9 Identificação de Cônicas - Translação

1.

2. Seja $\mathcal{C}$ o lugar geométrico dos pontos $P = (x, y)$ do plano cujas coordenadas x e y satisfazem

$$2y^2 - 3x^2 - 4y + 12x + 8 = 0$$

a) Qual é o tipo de cônica $\mathcal{C}$? Encontrar novas coordenadas para escrever a equação de $\mathcal{C}$ na forma canônica.
b) Encontrar os focos, os vértices e a excentricidade de $\mathcal{C}$ nas coordenadas x e y. No caso de hipérbole, encontrar também as equações das assíntotas em x e y. Fazer um esboço do gráfico da cônica $\mathcal{C}$.

Resposta:

a) Hipérbole.

b) Depende do feito em a). Uma solução é

	Sist. $x'y'$	Sist. xy
F_1	$(\sqrt{15}, 0)$	$(\sqrt{15} + 2, 1)$
F_2	$(-\sqrt{15}, 0)$	$(-\sqrt{15} + 2, 1)$
V_1	$(\sqrt{6}, 0)$	$(\sqrt{6} + 2, 1)$
V_2	$(-\sqrt{6}, 0)$	$(-\sqrt{6} + 2, 1)$
Ass.1	$y' = \frac{3}{\sqrt{6}}x'$	$y - 1 = \frac{3}{\sqrt{6}}(x - 2)$
Ass. 2	$y' = -\frac{3}{\sqrt{6}}x'$	$y - 1 = -\frac{3}{\sqrt{6}}(x - 2)$

3. Seja ℓ o lugar geométrico dos pontos $P = (x, y)$ no plano cujas coordenadas satisfazem a equação

$$\ell\colon 9x^2 - 16y^2 - 54x + 48y + 81 = 0.$$

a) Determinar que tipo de cônica é ℓ. Escrever a equação canônica de ℓ.
b) Encontrar os focos, a excentricidade e os vértices de ℓ. Se ℓ for hipérbole, encontrar as equações das assíntotas de ℓ.

Resposta:

a) A cônica é uma hiperbole e sua equação canônica é

$$\frac{(y')^2}{\frac{9}{4}} - \frac{(x')^2}{4} = 1.$$

b) Focos:

$$F_1 = (3, -1) \qquad F_2 = (3, 4)$$

Vértices:

$$V_1 = (3, 0) \qquad V_2 = (3, 3)$$

Exentricidade $e = 5/3$
Assíntotas

$$(x-3) = \frac{4}{3}\left(y - \frac{3}{2}\right) \quad e \quad (x-3) = -\frac{4}{3}\left(y - \frac{3}{2}\right).$$

4. Considere a cônica de equação

$$2x^2 + 3y^2 + 4x - 12y + 8 = 0$$

Determine

a) se é elipse, hipêrbole ou parábola,
b) focos, vértices e assíntotas (se houver) no sistema de coordenadas $S = \{O,\ \{\vec{e}_1, \vec{e}_2\}\}$,
c) exentricidade,
d) um esboço do gráfico.

Resposta:

a) A curva é uma elipse.
b) No sistema de coordenadas $S = \{O,\ \{\vec{e}_1, \vec{e}_2\}\}$, os focos e vertices estão em

$$\mathrm{V}_1 : (-1 + \sqrt{3}, 2)$$
$$\mathrm{V}_2 : (-1 - \sqrt{3}, 2)$$
$$\mathrm{F}_1 : (0, 2)$$
$$\mathrm{F}_2 : (-2, 2)$$

c) a exentricidade é $e = \frac{1}{\sqrt{3}}$

5. Tome $x'y'$ o sistema de eixos do plano que é a translação do sistema xy para a nova origem $O' = (1, 1)$, i.é., $x' = x - 1$ e $y' = y - 1$.

i- Dado o ponto $P = (1, 4)$ no sistema xy, encontre as coordenadas de P no sistema $x'y'$.
ii- Dado o ponto $A = (2, 1)$ no sistema $x'y'$, encontre as coordenadas de A no sistema xy.
iii- Dada a equação $x^2 - 4x + y^2 - 6y = 12$, encontre tal equação nas variáveis $x'y'$.

Resposta:

i- $P = (1 - 1, 4 - 1) = (0, 3)$ no sistema $x'y'$.
ii- $A = (2 + 1, 1 + 1) = (3, 2+)$ no sistema xy.

iii-
$$(x')^2 - 2x' + (y')^2 - 4y' = 4. \qquad \text{No sistema } x'y'.$$

6. Encontre os vértices (ou vértic**e**), os focos (ou foco) e a excentricidade de cada uma das cônicas. E esboce o gráfico.

   i- $4x^2 + 9y = 144$

   ii- $49x^2 - 9y^2 = 441$

   iii- $3x^2 - 14y = 0$

   Resposta:

i-

	Foco	Vértice	Reta diretriz	Excentricidade
(x', y')	$\left(0, \frac{-9}{16}\right)$	$(0, 0)$	$y' = \frac{9}{16}$	1
(x, y)	$\left(0, \frac{247}{16}\right)$	$(0, 16)$	$y = \frac{265}{16}$	1

ii-

F_1	F_2	V_1	V_2
$\left(-\sqrt{58}, 0\right)$	$\left(\sqrt{58}, 0\right)$	$(-3, 0)$	$(3, 0)$

$$e = \frac{\sqrt{58}}{3}.$$

iii- Temos $e = 1$

$$F = \left(\frac{7}{6}, 0\right) \qquad V = (0, 0) \qquad r : x = -\frac{7}{6}.$$

7. Para cada uma das equações abaixo decida se a cônica C determinada pela equação é degenerada ou não. Nos casos em que não são degeneradas encontre os vértices (ou vértic**e**), os focos (ou foco) e esboce o gráfico.

   i- $9x^2 - 18x + 9y^2 - 6y = 10$

   ii- $4x^2 - 4x + 9y^2 - 18y = 26$

   iii- $4y^2 - 4y - 24x + 9 = 0$

   iv- $36x^2 - 24x + 36y^2 - 36y - 23 = 0$

   v- $4x^2 - 8x - 9y^2 + 6y - 69 = 0$

   vi $9y^2 - 9x^2 + 6x = 1.$

   Resposta:

   i- Circunferência com centro em $\left(1, \frac{1}{3}\right)$ e raio $r = \frac{\sqrt{20}}{3}$.

ii-

	$x'y'$	xy
F_1	$(\sqrt{5}, 0)$	$\left(\sqrt{5} + \frac{1}{2}, 1\right)$
F_2	$(-\sqrt{5}, 0)$	$\left(-\sqrt{5} + \frac{1}{2}, 1\right)$
V_1	$(3, 0)$	$\left(\frac{7}{2}, 1\right)$
V_1	$(-3, 0)$	$\left(-\frac{5}{2}, 1\right)$
e	$\frac{\sqrt{5}}{3}$	$\frac{\sqrt{5}}{3}$

iii-

	$x'y'$	xy
F	$\left(\frac{3}{2}, 0\right)$	$\left(\frac{11}{6}, \frac{1}{2}\right)$
V	$(0, 0)$	$\left(\frac{1}{3}, \frac{1}{2}\right)$
r	$x' = -\frac{3}{2}$	$x = -\frac{7}{6}$

iv- Circunferência com centro em

$$\left(\frac{1}{3}, \frac{1}{2}\right) \quad \text{e raio} \quad r = 1$$

v-

	$x'y'$	xy
F_1	$(\sqrt{26},0)$	$\left(1+\sqrt{26},\frac{1}{3}\right)$
F_2	$(-\sqrt{26},0)$	$\left(1-\sqrt{26},\frac{1}{3}\right)$
V_1	$(\sqrt{18},0)$	$\left(1+\sqrt{18},\frac{1}{3}\right)$
V_1	$(-\sqrt{18},0)$	$\left(1-\sqrt{18},\frac{1}{3}\right)$
Assíntotas	$y'=\pm\sqrt{\frac{4}{9}}x'$	$\left(y-\frac{1}{3}\right)=\pm\sqrt{\frac{4}{9}}(x-1)$ ou $y=\frac{1}{3}\pm\frac{2}{3}(x-1)$

vi- É uma cônica degenerada correspondente ao par de retas

$$r_1: y=\left(x-\frac{1}{3}\right)^2 \quad \text{e} \quad r_2: y=-\left(x-\frac{1}{3}\right)^2$$

que se intersectam em

$$P=\left(0,\frac{1}{3}\right).$$