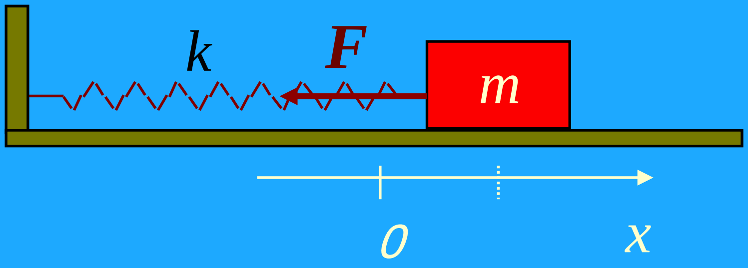
Aula de Revisão - P2

Física Geral II - F 228

1º Semestre, 2021

Resumo: MHS



- Solução: $x(t) = A\cos(\omega t + \phi)$

onde: $\begin{cases} A = \text{amplitude} \\ \omega = \text{frequência angular} \\ \phi = \text{fase} \\ T = \text{período} \end{cases}$

$$\omega = \sqrt{\frac{k}{m}} = \frac{2\pi}{T}$$

$$\boxed{T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}}}$$

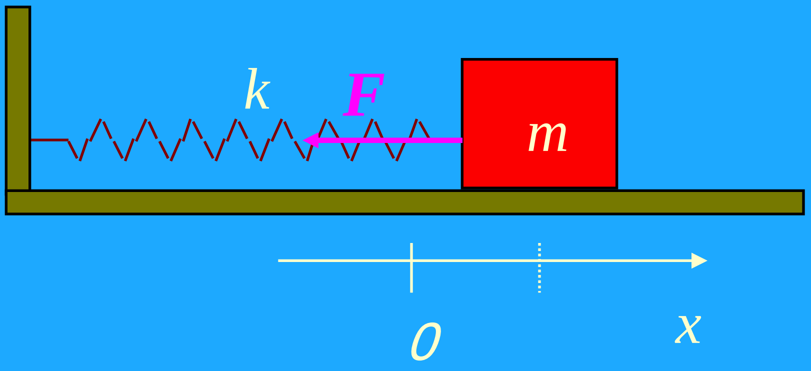
- Para o sistema massa-mola:

➢ A frequência e o período ***não*** dependem da amplitude! (Isso é geral para qualquer MHS !)

➢ A oscilação ocorre ao redor do ponto de equilíbrio, onde a força resultante é nula!

Força elástica e energia potencial

$$\boxed{F = -k\,x}$$



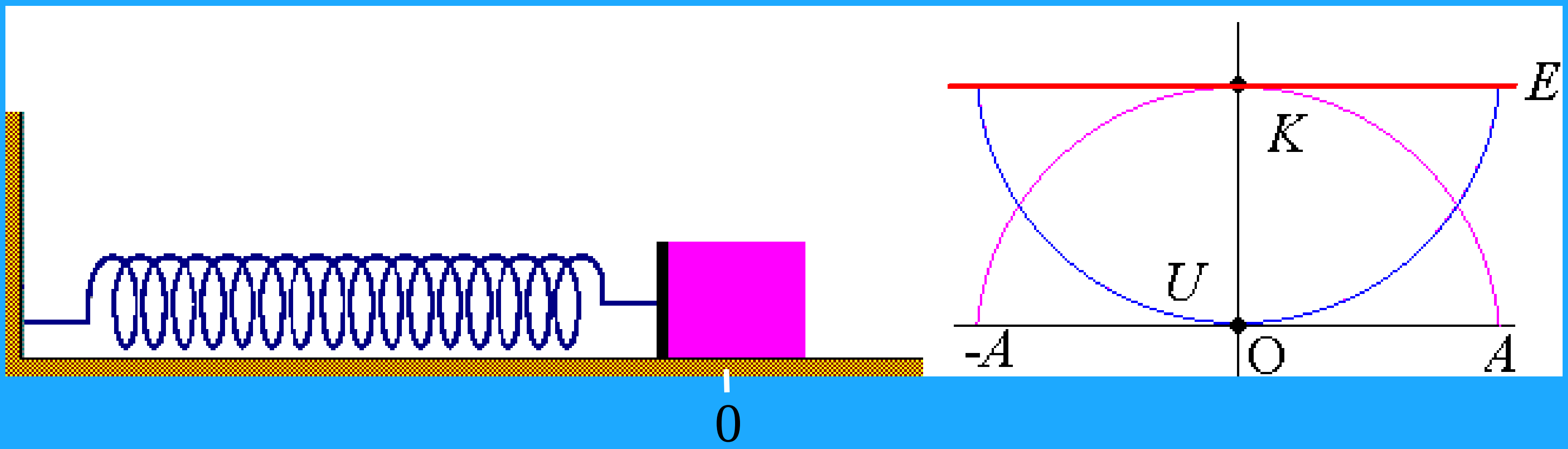
$$dW = Fdx = -dU \quad ; F(x) = -\frac{dU(x)}{dx}$$ (Força conservativa)

$$\Longrightarrow \quad dU = -Fdx = (k\,x)dx \quad \Rightarrow \quad \int_0^x dU = \int_0^x (k\,x)dx$$

Configuração de referência: $U(x=0)=0$

$$U(x) - 0 = \int_0^x kxdx \quad \Longrightarrow \quad U(x) = \frac{1}{2}k\,x^2$$

Conservação de energia mecânica



$$\boxed{\frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}kx^2 = E}$$

Exemplo de MHS: Pêndulo Simples

- O torque devido à gravidade ao redor do eixo de rotação (eixo *z*) é $\tau = -mgd$. Mas:

$d = L\,\mathrm{sen}\,\theta \approx L\theta$; para pequenos θ .

Portanto: $\tau = -mgL\theta$

Mas: $\boxed{\tau = I\alpha}$; $I = mL^2$

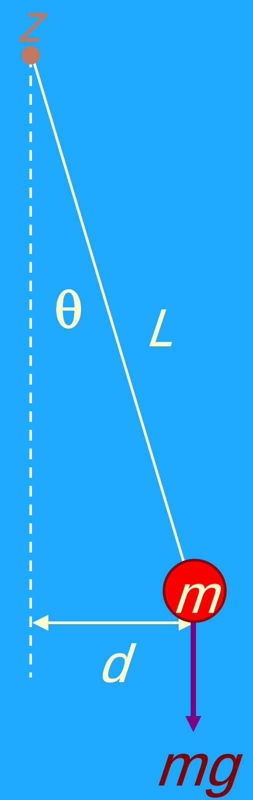
$$-\cancel{m}g\cancel{L}\theta = \cancel{m}L^{\cancel{2}}\frac{d^2\theta}{dt^2}$$

$$\Rightarrow -\frac{g}{L} = \frac{d^2\theta}{dt^2} \Rightarrow \frac{d^2\theta}{dt^2} = -\omega^2\theta$$; onde: $\boxed{\omega = \sqrt{\frac{g}{L}}}$

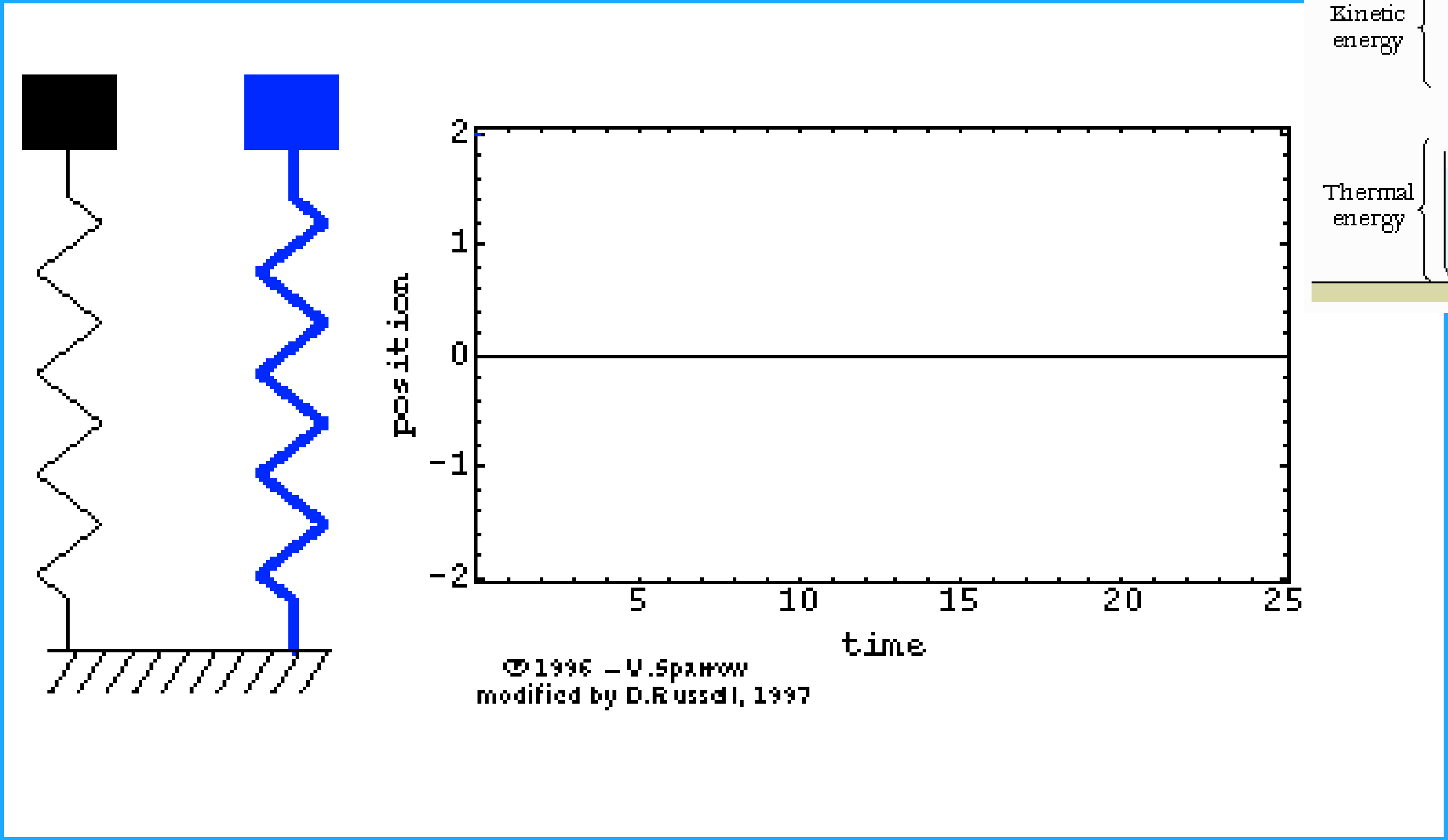
Que é idêntica à Equação diferencial do MHS !

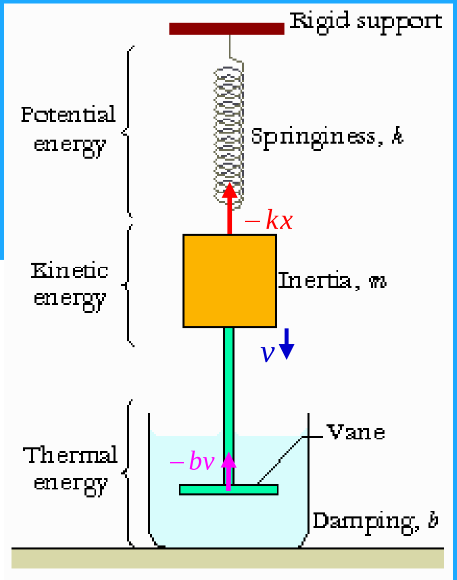
Daí: $\theta(t) = \theta_0 \cos(\omega t + \phi)$

$$\omega = 2\pi f \quad \rightarrow \quad \boxed{f = \frac{1}{T} = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{g}{L}}}$$



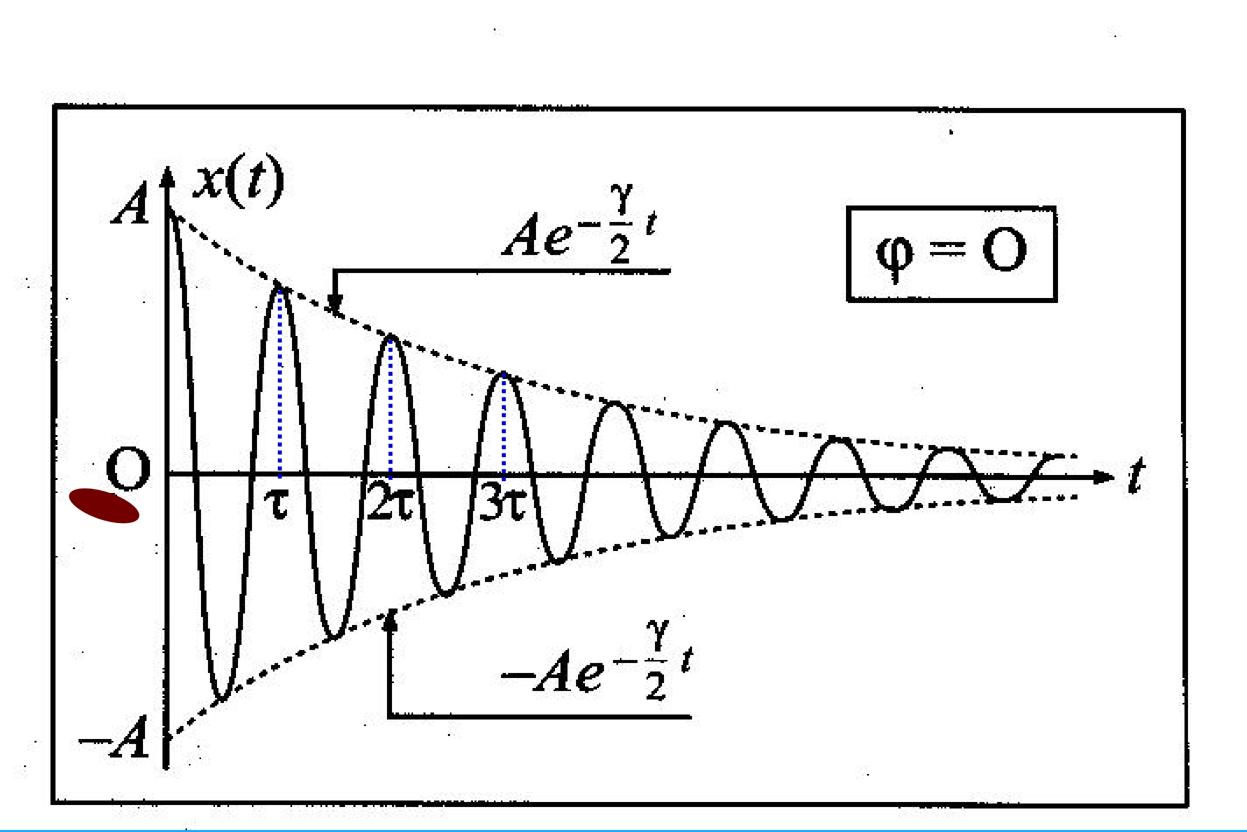
MHS e MH amortecido





Amortecimento Subcrítico

$$x(t) = Ae^{-\frac{\gamma}{2}t}\cos(\omega t + \phi)$$



$$\gamma = {}^{b}\!/_{m}$$

$$\omega = \sqrt{\omega_0^2 - \frac{\gamma^2}{4}}$$

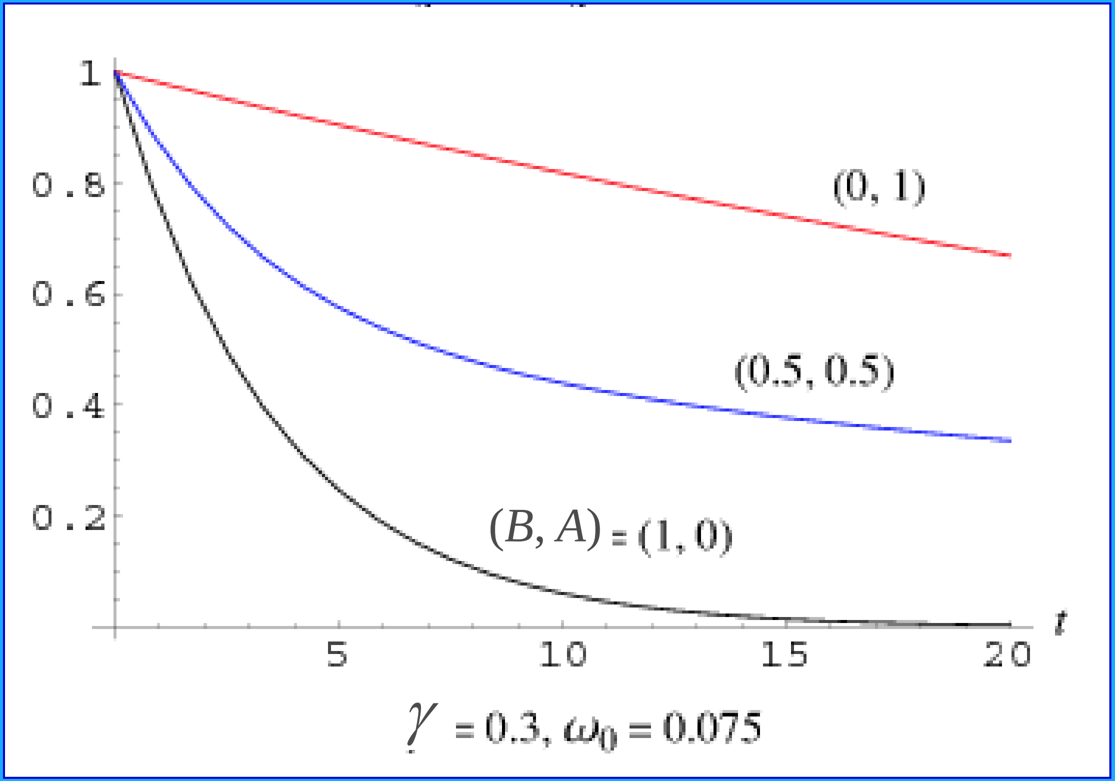
$$\omega_0^2 = {}^{k}\!/_{m}$$

http://lectureonline.cl.msu.edu/~mmp/applist/damped/d.htm

Amortecimento Supercrítico

$$x(t) = e^{-\frac{\gamma}{2}t}\left(Ae^{\beta t} + Be^{-\beta t}\right)$$

$$\beta = \sqrt{\frac{\gamma^2}{4} - \omega_0^2}$$



Crítico:

$$\frac{\gamma}{2} = \omega_0 \quad ; \quad \beta = 0$$

$$x(t) = e^{-\frac{\gamma}{2}t}(A + B)$$

Oscilações forçadas amortecidas:

Para: $\omega \to \omega_0$ temos: $|\omega - \omega_0| << \omega_0$

$$A^2(\omega) \approx \left(\frac{F_0}{2m\omega_0}\right)^2 \frac{1}{\left[(\omega_0 - \omega)^2 + \frac{\gamma^2}{4}\right]}$$

$$\gamma = 0$$

$$A = \frac{F_0}{m\left|\omega_0^2 - \omega^2\right|}$$

Ressonância

$\omega = \omega_o$

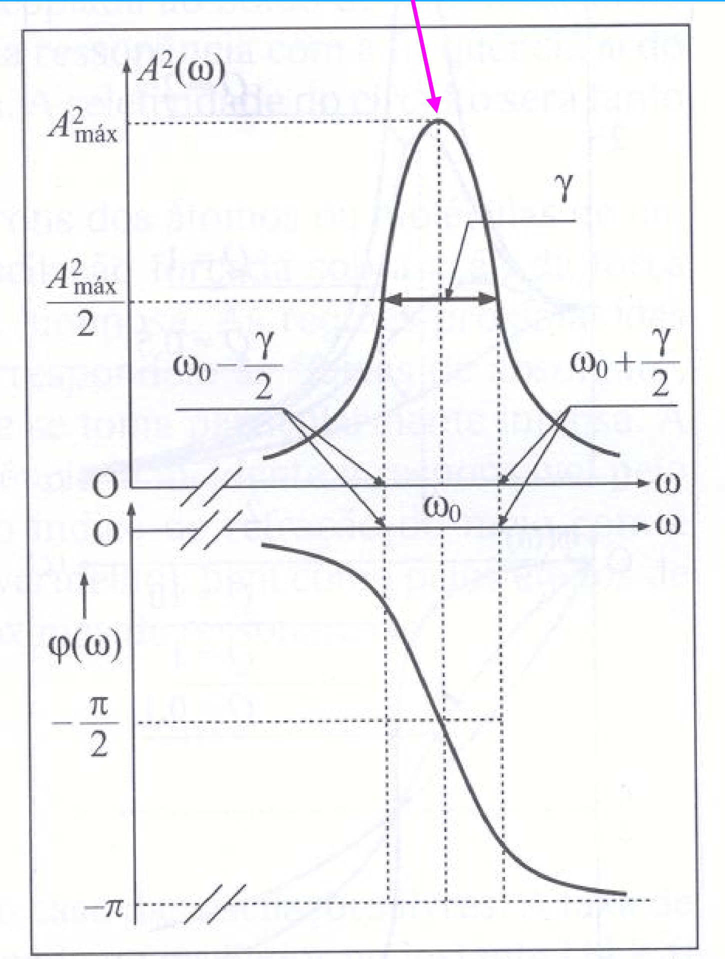
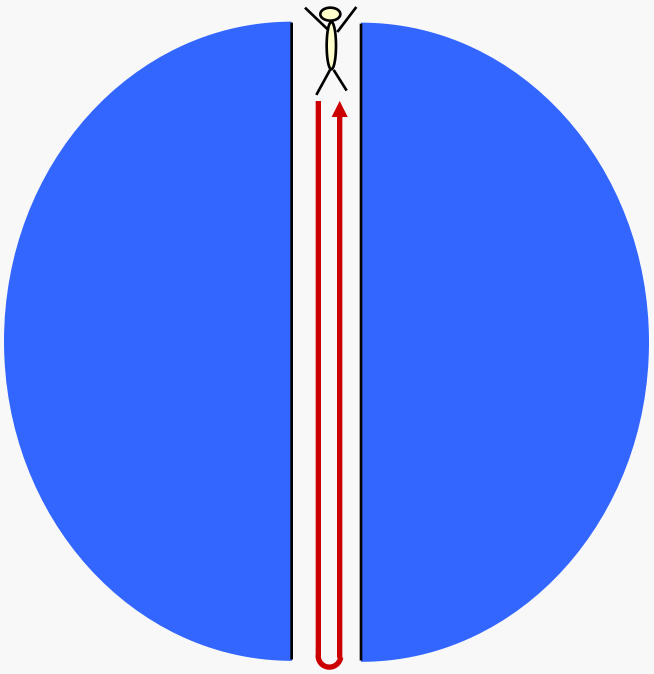


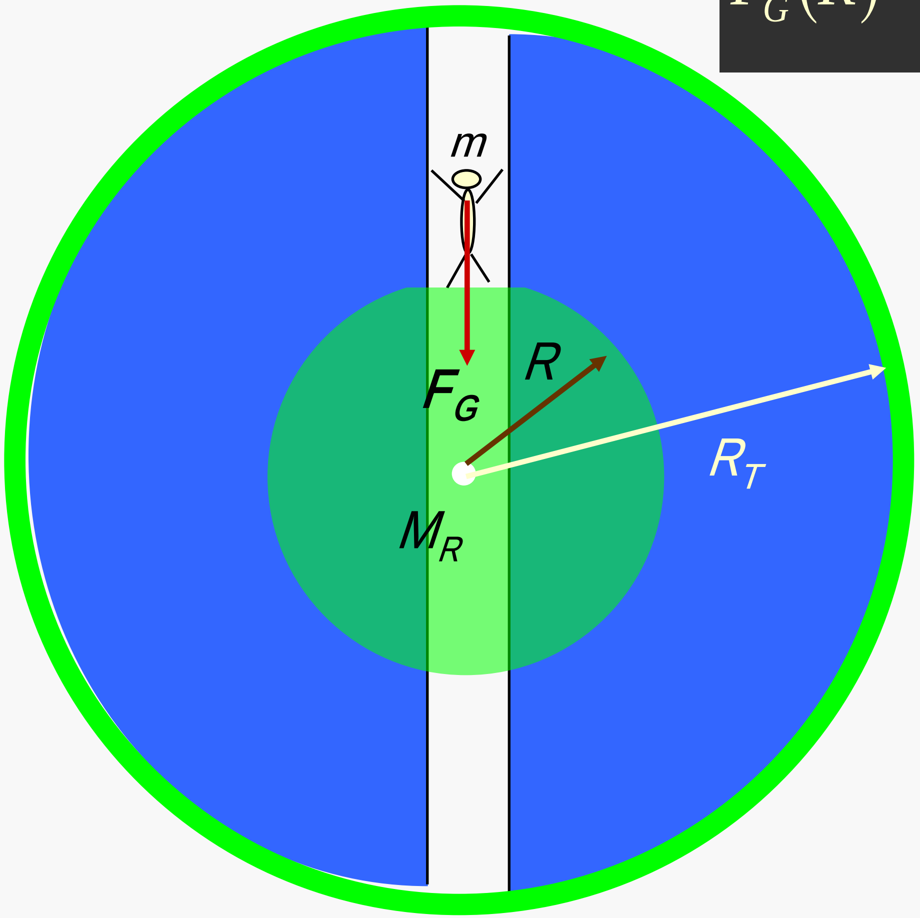
Figura 4.8 — *Amplitude e fase perto de ressonância*

Ex.: Túnel na Terra

Um túnel reto é construído de Campinas ao outro lado da Terra, passando pelo seu centro.
Um estudante de física pula no túnel ao meio-dia.
A que horas ele retorna a Campinas?



Túnel na Terra



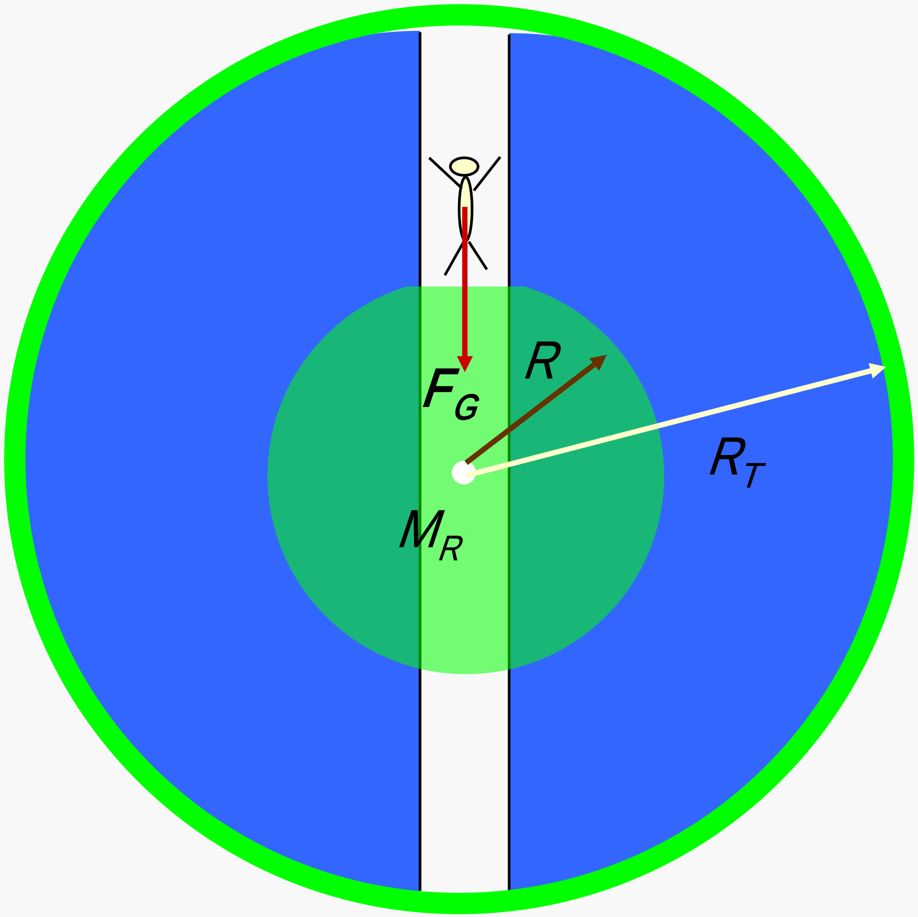
$$F_G(R) = -\frac{GmM_R}{R^2}\;;\qquad F_G(R_T) = -\frac{GmM_T}{R_T^2}$$

$$\frac{F_G(R)}{F_G(R_T)} = \frac{M_R R_T^2}{R^2 M_T}$$

$$\frac{M_R}{M_T} = \frac{\frac{4}{3}\pi R^3}{\frac{4}{3}\pi R_T^3}$$

$$\frac{F_G(R)}{F_G(R_T)} = \frac{R^3}{R^2}\frac{R_T^2}{R_T^3} = \frac{R}{R_T}$$

Túnel na Terra



$$\boxed{\frac{F_G(R)}{F_G(R_T)} = \frac{R}{R_T}}$$

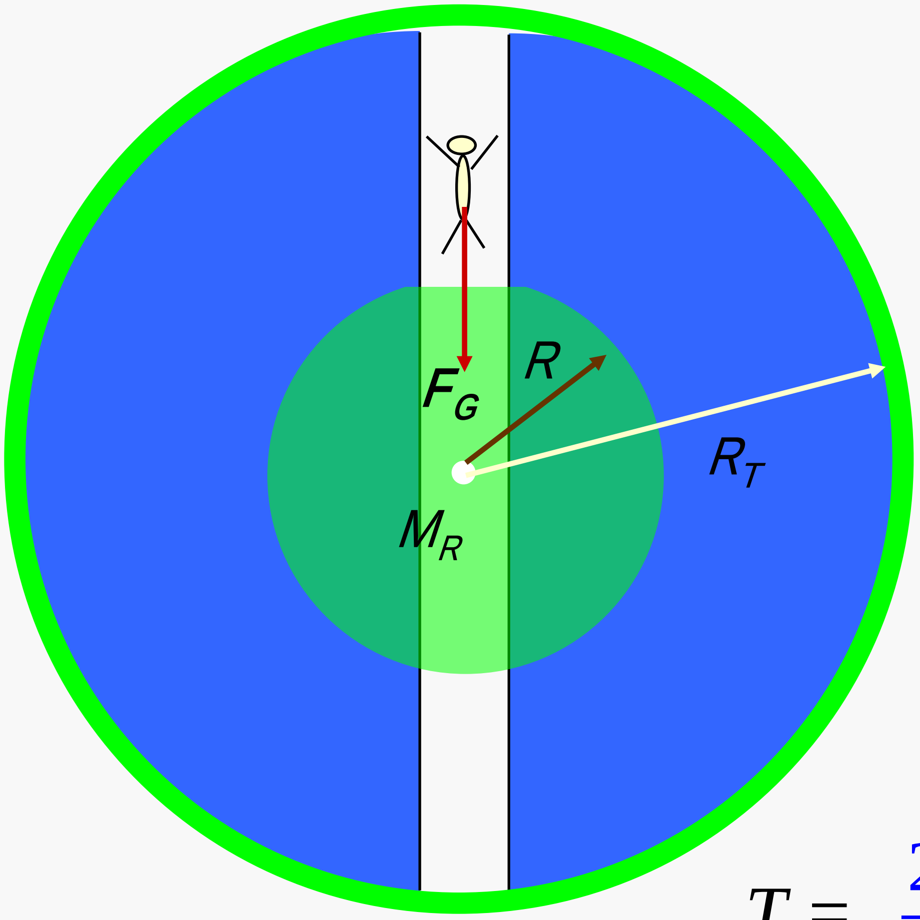
$$F_G(R) = \frac{F_G(R_T)}{R_T} R$$

$$F_G(R) = \frac{mg}{R_T} R$$

$$F_G(R) = kR$$

$$k = \frac{mg}{R_T}$$

Túnel na Terra



$$k = \frac{mg}{R_T}$$

$$\omega = \sqrt{\frac{k}{m}} = \sqrt{\frac{g}{R_T}}$$

$g = 9{,}81\ m/s^2$

$R_T = 6{,}38 \times 10^6\ m$

$\omega = 0{,}00124\ s^{-1}$

$T = \dfrac{2\pi}{\omega} = 5067\ s \approx$ **84 min !**

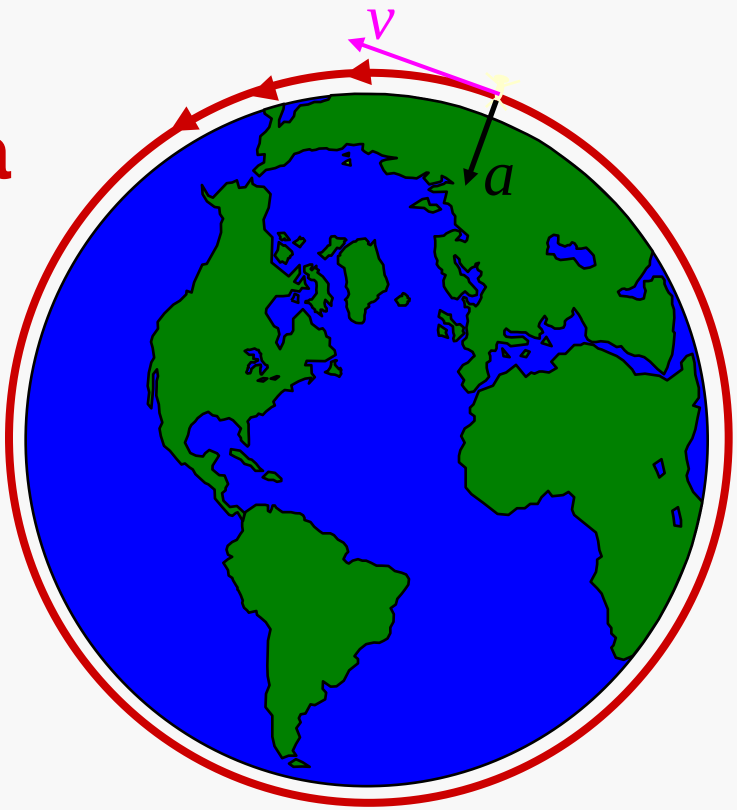
(*Retorna após aprox. 84 min*)

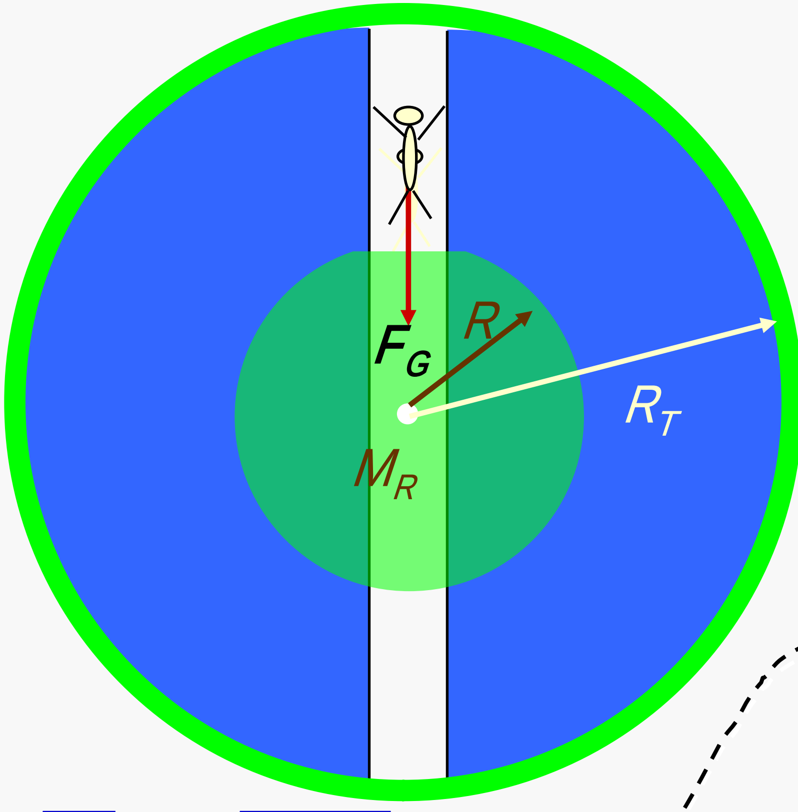
Ex.: Órbita da Terra

- **Um objeto em órbita próximo à superfície da Terra também tem período idêntico ao da queda no túnel:**

$$a = \frac{v^2}{R_T} = \omega^2 R_T = g$$

$$\omega = \sqrt{\frac{g}{R_T}}$$

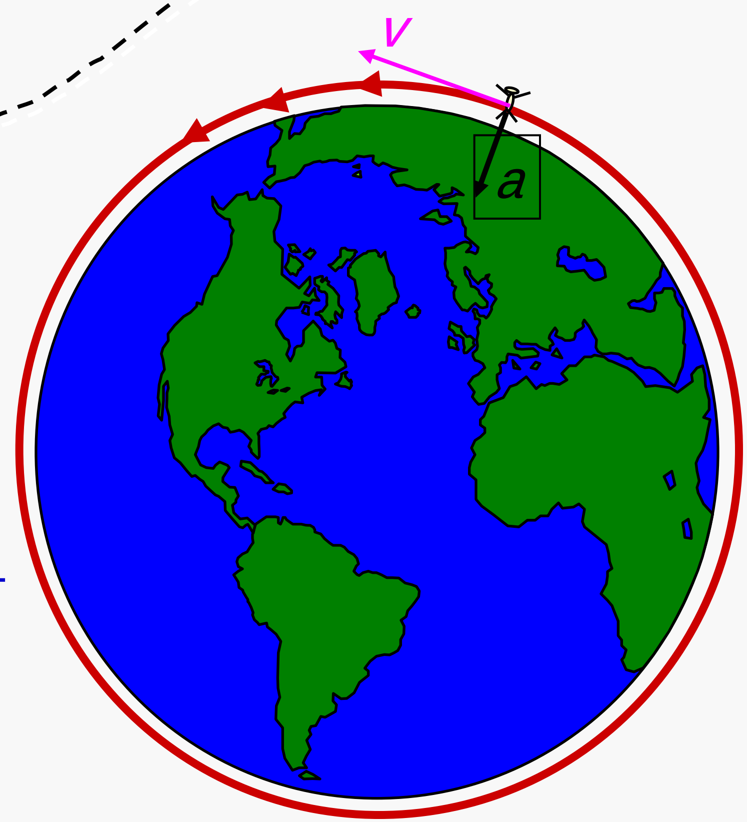




$$F_G\left(R\right) = kR$$

$$k = \frac{mg}{R_T}$$

$$a = \omega^2 R_T = g$$



$$\omega = \sqrt{\frac{k}{m}} = \sqrt{\frac{mg}{mR_T}}$$

$$\omega = \sqrt{\frac{g}{R_T}}$$

$$\omega = \sqrt{\frac{g}{R_T}}$$

Exemplo: Bastão Oscilante

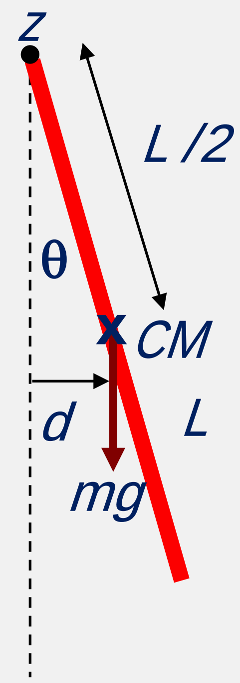
- O torque em relação ao eixo de rotação (z) é:

$$\tau = -mgd = -mg(L/2)\,sen\theta \approx -mg(L/2)\,\theta\;;\quad \theta << 1$$

- **Nesse caso:** $I_z = \dfrac{1}{3}mL^2$

Daí: $\tau = I\alpha \;\rightarrow\; -\cancel{m}g\dfrac{\overbrace{\cancel{L}}^{d}}{2}\theta = \overbrace{\dfrac{1}{3}\cancel{m}\cancel{L}^2}^{I}\dfrac{d^2\theta}{dt^2}$

$$\rightarrow\; \frac{d^2\theta}{dt^2} = -\frac{3g}{2L}\theta = -\omega^2\theta \;\;;\qquad \omega = \sqrt{\frac{3g}{2L}}$$



Onda harmônica

$$y(x,t) = A\cos\left(\frac{2\pi}{\lambda}(x - vt)\right)$$

FREQUÊNCIA ANGULAR

$$\omega = \frac{2\pi}{T} = \frac{2\pi v}{\lambda}$$

NÚMERO DE ONDA

$$k = \frac{2\pi}{\lambda}$$

$$\left\{ v = \frac{\omega}{k} \right.$$

$$\underbrace{y(x,t)}_{\text{Deslocamento}} = \overset{\text{Amplitude}}{A}\cos(\underbrace{kx - \omega t}_{\text{Fase}})$$

Como descrever uma onda se movendo para a esquerda ao longo da direção x , *sentido negativo* ?

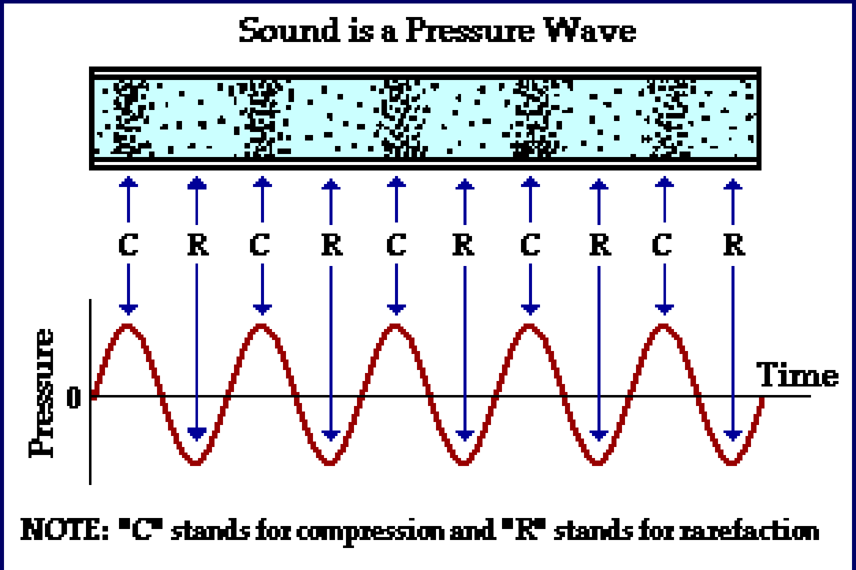
VELOCIDADE DE UMA ONDA TRANSVERSAL:

Numa corda: $$v = \sqrt{\frac{T}{\mu}}$$

$$v = \sqrt{\frac{\text{fator elástico}}{\text{fator de inércia}}}$$

ONDAS LONGITUDINAIS:

Ex.: Som



$$v = \sqrt{\frac{E}{\rho}}$$

Ondas em sólidos

$$v = \sqrt{\frac{B}{\rho}}$$

Ondas em gases ou líquidos

E :: módulo elástico do material
ρ :: densidade
B :: módulo de compressão volumétrico

$$B = -\frac{\Delta p}{\Delta V / V}$$

Energia e Potência

$$P(x,t) = \mu v \omega^2 A^2 sen^2(kx - \omega t)$$

Valor médio:

$$\overline{P}(x,t) = \overline{\mu v \omega^2 A^2}\,\overline{sen^2(kx - \omega t)}$$

mas:

$$\overline{\sin^2(\theta)} = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \sin^2(\theta)\, d\theta = \frac{1}{2}$$

(Cálculo I *!*)

Potência média transmitida pela onda numa corda:

$$\boxed{\overline{P} = \frac{1}{2}\mu v \omega^2 A^2}$$

Interferência

Duas ondas de amplitudes (A) iguais:

$$y_1(x,t) = A\sin(kx - \omega t) \qquad y_2(x,t) = A\sin(kx - \omega t + \phi)$$

$$y(x,t) = y_1(x,t) + y_2(x,t) = A\sin(\underbrace{kx - \omega t}_{b}) + A\sin(\underbrace{kx - \omega t + \phi}_{a})$$

$$sen\, a + sen\, b = 2\cos\left(\frac{a-b}{2}\right)\sin\left(\frac{a+b}{2}\right)$$

ϕ : Diferença de fase entre as ondas

$$y(x,t) = 2A\cos\left(\frac{\phi}{2}\right)\sin\left(kx - \omega t + \frac{\phi}{2}\right)$$

Interferência

$$y(x,t) = \underbrace{2A\cos\left(\frac{\phi}{2}\right)}_{\text{Amplitude}} \sin\underbrace{\left(kx - \omega t + \frac{\phi}{2}\right)}_{\text{Fase}}$$

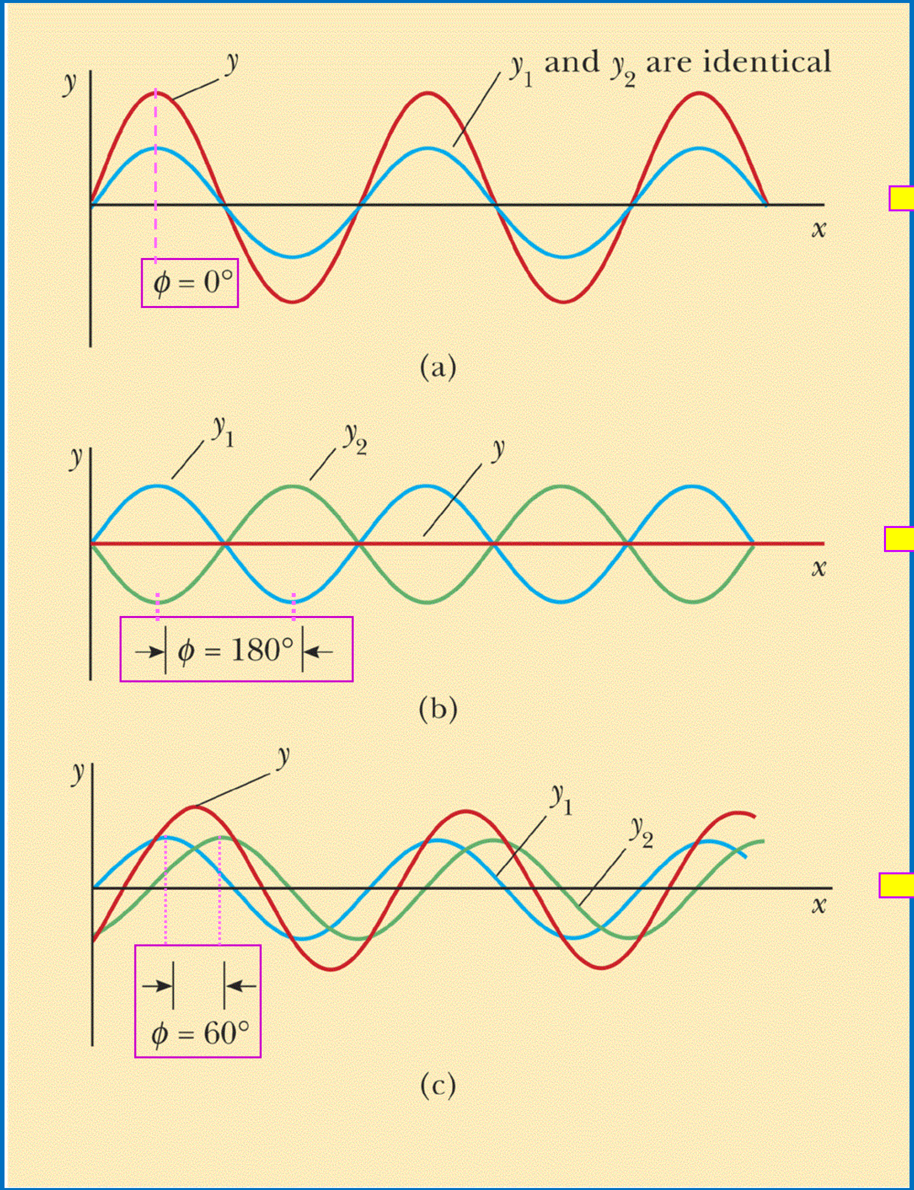
Se: $\phi = 0 \rightarrow$ Amplitude = 2A

Interferência construtiva

Se: $\phi = \pi \rightarrow$ Amplitude = 0

Interferência destrutiva

Interferência



Construtiva

Destrutiva

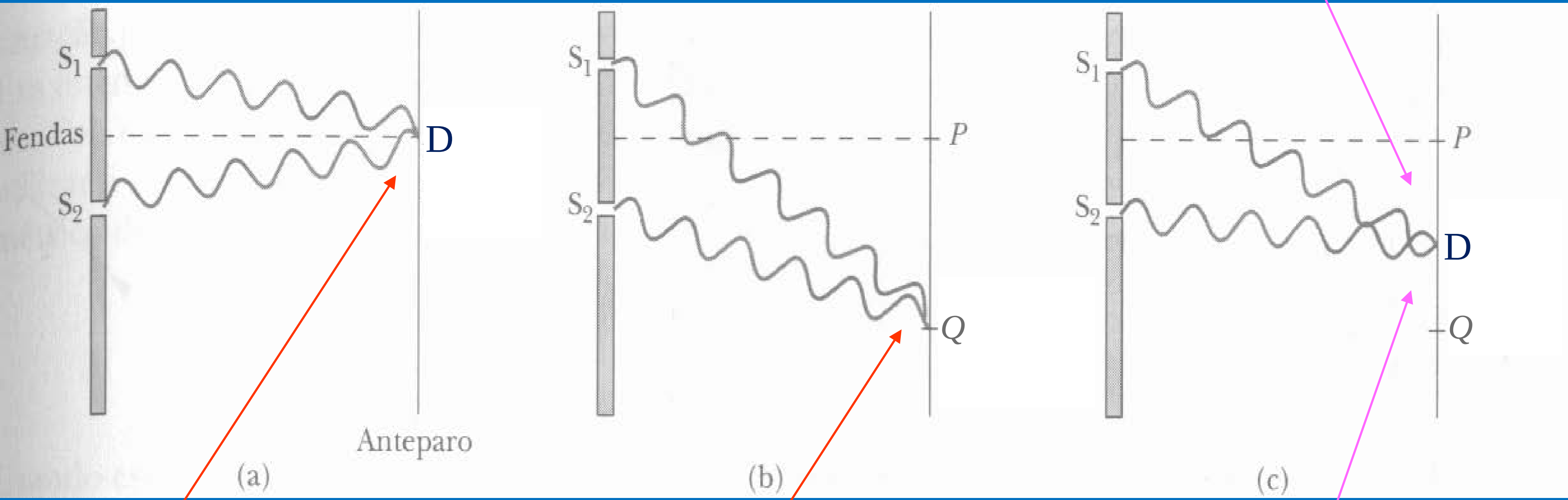
Intermediária

$$y(x,t) = 2A\cos\left(\frac{\phi}{2}\right)\sin\left(kx - \omega t + \frac{\phi}{2}\right)$$

Interferência: *Similar com a Luz!*

- Temos a formação de franjas devido a diferença de percursos:

Ondas fora de Fase: Interferência Destrutiva
(Diferença de percurso = $(n+½)\lambda$, $n = 0, 1, 2,...$)



Ondas em Fase: Interferência Construtiva
(Diferença de percurso = $n\lambda$, $n = 0, 1, 2,...$)

D a meia distância entre P e Q

Ondas estacionárias

Duas ondas idênticas propagando em sentidos opostos:

$$y_1(x,t) = A\sin(\underbrace{kx - \omega t}_{b})$$

$$y_2(x,t) = A\sin(\underbrace{kx + \omega t}_{a})$$

$$sen\,a + sen\,b = 2\cos\left(\frac{a-b}{2}\right)\sin\left(\frac{a+b}{2}\right)$$

$$y(x,t) = 2A\sin(kx)\cos(\omega t)$$

Ondas estacionárias

Amplitude depende de x

$$y(x,t) = 2A\sin(kx)\cos(\omega t)$$

Variação temporal

NÃO tem termo $(kx - \omega t)$ $\begin{cases} \rightarrow \text{NÃO é uma onda progressiva} \\ \rightarrow \text{É uma onda estacionária} \end{cases}$

Pontos de amplitude nula:

$$kx = 0, \pi, 2\pi, \ldots, n\pi \ldots$$

NÓS

Pontos de amplitudes máxima:

$$kx = \frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}, \frac{5\pi}{2}, \ldots, \left(n + \frac{1}{2}\right)\pi \ldots$$

ANTI-NÓS

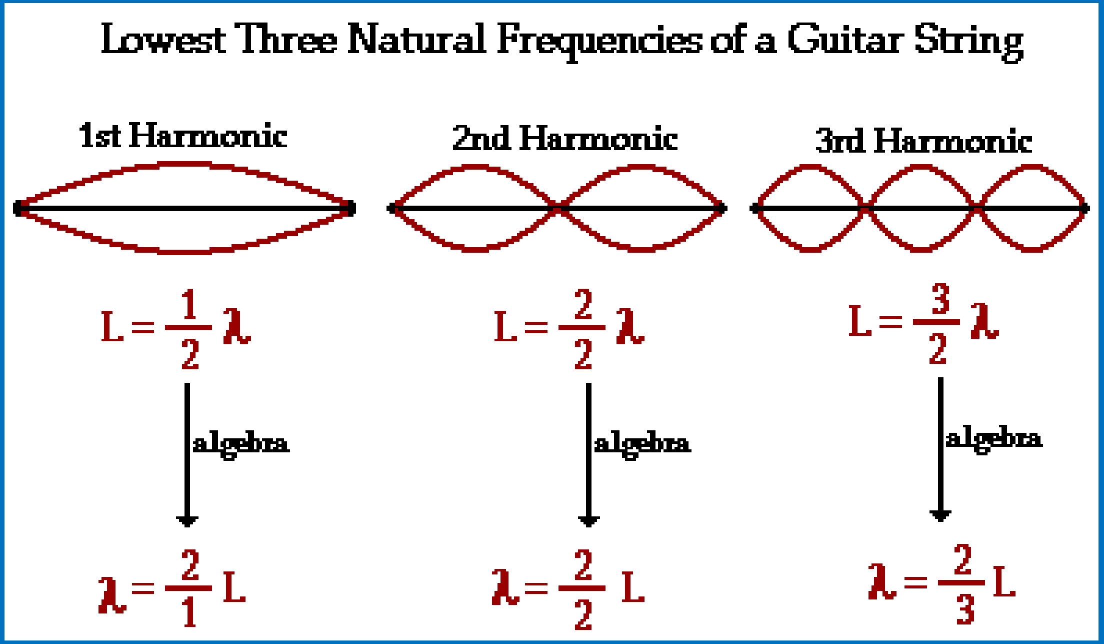
$$n = 0, 1, 2, \ldots$$

Ressonâncias

Comprimentos de onda e Frequências ressonantes:

$$L = n\frac{\lambda}{2} \qquad n = 1, 2, 3, \ldots$$

$$\lambda_n = \frac{2L}{n} \qquad f_n = \frac{v}{\lambda_n} = \frac{nv}{2L}$$



Menor frequência: Frequência Fundamental

Demais frequências: Série Harmônica

Ex.: A tecla mais aguda de um piano tem frequência 150 vezes maior que a mais grave. Se o comprimento da corda vibrante mais aguda é 5 cm, quanto seria o comprimento da corda mais grave se elas tivessem a mesma densidade linear de massa e a mesma tensão?

- Mesmos μ e $T \rightarrow$ velocidades iguais pois: $v = \sqrt{\dfrac{T}{\mu}}$

- Comparando as frequências fundamentais (n=1): $\dfrac{\lambda_n}{2} = \dfrac{L}{n} \quad \rightarrow \quad \lambda_1 = 2L$

$v = \lambda f$

$$f_i = \frac{v}{2L_i} \rightarrow \frac{f_a}{f_g} = \frac{v/2L_a}{v/2L_g} = \frac{L_g}{L_a} \rightarrow L_g = L_a \frac{f_a}{f_g} = 5 \times 150 = 750 \text{ cm}$$

$$L_g = 7{,}5 \text{ m}$$

- Obs.: As cordas mais graves são mais pesadas ($\mu_g > \mu_a$), para evitar que sejam muito compridas.

Velocidade do Som

(CNTP)	Bulk Modulus (B) [Pa]	Density (ρ) [kg/m^3]
Water	$2{,}2\times10^9$	1000
Methanol	$8{,}23\times10^8$	424
Air (Adiabatic)	$1{,}42\times10^5$	~ 1,21
Air (Constant Temp.)	$1{,}01\times10^5$	~ 1,21

$$v = \sqrt{\frac{B}{\rho}}$$

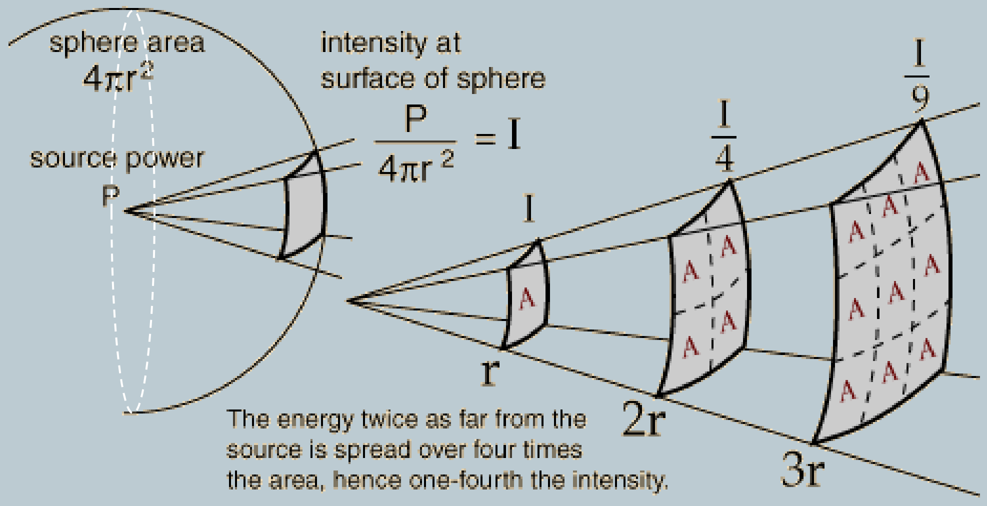
No ar (adiabático): $$v_{ar} = \sqrt{\frac{0{,}142\times10^6}{1{,}21}} \approx 342 \text{ m/s}$$

Na água: $$v_{água} = \sqrt{\frac{2{,}2\times10^9}{10^3}} \approx 1483 \text{ m/s}$$

Em sólidos a velocidade atinge valores da ordem de 3000 m/s !

Energia transportada pelas ondas

➢ Intensidade (I) de uma onda: É a potência transportada por unidade de área perpendicular ao fluxo de energia.



$$\boxed{I = \frac{\overline{P}}{A} = \frac{1}{2}\rho v \omega^2 s_m^2}$$

➢ No caso de ondas esféricas a energia flui para todas as direções. A intensidade fica:

$$\boxed{I = \frac{\overline{P}}{4\pi r^2}}$$

Audição humana

- É conveniente definirmos a medida do nível sonoro, β , como:

$$\beta(I) = (10\,\mathrm{dB})\log\frac{I}{I_{\min}}$$

$$I_{máx} \approx 1\,\mathrm{W/m^2}$$

$$I_{\min} \approx 10^{-12}\,\mathrm{W/m^2}$$

Onde dB é a abreviação para *decibel*.

1 dB = 0,1 B ; sendo B (*bel*) a unidade de nível sonoro.

Assim:

$$\begin{cases} I = I_{\min} \quad \rightarrow \quad \beta(I_{\min}) = 0\,\mathrm{dB} \\ I = I_{máx} \quad \rightarrow \quad \beta(I_{máx}) = 120\,\mathrm{dB} \end{cases}$$

$$\frac{I_{máx}}{I_{\min}} \approx 10^{12}$$

Ondas estacionárias: tubos abertos

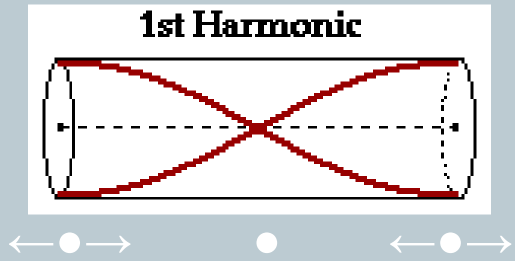
$$L = n\left(\frac{\lambda_n}{2}\right)$$

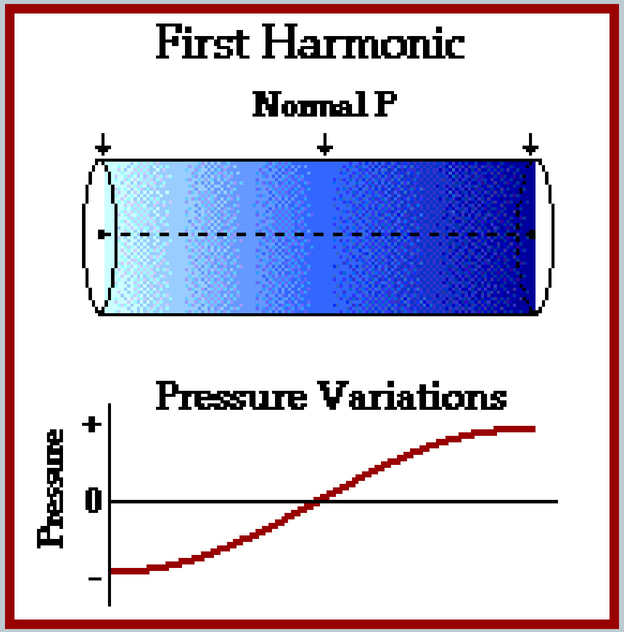
$$f_n = \frac{v}{\lambda_n}$$

$n = 1, 2, 3, \ldots$

$$L = \frac{\lambda_1}{2}$$

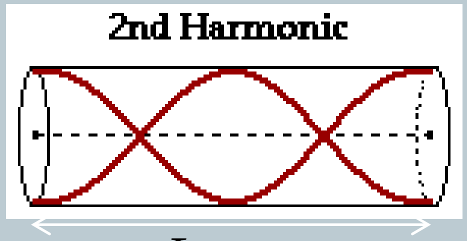
$$f_1 = \frac{v}{2L}$$





$$L = \lambda_2$$

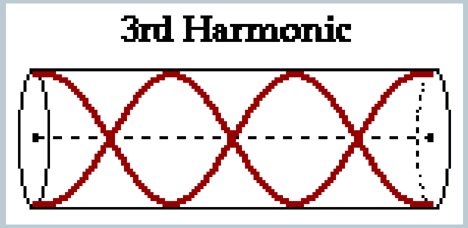
$$f_2 = \frac{v}{L} = 2 f_1$$



L

$$L = \frac{3}{2}\lambda_3$$

$$f_3 = \frac{3v}{2L} = 3 f_1$$

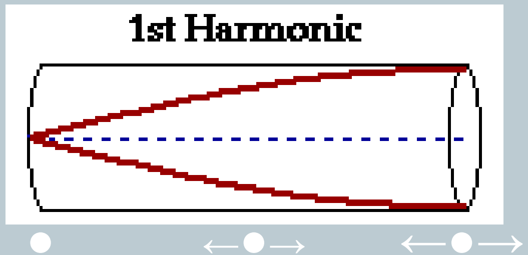


(Descrição feita em termos dos deslocamentos de ar.)

Ondas estacionárias: tubos com uma extremidade fechada

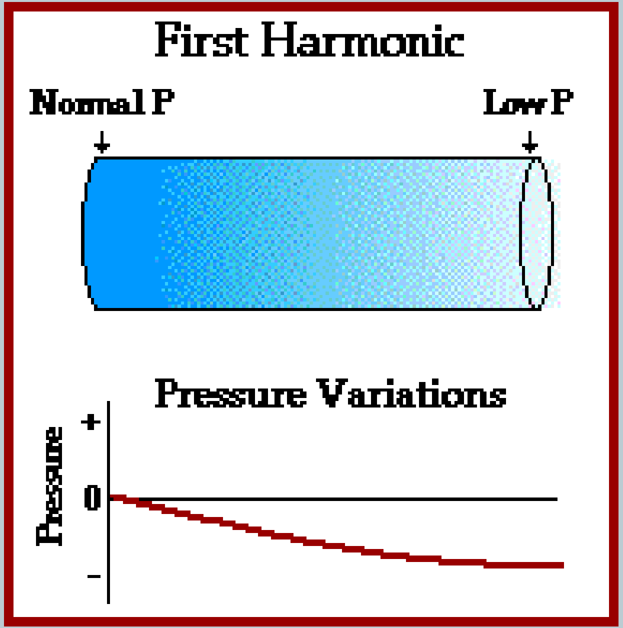
$$L = \frac{\lambda_1}{4}$$

$$f_1 = \frac{v}{4L}$$



$$L = n\left(\frac{\lambda_n}{4}\right) \qquad f_n = \frac{v}{\lambda_n}$$

n = 1, 3, 5, ... (ímpares)



$$L = \frac{3}{4}\lambda_3$$

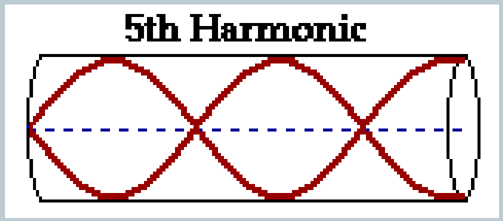
$$f_3 = \frac{3v}{4L} = 3f_1$$

L

(Descrição feita em termos dos deslocamentos de ar)

$$L = \frac{5}{4}\lambda_5$$

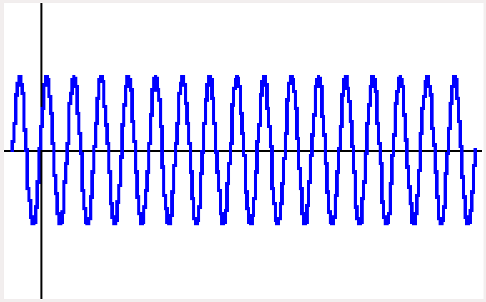
$$f_5 = \frac{5v}{4L} = 5f_1$$



Não tem harmônicos pares!

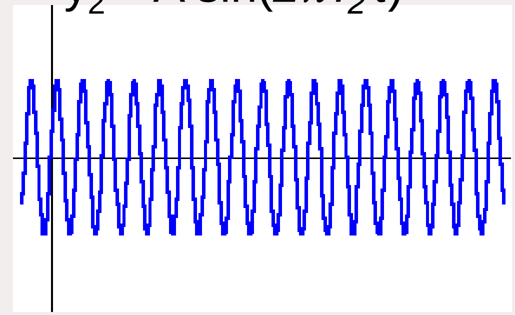
Batimento

$y_1 = A\sin(2\pi f_1 t)$ $\quad \omega_1 = 2\pi f_1$

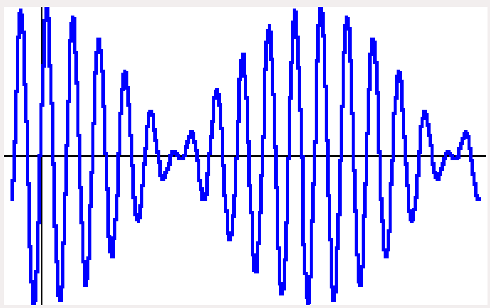


+

$y_2 = A\sin(2\pi f_2 t)$ $\quad \omega_2 = 2\pi f_2$



=



$$y = y_1 + y_2 = \left[\overbrace{2A\cos 2\pi\left(\underbrace{\frac{f_1 - f_2}{2}}_{f_{bat}/2}\right)t}^{\text{Envoltória}}\right]\sin 2\pi\left(\underbrace{\frac{f_1 + f_2}{2}}_{f_{med}}\right)t$$

- Se: $f_1 = 340\ \text{Hz}$ e $f_2 = 330\ \text{Hz}$ →

→ $f_{med} = \dfrac{f_1 + f_2}{2} = 335\ \text{Hz}$; $f_{bat} = f_1 - f_2 = 10\ \text{Hz}$

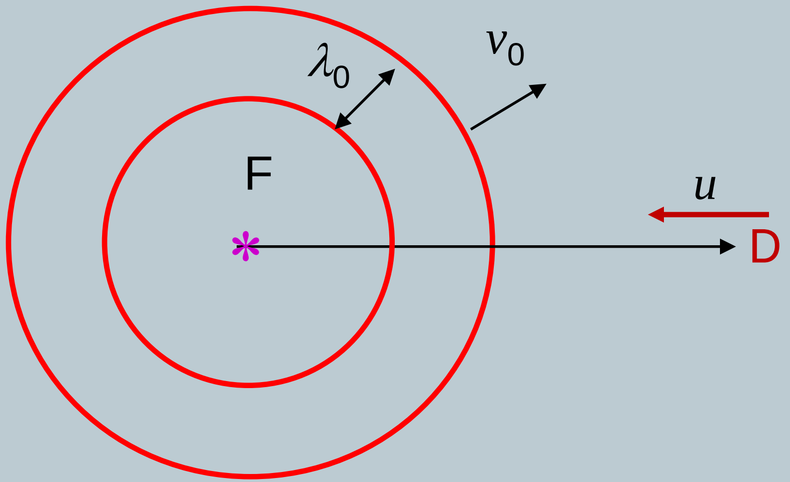
- Batimentos são usados para afinar instrumentos. A freqüência desejada é comparada com a freqüência do instrumento. Se um batimento é ouvido, significa que o instrumento está desafinado. Quanto maior a freqüência de batimento, mais desafinado estará o instrumento.

Efeito Doppler do Som

- **Fonte parada, Detector com velocidade u**

$$\boxed{v_0 = \lambda_0 f_0}$$

$$f' = \frac{v_0 + u}{\lambda_0} = \frac{v_0}{\lambda_0}\left(1 + \frac{u}{v_0}\right)$$



$$f' = f_0\left(1 + \frac{u}{v_0}\right)$$

A frequência aumenta!

$$f' = f_0\left(1 \pm \frac{u}{v_0}\right) = f_0\,\frac{v_0 \pm u}{v_0}$$

+ aproximação

- afastamento

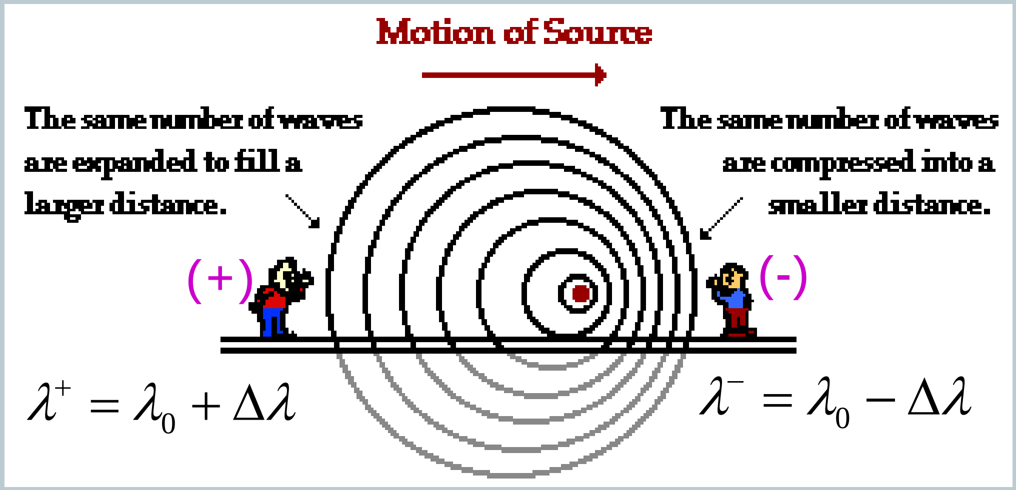
Efeito Doppler do Som

- Fonte se aproximando ou afastando com velocidade *V* com Detector parado:

$$f = \frac{f_0}{\left(1 \mp \frac{V}{v_0}\right)} = f_0 \frac{v_0}{v_0 \pm V}$$

- aproximação

\+ afastamento



$$\Delta\lambda = VT_0$$

Caso geral:

$$f = f_0 \frac{\left(1 \pm \frac{u}{v_0}\right)}{\left(1 \mp \frac{V}{v_0}\right)} = f_0 \frac{v_0 \pm u}{v_0 \pm V}$$

Ondas estacionárias em órgãos

- Qual é a freqüência fundamental e os três primeiros harmônicos de um tubo de órgão de 26 cm de comprimento, se ele for **(a)** aberto ou **(b)** fechado em uma das pontas?

(a) Harmônico fundamental: $f_1 = \dfrac{v}{2L} = \dfrac{343\,\text{m/s}}{2\times(0,26\text{m})} = 660\,\text{Hz}$

- Três primeiros harmônicos: 660 Hz, 1320 Hz, 1980 Hz.

(b) Harmônico fundamental: $f_1 = \dfrac{v}{4L} = \dfrac{343\,\text{m/s}}{4\times(0,26\text{m})} = 330\,\text{Hz}$

- Três primeiros harmônicos (apenas ímpares): 330 Hz, 990 Hz, 1650 Hz.