $f(x,y) = x^2 + y^2 - 2y$ É UMA FUNÇÃO PAR PARA Y OU SEJA $f(x,y) = f(x,-y)$

POR ESSE MOTIVO, PODEMOS CONSIDERAR $Y \geq 0$ NOS NOSSOS CÁLCULOS DE PONTOS MÁXIMOS E MÍNIMOS.

PARTE 1: TESTE DA PRIMEIRA DERIVADA

$$\begin{cases} f_x = 0 \\ f_y = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2x = 0 \\ 2y - 2 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y = 1 \end{cases}$$

$$(0,1) \in D \checkmark$$

$$f(0,1) = 0 + 1^2 - 2 \cdot 1 = -1$$

PARTE 2: MULTIPLICADORES DE LAGRANGE

COMO A REGIÃO É FECHADA, DEVEMOS TOMAR SUAS BORDAS POR RESTRIÇÕES A SEREM CONSIDERADAS.

PARA A RETA $y = 2 - x$ TEMOS $g(x,y) = x + y - 2$

$$\begin{cases} \nabla f = \lambda \nabla g \\ g = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} (2x, 2y-2) = \lambda(1,1) \\ y = 2 - x \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x = \frac{1}{2} \\ y = \frac{3}{2} \end{cases} \qquad \left(\frac{1}{2}, \frac{3}{2}\right) \in D \checkmark \qquad f\left(\frac{1}{2}, \frac{3}{2}\right) = 1$$

NO DOMÍNIO D

$$\boxed{\begin{array}{l} f_{mín} = -1 \\ f_{máx} = 1 \end{array}} \quad \begin{array}{l} \text{EM } (0;1) \text{ OU } (0;-1) \\ \text{EM } \left(\frac{1}{2};\frac{3}{2}\right) \text{ OU } \left(\frac{1}{2};-\frac{3}{2}\right) \end{array}$$