UNICAMP -

Wilson Castro Ferreira Jr.-II Sem 2021

Notas de AULA: *ÁLGEBRA LINEAR-*

CAPÍTULO II

ESPAÇOS VETORIAIS: *Construção e Modelos*

I-INTRODUÇÃO

Terminamos o Capítulo anterior com a apresentação da Estrutura Axiomática de Espaços Vetoriais depois de argumentarmos com diversos exemplos a origem histórica de suas idéias fundamentais bem como a conveniência da sua axiomatização como Método eficaz de sintetizar, ainda que abstratamente, uma abordagem unificadora de todos os seus diversos Modelos "concretos". Os principais Modelos de Espaços Vetoriais são, naturalmente, aqueles representados pelos Espaços Euclideanos $\mathbb{R}^n$ (especialmente $n = 2, n = 3$), mas não menos importantes são também as diversas classes de Espaços Funcionais que estabelecem Interfaces com outras importantes áreas da Matemática e de outras Ciências.

O presente capítulo introduzirá alguns conceitos fundamentais sobre Espaços Vetoriais, a linguagem básica apropriada para expressá-los e, principalmente, algumas técnicas para ***construir*** ou ***detectar*** a existência de Espaços Vetoriais em estruturas já conhecidas, permitindo desta forma a aplicação reiterada e ampliada da Teoria.

As Estruturas de Espaço Vetorial constituem o "***cenário***" onde ocorrerão as "***ações***" da Álgebra Linear representadas por Funções (Transfomações/Operadores) Lineares, introduzidas neste capítulo, mas tratadas especificamente no Capítulo III.

I-AXIOMÁTICA E MODELOS "CONCRETOS" DE ESPAÇOS VETORIAIS

Em todos os exercícios desta seção é necessário verificar as seguintes condições:

(1) *As operações de* ***Soma*** *e* ***Multiplicação*** *por escalar (Real ou Complexo) são* ***bem definidas*** *nos respectivos conjuntos,*

(2)***Existe*** *um elemento neutro para a Soma (zero) e, finalmente,*

(3)*A estrutura resultante* ***satisfaz a todos*** *os Axiomas de Espaço Vetorial (respectivamente, Real ou Complexo).*

*(****Definição*** *de "****Boa Definição****"- Uma "****Boa Definição****" de um objeto matemático ocorre quando a caracterização completa deste objeto é possível e desambigua. Um exemplo contrário: A 'definição' da função* $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}\,; f(x) = \text{"}número\ real\ cujo\ quadrado\ é\ x\text{"}$ *,* ***não é*** *uma "boa definição" porque é impossível de ser cumprida para* $x < 0$ *e ambígua para* $x > 0$*. Ela somente se mostra matematicamente "boa" para* $x = 0$*).*

EXERCÍCIOS- ***Espaços Euclideanos e Funcionais***

0-Considere o conjunto $K = \mathbb{R}^2 = \{(x, y); x, y \in \mathbb{R}\}$ com a operação de Soma usual (coordenada à coordenada) e com a operação de multiplicação **definida** da seguinte maneira: $Dados\ r \in \mathbb{R}, \alpha = (x, y) \in K : r\alpha = (rx, 0)$. Mostre que todos os axiomas de Espaço Vetorial são satisfeitos, ***exceto***, naturalmente $1\alpha = \alpha$. Utilize este exemplo para argumentar sobre a ***necessidade*** deste "ingênuo" axioma, e sobre a sua "obviedade" enganosamente sugerida pelas regras aritméticas usuais a que estamos acostumados/as.

1a-Mostre que o elemento $\vec{0}$ que faz o papel da neutralidade com a soma é único em uma Estrutura de Espaço Vetorial.(Sugestão: Suponha que exista outro θ tal que $\theta + v = v$ para ***todo*** $v \in E$ e considere $\theta + 0$).

1b-Mostre que o elemento inverso para a soma cuja existência é garantida para cada elemento, é único. (Observe que o Axioma afirma que existe o elemento, mas não que ele seja único).

2-Mostre também que $0\vec{v} = \vec{0}$. (A seta acima de um símbolo para destacar a sua natureza vetorial em contraste com símbolos numéricos somente será utilizada em caso de muita conveniência.

Sugestão: $0v = (0 + 0)v = 0v + 0v$, e agora some $-(0v)$ aos dois lados. Justifique todas as passagens com os axiomas.

3-Mostre que o conjunto de funções $\mathcal{F}(A, \mathbb{R}) = \{f: A \to \mathbb{R}\}$ com as operações de soma e multiplicação por um número real definidos ponto a ponto, constituem um Espaço Vetorial.

(**Definição ponto a ponto de operações funcionais**: $f + g = h$ é a função tal que $(f + g)(x) = h(x) = f(x) + g(x)$ e multiplicação por escalar, $(\lambda f)(x) = \lambda\, f(x)$).

4-Mostre que o conjunto de todas as funções polinomiais $P(\mathbb{R}) = \{p: \mathbb{R} \to \mathbb{R}\, ; p(x) = \sum_{k=0}^{m} a_k x^k\}$ com as operações de soma e multiplicação por um número real definidas ponto a ponto, constituem um Espaço Vetorial.

5-Mostre que o conjunto de funções polinomiais reais de grau $\leq n$ $P_n(\mathbb{R}) = \{p: \mathbb{R} \to \mathbb{R}\, ; \exists\, p(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k x^k\}$ com as operações de soma e multiplicação por um número real definidas algebricamente constituem um Espaço Vetorial.

6-Mostre que o conjunto de Funções/Seqüências $\mathcal{F}_0(\mathbb{N}, \mathbb{R}) = \{f: \mathbb{N} \to \mathbb{R}\, ; \lim_{k\to\infty} f(k) = 0\}$ com as operações de soma e multiplicação por um número real definidas ponto a ponto, constituem um Espaço Vetorial. O mesmo para $\mathcal{F}(\mathbb{N}, \mathbb{R}) = \{f: \mathbb{N} \to \mathbb{R}\, ; f(k) = f_k \text{ é } convergente\}$.

7-Mostre que o conjunto de funções $\mathcal{F}(I_n, \mathbb{R}) = \{f: I_n \to \mathbb{R}\}$, ($I_n = \{1, \ldots, n\}$) é um Espaço Vetorial de funções que pode ser identificado com $\mathbb{R}^n$.

7b-O mesmo para $\mathcal{F}(I_m \times I_n, \mathbb{R}) = \{A: I_m \times I_n \to \mathbb{R}\} = M_{mn}(\mathbb{R})$ que é identificável com o Espaço Vetorial de Matrizes, com o Espaço Vetorial $\mathcal{F}(I_n, \mathbb{R}^m)$ e com o Espaço Vetorial Vetorial $\mathcal{F}(I_m, \mathbb{R}^n)$. (Sugestão: Encare uma matriz de $M_{nm}(\mathbb{R})$ como uma sequencia de n vetores colunas e, também com uma sequencia de m vetores linha).

7c-O mesmo para $\mathcal{F}(\mathbb{R} \times \mathbb{R}, \mathbb{R}) = \{f: \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}; f(x, t)\}$ que pode ser identificável com o Espaço Vetorial $\mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})) = \{\Phi: \mathbb{R} \to \mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})\}$ em que $\Phi(t)(x) = f(t, x)$.

8 Mostre que o conjunto de funções $\mathcal{F}(I_n, \mathbb{R}^m) = \{f: I_n \to \mathbb{R}^m\}$ é um Espaço Vetorial que pode ser identificado com o Espaço Vetorial de Matrizes$M_{nm}(\mathbb{R})$.

9-Mostre que o conjunto de funções $C^k(\mathbb{R}, \mathbb{R}) = \{f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}\, ;\ f^{(k)}\ contínua\}$ é um Espaço Vetorial de funções.

10-Mostre que o sub-conjunto das funções duas vezes continuamente diferenciáveis, $C^2(\mathbb{R}, \mathbb{R})$, que são soluções da Equação de Hill, $\frac{d^2x}{dt^2} + (\cos t)x = 0$ constituem um Espaço vetorial com a soma e multiplicação por numero real definidas ponto a ponto.

11-Mostre que as soluções continuamente diferenciáveis $C^1(\mathbb{R}, \mathbb{R}^n)$ da equação diferencial $\frac{dx}{dt} = Ax$, onde $A \in M_{nn}(\mathbb{R})$ é uma matriz real de ordem n, constituem um Espaço Vetorial com as operações de Soma e Multiplicação por número real ponto a ponto.

12-Mostre que o conjunto de seqüências exponencialmente limitadas $\mathcal{F}(\mathbb{N}, \mathbb{R}) = \{a: \mathbb{N} \to \mathbb{R}\, ; \exists\ C > 0, M > 0, |a(k)| \leq CM^k\}$ com as operações de Soma e Multiplicação por um número real definidos ponto a ponto, constituem um Espaço Vetorial e podem ser identificadas com as funções cujas séries de Taylor $f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k$ que tem raio de convergência não nulo.

13-Mostre com argumentos ***geométricos*** (e ***gráficos***) que o conjunto de deslocamentos orientados **do** plano ao longo de retas com a soma definida por deslocamentos sucessivos e a multiplicação por escalar definidos geometricamente de forma apropriada, constituem um Espaço Vetorial real.

14-Mostre que o conjunto dos números complexos $\mathbb{C} = \{x + iy\,; x, y \in \mathbb{R}\}$ com a Soma usual (coordenada a coordenada) e Multiplicação por número REAL definidas componente a componente constituem um Espaço Vetorial REAL.

15- Mostre que o conjunto dos números complexos $\mathbb{C} = \{x + iy\,; x, y \in \mathbb{R}\}$ com a Soma definida componente a componente e a Multiplicação por um escalar complexo definida pelo ***produto complexo***, constitui um Espaço Vetorial COMPLEXO.

16-Mostre situações análogas às do exercicios 14&15 para o conjunto de funções $\mathcal{F}(A, \mathbb{C}) = \{f: A \to \mathbb{C}\}$ assim como para os conjuntos $\mathbb{C}^n$ (isto é, discriminando os casos em que os escalares são reais ou complexos).

II-SUB-ESPAÇOS VETORIAIS

Uma vez apresentados diversos exemplos de Espaços Vetoriais (quase todos funcionais) verificaremos em seguida a primeira estratégia matemática que pode produzir novos Espaços Vetoriais a partir dos já conhecidos, em particular as condições para que *subconjuntos* de Espaços Vetoriais possam ser também Espaços Vetoriais com as *mesmas* operações "*mães*" definidas no conjunto maior.

DEF.-SUB-ESPAÇO VETORIAL: Se E for um Espaço Vetorial Real, então um subconjunto $E_0 \subset E$ é denominado seu **subespaço vetorial** se for *fechado* para as operações da estrutura, ou seja, para quaisquer que sejam $u, v \in E_0$ e $\lambda \in \mathbb{R}$, teremos $u + v \in E_0$ e $\lambda u \in E_0$. Um sub-espaço vetorial é um Espaço Vetorial

Exercícios

0-Não está explícito na definição acima de sub-espaço vetorial, mas está implícito que necessariamente $\vec{0} \in E_0$. Mostre também que um sub-espaço vetorial merece o nome que recebe, ou seja, é mesmo um Espaço Vetorial.

1-Considere os exemplos de Espaços Vetoriais funcionais apresentados acima e determine quais podem ser considerados subespaços de quais outros.

2-Considere os pontos de uma reta (um plano) que passa pela origem no espaço vetorial euclideano $\mathbb{R}^3$ e mostre na representação cartesiana da Geometria Analitica que a reta é um subespaço vetorial, mas **não** as retas e planos que não passam pela origem.

3-Considere um sistema de *m* equações lineares homogêneas com *n* incógnitas $(x_1, \ldots, x_n)$ descrito em notação matricial na forma $Ax = 0$, $A \in M_{mn}(\mathbb{R})$, como uma equação para elementos x do espaço vetorial $\mathbb{R}^n$. Mostre que as suas soluções formam um subespaço deste espaço que é denotado por $N(A)$e denominado de **Núcleo de** A.

4-Mostre que o conjunto de vetores $\{y \in \mathbb{R}^m\,; \exists x \in \mathbb{R}^n, y = Ax\}$ é um subespaço vetorial de $\mathbb{R}^m$ que é denotado por $R(A) = Im(A)$ e denominado de **Imagem de** A.

5-Uma matriz $M_{nm}(\mathbb{R})$ pode ser vista de várias formas: 1)Como uma tabela de números determinada por uma função $A: I_m \times I_n \to \mathbb{R}, A(i, j) = A_{ij}$, (a menos criativa), 2)Como n vetores colunas $A^j \in \mathbb{R}^m$, 3) Como m vetores linhas $A_i \in \mathbb{R}^n$.

Interprete $R(A)$ e $N(A)$ segundo os pontos de vista 2) e 3).

6-Dadas as matrizes $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}$, $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$, $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$, determine os respectivos sub-espaços $R(A)$ e $N(A)$segundo as interpretações citadas nos exercícios acima.

7-Mostre que o sub-conjunto de funções de $\mathcal{F}(\mathbb{N}, \mathbb{R}) = \{\varphi: \mathbb{N} \to \mathbb{R}\}$ que satisfazem a Equação de Recorrência de Fibonacci

$\varphi(n+2) - \varphi(n+1) - \varphi(n) = 0, \quad n \geq 0$ constituem um Sub-espaço vetorial deste.

8-Mostre que o conjunto da funções de $C^2(\mathbb{R}, \mathbb{R}) = \{f: \mathbb{R} \to \mathbb{R};\ f^{(2)}\ contínua\}$ que satisfazem a equação diferencial homogênea $\frac{d^2x}{dt^2} + (\cos t)x = 0$ é um sub-espaço do Espaço Vetorial de $C^2(\mathbb{R}, \mathbb{R})$.

9-Mostre que se H for um sub-espaço de E , então, dado um vetor *exterior* a ele, $v \notin H$, o conjunto *transladado* $K = H + v = \{h + v; h \in H\}$ **não é** um subespaço vetorial, mas existe uma correspondência biunívoca entre seus pontos.

(**Definição**: Em um espaço vetorial E um subespaço H "transladado" por um vetor $v \notin H$ *exterior* a ele, $H + v = \{h + v; h \in H\}$ é denominado "***Espaço Afim***").

10-Mostre, *geometricamente*, como é possível "fatiar" o Espaço Euclideano plano e espacial com *espaços afim* transladados de um subespaço vetorial.

III-COMBINAÇÕES LINEARES: *GERAÇÃO DE ESPAÇOS VETORIAIS*

As operações de um Espaço Vetorial (Soma e Multiplicação por escalar) fornecem uma maneira de construir *intrinsecamente* uma infinidade de vetores a partir de um pequeno número deles utilizando seqüências finitas destas operações. Na verdade, uma das grandes vantagens que se mostrará característica da estrutura vetorial será a possibilidade de descrever biunivocamente **todos** os elementos de um Espaço Vetorial a partir de um **pequeno** conjunto de elementos bem escolhidos de maneira a nomear cada um por este seu "*CPF*". A Análise desta possibilidade será o tema do próximo capítulo. (Uma situação análoga ocorre na estrutura dos números naturais e as expansão binárias: Todos os números naturais podem ser descritos de uma única maneira ***finita*** na forma $x = \sum_{k=0}^{N} d_k 2^k$ para algum N e onde $d_k \in \{0,1\}$, ou seja, utilizando apenas os "coeficientes" $\{0,1\}$ e as potencias $\{2^k\}_{k\in\mathbb{N}}$ ("duplicações sucessivas").

Uma seqüência ***finita*** de operações de Soma e Multiplicação (por escalares) em um espaço vetorial é denominada *Combinação Linear* e a sua definição exata é explicitada abaixo.

DEF: COMBINAÇÕES LINEARES: Dado um subconjunto $X = \{v_1, \ldots, v_n\}$ de vetores de um Espaço Vetorial E (com escalares reais/complexos), então qualquer expressão finita da forma $v = \sum_{k=1}^{k=n} a_k v_k$ com coeficientes a_k (reais/ resp. complexos) é denominada uma *Combinação Linear* dos vetores $X = \{v_1, \ldots, v_n\}$.

DEF-ESPAÇOS GERADOS: Dado um subconjunto não vazio de vetores $K \subset E$ de um Espaço Vetorial E **denota-se** $[K] = \{\sum_{k=1}^{k=p} a_k v_k \ ; \ a_k \in \mathbb{R}; v_k \in K\}$ o conjunto gerado por todas as combinações lineares com elementos de K.(Isto é, o resultado de todas as operações possíveis com estes elementos em um espaço vetorial)

OBS: As combinações lineares são o resultado das operações que são possíveis realizar em um Espaço Vetorial (Somas e Homotetias) e servem para **representar/gerar** intrinsecamente uma grande quantidade de elementos do Espaço em termos de uma pequena família de elementos. Embora o conjunto K não seja necessariamente finito, as combinações lineares são expressões necessariamente ***finitas***, pois na estrutura de Espaço Vetorial Axiomatizada *até agora* ***não*** estão definida somas infinitas de vetores. O conceito de convergência necessário para a definição destas somas infinitas será introduzido mais adiante

Exercícios:

0-Faça experiências **geométricas** (gráficos/desenhos) com o Modelo Euclideano plano para entender o conceito de Combinação linear neste contexto.(Sugestão: Desenhe um conjunto de vetores (dois, três,... quatro) no plano e construa graficamente (via regra do paralelogramo) as possíveis combinações lineares destes vetores. Mostre que em alguns casos é possível representar um mesmo vetor como diferentes combinações lineares do conjunto dado, ou seja, *nem sempre* há uma biunivocidade entre um vetor do espaço gerado $[K]$ e uma representação. Verifique no plano quais os critérios para que os vetores de K produzam uma correspondência biunívoca com os vetores gerados.

1-Mostre que $[K] \subset E$ é de fato um sub-espaço vetorial de E, qualquer que seja o subconjunto não vazio $K \subset E$.

2-Dado o conjunto de vetores $K = \left\{\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}2\\1\\-1\end{pmatrix}\right\} \subset \mathbb{R}^3$ determine $[K]$. O mesmo para $K = \left\{\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}2\\2\\1\end{pmatrix}\right\}$. (**Sugestão**- Comece pela suspeita de que $[K] = \mathbb{R}^3$ e verifique se isto é verdade montando um sistema de equações lineares e aplicando o Método de Gauss)

3-Mostre que o Espaço dos polinômios de grau ≤ 3 ; $P_3(\mathbb{R}) \subset P(\mathbb{R}) = \bigcup P_n(\mathbb{R})$ é gerado pelo conjunto $K = \{1, x, x^3\}$ e que também pode ser gerado da seguinte forma: $P_3(\mathbb{R}) = [\{2, (x-1), (x-1)(x-2), (x-1)(x-2)(x-3)\}]$. Generalize a idéia para qualquer $n \in \mathbb{N}$.

4-Mostre que nenhum conjunto ***finito*** de funções polinomiais pode gerar o espaço de funções $C^0(\mathbb{R}, \mathbb{R})$. (**Sugestão**: A função exponencial, $f(x) = e^x$, (dentre outras do Calculo Diferencial denominadas de "analíticas"), é descrita por uma ***única*** série de potencias ("polinômio infinito"), a de Taylor).

5-Mostre que se $A \in M_{mn}(\mathbb{R})$, então $R(A) = [\{A^1, \dots, A^n\}]$ onde A^k são os vetores de $\mathbb{R}^m$determinados pelas colunas da matriz A.

6-Mostre que se $A \in M_{mn}(\mathbb{R})$, então $R(A^t) = [\{A_1{}^t, \dots, A_m{}^t\}]$ onde $A_j{}^t$ é o vetor de $\mathbb{R}^n$ determinado pela *j*-ésima linha A_j da matriz A. (Estamos considerando os elementos de $\mathbb{R}^n$ como sendo matrizes colunas $n \times 1$, ou seja $\mathbb{R}^n \approx M_{n1}(\mathbb{R})$).

7-Mostre que $E_0 \subset E$ é um subespaço de E se e somente se $[E_0] = E_0$.

8-Mostre que se $K_1 \subsetneq K_2 \subset E$ são *subconjuntos distintos* do Espaço Vetorial E, então $[K_1] \subset [K_2]$, mas há casos em que $[K_1] = [K_2]$. Dê exemplos deste último caso.

9-Se $K_1 \subset K_2 \subset E$, analise a interseção S entre os dois sub-espaços gerados por estes subconjuntos, $S = [K_1] \cap [K_2]$, em termos da interseção $K_1 \cap K_2 = K$ e de $[K]$ com exemplos no Modelo Euclideano tridimensional.

IV-SOMA DE ESPAÇOS VETORIAIS

*O conjunto de sub-Espaços Vetoriais de um Espaço Vetorial é, em geral, infinito, formado por objetos matemáticos nos quais se pode definir operações binárias que produzem novos sub-Espaços. A operação de "**Soma de sub-Espaços**" (a ser definida nesta seção) é uma das mais úteis e pode ser interpretada geometricamente com facilidade com o Modelo Euclideano.*

-DEF- SOMA (simples) **DE ESPAÇOS VETORIAIS :** Dados dois sub-espaços vetoriais $U, V \subset E$ denominamos SOMA denotada por $W = U + V$ ao subconjunto de E definido da forma: $W = \{w = u + v\, ; u \in U, v \in V\}$.

Diz-se que esta é uma **SOMA DIRETA** se $U \cap V = \{0\}$ e, neste caso escreve-se $W = U \oplus V$.

(*A operação definida aqui como "Soma Direta" é denominada em alguns outros textos como "Produto"*).

Exercícios:

0-Mostre que dados dois sub-espaços vetoriais $U, V \subset E$, a sua interseção $U \cap V$ determina um sub-espaço vetorial de E. Interprete geometricamente estas operações no Modelo Euclideano plano e espacial de Espaço Vetorial.

1-Mostre que a soma $W = U + V$ é um subspaço vetorial de E. Mostre que $W = U \oplus V$ se e somente se cada vetor $w \in W = U \oplus V$ pode ser escrito (decomposto) de uma **única** forma $w = u + v$.

2-Mostre que $\mathbb{R}^n = U + V$ onde $U = \{x \in \mathbb{R}^n; x = (x_1, .., x_k, 0, 0 \dots .0)\}$ e $V = \{x \in \mathbb{R}^n; x = (0, x_2, .., x_n)\}$, mas a soma não é direta.

3-Mostre que $\mathbb{R}^2 = U \oplus V$ onde $U = \{x \in \mathbb{R}^2; x = a(1,2), a \in \mathbb{R}\}$ e $V = \{x \in \mathbb{R}^2; x = a(1,1), a \in \mathbb{R}\}$. Faça um esboço geométrico.

4-Mostre que $\Sigma = \{M \in M_{nn}(\mathbb{R});\ M^t = M\}$ (matrizes simétricas) e $\Lambda = \{M \in M_{nn}(\mathbb{R});\ M^t = -M\}$ (matrizes anti-simétricas) são sub-espaços vetoriais do Espaço Vetorial das Matrizes reais quadradas de ordem n, $M_{nn}(\mathbb{R})$, e que este pode ser escrito como a soma: $E = \Sigma \oplus \Lambda$.

5-Verifique **se** o conjunto de todos os sub-espaços Vetoriais $\mathfrak{F}$ de um Espaço Vetorial E ($\mathcal{E} = \{\mathfrak{F} \subset E;\ \mathfrak{F}\ sub-espaço\ vetorial\ de\ E\}$ com o elemento $0 = \{0\}$, a operação soma "$+$", a multiplicação por escalar definida naturalmente como: $\lambda\mathfrak{E} = \{\lambda v; v \in \mathfrak{E}\}$ constitui um Modelo da Estrutura de Espaço Vetorial.(Obs: Atenção especial com o "negativo" para a soma).

6-Considere a questão anterior definindo a operação "Soma" como interseção e a Multiplicação por escalar da mesma forma como acima.

7- Se E for o Modelo Euclideano tridimensional de Espaço Vetorial, mostre geometricamente que, dado um sub-espaço $U \subsetneq E$ que **não é** todo o Espaço vetorial E existem infinitos Espaços "Complementares" $V \subset E$ de U no sentido de que $E = U \oplus V$.(Sugestão: Considere primeiro sub-espaços planos e depois retas).

8-Considere o Espaço Vetorial $P_4(\mathbb{R}) = \{p \in C^0(\mathbb{R},\mathbb{R}); p(x) = \sum_{k=1}^{4} a_k x^k \ para\ coeficientes\ a_k \in \mathbb{R}\}$ constituido de polinômios de grau ≤ 4 e o sub-espaço $U = [1,(x-1),(x-2)x(x-3)\}]$. Determine ***distintos*** Espaços "Complementares" V de U no sentido de que $P_4(\mathbb{R}) = U \oplus V$.

V-PRODUTO CARTESIANO DE ESPAÇOS VETORIAIS

A operação de produto cartesiano é uma operação natural na Teoria de Conjuntos e, portanto, é razoável indagar a sua extensão para espaços vetoriais. Na verdade, o Modelo mais comum de Espaço Vetorial, $\mathbb{R}^2 = \mathbb{R} \times \mathbb{R}$, é obviamente construído desta forma. A definição abaixo estende esta idéia.

DEF-PRODUTO CARTESIANO DE ESPAÇOS VETORIAIS- Dados dois ESPAÇOS vetoriais U,V denominamos **Produto Cartesiano** denotado por $W = U \times V$ ao conjunto definido da forma: $W = \{w = (u,v)\ ; u \in U, v \in V\}$. Denota-se $U^n = U \times U \times \ldots \times U$ para *n* cópias do sub-espaço U.

OBS: Obviamente os Espaços Euclideanos $\mathbb{R}^n\ e\ \mathbb{C}^n$ são *n* produtos, respectivamente, dos espaços $\mathbb{R}\ e\ \mathbb{C}$.

Exercícios:

1-Mostre que o conjunto $W = U \times V$ definido acima quando dotado das operações de Soma e Multiplicação por escalar definidas coordenada a coordenada, isto é, $(u_1,v_1) + (u_2,v_2) = (u_1+u_2, v_1+v_2)$, $a(u,v) = (au,av)$ se constitui um Espaço Vetorial com elemento neutro $0 = (0,0)$.

2-Mostre que se $U,V \subset E$ são subespaços vetoriais de E então o espaço $(U \times \{0\}) \oplus (\{0\} \times V)$ é essencialmente o espaço $W = U \times V \subset E \times E$. (Por esta razão o produto cartesiano é denominado por alguns de **soma** direta).

3-Mostre que o Espaço Vetorial das matrizes $M_{nm}(\mathbb{R})$ pode ser interpretado das seguintes formas: $M_{nm}(\mathbb{R}) \approx (\mathbb{R}^n)^m \approx (\mathbb{R}^m)^n \approx \mathbb{R}^{mn}$.

4-Mostre que o Espaço das funções vetoriais $\mathcal{F}(\mathbb{R},\mathbb{R}^n)$ pode ser identificado com o produto cartesiano $\mathcal{F}(\mathbb{R},\mathbb{R}^n) \approx \left(\mathcal{F}(\mathbb{R},\mathbb{R},)\right)^n$.

5-Mostre que o Espaço das funções de duas variáveis $\mathcal{F}(\mathbb{R} \times \mathbb{R},\mathbb{R}) = \{f: \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}; f(t,x)\}$ pode ser interpretado como $\mathcal{F}\big(\mathbb{R},\mathcal{F}(\mathbb{R},\mathbb{R})\big) = \{\Phi: \mathbb{R} \to \mathcal{F}(\mathbb{R},\mathbb{R});\ \Phi(t): \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \Phi(t)(x) = f(t,x)\}$

6- Verifique se dados dois *sub-conjuntos* de um Espaço Vetorial, $K_1, K_2 \subset E$ então: $[K_1 \times K_2] = [K_1] \times [K_2] \subset E \times E$.

VI-ESPAÇO QUOCIENTE: *Classes de Equivalência*

Em um espaço vetorial E um subespaço H"*transladado*" por um vetor $v \notin H$ *exterior* a ele ($K = H + v = \{h + v; h \in H\}$ é outro conjunto biunívoco a ele, mas que **não é** um sub-espaço vetorial. Este novo conjunto é denominado "*Espaço Afim*". Mostraremos abaixo com definir uma estrutura de espaço vetorial no conjunto $\mathcal{C}$ de "*Espaços Afins*" $H + v$. Este espaço será denominado "Q*uociente" e denotado com a expressão* $^{E}/_{H} = \mathcal{C}$ *embora devesse ser denominado "Espaço Diferença" , pois* mostraremos mais tarde que, em termos, $E = H \oplus K$. Por mais esta razão é que, justificadamente, a soma direta é representada como produto em alguns textos.

DEF- ESPAÇO QUOCIENTE : Se E for um espaço vetorial e $H \subset E$ for um subespaço vetorial, define-se uma relação em E da seguinte maneira: $v \sim u$ se $v = u + h$, $h \in H$.

Exercício:

Mostre que a relação definida acima é de *Equivalência*. (Reflexiva, Simétrica,Transitiva)

-DEF-Denota-se a classe de equivalência a qual pertence um elemento $u \in E$ da forma:

$[u] = \{v = u + h\ ; h \in H\}$ e o conjunto **Quociente** da forma $E/_H = \{[u]; u \in E\}$.

OBS: *Infelizmente a notação colchete* $[\dots]$ *é utilizada tanto para "espaço gerado de um conjunto" quanto para "classe de equivalência de um elemento", mas os contextos são em geral suficientes para indicar o sentido exato de seu emprego.*

Exercícios:

1-Mostre que no conjunto quociente $E/_H = \{[u]; u \in E\}$ pode ser definida uma Estrutura de Espaço Vetorial (dita quociente) com as operações: $[u] + [v] = [u + v]$, $a[u] = [au]$, $0 = [0]$.

OBS: Para demonstrar a ***consistência*** das definições destas operações é necessário verificar que elas não dependem do respectivo elemento que representa a classe de equivalência, ou seja, que esta é uma "*Boa Definição*" matemática.

2-Considere uma reta *r* que passa pela origem como um subespaço do espaço Euclideano bidimensional $\mathbb{R}^2$ Obtenha uma interpretação gráfica do Espaço quociente $\mathbb{R}^2/_r$.

3-O mesmo para o espaço tridimensional $\mathbb{R}^3$ com relação a uma reta *r* e um plano *p* que passam pela origem: $\mathbb{R}^3/_r$, $\mathbb{R}^3/_p$.

*4-Considere o Espaço vetorial dos polinômios com coeficientes reais de grau $\leq n$, $P_n(\mathbb{R})$ e o subespaço q dos polinômios que zeram na origem e no ponto $x = 1$. Obtenha uma interpretação do espaço quociente $P_n(\mathbb{R})/_q$.

*5-Considere a seguinte relação de equivalência " $\sim$ " entre vetores *não nulos* de um Espaço Vetorial: "$u \sim v \iff Existe\ \lambda \in \mathbb{R}\ ; u = \lambda v$". Interprete o conjunto quociente $\wp = \mathbb{R}^3/_\sim$ geometricamente e, $\wp = P(\mathbb{R})/_\sim$ algebricamente.

VII-ESPAÇO POTÊNCIA: *Espaços de Funções*

Os Espaços de Potencia Vetorial constituem uma classe geral de Espaços Vetoriais pois inclui quase todos os exemplos a serem tratados em seguida. Os exercícios abaixo indicarão a proximidade das idéias de Produto Cartesiano e Espaços Potência, o que é natural se lembrarmos das operações análogas com números.

DEF: ESPAÇO POTÊNCIA- Se E for um espaço vetorial e A um conjunto *não vazio*, então o conjunto de todas as funções $E^A = \{f: A \to E\}$ é um espaço vetorial denominado Espaço Potência.

-Exercícios:

1-Mostre que os espaços $\mathbb{R}^n, \mathbb{C}^n, M_{mn}$ podem ser considerados Espaços Potência.

2-Mostre reversamente que se *o conjunto expoente A for finito,* $A = \{a_1, \dots \dots a_n\}$ *, é possível (e natural) associar o Espaço Vetorial de funções* $E^A = \{f: A \to E\}$ *ao Espaço Vetorial obtido pelo respectivo produto cartesiano* E^n*. Argumente sobre a possibilidade de generalizar esta associação para o caso em que* $A = \mathbb{R}$.

VIII-ESPAÇOS DE FUNÇÕES/OPERAÇÕES/TRANSFORMAÇÕES LINEARES

As Transformações Lineares (também denominadas "Operações" ou "Operadores" Lineares dependendo do contexto) são Funções com propriedades especiais que tem domínio e contradomínio em Espaços Vetoriais. Estas funções desempenham um papel central em Álgebra Linear, pois representam as **Ações** que operam no cenário composto pelo Espaço Vetorial.

Nesta seção as Transformações/Operações Lineares serão introduzidas não na sua condição de funções especificamente, mas sim na condição de ***elementos*** *de novos Espaços Vetoriais. A sua enorme importância na* *teoria e nas aplicações da Álgebra Linear exige que as tratemos com maiores detalhes e cerimônia, o que será feito no capítulo IV.*

DEF-OPERADOR/TRANSFORMAÇÃO LINEAR-

-Se E, F são Espaços Vetoriais (Reais/Complexos) uma ***Função*** $L: E \to F$ é denominada ***Transformação Linear*** se a sua ação ***comuta*** com as ***duas*** operações da estrutura, (soma e a multiplicação por escalar) no seguinte sentido: $L(u+v) = L(u) + L(v)$, $L(\lambda u) = \lambda L(u)$, para todos os vetores $u, v \in E$ e escalares $\lambda \in \mathbb{R}/\mathbb{C}$.

-O conjunto das Transformações Lineares entre dois espaços Vetoriais E, F é denotado por $\mathcal{L}(E,F) = \{L: E \to F\ ;\ linear\}$.

-O caso especial $\mathcal{L}(E,\mathbb{R}) = E^*$ / $\mathcal{L}(E,\mathbb{C}) = E^*$ é denominado ***Dual*** de E e todo $l \in E^*$ é comumente denominado ***Funcional Linear.***

OBS:

1-Os Conjuntos de Transformações Lineares entre Espaços Vetoriais constituem no objeto central de estudo da Álgebra Linear e, curiosamente, como veremos abaixo, podem eles mesmos ser estudados também como uma Estrutura de Espaço Vetorial.

2- O termo “Transformação” sugere uma interpretação geométrica associada a um mapeamento de pontos entre um Espaço Vetorial e outro. O termo “Operador”, ou “Operação”, por outro lado, é em geral utilizado no caso em que os Espaços de saída e chegada são idênticos, $\mathcal{L}(E,E)$ e o processo está associado à uma operação sobre vetores.

EXERCÍCIOS:

1-Mostre que os conjuntos $\mathcal{L}(E,F) = \{L: E \to F\ , L\ linear\}$ com a operação de soma e multiplicação por escalar definidas ponto a ponto e a função nula constituem de fato Modelos para a Estrutura de Espaços Vetoriais, na verdade $\mathcal{L}(E,F) \subset \mathcal{F}(E,F)$ constitui um sub-Espaço Vetorial de $\mathcal{F}(E,F)$ formado pelo conjunto de todas as funções com domínio em E e contradomínio em F , as operações ponto a ponto e o zero representado pela função nula.

2-Mostre que os conjuntos $Ker(L) = \{u \in E; L(u) = 0\}$ chamado Kernel ou Núcleo da **Transformação Linear** L , e $R(L) = \{w \in F; \exists u \in E\ e\ L(u) = w\}$ chamado **Imagem** da transformação linear L são subespaços vetoriais de seus respectivos espaços maiores.

3-Volte aos dois seguintes exercícios do inicio do capítulo

3A-Mostre que o conjunto de funções de $\mathcal{F}(\mathbb{N},\mathbb{R}) = \{\varphi: \mathbb{N} \to \mathbb{R}\}$ soluções da Equação de Recorrência de Fibonacci $\varphi(n+2) - \varphi(n+1) - \varphi(n) = 0,\ \ n \geq 0$ pode ser interpretado como o Núcleo do seguinte Operador Linear: $\Phi: \mathcal{F}(\mathbb{N},\mathbb{R}) \to \mathcal{F}(\mathbb{N},\mathbb{R})$; $(\Phi f)\,(k) = f(k+2) - f(k+1) - f(k)$.

3B-Mostre que o Espaço Vetorial das funções de $F = C^\infty(\mathbb{R},\mathbb{R}) = \{f: \mathbb{R} \to \mathbb{R};\ f^{(k)}\ contínuas, k \in \mathbb{N}\ \}$ que satifazem a equação diferencial homogêna $\frac{d^2x}{dt^2} + (cost)x = 0$ pode ser interpretado como o Nucleo do Operador Linear: $L: F \to F\ ; Lf(t) = \frac{d^2f}{dt^2} + (cost)f(t)\}$.

(Mostre inicialmente que os operadores Φ/L estão “bem definidos” nos respectivos Espaços Vetoriais e que são lineares).

4-O mesmo para os exercícios que definem $N(A) = Ker(A)$.