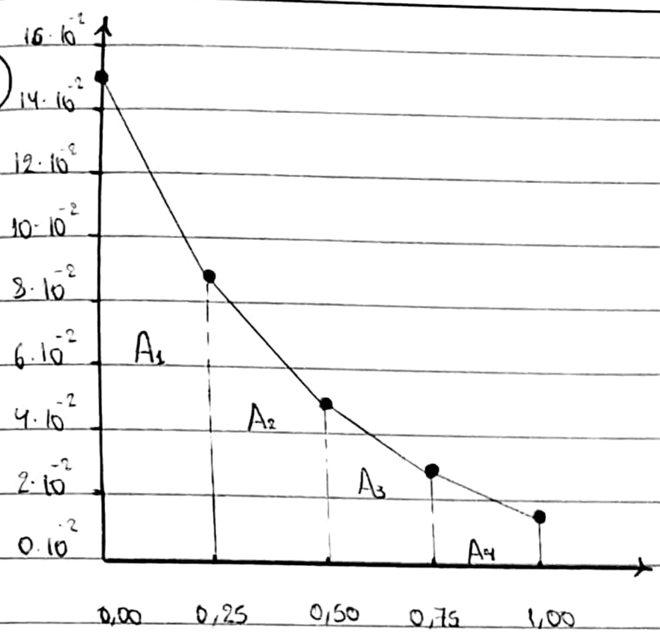
LISTA 7 - MS211

PEDRO SADER AZEVEDO RA: 243245
Pedro Sader Azevedo

1)

a)



REGRA DOS TRAPÉZIOS

PELA FÓRMULA DA ÁREA DO TRAPÉZIO:

$$A_1 = (1{,}4815\cdot10^{-1} + 8{,}9213\cdot10^{-2})\cdot\frac{1}{8}$$
$$A_2 = (8{,}9213\cdot10^{-2} + 5{,}2478\cdot10^{-2})\cdot\frac{1}{8}$$
$$A_3 = (5{,}2478\cdot10^{-2} + 2{,}9630\cdot10^{-2})\cdot\frac{1}{8}$$
$$A_4 = (2{,}9630\cdot10^{-2} + 1{,}5625\cdot10^{-2})\cdot\frac{1}{8}$$

$$\int_0^1 f(x)\,dx = A_1 + A_2 + A_3 + A_4$$
$$= (23{,}7363 + 14{,}1691 + 8{,}2108 + 4{,}5255)\,\frac{10^{-2}}{8}$$
$$\boxed{= 6{,}3302125\cdot10^{-2}}$$

REGRA DE SIMPSON

PARÁBOLA 1: $a_1x^2 + b_1x + c_1 = 0 \Rightarrow$

$$\begin{cases} a_1 0^2 + b_1 0 + c_1 = 1{,}4815\cdot10^{-1} \\ a_1 0{,}25^2 + b_1 0{,}25 + c_1 = 8{,}9213\cdot10^{-2} \\ a_1 0{,}50^2 + b_1 0{,}50 + c_1 = 5{,}2478\cdot10^{-2} \end{cases}$$

$\Rightarrow \underline{a_1 = 0{,}177616 \quad b_1 = 0{,}280152, \; c_1 = 0{,}14815}$

(SISTEMA RESOLVIDO COM CALCULADORA CIENTÍFICA)

PARÁBOLA 2: $a_2x^2 + b_2x + c_2 = 0 \Rightarrow$

$$\begin{cases} a_2\cdot0{,}50^2 + b_2\,0{,}50 + c_2 = 5{,}2478\cdot10^{-2} \\ a_2\cdot0{,}75^2 + b_2\,0{,}75 + c_2 = 2{,}9630\cdot10^{-2} \\ a_2\cdot1^2 + b_2\cdot1 + c_2 = 1{,}5625\cdot10^{-2} \end{cases}$$

$\Rightarrow \underline{a_2 = 0{,}070744, \; b_2 = 0{,}179822, \; c_2 = 0{,}124703}$

(SISTEMA RESOLVIDO COM CALCULADORA CIENTÍFICA)

$$\int_0^1 f(x)\,dx = \int_{0{,}0}^{0{,}5}(0{,}177616x^2 + 0{,}280152x + 0{,}14815)\,dx + \int_{0{,}5}^{1{,}0}(0{,}070744x^2 + 0{,}179822x + 0{,}124703)\,dx$$
$$= 0{,}116495 + 0{,}150418 \; \boxed{= 0{,}266913}$$

b) PARA LIDAR COM UM NÚMERO PAR DE PONTOS, EMPREGAMOS A FÓRMULA DE SIMPSON QUE ESTAMOS ACOSTUMADOS NOS PRIMEIROS TRÊS PONTOS E A FÓRMULA $\frac{3}{8}$ NOS ÚLTIMOS QUATRO PONTOS:

$$\int_0^1 f(x)\,dx = \int_0^{0{,}5} f(x)\,dx + \int_{0{,}5}^{1{,}25} f(x)\,dx = \overbrace{0{,}116495}^{\text{ITEM ANTERIOR}} + \frac{3\cdot0{,}25}{8}\left(f(0{,}5) + 3f(0{,}75) + 3f(1{,}00) + f(1{,}25)\right)$$
$$= 0{,}116495 + \frac{0{,}75}{8}\left(5{,}2478\cdot10^{-2} + 2{,}9630\cdot10^{-2}\cdot3 + 1{,}5625\cdot10^{-2}\cdot3 + 7{,}3275\cdot10^{-3}\right)$$
$$= 0{,}116495 + 0{,}0183347 \; \boxed{= 0{,}134829}$$

(2) O erro da quadratura de Simpson em um intervalo $[a, b]$ é dado por:

$$I - Q_s \leqslant \frac{(b-a)h^4}{180} f^{(4)}(\eta) \quad , \quad \eta \in (a, b)$$

0, pois ordem derivada > grau polinômio

Para usar essa fórmula, vamos calcular $\left(\frac{d}{dx}\right)^4 (x^3 + \ln(x)) = \left(\frac{d}{dx}\right)^4 \ln(x)$

$$= \left(\frac{d}{dx}\right)^3 \frac{1}{x} = \left(\frac{d}{dx}\right)^2 \frac{-1}{x^2} = \left(\frac{d}{dx}\right) \frac{2}{x^3} = \frac{-6}{x^4}$$

$$\Rightarrow f^{(4)}(x) = \frac{-6}{x^4} \Rightarrow I - Q_s \leqslant \frac{(b-a)h^4}{180}\left(\frac{-6}{\eta^4}\right) \leqslant \frac{-h^2}{30\eta^4}$$

como $h = \frac{b-a}{n} = \frac{1}{n}$, temos: $I - Q_s \leqslant \frac{-1}{n^2 30\eta^4} \Rightarrow$

$$Q_s - I \geqslant \frac{1}{n^2 30\eta^4} \Rightarrow n^2 \geqslant \frac{1}{(Q_s - I)\, 30\eta^4} \Rightarrow n \geqslant \sqrt{\frac{1}{|Q_s - I|\, 30\eta^4}}$$

$$\Rightarrow n \geqslant \sqrt{\frac{1000}{30 \cdot 1{,}9^4}} \geqslant \sqrt{\frac{1000}{30 \cdot 13}} \geqslant \sqrt{2{,}55} \geqslant 1{,}6$$

Então precisamos de ao menos 2 intervalos para obter a precisão desejada.

$$\begin{bmatrix} 1^2 & 1 & 1 \\ 1{,}5^2 & 1{,}5 & 1 \\ 2^2 & 2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1^3 + \ln(1) \\ 1{,}5^3 + \ln(1{,}5) \\ 2^3 + \ln(2) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 3{,}780 \\ 8{,}693 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} a = 4{,}266 \\ b = -5{,}105 \\ c = 1{,}839 \end{cases} \Rightarrow \int_1^2 x^3 \cdot \ln(x)\,dx \cong \int_1^2 (4{,}266x^2 - 5{,}105x + 1{,}839)\,dx$$

$$= 4{,}1355$$

$$\Rightarrow \boxed{\int_1^2 x^3 \ln(x)\,dx \cong 4{,}1355}$$

(3) PARA RESOLVER O PROBLEMA DE VALOR DE CONTORNO, COMEÇAMOS SUBSTITUINDO y'' E y' POR SUAS FÓRMULAS DE DIFERENÇA CENTRADA:

$$x y'' - 2y' = 6 \Rightarrow x_i\left(\frac{y_{i+1} - 2y_i + y_{i-1}}{h^2}\right) - 2\left(\frac{y_{i+1} - y_{i-1}}{2h}\right) = 6$$

COMO $h = 0{,}2$, A FÓRMULA ACIMA SERVE PARA $i \in \{1; 2; 3; 4\}$ AFINAL OS VALORES PARA $i = 0$ E $i = 5$ JÁ SÃO DADOS EXPLICITAMENTE PELAS CONDIÇÕES DE CONTORNO.

PARA CADA VALOR DE i DENTRE OS QUATRO LISTADOS ACIMA, OBTEMOS UMA EQUAÇÃO DO SISTEMA NÃO-LINEAR ABAIXO

$$\begin{cases} x_1(y_{1+1} - 2y_1 + y_{1-1}) - \frac{1}{5}(y_{1+1} - y_{1-1}) = 6/25 \\ x_2(y_{2+1} - 2y_2 + y_{2-1}) - \frac{1}{5}(y_{2+1} - y_{2-1}) = 6/25 \\ x_3(y_{3+1} - 2y_3 + y_{3-1}) - \frac{1}{5}(y_{3+1} - y_{3-1}) = 6/25 \\ x_4(y_{4+1} - 2y_4 + y_{4-1}) - \frac{1}{5}(y_{4+1} - y_{4-1}) = 6/25 \end{cases}$$

ONDE $x_i = 0{,}2 ; 0{,}4 ; 0{,}6 ; 0{,}8$

E $i = 1 ; 2 ; 3 ; 4$

(4) $2y'' - xy' + y = e^x$, $0 \leq x \leq 1$, $y(0) = 1$, $y(1) = 3$

FORMA DISCRETA

$$2\left(\frac{y_{i+1} - 2y_i + y_{i-1}}{h^2}\right) - x_i\left(\frac{y_{i+1} - y_{i-1}}{2h}\right) + y_i = e^{x_i}$$

PARA $i = 1; 2; 3$ E $x_i = 0{,}25; 0{,}50; 0{,}75$

$$\Rightarrow \begin{cases} 2(y_2 - y_1 + y_0) - \frac{x_1}{8}(y_2 - y_0) + \frac{y_1}{16} = e^{x_1} \\ 2(y_3 - y_2 + y_1) - \frac{x_2}{8}(y_3 - y_1) + \frac{y_2}{16} = e^{x_2} \\ 2(y_4 - y_3 + y_2) - \frac{x_3}{8}(y_4 - y_2) + \frac{y_3}{16} = e^{x_3} \\ y(0) = y_0 = 1 \\ y(1) = y_4 = 3 \end{cases}$$