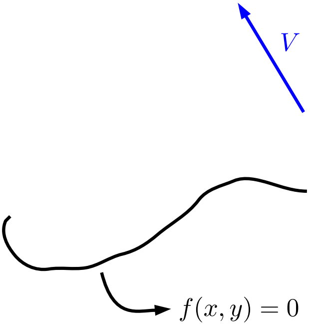
Superfícies Cilíndricas e de Revolução

Lucas E. A. Simões

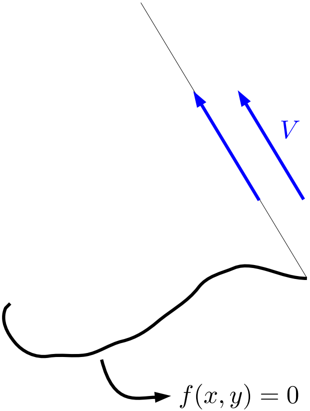
Departamento de Matemática Aplicada
UNICAMP

06 de junho de 2019

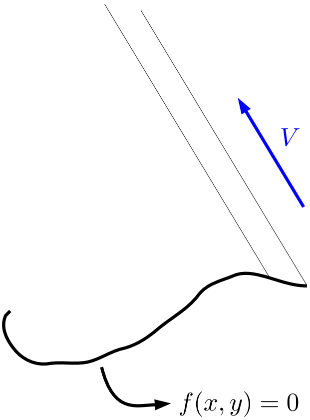
Superfícies Cilíndricas



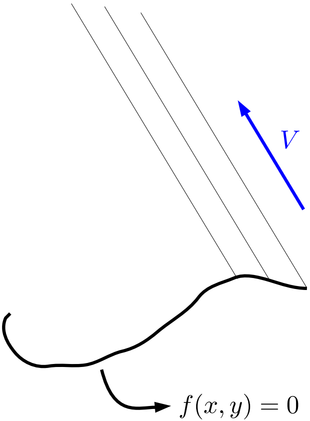
Superfícies Cilíndricas



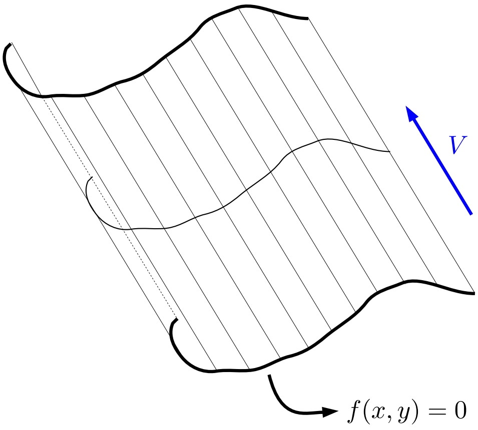
Superfícies Cilíndricas



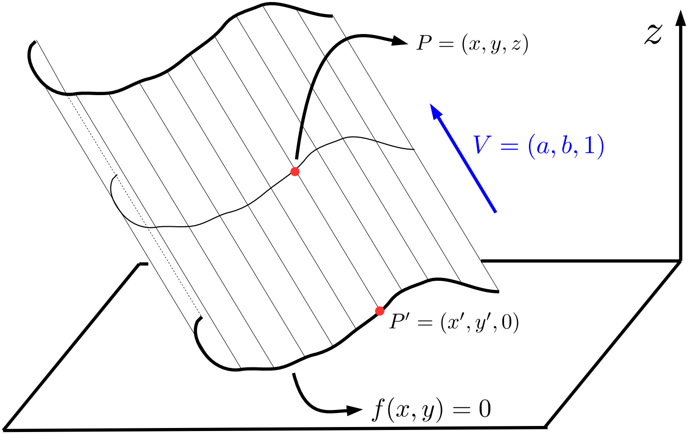
Superfícies Cilíndricas



Superfícies Cilíndricas

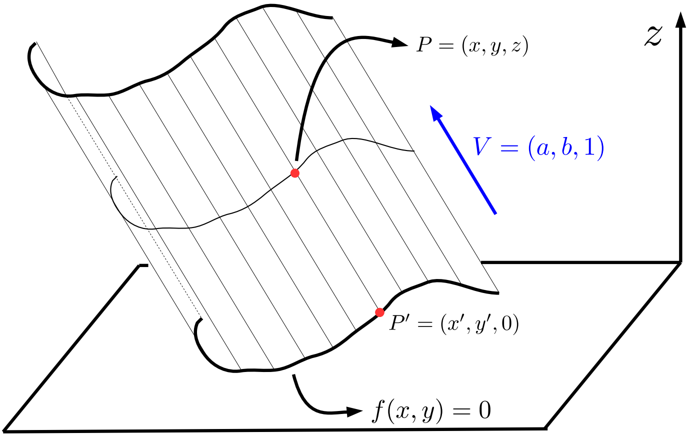


Superfícies Cilíndricas



Olhando a figura, percebemos que

$$\overrightarrow{P'P} = \lambda V \Leftrightarrow (x - x', y - y', z) = \lambda(a, b, 1).$$



Superfícies Cilíndricas

Olhando a figura, percebemos que

$$\overrightarrow{P'P} = \lambda V \Leftrightarrow (x - x', y - y', z) = \lambda(a, b, 1).$$

Portanto, temos que

$$\lambda = z \text{ e } x' = x - az, \; y' = y - bz.$$

Desta forma,

$$f(x', y') = 0 \Leftrightarrow \underbrace{f(x - az, y - bz) = 0}_{\text{equação da superfície cilíndrica}} \; .$$

Superfícies Cilíndricas

A reta móvel usada para gerar a superfície cilíndrica é chamada de **geratriz**, enquanto que a curva $f(x, y) = 0$ é chamada de **diretriz**.

Superfícies Cilíndricas

A equação encontrada vale somente para quando a curva está no plano xy.
O mesmo pode ser feito para quando a curva está nos planos xz ou yz.

UNICAMP

- Curva diretriz $f(x, y) = 0$ no plano xy e retas geratrizes paralelas ao vetor $V = (a, b, 1)$:

$$f(x - az, y - bz) = 0.$$

- Curva diretriz $f(y, z) = 0$ no plano yz e retas geratrizes paralelas ao vetor $V = (1, b, c)$:

$$f(y - bx, z - cx) = 0.$$

- Curva diretriz $f(x, z) = 0$ no plano xz e retas geratrizes paralelas ao vetor $V = (a, 1, c)$:

$$f(x - ay, z - cy) = 0.$$

Superfícies Cilíndricas

Exercício

Encontrar a equação da superfície cilíndrica $\mathcal{S}$ com curva diretriz $x^2 - 4y = 0$, $z = 0$, e reta geratriz paralela ao vetor $W = (1, -2, 3)$.

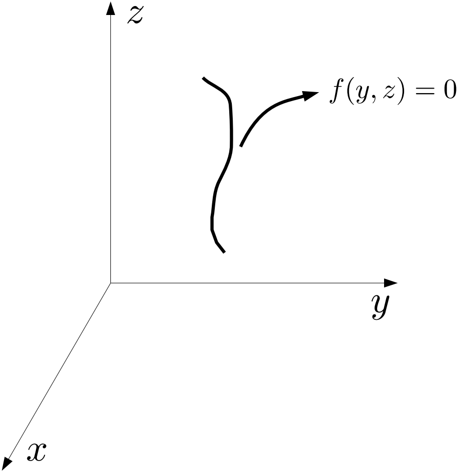
Superfícies Cilíndricas

Exercício

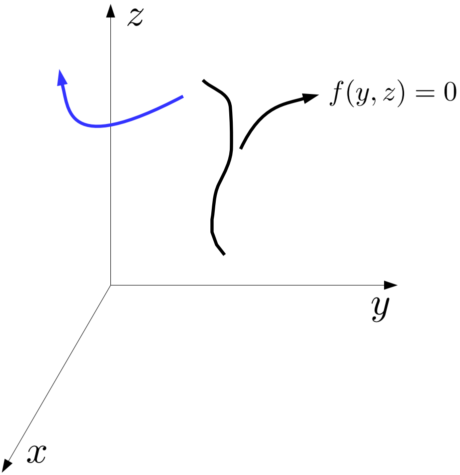
Mostre que a equação abaixo representa uma superfície cilíndrica

$$17x^2 + 2y^2 + z^2 - 8xy - 6xz - 2 = 0.$$

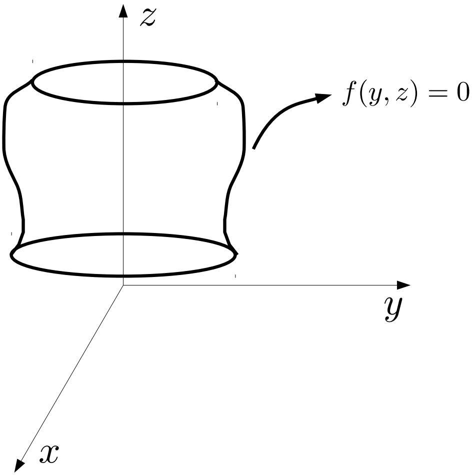
Superfícies de Revolução



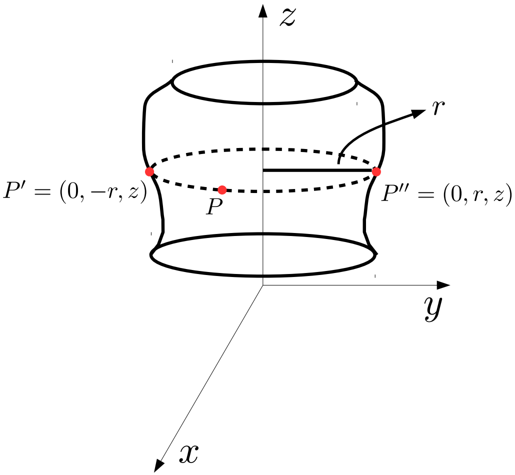
Superfícies de Revolução



Superfícies de Revolução

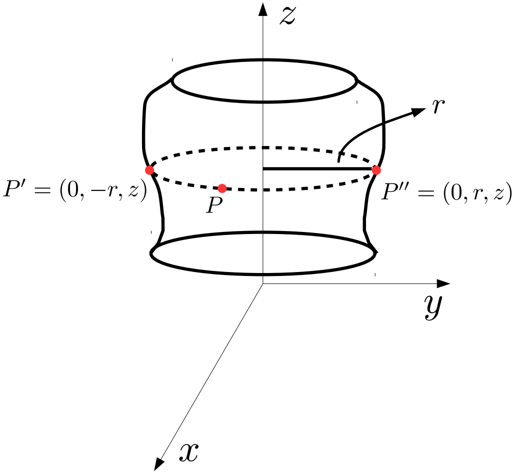


Superfícies de Revolução



Observe que se as coordenadas do ponto P são dadas por $P = (x, y, z)$, então:

$$r = \sqrt{x^2 + y^2}.$$



Superfícies de Revolução

Como $P' = (0, -r, z)$ ou $P'' = (0, r, z)$ estão na curva $f(y, z) = 0$, segue que

$$f(-r, z) = 0 \text{ ou } f(r, z) = 0.$$

Assim, como $r = \sqrt{x^2 + y^2}$, segue que

$$f(-\sqrt{x^2 + y^2}, z) = 0 \text{ ou } f(\sqrt{x^2 + y^2}, z) = 0.$$

Logo, temos que

$$\underbrace{f(\pm\sqrt{x^2 + y^2}, z) = 0}_{\text{equação da superfície de revolução}} \quad .$$

Superfícies de Revolução

A curva $f(x, y) = 0$ é chamada de **geratriz**, enquanto que o eixo ao qual ela é rotacionada é chamado de **eixo de revolução**.

Superfícies Cilíndricas

A equação encontrada vale somente para quando a curva está no plano yz e tem z como eixo de revolução. O mesmo pode ser feito para os outros casos.

- **Eixo de Revolução x.**
  Se a curva geratriz $f(x,z)=0$ está no plano xz, então a equação desta superfície é dada por
  $$f(x, \pm\sqrt{y^2+z^2})=0.$$
  Se a curva geratriz $f(x,y)=0$ está no plano xy, então a equação desta superfície é dada por
  $$f(x, \pm\sqrt{y^2+z^2})=0.$$

- **Eixo de Revolução y.**
  Se a curva geratriz $f(y,z)=0$ está no plano yz, então a equação desta superfície é dada por

$$f(y, \pm\sqrt{x^2+z^2}) = 0.$$

Se a curva geratriz $f(x,y)=0$ está no plano xy, então a equação desta superfície é dada por

$$f(\pm\sqrt{x^2+z^2}, y) = 0.$$

- **Eixo de Revolução z.**
Se a curva geratriz $f(y, z) = 0$ está no plano yz, então a equação desta superfície é dada por

$$f(\pm\sqrt{x^2 + y^2}, z) = 0.$$

Se a curva geratriz $f(x, z) = 0$ está no plano xz, então a equação desta superfície é dada por

$$f(\pm\sqrt{x^2 + y^2}, z) = 0.$$

Superfícies de Revolução

Exercício

Encontrar a equação da superfície de revolução $\mathcal{S}$ com geratriz $9x^2 + 4y^2 = 36$ no plano xy, e y sendo o eixo de revolução.

Superfícies de Revolução

Exercício

Mostre que a equação abaixo representa uma superfície de revolução

$$x^2 + y^2 - z^3 = 0.$$

Exercícios para casa

Fazer os exercícios 3 e 4b) da prova anterior (versão - Turma da Manhã) que se encontra em:

`www.ime.unicamp.br/~marchesi/MA141_files/ma141_p3_2014.pdf`

UNICAMP