8 Retas e Planos

1. Considere as retas

$$r_1 : \begin{cases} x - 2y + z = 1 \\ x + y - 2z = 0 \end{cases} \qquad\qquad r_2 : \frac{x-1}{2} = \frac{1-z}{2} \quad y = 0;$$

   Determine:

   a) se são iguais, paralelas, concorrentes ou reversas,
   b) a distância entre elas,
   c) o ângulo entre elas.

   Resposta:

   a) As retas são reversas.
   b) A distância entre elas é $\frac{1}{\sqrt{6}}$.
   c) O ângulo entre elas é $\pi/2$.

2. As retas r e s são dadas por

$$r := \begin{cases} x = 1 + 2t \\ y = 3 + t \\ z = 1 - t \end{cases} \quad t \in \mathbb{R} \quad , \quad s := \left\{ x + 2 = \frac{y-2}{-1} \quad \text{e} \quad z = 1 \right\}$$

   a) Encontrar a distância entre as retas r e s e mostrar que as duas retas são reversas.
   b) Encontrar a equação paramétrica da reta l, concorrente com ambas retas r e s, e paralela ao vetor $\overrightarrow{V} = (0, 3, 1)$.

   Resposta:

   a)

$$d(r,s) = \frac{|\overrightarrow{PQ} \cdot (\vec{V_r} \times \vec{V_s})|}{||(\vec{V_r} \times \vec{V_s})||} = \frac{|3+1|}{\sqrt{1+1+9}} = \frac{4}{\sqrt{11}}.$$

   b)

$$l : \ (-1/3, 7/3, 5/3) + \lambda(0, 3, 1) \qquad \lambda \in \mathbb{R}.$$

3. Verifique se as afirmações abaixo são verdadeiras ou falsas.

   - A reta r que contém o ponto $P = (1, 2, 0)$ e tem como vetor diretor $\vec{v} = (2, 1, 2)$ é perpendicular a reta de equação

$$s : \frac{x-1}{-1} = \frac{y-2}{2} = \frac{z}{-1}.$$

     Resposta: (FALSO)

- A reta
$$r : \begin{cases} x = -1 + 2t \\ y = 2 - t \qquad t \in \mathbb{R} \\ z = -2t \end{cases}$$
é perpendicular ao plano $\pi : 4x - 2y - 4z + 3 = 0$. **Resposta:** (VERDADEIRO)
- Os pontos $A = (4, 3, 1)$ e $B = (1, -1, 2)$ são equidistantes do plano $\pi : 3x + 4y - z = 10$. **Resposta:** (VERDADEIRO)

4. Considere a reta r_1 que passa por $Q = (0, 0, 1)$ e tem $\vec{v} = (1, 2, -1)$ como vetor diretor, assim como a reta r_2 dada por
$$\frac{x+1}{3} = \frac{y-1}{2} = z.$$
(a) Encontre os pontos de $P_1 \in r_1$ e $P_2 \in r_2$ que satisfazem $d(P_1, P_2) = d(r_1, r_2)$.

(b) Encontre as projeções ortogonais da origem em r_1 e r_2. (A projeção ortogonal de um ponto P em uma reta r é a interseção de r com a reta S que contém P e intersecta r ortogonalmente.)

(c) Encontre equações lineares dos planos π_1 e π_2 que contém r_1 e r_2, respectivamente, e satisfazem $d(\pi_1, \pi_2) = d(r_1, r_2)$.

Resposta:

(a) Os pontos de $P \in r_1$ e $Q \in r_2$ que satisfazem $d(P, Q) = d(r_1, r_2)$ são
$$P = \left(\frac{5}{6}, \frac{5}{3}, \frac{1}{6}\right) \qquad Q = \left(\frac{1}{2}, 2, \frac{1}{2}\right)$$
(b) As projeções ortogonais da origem em r_1 e r_2 são
$$P_1 = (\frac{1}{6}, \frac{2}{6}, \frac{5}{6}) \qquad P_2 = (-\frac{17}{14}, \frac{12}{14}, -\frac{1}{14})$$
(c) As equações lineares dos planos π_1 e π_2 que contém r_1 e r_2, respectivamente, e satisfazem $d(\pi_1, \pi_2) = d(r_1, r_2)$ são
$$\pi_1 : x - y - z = -1 \qquad \pi_2 : x - y - z = -2.$$

5. Determine se os seguintes pontos do $\mathbb{R}^3$ são coplanares:
$$P_1 = (1, 0, 1), \quad P_2 = (2, 1, 3), \quad P_3 = (1, 1, 1), \quad P_4 = (2, 2, 3).$$
Resposta: Os pontos são coplanares.

6. (a) Encontre equações paramétricas assim como uma equação linear que descrevam o plano contendo os pontos
$$P_1 = (1, 0, 0), \quad P_2 = (1, 2, -1) \quad \text{e} \quad P_3 = (0, -1, 2).$$
(b) Encontre a interseção do plano do item (a) com a reta determinada por
$$x + 2z = 1, \quad y = 2.$$

(c) Determine o cosseno do ângulo formado pela reta e o plano dos itens anteriores.

Resposta:

1) A equação paramétrica do plano π que contém os pontos dados é

$$\pi : \begin{cases} x &= 1-\beta \\ y &= 2\alpha-\beta \\ z &= -\alpha+2\beta \end{cases} \qquad (\alpha,\beta)\in\mathbb{R}^2$$

2) A interseção da reta com o plano é dada pelo ponto

$$P=(0,2,1/2).$$

3)

$$\cos(\theta)=\frac{\sqrt{54}}{\sqrt{14}\,\sqrt{5}}$$

7. Encontrar a equação do plano π que é perpendicular a cada um dos planos

$$\alpha\colon x-y-2z=0 \qquad\qquad \beta\colon 2x+y-4z-5=0$$

e contém o ponto $A=(4,0,-2)$.

Resposta:

$$\pi:\ 2x+z=6.$$

8. As retas r e l são dadas por:

$$r=\begin{cases} x=0 \\ y=2-t \\ z=1-t \end{cases},\quad t\in\mathbb{R} \qquad\qquad l=\begin{cases} x-4=z-1 \\ y=3. \end{cases}$$

a) Mostrar que r e l são reversas.
b) Encontrar os planos π e α tais que: $r\subset\pi$, $l\subset\alpha$ e π é paralelo a α.
c) Encontrar a distância entre os planos π e α do item anterior.
d) Encontrar os pontos P em r e Q em l tais que a reta que passa por P e Q seja perpendicular a r e a l.

Resposta:

a) $d(r,l)=\frac{5}{\sqrt{3}}>0$ e portanto as retas são reversas.
b) Os planos π e α tais que: $r\subset\pi$, $l\subset\alpha$ e π é paralelo a α são

$$\pi:\ -x-y+z=-1 \qquad\qquad \alpha:\ -x-y+z=-6$$

c) $d(\pi,\alpha)=d(r,l)=\frac{5}{\sqrt{3}}$.
d)

$$P=\left(0,\frac{4}{3},\frac{1}{3}\right) \qquad\qquad Q=\left(\frac{5}{3},3,-\frac{4}{3}\right).$$

9. Dados o plano

$$\pi : 2x + 2y - z = 6$$

e o ponto $P : (2, 2, -4)$, encontre

(a) a distância de P a π.

(b) a equação da reta que passa por P e é ortogonal a π.

(c) o ponto Q em π de forma que a distância de P a Q seja igual a distândica de P a π

Resposta:

(a) a distância de P a π é de 2 unidades.

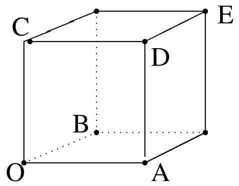
(b) a equação da reta que passa por P e é ortogonal a π é

$$r = (2, 2, -4) + t(2, 2, -1) \qquad t \in \mathbb{R}.$$

(c) o ponto Q em π de forma que a distância de P a Q é

$$Q = \left(\frac{2}{3}, \frac{2}{3}, \frac{-10}{3}\right)$$

10. Dados quatro vértices, $O = (0, 0, 0)$, $A = (-2, -1, 1)$, $B = (1, 1, 1)$, e $C = (5, 1, -1)$ de um paralelepípedo, cuja distribuição está esquematizada no desenho abaixo.



(a figura não é um cubo!)

(a) Encontrar a equação do plano que contém os vértices 0, A, e B.

(b) Encontrar a equação do plano que contém os vértices C, D, e E.

(c) Encontrar a equação da reta que passa pelos vértices C e D.

(d) Encontrar as coordenadas dos pontos D e E.

Resposta:

(a) A equação do plano que contém os vértices 0, A, e B é

$$\pi : \ -2x + 3y - z = 0.$$

(b) A equação do plano que contém os vértices C, D, e E é

$$\alpha : \ -2x + 3y - z = -6.$$

(c) A equação da reta que passa pelos vértices C e D é

$$r = \ (5, 1, -1) + t(-2, -1, 1) \ t \in \mathbb{R}.$$

(d) As coordenadas dos pontos D e E são

$$D = (3, 0, 0) \qquad E = (4, 1, 1).$$

11. a)Encontrar equações paramétricas assim como uma equação linear que descreva os planos π_1 e π_2 que contém a reta r definida por

$$r := \begin{cases} x = 1 + t \\ y = -1 + t \quad t \in \mathbb{R} \\ z = 2t \end{cases}$$

e tais que $(1, 0, 0) \in \pi_1$ e $(0, 0, 0) \in \pi_2$.
b) Encontre o ângulo entre os dois planos π_1 e π_2.

Resposta:

a)

- π_1:

$$2x - z = 2$$

- π_2:

$$\Rightarrow x + y - z = 0$$

b)

$$\cos(\theta) = \frac{6}{\sqrt{5}\sqrt{12}}.$$

12. As retas r e s são dadas por

$$r := \begin{cases} x = 1 - t \\ y = 2 + 3t \quad t \in \mathbb{R} \\ z = t \end{cases}, \quad s := \begin{cases} x = 2 \\ y = 2 + p \quad p \in \mathbb{R} \\ z = -p \end{cases}$$

a) Encontrar a distância entre as retas r e s e mostrar que as duas retas são reversas.
b) Encontrar as equações dos planos paralelos π_1 e π_2, tais que r está contida em π_1 e s está contida em π_2.
c) Encontrar o ângulo entre as retas r e s.

Resposta:

a)

$$d(r, s) = \frac{|\overrightarrow{PQ} \cdot \vec{\eta}|}{||\vec{\eta}||} = \frac{4}{\sqrt{18}}$$

b) As equações dos planos π_1 e π_2 são

$$\pi_1 : \ 4x + y + z = 6$$

e

$$\pi_2 : \ 4x + y + z = 10$$

c)

$$\cos(\theta) = \frac{2}{\sqrt{22}}.$$

13. Para cada um dos casos abaixo encontre equações paramétricas e equações simétricas para a reta r:

    a) A reta r passa pelos pontos $A = (1, 0, 1)$ e $B = (2, 3, 1)$.

    b) A reta r tem vetor diretor $v = (1, 1, -1)$ e passa pelo ponto $P_0 = (0, 1, 7)$.

    c) A reta r passa pelo ponto $P_0 = (1, -1, 1)$ e é paralela à reta $l : x - 1 = y = \frac{2z-2}{3}$.

    d) A reta r é perpendicular ao plano $2x - y + 2z = 4$ e passa pelo ponto de interseção das retas l_1 e l_2 dadas por:

$$l_1 : \begin{cases} x = t \\ y = 2 + t \\ z = 1 + t \end{cases} , t \in \mathbb{R} \quad \text{e} \quad l_2 : \begin{cases} x = -1 + 2s \\ y = 1 + s \\ z = 0 \end{cases} , s \in \mathbb{R}.$$

    e) A reta r é a interseção dos planos $x + y + 2z = 1$ e $2x - y + z = 2$.

Resposta:

a)

$$r = \begin{cases} x = 1 + t \\ y = 3t \\ z = 1 \end{cases} \qquad x - 1 = \frac{y}{3} \qquad z = 1$$

b)

$$r = \begin{cases} x = t \\ y = 1 + t \\ z = 7 - t \end{cases} \qquad x = y - 1 = \frac{z - 7}{-1}$$

c)

$$r = \begin{cases} x = 1 + t \\ y = -1 + t \\ z = 1 + \frac{3}{2}t \end{cases} \qquad x - 1 = y + 1 = \frac{z - 1}{3/2}$$

d)

$$r = \begin{cases} x = -1 + 2\lambda \\ y = 1 - \lambda \\ z = 2\lambda \end{cases} , \lambda \in \mathbb{R} \qquad \frac{x + 1}{2} = 1 - y = \frac{z}{2}$$

e)

$$r : \begin{cases} x = 1 - \lambda \\ 2y = -\lambda \\ z = \lambda \end{cases} , \lambda \in \mathbb{R} \qquad \frac{x - 1}{-1} = \frac{y}{-1} = z$$

14. Para cada par de retas r e l abaixo encontre $l \cap r$. E nos casos em que a interseção é vazia decida se elas são paralelas ou reversas.

a)

$$r: \frac{x-2}{4} = \frac{y+3}{-1} = \frac{z+2}{3} \quad \text{e} \quad l: \left\{ \begin{array}{c} 3x+2y+z=-2 \\ x-y+2z=1 \end{array} \right. .$$

b)

$$r: \frac{x+1}{2} = \frac{y+4}{-5} = \frac{z-2}{3} \quad \text{e} \quad l: \frac{x-3}{2} = \frac{y+14}{5} = \frac{z-8}{-3}.$$

c)

$$r: \left\{ \begin{array}{c} 3x-y-z=0 \\ 8x-2y-3z=-1 \end{array} \right. \quad \text{e} \quad l: \left\{ \begin{array}{c} x-3y+z=-3 \\ 3x-y-z=-5 \end{array} \right. .$$

Resposta:

a)

$$l \cap r = \{(2,-3,-2)\}$$

b)

$$l \cap r = \{(3,-14,8)\}$$

c) ℓ e r são reversas.

15. Em cada um dos casos abaixo encontre a equação do plano π.

a) O plano π passa pelo ponto $P = (3,1,2)$ e tem vetor normal $N = (1,2,-3)$.

b) O plano π passa pelos pontos $A = (0,0,2)$, $B = (2,4,1)$ e $C = (-2,3,3)$

c) Tem-se que $C = (-5,1,2) \in \pi$ e que π é perpendicular à reta que passa pelos pontos $A = (2,2,-4)$ e $B = (7,-1,3)$.

d) O plano π é perpendicular ao plano $x+3y-z=7$ e contém os pontos $A = (2,0,5)$ e $B = (0,2,-1)$.

e) O plano π é perpendicular a cada um dos planos $x-y-2z=0$ e $2x+y-4z-5=0$ e contém o ponto $A = (4,0,-2)$.

Resposta:

a)

$$x+2y-3z=-1$$

b)

$$x+2z=4$$

c)

$$5x-3y+7z=-14$$

d)

$$-2x+y+z=1$$

e)

$$\pi: 2x+z=6$$

16. a) Encontre a distância do plano $\pi : 2x+2y-z = 6$ e o ponto $P = (2, 2, -4)$.
    b) Encontre a distância perpendicular entre os planos (paralelos): $4x - 8y - z = 9$ e $2x - 4y - \frac{z}{2} = 5$.
    c) Verifique que a reta $x-1 = z-2$ e $y = 3$ é paralela ao plano $x+2y-z = 3$ e encontre a distância perpendicular entre eles.

Resposta:

a)
$$d(\pi, P) = 2$$

b)
$$d(\pi_1, \pi_2) == \frac{1}{9}$$

c)
$$d(r, \pi) = \frac{2}{\sqrt{6}}$$

17. a) Sejam r : a reta $x - 1 = y = z$ e A, B os pontos $A = (1, 1, 1)$ e $B = (0, 0, 1)$. Encontre o ponto de r eqüidistante de A e B.
    b) Dados o plano $x - y + z = 1$ e o ponto $P = (1, 0, 1)$. Encontre o ponto Q que é simétrico a P em relação ao plano dado.

Resposta:

a) $P = (1, 0, 0)$

b) $Q = \left(\frac{1}{3}, \frac{2}{3}, \frac{1}{3}\right)$

18. Sejam $P = (a, b, c)$ um ponto no espaço e r a reta

$$\begin{cases} x + y + 2z = 4 \\ x - 2y + z = 5 \end{cases} .$$

Para cada par, não nulo, de números reais (m, n) considere o plano

$$\pi_{(m,n)} : (m + n)x + (m - 2n)y + (2m + n)z = 4m + 5n.$$

Mostre que: $P \in r$ se e somente se $P \in \pi_{(m,n)}$, para todo par não nulo (m, n).

19. Dados os dois pontos $A = (x_1, y_1, z_1)$ e $B = (x_2, y_2, z_2)$, mostre que o lugar geométrico dos pontos do espaço que eqüidistam de A e B é um plano que passa pelo ponto médio de A e B e é perpendicular à reta que contém A e B.

20. Considere as retas r e l dadas por:

$$r : \begin{cases} x &= 0 \\ y &= 2 + t \\ z &= 1 + t \end{cases} \qquad l : x - 2 = z + 1 \quad y = 3.$$

a) Mostre que r e l são reversas.
b) Encontre os planos π e α tais que: $r \subset \pi$, $l \subset \alpha$ e π é paralelo a α.

c) Encontre a distância entre os planos π e α do item anterior.

d) Encontre P em r e Q em l tais que a reta que passa por P e Q seja perpendicular a r e a l.

Resposta:

b)

$$\pi : x + y - z = 1$$
$$\alpha : x + y - z = 6$$

c)

$$d(\pi, \alpha) = \frac{5}{\sqrt{3}}$$

d)

$$P = \left(0, \frac{4}{3}, \frac{1}{3}\right) \quad \text{e} \quad Q = \left(\frac{5}{3}, 3, \frac{-4}{3}\right)$$

21. Considere os planos $\alpha : x - y + z - 3 = 0$ e $\beta : 2m^2x - (m + 1)y + 2z = 0$.

a) Determine m, em cada caso, para que os planos α e β sejam: paralelos; concorrentes e concorrentes ortogonais.

b) Para $m = -1$ encontre a equação da reta interseção entre α e β.

Resposta:

a) Se $m = 1$, então $\alpha // \beta$. Nos outros casos α e β são concorrentes.

b)

$$r : \left\{ \begin{array}{rcl} x & = & -\lambda \\ y & = & -3 \\ z & = & \lambda \end{array} \right. , \quad \lambda \in \mathbb{R}.$$

22. Sejam a, b, c, d números reais tais que $ax + by + cz + d > 0$ para quaisquer x, y, $z \in \mathbb{R}$. Mostre que $a = b = c = 0$ e $d > 0$.