# Projeto 03 - Anel Carregado

Equipe Donner

Diogo Silva, Guilherme Shimada, Leonardo Vieira, Lucca Miranda, Pedro Azevedo

17 de Novembro, 2021

## Resumo

Este artigo apresenta uma discussão teórica sobre o comportamento de um anel de material isolante carregado e imerso em um campo magnético variável. Para esse propósito, foram utilizadas equações para descrever o corpo nesse ambiente, a fim de melhor compreender a mecânica dessa situação.

**Palavras-chave**: anel carregado, rotação, momento angular, campo magnético, solenoide.

## 1 Introdução

A situação analisada neste trabalho muito se assemelha ao famoso Paradoxo Feynman, pois ela demonstra que alterações na corrente que atravessa um condutor podem causar mudanças (a princípio) contra-intuitivas no momento angular de outros corpos do mesmo sistema.

Mais especificamente, este estudo pretende analisar o efeito da interrupção da corrente que atravessa um solenoide infinito de raio $b$ sobre um anel concêntrico de raio $r \ll b$, carregado com carga $q$ e feito de material isolante. Na situação inicial, o anel está em repouso mas é livre para girar em torno de seu próprio eixo central, o qual se alinha ao eixo $z$ (vide figura 1).

A partir de uma modelagem matemática dessa situação com as equações adquiridas no decorrer da disciplina de Física Teórica III, buscamos compreender o comportamento do anel após a interrupção da corrente e avaliamos a corretude dos seguintes argumentos:

1. Quando a corrente é interrompida, o fluxo magnético vai a zero. Surge, portanto, um campo elétrico induzido tangencial ao anel, que dá origem a uma força elétrica. Essa força elétrica causa um torque líquido no anel e ele começa a girar. Se soubermos o momento de inércia do anel e a corrente no solenóide, podemos calcular a velocidade angular resultante e, portanto, seu momento angular.
2. Usando o princípio da conservação do momento angular, podemos dizer que o momento angular do sistema, incluindo o do anel e de todos os demais corpos, é inicialmente zero. Portanto, o momento angular da montagem deve permanecer nulo e não deve haver rotação quando a corrente for interrompida.

## 2 Metodologia

### 2.1 O anel gira ou não gira?

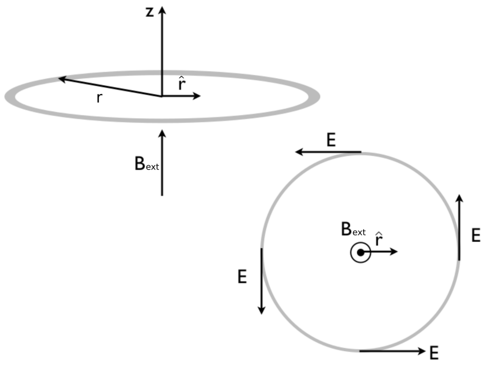
Quando a corrente é interrompida, o fluxo magnético sobre o anel vai de $\Phi_{Bi} = B_{\text{ext}}\pi r^2$ para $\Phi_{Bf} = B_{\text{anel}}\pi r^2$. Segundo a Lei de Faraday, essa alteração no fluxo magnético provoca o surgimento de uma tensão induzida ao redor do anel, dada por:

$$\Delta V = -\frac{d\Phi_B}{dt}. \tag{1}$$

Algo interessante a se notar na equação acima é o sinal de menos que antecede o termo diferencial. Esse sinal representa a Lei de Lenz, que estabelece que o fluxo magnético induzido compensa a variação temporal de fluxo magnético o induziu.

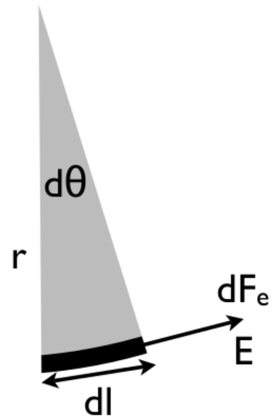
Onde há tensão elétrica, certamente há também campo elétrico. Como o campo $B_{\text{ext}}$ era constante na direção axial, o campo elétrico que surge tem formato circular (pense na "Regra da Mão da Direita"!), conforme a figura abaixo.

Figura 1 – Campo elétrico tangente ao anel




Fonte: LECLAIR, 2008

Figura 2 – Elementos infinitesimais




Fonte: LECLAIR, 2008

Se o anel fosse feito de material condutor, o campo elétrico moveria as cargas em seu interior e o anel ficaria imóvel em relação ao solenoide (constituindo uma corrente induzida). No entanto, o anel é feito de material isolante, então o anel inteiro se começa a girar. Uma decrição quantitativa, mais precisa, desse movimento rotacional será desenvolvida na seção seguinte.

De qualquer forma, esse primeiro resultado qualitativo já nos permite concluir que o argumento 1 está parcialmente correto pois o anel, de fato, gira! No entanto, ele também afirmou que o fluxo magnético seria nulo ao interromper a corrente no solenoide, o que está errado pois o anel gera o próprio campo magnético. Vamos discutir o segundo argumento, sobre conservaçao de momento angular, mais adiante.

## 2.2 Velocidade angular do anel

Agora que sabemos que o anel gira, podemos calcular a velocidade angular desse movimento.

Como dito na Introdução, o anel tem um total de carga $q$ uniformemente distribuído em seu comprimento $2\pi r$, então a densidade linear de carga é $\lambda = q/(2\pi r)$ e, portanto, um elemento infinitesimal de carga é $dq = \lambda dl$. Essa notação nos permite descrever a força elétrica $d\vec{F_e}$ que surge em resposta ao campo elétrico presente em cada elemento infinitesimal de comprimento do anel como

$$d\vec{F_e} = dq\vec{E} = \lambda dl\vec{E}. \tag{2}$$

A fim de facilitar uma compreensão mais intuitiva dessa equação (e das seguintes), incluímos uma ilustração dos elementos infinitesimais de ângulo, comprimento, e força.

Essa figura ajuda a perceber que o campo elétrico tangente ao anel segue a igualdade $\vec{E} = E\hat{\theta}$, onde $\hat{\theta}$ é o versor no sentido em que o ângulo interno ao anel aumenta, logo

$$d\vec{F_e} = \lambda dlE\hat{\theta}. \tag{3}$$

A partir disso, calculamos o torque em cada elemento de comprimento do anel. Como o fulcro está no centro no anel, o braço do torque equivale ao raio $\vec{r}$ do anel, então o elemento de torque é

$$d\vec{\tau} = \vec{r} \times d\vec{F} \tag{4}$$

$$\Rightarrow d\vec{\tau} = (r\hat{r}) \times \left(\lambda dlE\hat{\theta}\right) \tag{5}$$

$$\Rightarrow d\vec{\tau} = \lambda rdlE\left(\hat{r} \times \hat{\theta}\right). \tag{6}$$

Pela "Regra da Mão Direita", o produto vetorial da equação 6 equivale a $\hat{z}$ (isso é mais fácil de perceber se você der um "tapa" com a mão direita, do versor $\hat{r}$ para um dos vetores $\vec{E}$ na figura 1), então o elemento de torque é

$$\Rightarrow d\vec{\tau} = \lambda rdlE\hat{z}, \tag{7}$$

e, portanto, o torque no anel inteiro é

$$\vec{\tau} = \oint_{\text{anel}} d\vec{\tau} = \lambda r\left(\oint_{\text{anel}} dlE\right)\hat{z}. \tag{8}$$

Como o campo elétrico é tangencial, $d\vec{l} \parallel \vec{E}$ em todo o anel. Por esse motivo temos $dlE = d\vec{l} \cdot \vec{E}$, então

$$\vec{\tau} = \lambda r\left(\oint_{\text{anel}} d\vec{l} \cdot \vec{E}\right)\hat{z}, \tag{9}$$

que pela Lei de Faraday (vide equação 1) é

$$\vec{\tau} = (\lambda r \Delta V)\,\hat{z} \tag{10}$$

$$\Rightarrow \vec{\tau} = \left(\frac{q}{2\pi \cancel{r}}\,\cancel{r}\Delta V\right)\hat{z} = \left(\frac{q\Delta V}{2\pi}\right)\hat{z} \tag{11}$$

Agora que ajeitamos todas as direções, podemos substituir a notação vetorial pela notação escalar obtendo a equação

$$\tau = \left(\frac{q\Delta V}{2\pi}\right), \tag{12}$$

que, pela Lei de Faraday, equivale a

$$\tau = -\left(\frac{q}{2\pi}\right)\frac{d\Phi_B}{dt}. \tag{13}$$

Note que $q \neq 0$ e $\Delta V \neq 0$, então o torque é não-nulo. Esse resultado confirma, quantitativamente, que o anel gira.

Pela Segunda Lei de Newton, o torque resultante equivale a derivada temporal do momento angular $L$, então

$$\tau = \frac{dL}{dt} = -\left(\frac{q}{2\pi}\right)\frac{d\Phi_B}{dt} \tag{14}$$

$$\Rightarrow \int_i^f dL = \int_i^f -\left(\frac{q}{2\pi}\right)d\Phi_B, \tag{15}$$

onde os limites de integração $i$ e $f$ representam os instantes imediatamente anterior e posterior ao desligamento da corrente do solenoide, respectivamente. Resolvendo as integrais da equação 15, obtemos

$$L_f - L_i = \frac{q}{2\pi}(\Phi_{Bi} - \Phi_{Bf}). \tag{16}$$

Nessa equação, $L_i = 0$ pois o anel está estacionário na situação inicial e, portanto, seu momento angular inicial é nulo. Como o anel está girando na situação final, ele gera o próprio campo magnético que, segundo a dica dada no enunciado, pode ser modelado como $B_{\text{anel}} = A\lambda\omega$. Isso significa que o momento angular final do anel é

$$L_f - \cancelto{0}{L_i} = \frac{q}{2\pi}(B_{\text{ext}}\pi r^2 - B_{\text{anel}}\pi r^2) \tag{17}$$

$$\Rightarrow L_f = \frac{qr^2\cancel{\pi}}{2\cancel{\pi}}(B_{\text{ext}} - B_{\text{anel}}) \tag{18}$$

$$\Rightarrow L_f = \frac{qr^2}{2}(B_{\text{ext}} - A\lambda\omega) \tag{19}$$

Sabendo que o momento de inércia $I$ de um anel de raio $r$ e massa $m$ é dado por $I = mr^2$, podemos calcular a velocidade angular $\omega$ como

$$\omega = \frac{Lf}{I} = \frac{q\cancel{r^2}}{2m\cancel{r^2}}(B_{\text{ext}} - A\lambda\omega) \tag{20}$$

$$\Rightarrow \omega = \frac{qB_{\text{ext}}}{2m} + \frac{A\lambda\omega}{2m} \tag{21}$$

$$\Rightarrow \omega - \frac{A\lambda\omega}{2m} = \frac{qB_{\text{ext}}}{2m} \tag{22}$$

$$\Rightarrow \omega\left(1 - \frac{A\lambda}{2m}\right) = \frac{qB_{\text{ext}}}{2m} \tag{23}$$

$$\Rightarrow \omega\left(\frac{2m - A\lambda}{2m}\right) = \frac{qB_{\text{ext}}}{2m} \tag{24}$$

$$\Rightarrow \omega = \frac{qB_{\text{ext}}}{\cancel{2m}}\left(\frac{\cancel{2m}}{2m - A\lambda}\right) \tag{25}$$

$$\Rightarrow \boxed{\omega = \frac{qB_{\text{ext}}}{2m - A\lambda}} \tag{26}$$

## 2.3 Campo magnético inicial

Sabemos, pela aplicação da Lei de Ampère, que a fórmula do campo magnético produzido por um solenoide é dado por:

$$B_{\text{ext}} = \mu_0 i\left(\frac{N}{L}\right), \tag{27}$$

que pela definição de corrente, equivale a

$$B_{\text{ext}} = \mu_0\left(\frac{Q}{\Delta t}\right)\left(\frac{N}{L}\right), \tag{28}$$

$\Delta t$ é o tempo necessário para um elétron percorrer o solenoide inteiro, de ponta a ponta (o solenoide é infinito, mas essa abstração é necessária para a demonstração). Devido ao jeito que definimos $\Delta t$, o total de carga que passa pelo solenoide nesse intervalo de tempo equivale ao total de carga contido no solenoide então:

$$B_{\text{ext}} = \mu_0\left(\frac{q_e n_e \cancel{L}}{\Delta t}\right)\left(\frac{N}{\cancel{L}}\right), \tag{29}$$

$$\Rightarrow B_{\text{ext}} = \mu_0 q_e n_e \left(\frac{N}{\Delta t}\right), \tag{30}$$

em que $q_e$ é a carga elementar e $n_e$ é a densidade linear de elétrons. Observe que, agora, os únicos valores desconhecidos na expressão do campo magnético do solenoide são $N$ e $\Delta t$. Para resolver isso, escrevemos esses termos em função da velocidade azimutal $v_e$ e de outros dados conhecidos:

$$v_e = \frac{L}{\Delta t} \tag{31}$$

$$\Rightarrow v_e = \frac{N(2\pi b)}{\Delta t} \tag{32}$$

$$\Rightarrow \frac{N}{\Delta t} = \frac{v_e}{2\pi b}. \tag{33}$$

Assim, a expressão do campo magnético gerado pelo solenoide é

$$\Rightarrow B_{\text{ext}} = \mu_0 q_e n_e \left(\frac{v_e}{2\pi b}\right). \tag{34}$$

## 3 Resultados e Conclusão

Ao final das análises quantitativas, confirmamos parte do argumento 1 (de que o anel gira) e refutamos outra parte (de que o fluxo magnético final é nulo).

Avaliar o argumento 2, no entanto, é bem mais difícil. Tanto é, que fazê-lo quantitativamente está fora do escopo da disciplina de Física Geral III, então explicaremos conceitualmente.

Por mais que seja "tentador"assumir que o momento angular adquirido pelo anel estivesse inicialmente nos elétrons do solenoide, a verdade é que parte do momento angular fica armazenada nos campos elétrico e magnético (o momento angular nos elétrons é apenas parte do momento angular total, chamada de "momento angular mecânico").

Uma famosa situação que ilustra essa propriedade dos campos é o anteriormente mencionado Paradoxo de Feynman, que consiste no experimento de interrupção da corrente passando por um fio retilíneo condutor rodeado por um cilindro carregado feito de material isolante. O que ocorre é que o cilindro começa a girar, pois o campo magnético induzido é tangente à sua superfície (pense de novo na "Regra da Mão Direita"!). Isso não viola a conservação do momento angular, mesmo que o momento angular mecânico fosse incialmente zero, pois o momento adquirido pelo cilindro estava antes armazenado nos campos.

O argumento 2 considera apenas a existência do momento angular mecânico, então sua maneira de justificar que o anel não gira está incorreta.

# Referências


LECLAIR, P. R. *Problem Set 8: Solutions*. [S.l.]: University of Alabama, 2008. Nenhuma citação no texto.

REVILLE, J. *Magnetism - Infinite solenoid*. YouTube, 2016. Disponível em: <https://www.youtube.com/watch?v=cOqlb5cK8WM>. Nenhuma citação no texto.