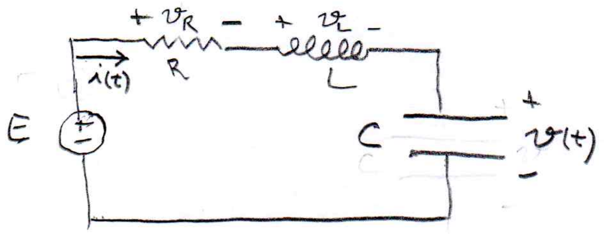
EA513-U — Circuitos Elétricos — 2^0 Semestre de 2021

Exercício – Conversa 9

- Considere novamente o circuito "não autônomo" de 2^a ordem representado na página 111 da Conversa 9. Suponha $E = 5\ V$, $R = 2\sqrt{3}\ \Omega$ $L = 1\ H$ e $C = 1/4\ F$ (um valor de capacitância muito alto que ajuda neste exercício ilustrativo). Suponha $i(0)$=0 A e $v(0) = 10\ V$. Encontre $v(t)$ e $i(t)$ para $t \geq 0$.

Dica: Lembre que a solução da equação homogênea neste caso é $v_h = \exp(-\sqrt{3}t) \cdot [A\cos t + B \sin t]$ (ver página 106 da Conversa 9).



$$-E + v_R + v_L + v = 0$$

$$v_R + v_L + v = E$$

$$v_R = R \cdot i\ ,\quad v_L = L\frac{di}{dt}\ ,\quad i = C\frac{dv}{dt}$$

$$Ri + L\frac{di}{dt} + v = E$$

$$RC\frac{dv}{dt} + L\frac{d\left(C\frac{dv}{dt}\right)}{dt} + v = E$$

$$LC\frac{d^2v}{dt^2} + RC\frac{dv}{dt} + v = E$$

$$\frac{d^2v}{dt^2} + \frac{R}{L}\frac{dv}{dt} + \frac{1}{LC}v = \frac{1}{LC}E$$

ESCREVENDO NA FORMA PARAMETRIZADA,

$$\frac{d^2v}{dt^2} + 2\alpha\frac{dv}{dt} + (w_0)^2 v = (w_0)^2 \cdot E$$

$$2\alpha = \frac{R}{L} = 2\sqrt{3}\ ,\quad (w_0)^2 = \frac{1}{LC} = 4$$

LOGO,

$\alpha = \sqrt{3}$ e $w_0 = 2 \Rightarrow w_0 > \alpha \Rightarrow$ AMORTECIMENTO FRACO.

SABEMOS QUE A SOLUÇÃO COMPLETA É $\boxed{v = v_p + v_h}$

ONDE v_p É A SOLUÇÃO EM REGIME PERMANENTE (OU SOLUÇÃO PARTICULAR) E v_h É A SOLUÇÃO

DA EQUAÇÃO HOMOGÊNEA (EQUAÇÃO DO CIRCUITO SEM A FONTE, OU SEJA, DO CIRCUITO AUTÔNOMO),

$$\frac{d^2 v_h}{dt^2} + 2\alpha \frac{dv_h}{dt} + (\omega_0)^2 v_h = 0$$

É IMEDIATO VERIFICARMOS QUE $v_p = E = 5V$ É A SOLUÇÃO EM REGIME PERMANENTE. PRECISAMOS CALCULAL v_h.

COMO $\omega_0 > \alpha$ (AMORTECIMENTO FRACO), TEMOS:

$$v_h = \exp(-\alpha t) \cdot [A \cdot \cos \omega d t + B \operatorname{sen} \omega d t]$$

NO CASO, $\alpha = \sqrt{3}$ e $\omega d = \sqrt{(\omega_0)^2 - \alpha^2} = \sqrt{4-3} = 1$.

LOGO,

$$v_h = \exp(-\sqrt{3} \cdot t) [A \cos t + B \operatorname{sen} t]$$

E

$$v = v_p + v_h = 5 + \exp(-\sqrt{3} t) [A \cos t + B \operatorname{sen} t] \text{ VOLTS}$$

AGORA, USA-SE AS CONDIÇÕES INICIAIS ($v(0) = 10V$ e $i(0) = 0A$) PARA CALCULAR O VALOR DAS CONSTANTES A e B.

$$v(0) = 5 + A = 10 \text{ VOLTS} \Rightarrow \boxed{A = 5}$$

$$i = C \frac{dv}{dt} \Rightarrow \frac{dv}{dt} = \frac{i}{C} \Rightarrow \left. \frac{dv}{dt} \right|_0 = \frac{i(0)}{C} = 0$$

USANDO EXPRESSÃO DA SOLUÇÃO COMPLETA,

$$\frac{dv}{dt} = -\sqrt{3} \exp(-\sqrt{3} t) [A \cos t + B \operatorname{sen} t] + \exp(-\sqrt{3} t) [-A \operatorname{sen} t + B \cos t]$$

LOGO,

$\sqrt{3} = 1,73$

$$\left. \frac{dv}{dt} \right|_0 = -\sqrt{3} \cdot A + B = 0 \Rightarrow B = \sqrt{3} \cdot A \cong 8,65$$

$$\boxed{v(t) = 5 + \exp(-1,73 \cdot t) [5 \cos t + 8,65 \operatorname{sen} t]} \text{ VOLTS}$$

$$i(t) = C \frac{dv}{dt} \Rightarrow i(t) = \frac{1}{4} \left[\frac{dv}{dt} \right] A$$, OBS: $\frac{dv}{dt}$ FOI CALCULADO ACIMA.