GABARITO PROVA 01- MA327- 20Abril2021

1- $E=[\{(1,0,1,0),(0,1,0,0)\}]\subset\mathbb{R}^4=\{(x_1,..,x_4);x_k\in\mathbb{R}\}$ e $F=[\{(1,1,1,0),(0,0,0,1)\}]\subset\mathbb{R}^4$.
Assinale a afirmativa correta:

A: $E\oplus F=\mathbb{R}^4$, ***B***: $E\subset F$, ***C***: $F\subset E$, ***D***: $E\cap F=[(1,1,01)]$, ***E: N****enhuma das* ***O****pções* ***A****nteriores é Correta,i.e.,* ***Nenhuma Opção Anterior-NOA***

Resp: A

Comentário: Os sub-espaços gerados $E=[\{a=(1,0,1,0),b=(0,1,0,0)\}]$ e $F=[\{c=(1,1,1,0),d=(0,0,0,1)\}$ estão obviamente imersos em $\mathbb{R}^4$. Para verificar **A**) basta mostrar que todos os vetores $v\in\mathbb{R}^4$ podem ser gerados na forma $v=u+w$ de uma **única maneira** (soma direta)com $u\in E$ e $w\in F$. Para isto o sistema de 4 equações a 4 incognitas $x_1a+x_2b+x_3c+x_4d=v$ deve ter uma única solução para qualquer $v\in\mathbb{R}^4$ o que pode ser verificado pelo Método de Gauss.

2- $E=[\{(1,0,1,0,0),(0,1,0,0,0)\}]\subset\mathbb{R}^5=\{(x_1,\dots,5);x_k\in\mathbb{R}\}$ e $F=[\{(1,1,0,0,0),(0,0,1,00)\}]\subset\mathbb{R}^5$.

Assinale a afirmativa Correta:

A: $E\cap F=[(-1,0,1,0,1)]$, ***B***: $E\oplus F=\mathbb{R}^5$, ***C***: $E+F=E$ ***D***: $E+F=F$ ***E***: ***NOA***

Resposta: E

$$E=[\{a=(1,0,1,0,0),b=(0,1,0,0,0)\}],F=[\{c=(1,1,0,0,0),d=(0,0,1,00)\}]$$

Comentário: Observe que os 4 vetores apresentados na questão tem coordenadas nulas nas duas ultimas posições e portanto não podem gerar todo espaço $\mathbb{R}^5$, logo, a opção A) é falsa. As opções C&D) são falsas porque E e F estão contidos em $E+F$, **mas não** são todo ele: pois $E+F=\{(A,B,C,0,0),A,B,C\in\mathbb{R}\}=[a,b,d]$, enquanto que $E=\{h=xa+yb=(x,y,x,0,0)\}$ e $xa+yb=(x,y,x,0,0)=(A,B,C,0,0)=h$ não tem solução sempre, assim como $xc+yd=(x,x,y,0,0)=h$ também não tem solução sempre.

3-Dada a Matriz $A=\begin{pmatrix}1&0&1\\-1&0&1\\0&1&1\end{pmatrix}$ cujas colunas são os vetores $A^k=\begin{pmatrix}A_{1k}\\A_{2k}\\A_{3k}\end{pmatrix}\in\mathbb{R}^3$. Assinale a afirmativa correta:

A- $[\{A^1,A^2,A^3\}]=\mathbb{R}^3$ ***, B***-$[\{A^1,A^2,A^3\}]=[\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}-1\\0\\1\end{pmatrix}]$, ***C***-$[\{A^1,A^2,A^3\}]=[\{A^1,A^2\}]$,

D-$[A^2,A^3]=[A^3]$ ***E-NOA***

Resposta: A

Comentario:É fácil ver que dado qualquer vetor $u=\begin{pmatrix}a\\b\\c\end{pmatrix}\in\mathbb{R}^3$então o sistema de três equações a três incógnitas

$xA^1+yA^2+zA^3=\begin{matrix}x+z=a\\-x+z=b\\y+z=c\end{matrix}$ tem solução única e, portanto os vetores A^1,A^2,A^3 geram o espaço $\mathbb{R}^3$, o que justifica a opção A.

A opção B) é falsa porque os vetores $A=\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix},B=\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix},C=\begin{pmatrix}-1\\0\\1\end{pmatrix}$ não geram o espaço$\mathbb{R}^3$, já que o sistema $xA + yB + zC = u$ nem sempre tem solução. A resposta C) também é falsa, pois $xA^1 + yA^2 = Y$ não tem solução para todos os $Y \in \mathbb{R}^3$(por exemplo $Y = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$) ou seja, os dois vetores A^1, A^2 não geram o espaço $\mathbb{R}^3$.

4- $E = \mathbb{R}^3 = \{(x_1, x_2, x_3); x_k \in \mathbb{R}\}$ e $H = [(1,1,1)]$ e $E/_H = Q$ é o Espaço Quociente. Assinale a afirmativa correta:

A: Q é formado por um Plano, ***B:*** Q é formado por uma reta, ***C:*** $Q = \{0\}$, ***D:*** Q é formado por pontos de $\mathbb{R}^3$, ***E:*** **NOA**

Resposta: A

Comentário: O Espaço Vetorial $[(1,1,1)]$ é uma reta e cada uma das suas paralelas pode ser considerada como uma classe de equivalencia de $E/_H = Q$. É estas retas são biunivocamente determinadas pelos pontos de sua interseção com algum plano fixado π que passe pela origem e seja transversal a $(1,1,1)$, ou seja, o conjunto de classes de equivalência pode ser identificado com um plano.

5- $E = [\{(1,1), (1,0)\}]$ é um sub-espaço vetorial do Espaço Vetorial $\mathbb{C}^2 = \{(z_1, z_2); z_k \in \mathbb{C}\}$com escalares **reais.** Assinale a afirmativa correta:

A: $E = \mathbb{C}^2$, ***B:*** $E = \mathbb{C}$, ***C:*** $E = \mathbb{R}^2$, ***D:*** $E = \mathbb{C}/_{\mathbb{R}}$, ***E:*** *E não é um sub-espaço vetorial ,* ***D: NOA***

Resposta: C

Comentário: Os vetores de $\mathbb{C}^2$ (com escalares **reais**) gerados por combinações lineares

$v = xa + yb = (x + y, x)$; $a = (1,1), b = (1,0), x, y \in \mathbb{R}$, obviamente, produzem somente vetores do $\mathbb{R}^2$, e todos eles.

6- $K_1 \subset K_2$, $K_1 \neq K_2$, são dois subconjuntos não vazios quaisquer de um Espaço Vetorial E . Assinale a ***conclusão*** correta:

A: $[K_1] = [K_2]$, ***B:*** $[K_1] \neq [K_2]$, ***C:*** $[K_1] \cap [K_2] = [K_1]$, ***D:*** $[K_1] \oplus [K_2] = E$, ***E: NOA***

Resposta: C

Comentário: Se $K_1 \subset K_2$ então obviamente $[K_1] \subset [K_2]$ e, portanto $[K_1] \cap [K_2] = [K_1]$. Mas, por exemplo se $K_1 = \{\binom{1}{0}\}$ e $K_2 = \{\binom{1}{0}, \binom{0}{1}\}$ temos $K_1 \subset K_2$, $K_1 \neq K_2$, mas $[K_1] \neq [K_2] = \mathbb{R}^2$, o que disprova a conclusão $[K_1] = [K_2]$.Por outro lado, $K_1 = \{\binom{1}{0}, \binom{0}{1}\} \subset K_2 = \{\binom{1}{0}, \binom{0}{1}, \binom{1}{1}\}$ mas : $[K_1] = [K_2]$ o que disprova a conclusão B). Se $K_1 = \{\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}\} \subset K_2 = \{\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}\}$, mas obviamente $[K_1] \oplus [K_2] \neq E = \mathbb{R}^3$, o que disprova a conclusão D).

7- $H = [\{l_n(x)\}_{n \geq 0}]$, $l_0(x) = 1$, $l_n(x) = \prod_{k=0}^{n-1}(x - k), n > 0$. (Exemplo: $l_3(x) = x(x-1)(x-2)$. $P(\mathbb{R})$= *"Espaço de todos os polinômios de Coeficientes reais"*. $P_n(\mathbb{R})$=*"Espaço dos polinômios de* $P(\mathbb{R})$ com *grau menor ou igual a n"*.
Assinale a afirmativa correta:

A: $H = P(\mathbb{R})$, ***B:*** $H \neq P(\mathbb{R})$, ***C:*** H =*Espaço dos Polinômios com raízes em* $\mathbb{N}$. ***D:*** H =*Espaço dos Polinômios cujas derivadas se anulam em* $\mathbb{N}$. ***E:*** H = *Espaço dos Polinômios com raízes reais,* ***D: NOA.***

Resposta: A

Comentário: Um polinômio de grau n é determinado pelos seus valores em $x = 0, x = 1, \dots . x = n$. (Teorema fundamental da Álgebra: *Todo polinomio de grau n é determinado por seus valores em n+1 pontos distintos.*) . Escrevendo tentativamente

$p(x) = \sum_{k=0}^{n} c_k l_k(x) = c_0 + c_1 x + c_2\, x(x-1) + c_3 x(x-1)(x-2) + \cdots$, observamos que $p(x)$ é de fato um polinômio de grau *n* e tomando $p(0) = c_0$, $p(1) = c_0 + c_1$, $p(2) = c_0 + 2c_1 + 2c_2$ e etc....$p(n)$ calculamos sucessivamente os coeficientes c_k . Portanto $H = P(\mathbb{R})$ e as outras repostas são falsas.

8- $H_n = [\{l_k(x)\}_{0 \le k \le n}]$, $l_0(x) = 1$, $l_k(x) = \prod_{j=0}^{k-1}(x - j)\ k > 0.$ (Exemplo: $l_3(x) = x(x-1)(x-2)$.

$P_n(\mathbb{R})$="*Espaço dos polinômios de* $P(\mathbb{R})$ com *grau menor ou igual a n".* $p(x) = 1 + x^4$.

Assinale a afirmativa correta:

A: $p(x) = l_4(x)$, ***B:*** $p = l_0 + 2l_1 + 17l_2 + 82l_3 + 257l_4$, ***C:*** $p = l_0 + 2l_1 + 16l_2 + 81l_3 + 256l_4 + 512l_5$, ***D:*** $p \in H_3$, ***E: NOA***

Resposta: B

Comentário: Utilizando o mesmo argumento utilizado na questão 7) e calculando os valores de $p(x) = 1 + x^4$ nos pontos $x = 0, x = 1, x = 2, x = 3, x = 4$ podemos escrever qualquer polinômio de grau 4, tal como $p(x) = 1 + x^4$, assim calcular

$p(x) = c_0 + c_1 x + c_2 x(x-1) + c_3 x(x-1)(x-2) + c_4 x(x-1)(x-2)(x-3)$ e assim calcular os coeficientes.

9- $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$. $R(A) = \{Y \in \mathbb{R}^2; \exists X \in \mathbb{R}^2, AX = Y\}$, $N(A) = \{X \in \mathbb{R}^2\,; AX = 0\}$.

Assinale a afirmativa correta:

A: $R(A) = [\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}]$, ***B:*** $N(A) = [\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}]$, ***C:*** $R(A) = [\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}]$, ***D:*** $N(A) = \mathbb{R}^2$, ***E: NOA***

Resp: C

Comentario: Analisando as combinações lineares $xa + yb = Y = A\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = AX$ dos vetores colunas $a = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ e $b = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ da Matrix dada concluímos que pode ser resolvido para qualquer $Y \in \mathbb{R}^2$ de onde se conclui que $R(A) = \mathbb{R}^2$ que é o espaço gerado pelos vetores $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ da resposta **C**. (Para verificar isto, basta mostrar que qualquer $Y \in \mathbb{R}^2$ pode ser escrito como, por exemplo, uma combinação linear de $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$, ou de $\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, ou de $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$). Analisando a mesma equação para $Y = 0$ conclui-se que necessariamente $X = 0$ e, portanto B e D são falsas.

10- $A = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} \in M_{31}(\mathbb{R})$. *Assinale afirmação **incorreta:***

A: $N(A) = \{X \in M_{15}(\mathbb{R});\ AX = 0\}$ *é um subespaço vetorial de* M_{15} , ***B:*** $R(A) = \{Y \in M_{35}; \exists X \in M_{15}(\mathbb{R})\ AX = Y; \}$ *é um sub-espaço vetorial de* M_{35} ***C:*** $\{0\} \in R(A)$, ***D:*** $\{0\} \in N(A)$, ***E:*** $R(A) = M_{35}(\mathbb{R})$

Resp: E

Comentario: A-B-C-D são obviamente corretas.

11-*Assinale a afirmação **incorreta** a respeito do conjunto das matrizes* $A \in M_{mn}(\mathbb{R})$=*"Matrizes reais com* m *linhas e* n *colunas":*

A: $M_{mn}(\mathbb{R})$ pode ser biunivocamente identificado com o Espaço Produto $(\mathbb{R}^m)^n$, ***B:*** $M_{mn}(\mathbb{R})$ *pode ser biunivocamente identificado com* $F = \{f: \{1,..,m\} \times \{1,..,n\} \to \mathbb{R}\}$ ***C:*** $M_{mn}(\mathbb{R})$ *pode ser* *biunivocamente identificado com* $F = \{f: \{1, .., m\} \to \mathbb{R}^n\}$, ***D:*** $M_{mn}(\mathbb{R})$ *é um espaço vetorial mas cuja soma não é comutativa,* ***E:*** $M_{mn}(\mathbb{R})$ pode ser biunivocamente identificada com o Espaço Produto $(\mathbb{R}^n)^m$.

Resp:D

Comentário: A afirmação D é inconsistente e, portanto incorreta, pois a soma na estrutura de espaço vetorial é comutativa e $M_{mn}(\mathbb{R})$ é um espaço vetorial.

12-*"Um Sub-espaço vetorial do Espaço vetorial real* $\mathbb{R}^n$ *é formado por um subconjunto não vazio* $F \subset E$ *que é fechado para a soma (i.e., se* $u, v \in F$ *então* $u + v \in F$*)". Esta afirmação está* ***incorreta*** *porque*

A: *Não está incluído o axioma "* $\{0\} \in F$*",* ***B:*** *Não está incluído o axioma "*$1u = u$", ***C:****Não está incluído o axioma "Se* $u \in F$ *então* $au \in F$ *para qualquer* $a \in \mathbb{R}$ *",* ***D:*** *Não está incluída o axioma "Para todo* $u \in F$ *existe um elemento* w ; $w + u = 0$*",* ***E:*** *Qualquer subconjunto não vazio de* $\mathbb{R}^n$*é sempre um sub-espaço vetorial dele.*

Resp: C

Comentario: Basta consultar a definição de subespaço vetorial e verificar que a incorreção é por falta do axioma D.

13-*"Os Axiomas de Espaço Vetorial são considerados* ***Consistentes".*** Assinale uma justificativa ***correta*** para esta afirmação

A: *Foram testados exaustivamente e nunca decepcionaram a Matemática,* ***B:*** *Independem de qualquer coisa porque são criações abstratas,* ***C:*** *Os* $\mathbb{R}^n$ *cumprem fielmente todos os Axiomas e são considerados consistentes,* ***D:****Porque com estes axiomas é possível provar todas as propriedades interessantes,* ***E: NOA***

Resposta: C

Comentario: A consistência dos Axiomas somente pode ser provada verificando se há um modelo "estabelecido"/aceito como consistente que satisfaz aos axiomas e, portanto, os livra da possibilidade de se provar a veracidade de uma afirmação e também a falsidade dela a partir deles.

14-*Assinale a afirmação considerada* ***menos plausível*** *considerando a discussão do tema nas Notas de Aula*

A: *A Geometria Euclideana originou-se da percepção ecológica do espaço proveniente da observação de trajetórias luminosas em meios homogêneos,* ***B:*** *A Geometria Euclideana Vetorial é baseada no conceito de Deslocamento orientado entre pontos do espaço,* ***C:*** *A origem da Geometria Euclideana é totalmente abstrata e não tem nada a ver com a percepção ecológica do espaço, pois qualquer deficiente visual pode entendê-la.* ***D:*** *A estrutura algébrica de Espaços Vetoriais teve a sua motivação proveniente da Geometria Vetorial Euclideana desenvolvida por H.Grassmann,G.Peano e outros no século XIX..* ***E: NOA***

Resposta: C

Comentario: É claro que a Geom Euclideana tem tudo a ver com a nossa percepção ecológica de espaço e é baseada em deslocamentos orientados do espaço que foram axiomatizados por Peano com base nos trabalhos de Grassmann.

15-Um Modelo de Fibonacci é descrito por uma função de variável inteira e valores complexos $F:\mathbb{N}\to\mathbb{C}$ definida pela recorrência, $F(k+2)=F(k+1)+F(k); k\in\mathbb{N}$ e cujos valores iniciais são $F(1)=1, F(2)=2$. Assinale a afirmação ***incorreta***

A:$F(3)=3$, ***B:*** $F(4)=5\ \ e\ \ F(5)=8$ ***C:*** $F(7)=21\ \ e\ \ F(6)=13$ *,* ***E:*** $F(67)=5999\ \ e\ \ F(68)=6013$ ***D:*** $\lim_{k\to\infty} F(k)=\infty$.

Resp: E

Comentário: Calculando recursivamente constatamos a veracidade de A): ($F(3)=F(2)+F(1)=2+1=3$ e daí de B): $F(4)=F(3)+F(2)=2+3=5$ e $F(5)=F(4)+F(3)=8$ e analogamente C).Daí concluímos que para $k>2$, $F(k)\geq 2$,e, portanto $F(k)>(k-1)2$ de onde D) está correta. A afirmação E) é incorreta porque para $k>7$, $F(k)>F(7)=21$,e, portanto $F(68)=F(67)+F(66)>F(67)+21$.

16- $E=\{\varphi:\mathbb{N}\to\mathbb{C}\}$=Espaço Vetorial usual das funções com escalares **complexos** $\mathbb{C}$. $F\subset E$ subconjunto *das funções de E que satisfazem a Recorrencia de Fibonacci* , $f(k+2)=f(k+1)+f(k); k\in\mathbb{N}$. Assinale a afirmação correta sobre F :

A: . *Sub-espaço Vetorial de E*, ***B:*** *Sub-espaço vetorial de funções com valores reais* ***C:*** *Não é um sub-Espaço Vetorial de E,* ***D:*** *Subespaço das funções com valores inteiros,* ***E: NOA.***

Resp: A

Comentario: Verificando que se duas funções de $f,g\in E$ que satisfazem a Recorrencia de Fibonacci então $f+\lambda g$=h também satisfaz a esta mesma recorrência para qualquer $\lambda\in\mathbb{C}$ conclui-se que esta classe de funções constituem um sub-espaço vetorial de E. (Resp. A). Os valores destas funções dependem dos seus valores iniciais ($F(0) e\ F(1)$) e, portanto, não são necessariamente só inteiros ou só reais.

17- O Axioma de Espaço Vetorial que se refere à propriedade associativa da Soma ($u+v)+w=u+(v+w$) está diretamente representado no Modelo Geométrico Euclideano (*Deslocamentos no Plano*) à seguinte observação:

A: *Sobre os "Atalhos" no percurso de deslocamentos sucessivos entre 4 pontos,* ***B:*** *Sobre a Área de paralelogramos compostos* ***C:*** *Regra do Paralelogramo ,* ***D:*** *Semelhança de Triângulos Retângulos* ***E:NOA***

Resp: A

Comentario:Basta fazer um gráfico e verificar a resposta A).

18-O número natural que em notação decimal é representado por 353 pode ser representado na notação binária com o símbolo:

A:100011 , ***B:*** *101100001,* ***C:*** 000111 *,* ***D:*** *11100001* ***E:NOA***

Resp:B

Comentario: O símbolo binário *N=101100001 (opção B) tem nove dígitos e, portanto,*

$N = 1 \cdot 2^8 + 0 \cdot 2^7 + 1 \cdot 2^6 + 1 \cdot 2^5 + 0 \cdot 2^4 + 0 \cdot 2^3 + 0 \cdot 2^2 + 0 \cdot 2^1 + 1 \cdot 2^0 = 256 + 64 + 32 + 1 = 353$

19-O Axioma de Espaço Vetorial que se refere à propriedade distributiva da Multiplicação por Escalar ($\lambda(u+v) = \lambda u + \lambda v$) corresponde no Modelo Geométrico Euclideano (*Deslocamentos no Plano*) ao seguinte resultado desta teoria:

A:*Teorema de Pitágoras* , ***B:*** *Fórmula para Área de paralelogramo* , ***C:*** *Regra do Paralelogramo* , ***D:*** *Semelhança de Triângulos* ***E:NOA***

Resp: D

Comentario: O fundamento desta propriedade é a semelhança de triângulos facilmente verificada com qualquer fator real $\lambda \geq 0$ (e com negativos convencionando que $-1u = -u$). Também pode ser deduzida a partir da sua verificação para apenas dois fatores, 2 e $\frac{1}{2}$, de onde se deduz que vale para qualquer numero real na forma binária (todos eles).

20-Grupo de 3 importantes Matemáticos cujos trabalhos se relacionam com a Álgebra Linear e estiveram simultaneamente vivos em algum momento. Assinale a resposta correta

A:*Liu Hui* **,** *Arquimedes, Ahmés* ***B:*** *Newton,Euler,Volterra,* ***C:*** *Gauss, Grassmann, Peano* ***D:*** *von Neumann, Banach,Hilbert* ***E:NOA***

Resp: D

Comentario:Embora todos os matemáticos citados tem algo a ver com Algebra Linear vias sistemas de equações lineares, somente os três últimos foram contemporâneos nas decadas de 1920-1940.

21-*Sobre a* ***variante*** do Problema matemático de Arquimedes e a coroa do rei Hieron que requer a determinação das massas de ouro, de prata e de estanho. Assinale a afirmação mais plausível sobre o tema:

A: *Não se resolve com Álgebra Linear* mesmo porque Arquimedes não cursou MA327 , ***B:*** *Se resolve com a determinação experimental do vetor* $\begin{pmatrix} a \\ b \\ b \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^3$,*a=Peso da coroa, b=Volume da coroa, c=Peso do ar,* ***C:*** *Se refere ao calculo do vetor* $\begin{pmatrix} a \\ b \\ b \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$,*a=Peso da coroa, b=Volume da coroa, c=Constante da gravidade* , ***D:*** *É impossível de ser resolvido com apenas dois testes lineares independentes* ***E: NOA***

Resposta: D

Comentario: Embora, ao que conste no DAC, nenhum Arquimedes grego do século IIIAC se matriculou em alguma turma de MA327 desde 1967DC, o problema se resolve sim com Algebra Linear e portanto esta afirmação não é plausível. A afirmação D) é correta porque um sistema de duas equações lineares para três incógnitas não pode apresentar solução única.

22- O Axioma de Espaço Vetorial que se refere à propriedade comutativa da Soma é representada no Modelo Geométrico Euclideano (*Deslocamentos Planos*) à seguinte observação:

A:*Teorema de Pitágoras* , ***B:*** *Fórmula para Área de paralelogramo* , ***C:*** *Regra do Paralelogramo* , ***D:*** *Semelhança de Triângulos* ***E:NOA***

Resp: C

Comentario: Basta fazer o gráfico e verificar que os dois lados do paralelogramo (que são as duas alternativas para a ordem da soma) se encontram no mesmo ponto.

23-Considere três vetores v_1, v_2, v_3 não nulos e não colineares dois a dois no Espaço Euclideano plano E e o conjunto gerado pelas combinações lineares deles da seguinte forma: $K = \{\sum_{k=1}^{3} c_k v_k \ ; 0 \leq c_k \leq 1\}$. Assinale a afirmação correta:

A: K é um sub-espaço vetorial de E , ***B:*** K é um segmento de reta, ***C:*** K é um polígono , ***D:*** K é todo o espaço E, ***E: NOA***

Resp: C

Comentário: A) é falsa porque os múltiplos "grandes" ($c_k > 1$)dos vetores de K não fazem parte do conjunto K e, portanto, não podem constituir um EV. B) é falsa porque se não são colineares os próprios vetores (que podem ser escritos nesta forma) não estão em uma reta. D) é falsa pelo mesmo motivo de A).Fazendo-se um gráfico da soma $v_1 + v_2 + v_3$ de varias maneiras $\{v_1 + (v_2 + v_3)$ e $(v_1 + v_2) + v_3$ e etc.$\}$ obtem-se o perímetro de um polígono e verifica-se que os pontos interiores (por semelhança de triângulos) são os pontos interiores do mesmo.

24- $K = \{x \in \mathbb{R}^2 \ ; ({x_1}^2 - {x_2}^2) = 0\}$. Assinale a afirmação correta sobre K:

A: *Subespaço vetorial de* $\mathbb{R}^2$, ***B:****Soma direta de dois Subespaços vetoriais de* $\mathbb{R}^2$, ***C:****Curva quadrática* ***D:****União de dois Subespaços de* $\mathbb{R}^2$, ***E: NOA***

RESPOSTA: D

Comentário: Os pontos que satisfazem esta equação são aqueles que satisfazem uma das duas equações (ou as duas) : $x_1 - x_2 = 0$,ou, $x_1 + x_2 = 0$ que representam duas retas bissetrizes (subespaços de $\mathbb{R}^2$) que se interceptam apenas na origem. Logo, K é a união destes dois subespaços.

25- $E = C^{\infty}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$=$\{$*Funções Reais com derivadas continuas de todas as ordens*$\}$, $K = \{u \in E \ ; u$ é $\textit{solução da equação } \mathcal{L}u = 0\}$. Assinale o caso em que K ***não é*** um sub-espaço vetorial de E

A: $\mathcal{L}u = x\frac{du}{dx}$, ***B:*** $\mathcal{L}u = u(x+5) - 3u(x)$, ***C:*** $\mathcal{L}u = \int_{-1}^{1} u(x)dx$, ***D:*** $\mathcal{L}u = \int_{-1}^{1} e^x x \frac{du}{dx} dx$

E:$\mathcal{L}u = \int_{-1}^{1} (x^2 + u(x))dx$

RESPOSTA: ***E***

Comentário: As combinações lineares $h = u + \lambda v$ de duas funções $u \ e \ v$ que satisfazem simultaneamente uma das condições A),B),C).D) também satisfazem a mesma condição, basta verificar diretamente. Entretanto, nem a função nula satisfaz à condição E) , $\mathcal{L}u = \int_{-1}^{1}(x^2 + u(x))dx = \frac{2}{3} + \int_{-1}^{1}(u(x))dx = 0$, e, portanto, estas funções não formam um espaço vetorial.

26-Sobre o Axioma "$1u = u$" da Axiomática de Espaços Vetoriais. Assinale a afirmação **correta**:

A-*É tão óbvio que não precisa ser incluído e nem mesmo discutido*, ***B***-*É válido em* $\mathbb{R}^n$ *e, portanto, é redundante acrescentá-lo ao Sistema de Axiomas*, ***C*** - *Pode ser demonstrado a partir dos outros axiomas, mas dá muito trabalho e, portanto, é melhor estabelecê-lo de saída*, ***D***- *A Estrutura definida em* $\mathbb{R}^2$, *com a soma usual (coordenada a coordenada) e a multiplicação por escalar "*$\lambda(x, y) = (\lambda x, y)$ *satisfaz a todos os axiomas exceto o referido e, portanto, mostra a sua independência*, ***E***-*O exemplo anterior (D) é inexistente e, portanto, não tem a nada a ver com a questão*.

Resposta: *D*

Comentario: O Modelo bem definido em D) demonostra a possibilidade de que todos os outros axiomas de EV sejam satisfeitos menos o citado axioma. Isto mostra que jamais se poderá provar a sua validade a partir dos outros, pois, como ficaria este exemplo?