5 Determinantes

1. Seja $A = (a_{i,j})$ a matriz 5×5 cuja entrada na posição (i, j) é $\max\{i, j\}$, o maior entre i e j, para todo i e j. Calcule $\det(A)$ e conclua se A é ou não invertível.

   Resposta: A matriz A tem $\det(A) = 5$ e portanto é invertível.

2. Calcule o determinante de

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & x_1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & x_2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & x_3 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & x_4 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ x_5 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

   Resposta:

$$det(B) = -(x_5 - 1)(x_4 - 1)(x_3 - 1)(x_2 - 1)(x_1 - 1).$$

3. Dada a matriz

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

   Determinar

   i- Inversa de A

   ii- Determinante de A e de A^{-1}.

   Resposta:

   i- A inversa de A é

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -\frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

   ii- $\det(A) = 2$ e $\det(A^{-1}) = \frac{1}{2}$.

4. Calcular o determinante da matriz $A = (a_{ij}) \in \mathbb{M}(5 \times 5, \mathbb{R})$, cujas entradas são da forma

$$a_{ij} = 1 + x_i - y_j$$

   para x_t, y_t números reais quaisquer para todo $1 \leq t \leq 5$.

   Resposta: Para qualquer valor de x_i e y_j temos que

$$\det(A) = 0.$$

5. Considere a matriz

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & x & 1 \\ 0 & 1 & 1 & x \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

i- Determine os valores de x que tornam a matriz A invertível

ii- Calcule o determinante de A e de A^{-1} para cada x que torna A invertível.

iii- Ache a inversa de A para o caso $x = 3$.

Resposta:

i- Os valores de x que tornam a matriz A invertível, são $x \in \mathbb{R}\backslash\{1\}$.

ii- para $x \neq 1$

$$\det(A^{-1}) = \frac{1}{(x-1)^2}$$

- Para $x = 3$ temos

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -1/2 & 0 & 1/2 \\ -3/2 & 1/4 & -1/2 & 5/4 \\ 0 & 1/2 & 0 & -1/2 \\ 1/2 & -1/4 & 1/2 & -1/4 \end{pmatrix}$$

6. Calcule os determinantes das matrizes:

$$A = \begin{pmatrix} \sin\alpha & \cos\alpha \\ \sin\beta & \cos\beta \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} a+b & a+c \\ d+b & d+c \end{pmatrix} \qquad C = \begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix}$$

$$D = \begin{pmatrix} 1+x_1y_1 & 1+x_1y_2 \\ 1+x_2y_1 & 1+x_2y_2 \end{pmatrix} \qquad E = \begin{pmatrix} 1 & a \\ 1 & b \end{pmatrix} \qquad F = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \\ -1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$G = \begin{pmatrix} 0 & a & 0 \\ b & c & d \\ 0 & e & 0 \end{pmatrix} \qquad H = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & b & c \\ a^2 & b^2 & c^2 \end{pmatrix} I = \begin{pmatrix} a & b & c \\ b & c & a \\ c & a & b \end{pmatrix}$$

$$J = \begin{pmatrix} \sin\alpha & \cos\alpha & 1 \\ \sin\beta & \cos\beta & 1 \\ \sin\gamma & \cos\gamma & 1 \end{pmatrix} \qquad K = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -6 & -2 \\ 4 & 7 & 4 & 4 \\ -2 & -2 & 1 & -2 \\ -4 & -7 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

$$L = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 5 & 6 & 7 & 8 \\ 9 & 10 & 0 & 0 \\ 11 & 12 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$M = \begin{pmatrix} a & b & c & d \\ -b & a & d & -c \\ -c & -d & a & b \\ -d & c & -b & a \end{pmatrix} \qquad N = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 & 2 \\ 0 & 2 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \\ 2 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

Resposta:

- A)

$$\det\begin{pmatrix} \sin\alpha & \cos\alpha \\ \sin\beta & \cos\beta \end{pmatrix} = \sin(\alpha - \beta)$$

- B)

$$\det \begin{pmatrix} a+b & a+c \\ d+b & d+c \end{pmatrix} = (a-d)(c-b)$$

- C)

$$\det \begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix} = a^2 + b^2$$

- D)

$$\det \begin{pmatrix} 1+x_1y_1 & 1+x_1y_2 \\ 1+x_2y_1 & 1+x_2y_2 \end{pmatrix} = (1+x_1y_1)(1+x_2y_2)-(1+x_2y_1)(1+x_1y_2)$$

- E)

$$\det \begin{pmatrix} 1 & a \\ 1 & b \end{pmatrix} = b-a$$

- F)

$$\det \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \\ -1 & -1 & 0 \end{pmatrix} \quad = \quad -1$$

- G)

$$\det \begin{pmatrix} 0 & a & 0 \\ b & c & d \\ 0 & e & 0 \end{pmatrix} = 0$$

- H)

$$\det \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & b & c \\ a^2 & b^2 & c^2 \end{pmatrix} = (b-a)\cdot(c-a)\cdot(c-b)$$

- I)

$$\det \begin{pmatrix} a & b & c \\ b & c & a \\ c & a & b \end{pmatrix} = 3abc - (a^3+b^3+c^3)$$

- J)

$$\det \begin{pmatrix} \sin\alpha & \cos\alpha & 1 \\ \sin\beta & \cos\beta & 1 \\ \sin\gamma & \cos\gamma & 1 \end{pmatrix} = \sin(\beta-\gamma) - \sin(\alpha-\gamma) + \sin(\alpha-\beta)$$

- K)$\det(K) = -27$
- L)

$$\det\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 5 & 6 & 7 & 8 \\ 9 & 10 & 0 & 0 \\ 11 & 12 & 0 & 0 \end{pmatrix} = 8$$

- M) $\det(M) = (a^2 + b^2 + c^2 + d^2)^2$,
- N)$\det(N) = 14$

7. Resolva a equação $f(x) = 0$ onde $f(x) = \det(A - xI)$ e a matriz A é a seguinte:

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 5 & 2 \end{pmatrix} \quad A = \begin{pmatrix} \cos a & \sin a \\ -\sin a & \cos a \end{pmatrix} \quad A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad A = \begin{pmatrix} 5 & 6 & -3 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

$$A = \begin{pmatrix} 5 & 2 & -3 \\ 4 & 5 & -4 \\ 6 & 4 & -4 \end{pmatrix} \quad A = \begin{pmatrix} 4 & -2 & 2 \\ -5 & 7 & -5 \\ -6 & 6 & -4 \end{pmatrix} \quad A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -2 & 0 \\ -2 & 3 & -2 \\ 0 & -2 & 4 \end{pmatrix} \quad A = \begin{pmatrix} -2 & 2 & -2 \\ 2 & 1 & -4 \\ -2 & -4 & 1 \end{pmatrix} \quad A = \begin{pmatrix} 2 & -2 & 3 \\ 0 & 3 & -2 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix};$$

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 1 \\ 2 & -2 & 1 \end{pmatrix}; \quad A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 3 & 0 \\ 3 & 2 & -2 \end{pmatrix}.$$

Resposta:

1.

$$x_1 = 7, \qquad x_2 = -2$$

2.não tem solução real.

3. $x_1 = -1$ e $x_2 = 1$

4. Tem uma única raiz real $x \simeq 0,22$.

5. $x_1 = 1$ e $x_2 = -1$

8. Considere a matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$

   a) Calcule o $det(A^n)$, para todo número natural n.

b) Usando escalonamento encontre a matriz inversa A^{-1}.

Resposta:

a) $det(A^n) == (-1)^n$

b)

$$A^{-1}\begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 2 & -2 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

9. Verificar se as afirmações abaixo são verdadeiras ou falsas. Justifique.

a) Toda matriz é produto de matrizes elementares.

b) Seja A uma matriz $n \times n$ tal que $A^4 - A^2 + A = 3I_n$, então A é invertível.

c) Se A, B e C são matrizes $n \times n$, então $\det(A(B + C)) = \det(AB) + \det(AC)$.

Resposta:

a) (FALSO)

b) (VERDADEIRO)

c) (FALSO).

10. Considere a matriz, que depende do parámetro k,

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 3k & 8+2k & k-1 \\ 0 & 8k+8 & 0 \end{pmatrix}$$

a) Determinar, para quais valores reais de k a matriz A é invertível.

b) Calcular a inversa, para o caso $k = 0$, utilizando operações elementares nas linhas.

Resposta:

a) A será invertível caso $k \notin \{-1, 1\}$.

b)

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \frac{1}{4} \\ 0 & 0 & \frac{1}{8} \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

11. Determinar para quais valores reais de a a seguinte matriz

$$A = \begin{pmatrix} a & 3 & a-2 \\ a & 4-a & a-1 \\ -3a & -9 & 7-2a \end{pmatrix}$$

é invertível.

Resposta: $a \notin \{-1, 0, 1\}$.

12. Verifique se as afirmações abaixo são verdadeiras ou falsas. Justifique.

   - Existem duas matrizes $A,\ B$ de tamanho $n\times n$ tais que $\det(A) \neq 0$, $B \neq 0$ e $AB = 0$. **Resposta:** (FALSO)
   - Se $A,\ B$ são duas matrizes de tamanho $n\times n$ então, $\det(A-B) = \det(A) - \det(B)$. **Resposta:** (FALSO)
   - Se A e B são matrizes de tamanho $n \times n$ tais que AB é invertível então A e B são invertíveis. **Resposta:** (VERDADEIRO)
   - Se A e B são duas matrizes de tamanho $n \times n$ então $\det(A + 2B) = \det(A) + 2^n \det(B)$. **Resposta:** (FALSO)
   - Se A e B são duas matrizes quadradas tais que $A - B$ possui alguma linha nula, então $\det(A) = \det(B)$. **Resposta:** (FALSO)
   - Se n é impar, toda matriz antisimétrica de tamanho $n \times n$ tem determinante nulo. **Resposta:** (VERDADEIRO)
   - Seja A uma matriz de tamanho $n \times n$. Se $A^3 = I$ ($I =$a matriz identidade), então $\det(A) = 1$. **Resposta:** (VERDADEIRO)