14 Coordenadas Cilíndricas e Esféricas

1. Seja $\mathcal{S}$ o conjunto dos pontos no espaço cujas coordenadas cartesianas x, y, z satisfazem a equação

$$3y^2 - z^2 + 6y - 6x + 15 = 0$$

a) Determinar que tipo de superfície quádrica é dada por $\mathcal{S}$, encontrando a mudança de coordenadas que levam a equação canônica.
b) Determinar que tipo de cônica obtemos intersecando $\mathcal{S}$ com o plano $x = 3$.
c) Escrever a equação de $\mathcal{S}$ em coordenadas esféricas.

Resposta:

a) Paraboloide hiperbólico.

b) Hipérbole sobre o plano $x' = 1$.

c)

$$3(\rho \sin(\theta) \sin(\phi))^2 - (\rho \cos(\phi))^2$$
$$+6(\rho \sin(\theta) \sin(\phi)) - 6\rho \cos(\theta) \sin(\phi) + 15 = 0.$$

2. Encontre uma equação em coordenadas cilíndricas da superfície cuja equação em coordenadas cartesianas é dada:

a) $x^2 + y^2 + 4z^2 = 16,$
b) $x^2 - y^2 = 3z^2.$
c) $x^2 + y^2 + z^2 = 9z;$
d) $x^2 + y^2 = 9.$

Resposta:

a)
$$r^2 + 4z^2 = 16.$$

b)
$$r^2 \cos(2\theta) = 3z^2.$$

c)
$$r^2 + z^2 = 9z.$$

d)
$$r = 3.$$

3. Encontre uma equação em coordenadas cartesianas da superfície cuja equação em coordenadas cilíndricas é dada:

a) $r = 3\cos\theta$
b) $z^2 \sin\theta = r^3.$
c) $r = z$
d) $z = r^2$
e) $z = r\cos(\theta + \pi/4) - 2r\sin(\theta)$
f) $z = r^2 + r\cos(\theta + \pi/3)$

Resposta:

a)
$$x^2 + y^2 = 3x.$$

b)
$$z^2 y = (x^2 + y^2)^2.$$

c)
$$\sqrt{x^2 + y^2} = z.$$

d)
$$z = x^2 + y^2.$$

e)
$$z = \frac{1}{\sqrt{2}}x - \frac{1}{\sqrt{2}}y - 2y.$$

f)
$$z = x^2 + y^2 + \frac{1}{2}x - \frac{\sqrt{3}}{2}y.$$

4. Encontre uma equação em coordenadas cartesianas da superfície cuja equação em coordenadas esféricas é dada:

   a) $r = 2\tan\theta$;
   b) $r = 9\sec\phi$.
   c) $r = \sin(\theta)\sin(\phi)$
   d) $r = 2\cos(\theta)$
   e) $r = \cos(\phi)$

   Resposta:

   a)
   $$\sqrt{x^2 + y^2 + z^2} = 2\frac{y}{x}.$$

   b)
   $$\sqrt{x^2 + y^2} = 9.$$

   c)
   $$x^2 + y^2 + z^2 = \frac{yz}{\sqrt{x^2 + y^2}}.$$

   d)
   $$\sqrt{x^2 + y^2 + z^2} = \frac{2x}{\sqrt{x^2 + y^2}}.$$

   e)
   $$x^2 + y^2 + z^2 = \sqrt{x^2 + y^2}.$$

5. Considere a superfície de revolução S obtida de rotacionar a curva
   $$\ell : z = y^2,$$
   no plano yz ao redor do eixo z.
   Determinar

i- a equação da superfície S em coordenadas cartesianas.

ii- a equação da superfície S em coordenadas cilíndricas.

iii- a equação da superfície S em coordenadas esféricas.

Resposta:

i- a equação da superfície S em coordenadas cartesianas é

$$x^2 + y^2 = z.$$

ii- a equação da superfície S em coordenadas cilíndricas é

$$r^2 = z.$$

iii- a equação da superfície S em coordenadas esféricas é

$$\rho = \frac{\cos(\phi)}{\sin(\phi)^2}$$

6. Seja S o conjunto dos pontos $P = (x, y, z)$ no espaço cujas coordenadas cartesianas x, y, z satisfazem a equação

$$x^2 + y^2 + z^2 = 9z.$$

a) Determinar que tipo de superfície é S.

b) Escrever a equação de S em coordenadas esféricas, escolhendo adequadamente o polo e os eixos.

Resposta:

a) Esfera de raio $r = \frac{9}{2}$ centrada em $(0, 0, 9/2)$.

b) Para coordenadas esféricas com polo em $(0, 0, 9/2)$

$$\rho = 9/2.$$