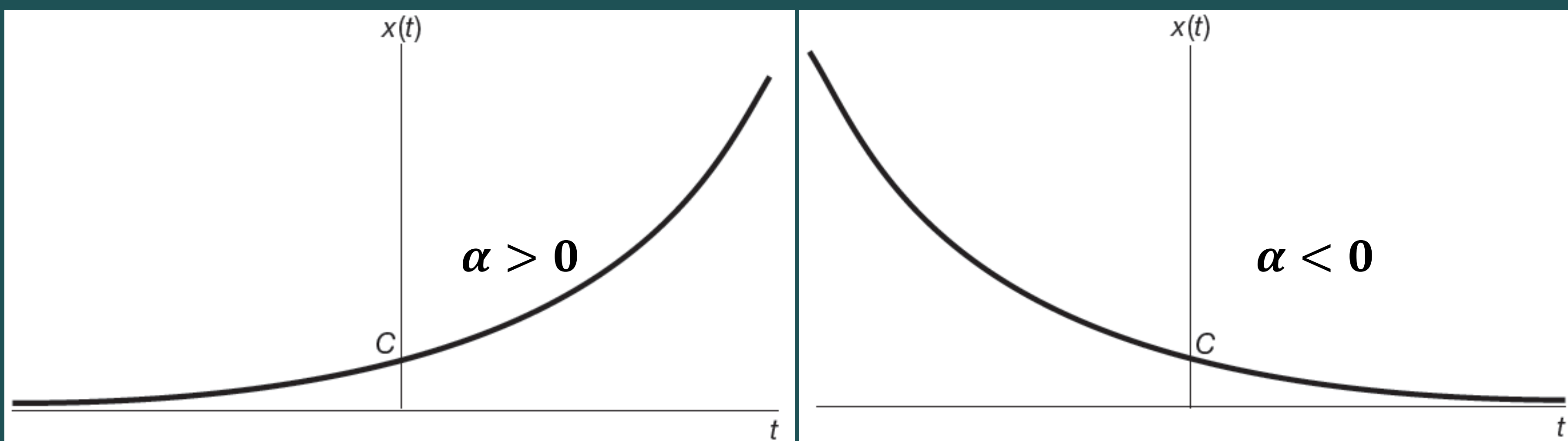
Aula 4
Exponenciais complexas e sinais senoidais; Simetria

EA614 ANÁLISE DE SINAIS

Exponenciais Complexas (TC)

- Considere o sinal $f(t) = Ce^{\alpha t}$, em que C e α são números complexos
- **Caso 1:** C e α são números reais



Oppenheim et al. (2010)

Exponenciais Complexas (TC)

- **Caso 2:** α é imaginário puro - $f(t) = e^{j\omega_0 t}$
  - É periódico?
  - Qual a energia e a potência média do sinal?
  - Harmônicas:
    - $\phi_k(t) = e^{jk\omega_0 t}, k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$

Exponenciais Complexas (TC)

- Caso 2: α é imaginário puro - $f(t) = e^{j\omega_0 t}$
  - Sinais senoidais

$$A cos(\omega_0 t + \theta) = \frac{A}{2}\left[e^{j(\omega_0 t+\theta)} + e^{-j(\omega_0 t+\theta)}\right] = A\mathfrak{Re}\{e^{j(\omega_0 t+\theta)}\}$$

$$A sen(\omega_0 t + \theta) = \frac{A}{2j}\left[e^{j(\omega_0 t+\theta)} - e^{-j(\omega_0 t+\theta)}\right] = A\mathfrak{Im}\{e^{j(\omega_0 t+\theta)}\}$$

  - Observações:

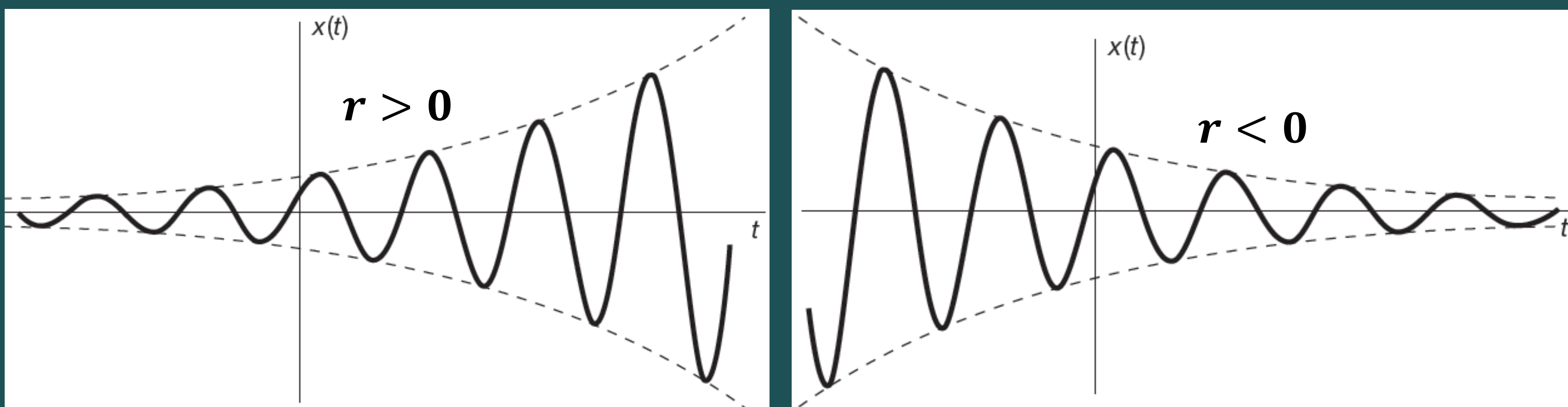
1. ω_0 e θ têm unidades de rad/s e rad, respectivamente
2. A frequência fundamental do sinal (em Hz) é $f_0 = \frac{\omega_0}{2\pi}$

Exponenciais Complexas (TC)

- **Caso 3:** C e α são complexos

$$Ce^{\alpha t} = |C|e^{j\theta}e^{(r+j\omega_0)t} = |C|e^{rt}e^{j(\omega_0 t+\theta)}$$

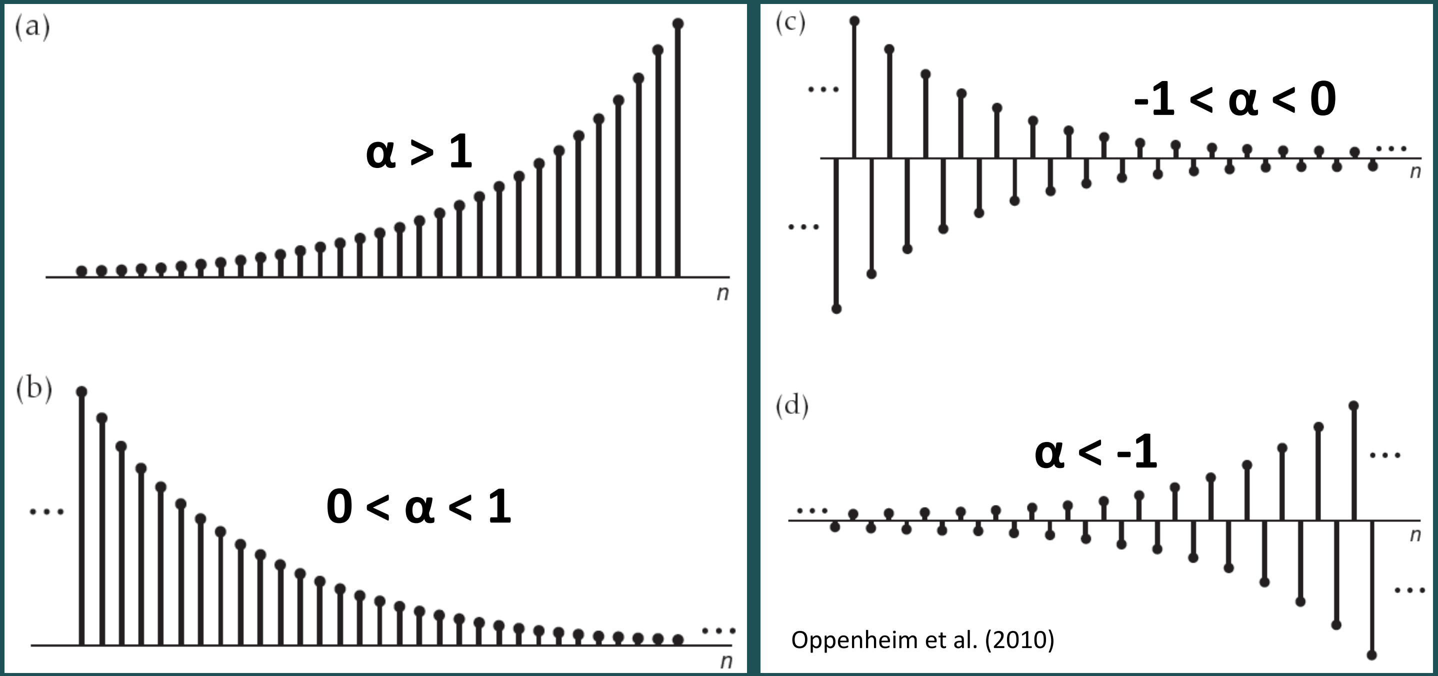
$$Ce^{\alpha t} = |C|e^{rt}[\cos(\omega_0 t+\theta) + jsen(\omega_0 t+\theta)]$$



Oppenheim et al. (2010)

Exponenciais Complexas (TD)

- Considere o sinal $f[n] = C\alpha^n$, em que C e α são números complexos
- **Caso 1:** C e α são números reais



Exponenciais Complexas (TD)

- **Caso 2:** Se $\alpha = e^{\beta}$ e β é complexo, então:
  $f[n] = e^{j\Omega_0 n}$
  - Sinais senoidais

$$A cos(\Omega_0 n + \Phi) = \frac{A}{2}\left[e^{j(\Omega_0 n+\Phi)} + e^{-j(\Omega_0 n+\Phi)}\right] = A\Re\mathrm{e}\{e^{j(\Omega_0 n+\Phi)}\}$$

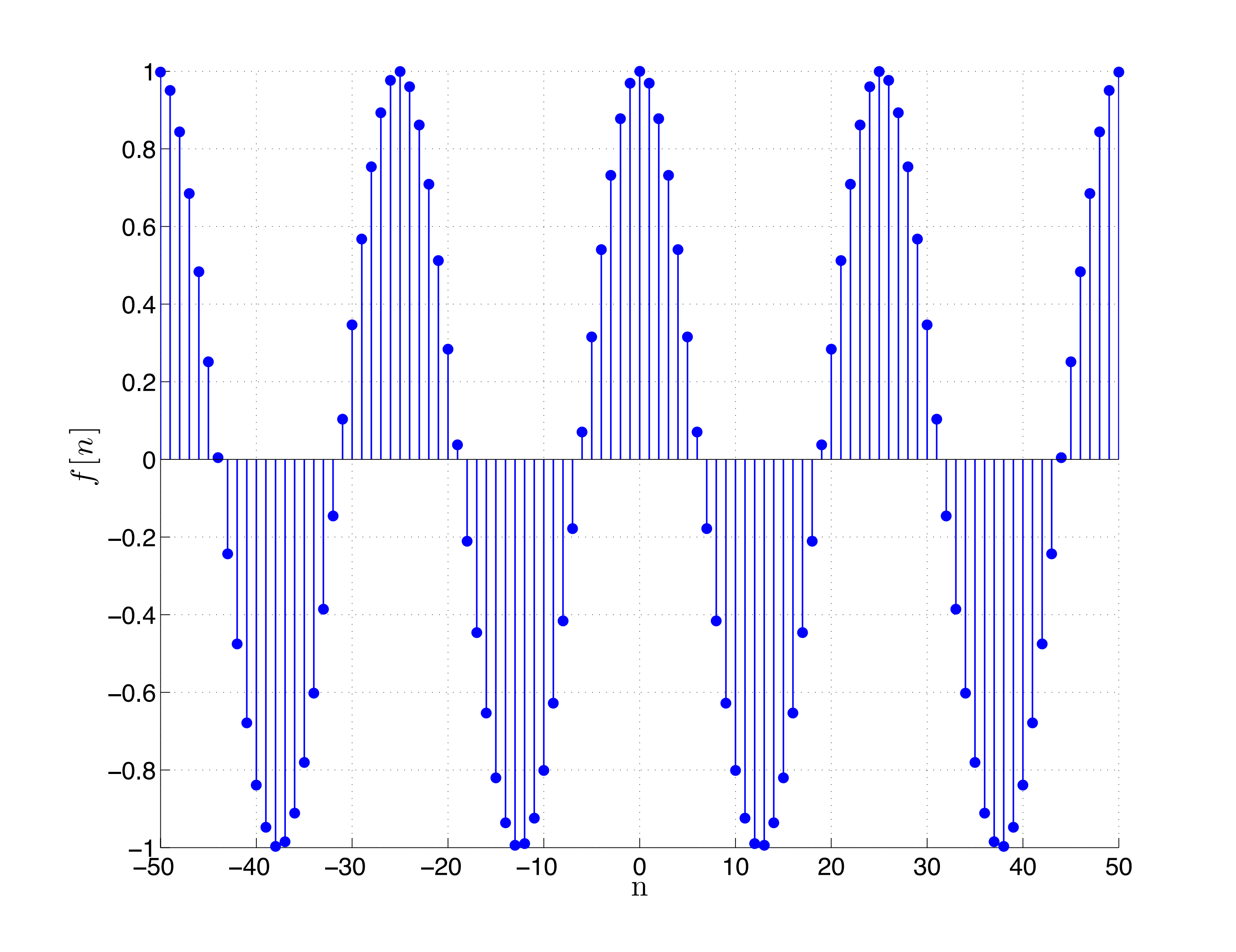
$$A sen(\Omega_0 n + \Phi) = \frac{A}{2j}\left[e^{j(\Omega_0 n+\Phi)} - e^{-j(\Omega_0 n+\Phi)}\right] = A\Im\mathfrak{m}\,\{e^{j(\Omega_0 n+\Phi)}\}$$

  - **Observação:** Se n é adimensional, então Ω_0 e Φ terão ambos unidades de rad.

Exponenciais Complexas (TD)

- **Caso 2:** Se $\alpha = e^{\beta}$ e β é complexo, então: $f[n] = e^{j\Omega_0 n}$
  - Este sinal é sempre periódico?
  - **Exercício:** Qual o período dos seguintes sinais?
    - $f[n] = \cos\left(\frac{8\pi n}{31}\right)$
    - $f[n] = \cos\left(\frac{n}{4}\right)$
    - $f[n] = e^{j\left(\frac{\pi}{4}\right)n}$

$$f[n] = \cos(n/4)$$

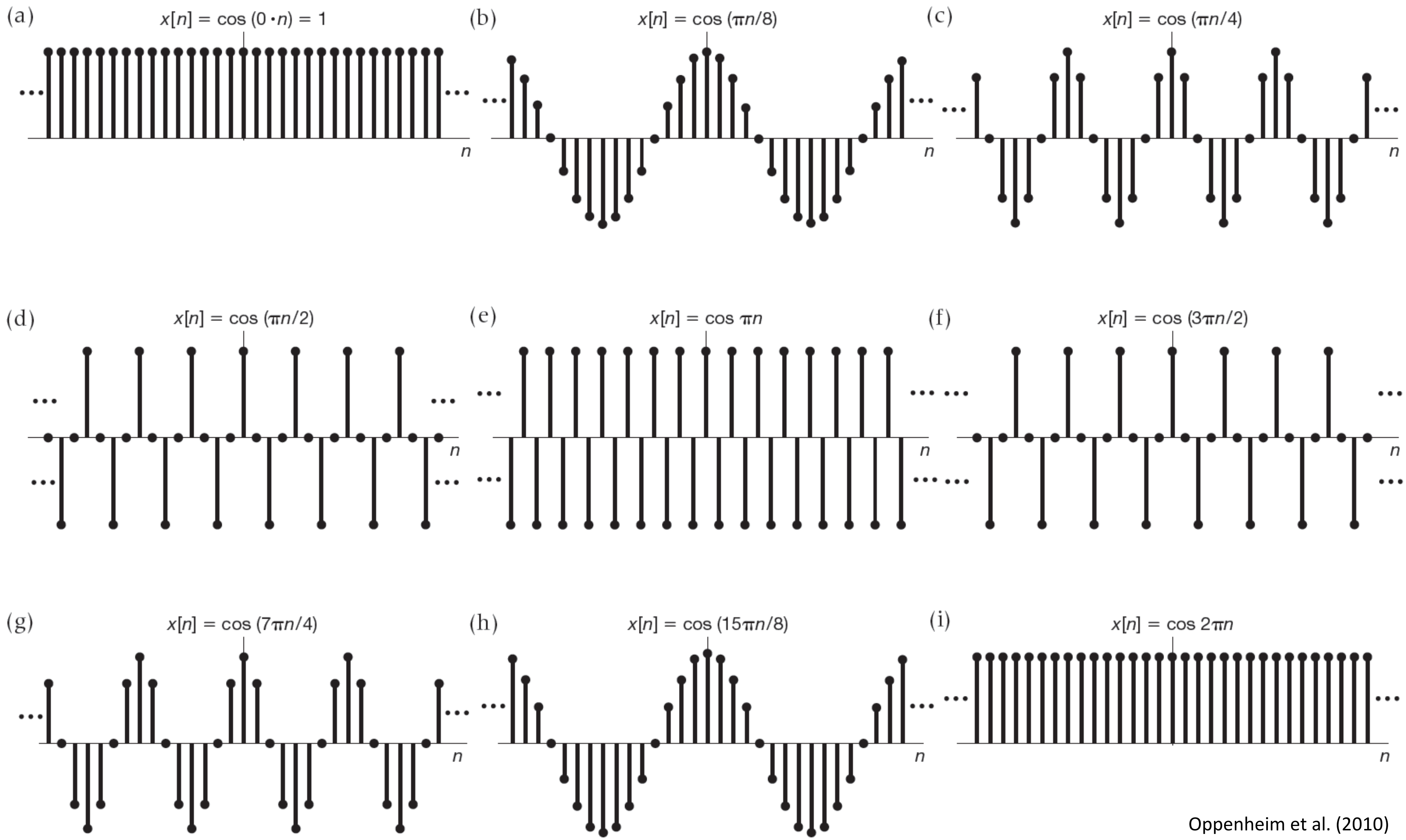


Exponenciais Complexas (TD)

- **Caso 2:** Se $\alpha = e^{\beta}$, então: $f[n] = e^{j\Omega_0 n}$
  - O que ocorre se $\Omega = \Omega_0 + 2\pi$?

Sinais com frequência iguais a Ω_0, $\Omega_0 \pm 2\pi$, $\Omega_0 \pm 4\pi$ ... serão sempre iguais em tempo discreto!

Sinais de alta frequência terão Ω_0 próximos de *$\pm\pi$ e múltiplos ímpares de π!*

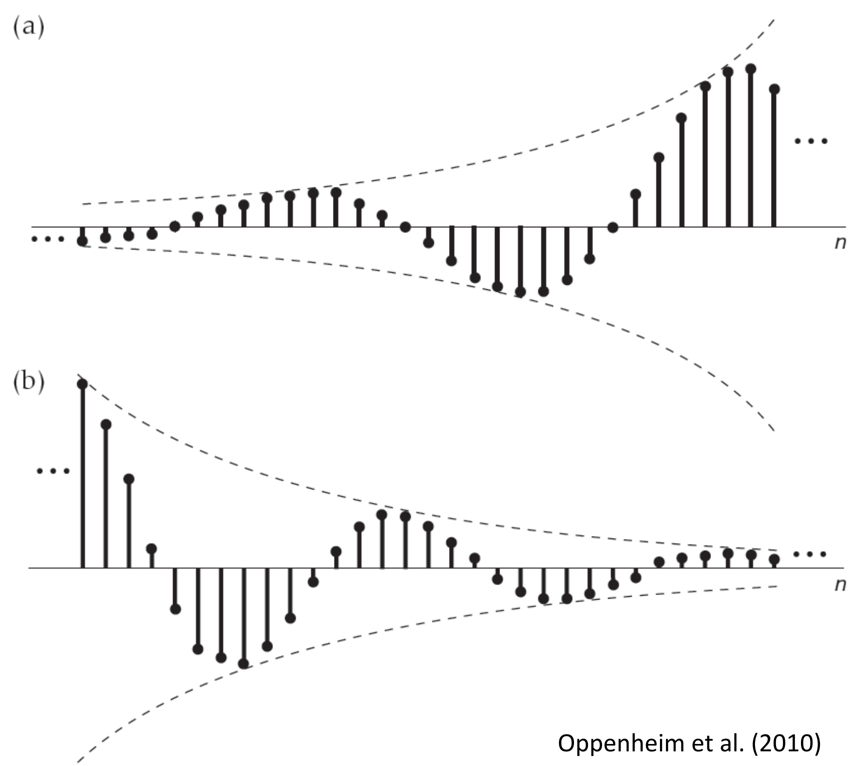


Oppenheim et al. (2010)

Exponenciais Complexas (TD)

- **Caso 3:** C e α são complexos

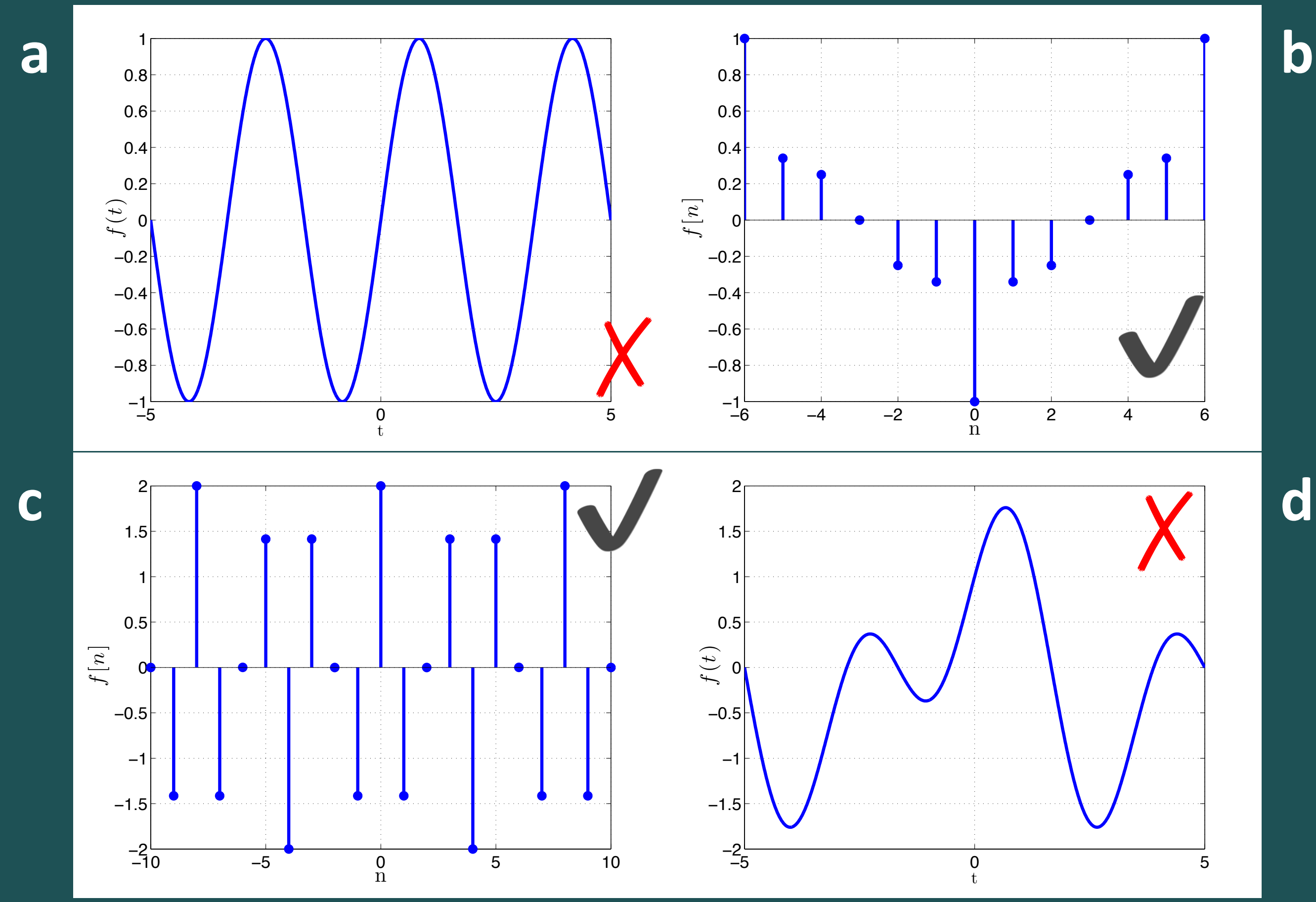
$$C\alpha^n = |C||\alpha|^n[\cos(\Omega_0 n + \Phi) + j sen(\Omega_0 n + \Phi)]$$



Oppenheim et al. (2010)

Simetria Par e Ímpar

- Quais destes sinais possuem simetria par?



Simetria Par e Ímpar

- Definições
  - Simetria par:

$$f(t) = f(-t) \text{ ou } f[n] = f[-n]$$

  - Simetria ímpar:

$$f(t) = -f(-t) \text{ ou } f[n] = -f[-n]$$

Componentes Pares e Ímpares

$$f(t) = \underbrace{\frac{1}{2}[f(t) + f(-t)]}_{\textbf{Componente Par}} + \underbrace{\frac{1}{2}[f(t) - f(-t)]}_{\textbf{Componente Ímpar}}$$

- Exemplos:
  1. $f(t) = e^{jt}$
  2. $f[n] = \begin{cases} 1, n \geq 3 \\ 0, n < 3 \end{cases}$