

# Projeto 02 - Cinturão de Van Allen

Equipe Donner

Diogo Silva, Guilherme Shimada, Leonardo Vieira, Lucca Miranda, Pedro Azevedo

6 de Outubro, 2021

## Resumo

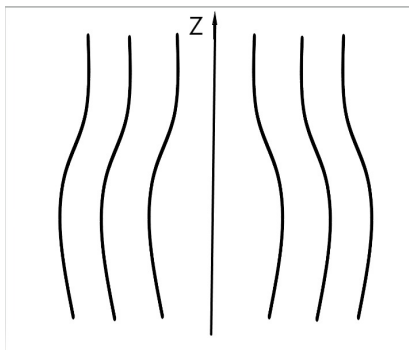
Este artigo apresenta uma discussão teórica a respeito do comportamento de partículas subatômicas no interior e nos limites do Cinturão de Van Allen. Para esse propósito, apresentaremos equações que descrevem tais comportamentos no ambiente em questão, a fim de compreender de uma melhor maneira a dinâmica do comportamento dessas partículas ao serem aprisionadas em uma região de campo magnético variável.

**Palavras-chave:** cinturão de Van Allen, momento magnético, conservação de energia.

## 1 Introdução

Nesse artigo, discutiremos aspectos teóricos na dinâmica das partículas subatômicas eletricamente carregadas ao penetrarem em regiões de campo magnético terrestre variável conhecidas como Cinturões de Van Allen. Essas regiões são afetadas por um fenômeno denominado espelho magnético, no qual um campo magnético é capaz de, ao alterar uma das componentes da velocidade de uma partícula, prendê-la em uma região do espaço.

Figura 1 – Alinhamento do campo magnético



Fonte: Autoral

Inicialmente, este estudo pretende, a partir de um campo magnético variável projetado sobre o eixo  $z$  como mostra a figura ??, além do uso das equações do eletromagnetismo, definir o momento magnético. Após isso, será possível provar que sua

variação no tempo é nula e que, portanto, existe um arranjo capaz de variar componentes da velocidade de modo que partículas fiquem aprisionadas.

## 2 Metodologia

### 2.1 Momento Magnético

Começamos nosso estudo analisando o momento magnético de partículas no interior de Cinturões de Van Allen que, em espiras, equivale a

$$\mu = Ai. \quad (1)$$

Usando a definição de corrente e a fórmula da área de um círculo, podemos reescrever a equação 1 como

$$\mu = \pi r^2 \frac{q}{\Delta t}, \quad (2)$$

a qual pode ser simplificada quando tomamos o intervalo de tempo  $\Delta t$  equivalente ao período  $T$ . Assim, temos:

$$\begin{cases} \Delta t = T \\ T = \frac{2\pi}{\omega} \\ \mu = \frac{\pi r^2 q}{\Delta t}. \end{cases} \quad (3)$$

$$\Rightarrow \mu = \frac{\pi r^2 q \omega}{2\pi} = \frac{r^2 q \omega}{2}. \quad (4)$$

Como a velocidade é perpendicular ao campo magnético, procede que

$$v_{\perp} = \omega r, \quad (5)$$

podemos escrever  $\omega r^2$  como  $v_{\perp}^2/\omega$ , assim chegando a

$$\mu = \frac{v_{\perp}^2 q}{2\omega}, \quad (6)$$

sobre a qual podemos aplicar a igualdade

$$\omega = \frac{qB}{m}, \quad (7)$$

obtida quando igualamos a resultante centrípeta à força magnética. Assim, completamos a demonstração da equivalência

$$\mu = \frac{v_{\perp}^2 m}{2B}. \quad (8)$$

## 2.2 Força Magnética

Nessa seção, deduziremos uma equação para a componente  $z$  da força magnética ( $F_z$ ) partindo da Lei de Gauss:

$$\oint \vec{E} \cdot d\vec{A} = \oint \nabla \cdot \vec{E} \, dV = \int \frac{\rho}{\epsilon_0} dV \quad (9)$$

$$\Rightarrow \nabla \cdot \vec{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0}. \quad (10)$$

Assim, se a densidade magnética ( $\rho$ ) tiver ordem de grandeza muito inferior à permeabilidade magnética do meio ( $\epsilon_0$ ), temos que

$$\nabla \vec{B} \approx 0 \Rightarrow \frac{dB_x}{dx} + \frac{dB_y}{dy} + \frac{dB_z}{dz} \approx 0, \quad (11)$$

que, em coordenadas polares, equivale a

$$\frac{1}{r} \frac{d(rB_r)}{dr} + \frac{1}{r} \frac{dB_{\theta}}{d\theta} + \frac{dB_z}{dz} \approx 0. \quad (12)$$

Se a taxa de variação do campo magnético com relação ao ângulo  $\theta$  for muito pequena, o segundo termo da soma torna-se desprezível. Assim temos:

$$\frac{1}{r} \frac{d(rB_r)}{dr} + \frac{1}{r} \frac{dB_{\theta}}{d\theta} + \frac{dB_z}{dz} = 0.$$

$$\Rightarrow \frac{1}{r} \frac{d(rB_r)}{dr} + \frac{dB_z}{dz} = 0. \quad (13)$$

Agora temos uma equação diferencial que pode ser separada e integrada da seguinte maneira:

$$\frac{d(rB_r)}{dr} = -r \frac{dB_z}{dz} \quad (14)$$

$$\Rightarrow \int d(rB_r) = -\frac{dB_z}{dz} \int r dr \quad (15)$$

$$\Rightarrow rB_r = \frac{dB_z}{dz} \cdot \frac{r^2}{2}$$

$$\Rightarrow B_r = \frac{dB_z}{dz} \cdot \frac{r}{2}. \quad (16)$$

Utilizando a fórmula da força magnética, temos:

$$F = q(\vec{v} \times \vec{B}) \quad (17)$$

$$\Rightarrow F = q \begin{vmatrix} r & \theta & z \\ v_r & v_{\theta} & v_z \\ B_r & B_{\theta} & B_z \end{vmatrix} \quad (18)$$

$$\begin{aligned} F_r &= q(v_{\theta}B_z - v_zB_{\theta}) \\ \Rightarrow F_{\theta} &= q(-v_rB_z + v_zB_r) \\ F_z &= q(v_rB_{\theta} - v_{\theta}B_r). \end{aligned} \quad (19)$$

Note que a componente  $F_z$  pode ser simplificada se assumirmos novamente que  $B_{\theta} \rightarrow 0$  (como fizemos na equação 13), o que nos leva à

$$F_z = q(v_rB_{\theta} - v_{\theta}B_r)$$

$$\Rightarrow F_z = -qv_{\theta}B_r,$$

na qual podemos substituir a expressão de  $B_r$  expressa na equação 16, para chegar a

$$F_z = -qv_{\theta} \left( \frac{dB_z}{dz} \cdot \frac{r}{2} \right) \quad (20)$$

$$\Rightarrow F_z = \frac{1}{2} q r v_{\theta} \frac{\partial B}{\partial z}. \quad (21)$$

Em coordenadas polares, a direção  $\theta$  é ortogonal a direção  $z$ , então  $v_\theta = v_\perp$ . Assim, a força magnética pode ser escrita como

$$F_z = -\frac{1}{2}qr v_\perp \frac{\partial B}{\partial z} \quad (22)$$

Usando a equação 5, substituímos  $r$  por  $v_\perp/\omega$ , obtendo

$$F_z = -\frac{1}{2}q \left( \frac{v_\perp}{\omega} \right) v_\perp \frac{\partial B}{\partial z}. \quad (23)$$

Analogamente, usamos o inverso da equação 7 para substituir  $1/\omega$ , assim chegando a

$$\begin{aligned} F_z &= -\frac{1}{2} \left( \frac{qmv_\perp^2}{qB} \right) \frac{\partial B}{\partial z} \\ \Rightarrow F_z &= - \left( \frac{mv_\perp^2}{2B} \right) \frac{\partial B}{\partial z}, \end{aligned} \quad (24)$$

a qual pode ser convenientemente escrita como o produto dos seguintes dois fatores:

$$F_z = -\mu \frac{\partial B}{\partial z}, \quad (25)$$

onde  $\mu$  é o momento magnético.

### 2.3 Conservação de Energia

Se assumirmos que a componente do campo magnético na direção  $z$  é muito maior que suas demais componentes, temos, pela Segunda Lei de Newton,

$$m \frac{\partial v_\parallel}{\partial t} = -\mu \frac{\partial B_z}{\partial z}, \quad (26)$$

onde  $v_\parallel$  é a componente da velocidade paralela a  $F_z$ . Considerando que  $v_\parallel = \partial z / \partial t$ , podemos multiplicar o lado esquerdo por  $v_\parallel/2$  e o lado direito por  $1/2 \times \partial z / \partial t$  sem desequilibrar a equação, o que nos leva à expressão

$$\frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{mv_\parallel^2}{2} \right) = -\mu \frac{\partial B_z}{\partial z}, \quad (27)$$

à qual aplicamos a equivalência de momento magnético escrita na equação 8 para obter

$$\frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{mv_\parallel^2}{2} \right) = - \left( \frac{v_\perp^2 m}{2B} \right) \frac{\partial B_z}{\partial z}. \quad (28)$$

Pelo Princípio da Conservação da Energia temos que a soma das energias cinéticas devidas

a velocidade paralela e a velocidade perpendicular deve ser constante, portanto

$$\frac{mv_\parallel^2}{2} + \frac{mv_\perp^2}{2} = \text{constante}, \quad (29)$$

que, derivando os dois lados dessa equação, é

$$\frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{mv_\parallel^2}{2} \right) + \frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{mv_\perp^2}{2} \right) = 0 \quad (30)$$

$$\Rightarrow -\mu \frac{\partial B_z}{\partial t} + \frac{\partial(\mu + B_z)}{\partial t} = 0 \quad (31)$$

$$\Rightarrow \cancel{\frac{\mu \partial B_z}{\partial t}} + \cancel{\frac{\mu \partial B_z}{\partial t}} + \frac{B_z \partial u}{\partial t} = 0 \quad (32)$$

$$\Rightarrow \frac{B_z \partial u}{\partial t} = 0 \quad (33)$$

$$\xrightarrow{B_z \neq 0} \frac{\partial u}{\partial t} = 0, \quad (34)$$

ou seja, o momento magnético não se altera com o tempo, permanecendo constante.

### 2.4 Interpretação Física

Do resultado da seção anterior, podemos depreender que

$$\mu = \frac{mv_\perp^2}{2B} = \text{constante} \quad (35)$$

$$\Rightarrow \frac{mv_\perp^2}{2} = \text{constante} \times B \quad (36)$$

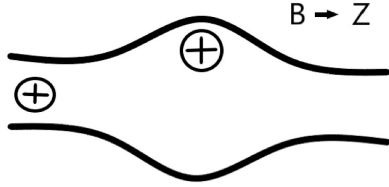
$$\Rightarrow \frac{mv_\perp^2}{2} \propto B \quad (37)$$

$$\Rightarrow K_\perp \propto B. \quad (38)$$

Como a energia cinética total do sistema é a soma das energias cinéticas (ou seja  $K = K_\perp + K_\parallel$ ), a equação 38 nos diz que, quando a velocidade perpendicular é máxima, a velocidade paralela é mínima. Isto, pois o aumento da velocidade perpendicular causa a diminuição da velocidade paralela. Assim, em campos magnéticos suficientemente altos, a velocidade paralela diminui até se anular e em seguida trocar de sinal, cujo significado físico é uma inversão de sentido.

Para aprofundar o estudo desse fenômeno análogo à reflexão total que estudamos em ótica, consideremos duas partículas em regiões distintas do Cinturão de Van Allen: uma na região onde o campo magnético é forte (na iminência da mudança de velocidade) e outra onde o campo magnético é fraco.

Figura 2 – Partícula sob campo magnético forte (a esquerda) e fraco (ao centro)



Fonte: Autoral

Assumindo que as mudanças no momento magnético são ínfimas, temos:

$$\mu_{\text{fraco}} = \mu_{\text{forte}} \Rightarrow \frac{v_{\perp}^2 m}{2B_{\text{fraco}}} = \frac{v_{\perp}^2 m}{2B_{\text{forte}}} \quad (39)$$

Como a partícula que está sob efeito de campo magnético forte está na iminência de ser refletida, sua velocidade paralela tende a 0. Assim, podemos modelar a conservação de energia do sistema com a seguinte aproximação:

$$v_{\perp \text{forte}}^2 + v_{\parallel \text{forte}}^2 \xrightarrow{0} v_{\parallel 0}^2 + v_{\perp 0}^2$$

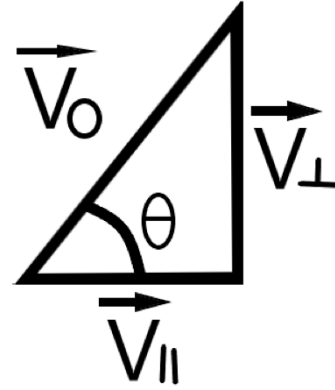
$$v_{\perp \text{forte}}^2 = v_{\parallel 0}^2 + v_{\perp 0}^2$$

$$v_{\perp \text{forte}}^2 = v_0^2$$

onde  $v_0$  representa o vetor composto de velocidade (inclui a velocidade paralela e a perpendicular).

Com base nessas equações e na geometria dos vetores de velocidade ilustrada abaixo, podemos determinar o ângulo limite ( $\theta_l$ ) em que a partícula não muda de sentido mas também não atravessa o "espelho magnético".

Figura 3 – Representação geométrica das velocidades



Fonte: Autoral

Da figura, podemos perceber que  $\sin \theta = v_{\perp}/v_0$ . Combinando essa informação às equações 39 e ??, temos:

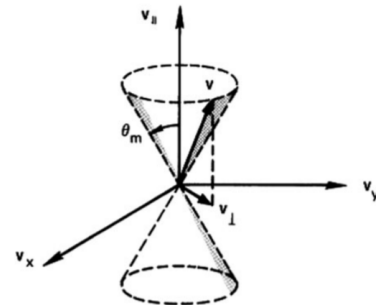
$$\frac{B_0}{B_{\text{forte}}} = \frac{v_{\perp 0}^2}{v_{\perp \text{forte}}^2} = \frac{v_{\perp 0}^2}{v_0^2} = \sin^2 \theta, \quad (40)$$

da qual tiramos que a expressão para o ângulo limite, admitindo  $B_0$  como o campo magnético na região em que ele é menos intenso, é:

$$\theta_l = \arcsin \sqrt{\frac{B_0}{B_{\text{forte}}}} \quad (41)$$

Além disso, como apenas a componente da velocidade que é perpendicular ao campo magnético influencia a força magnética (afinal  $F = q(v_{\perp} \times B) = qv_{\perp} B$ ), a força magnética tende a zero quando  $\theta \rightarrow \theta_l$ . Essa relação entre a força e o ângulo é ilustrada pelo cone de perda abaixo.

Figura 4 – Cone de perda



Fonte: (CHEN, 2018)

### 3 Resultados e Discussão

Em primeira análise, é preciso fazer uma contextualização do sistema proposto. O objeto de estudo é o fenômeno do espelho magnético, o qual pode ser chamado de armadilha magnética. Tendo isso em vista considere um sistema no qual exista um campo magnético com sua direção em  $z$  e sua maior intensidade na componente  $z$ .

Por meio dos conhecimentos de eletrostática, é admitido que o divergente do campo resulta em zero, tal equação foi tirada por semelhança da lei de Gauss na sua forma diferencial. A partir disso, decompondo o divergente do campo em sua forma de coordenadas polares, é possível obter a componente  $B_r$  do campo na forma de uma equação por meio da integralização dos termos obtidos na decomposição do divergente do campo.

Com a equação do campo, é possível obter o valor da força magnética gerada nesse sistema, utilizando a fórmula da força de Lorentz.

Como o movimento desse sistema é em espiral, é possível encontrar uma formulação para o momento magnético do mesmo, tendo isso em vista, utilizando a conservação de energia, é possível verificar que o momento magnético é constante.

A dinâmica responsável pelo funcionamento do espelho magnético é justamente essa característica de invariância do momento magnético, haja vista que ele é antiparalelo à força magnética e, segundo a lei da conservação de energia, a soma das componentes da velocidade (paralela e perpendicular) deve ser constante. Dentro desse contexto, é possível verificar uma relação de proporcionalidade entre o campo magnético e a energia cinética da componente perpendicular da velocidade, em razão disso, quando a partícula entra em uma região do campo de forte intensidade, a energia cinética gerada pela componente perpendicular da velocidade terá um aumento considerável e, por consequência da lei da conservação da energia, a energia cinética gerada pela componente paralela da velocidade sofrerá uma redução considerável.

Nessa relação de ponderação das energias e das velocidades é que funciona a dinâmica do confinamento magnético, uma vez que quando uma partícula se direciona para próximo de uma região de alta intensidade do campo magnético, ela sofre uma inflexão.

Tal dinâmica é apresentada no cinturão de Van Allen, o qual tem as regiões equatoriais como locais de baixa intensidade e as regiões polares como de alta intensidade.

### 4 Implicações

Sabe-se que o campo magnético da Terra é fundamental para a vida no planeta. Ele impede a entrada de partículas com velocidades extremas vindas do vento solar, que são defletidas devido à suas cargas elétricas.

Caso essas partículas conseguissem atingir a superfície terrestre, poderiam apresentar diversos riscos à saúde, pois os íons provenientes dos ventos solares possuem grande quantidade de energia e podem danificar tecidos e a estrutura do DNA, ocasionando problemas a curto e longo prazo. Outra consequência seria o dano aos equipamentos eletrônicos, além de prejudicar todo o sistema de comunicação por ondas de rádio e internet.

Entretanto, para algumas partículas que incidem com uma certa velocidade e com um ângulo específico em relação às linhas de campo da magnetosfera, é possível atravessar o campo magnético. As mesmas ficam aprisionadas em seu interior pelo efeito de “espelho magnético” proporcionado pelo mesmo e receberam o nome de Cinturão de Van Allen. Como consequência, nas regiões polares onde o campo magnético se cruza com a atmosfera superior, as partículas desse cinturão formam as famosas auroras boreais e austrais.

## Referências

CHEN, F. F. *Introduction to plasma physics and controlled fusion*. [S.l.]: Springer, 2018. Nenhuma citação no texto.

LEITHOLD, A. A. *Estudo da propagação de rádio e das descargas atmosféricas na região da anomalia magnética do atlântico sul*. [S.l.]: Faculdades Integradas "Espírita", 2010. Nenhuma citação no texto.