UNIVERSIDADE ESTADUAL DE CAMPINAS
Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica
1a. Prova – MA-211 – Sexta-feira (MANHÃ), 14/09/2018

Q1	
Q2	
Q3	
Q4	
Q5	
$\sum$	

ALUNO	RA

1a. Prova – MA-211 – Sexta-feira (MANHÃ), 14/09/2018

INSTRUÇÕES

NÃO É PERMITIDO DESTACAR AS FOLHAS DA PROVA
É PROIBIDO O USO DE CALCULADORAS E DE DISPOSITIVOS ELETRÔNICOS
SERÃO CONSIDERADAS SOMENTE AS QUESTÕES ESCRITAS DE FORMA CLARA E DEVIDAMENTE JUSTIFICADAS

Boa Prova!

Questão 1. (2 pontos) Considere a função

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{xy}{x^2+y^2}, & (x,y) \neq (0,0), \\ 0, & (x,y) = (0,0). \end{cases}$$

(a) f é contínua em $(0,0)$? Justifique.

(b) Calcule $\dfrac{\partial f}{\partial x}(0,0)$ e $\dfrac{\partial f}{\partial y}(0,0)$.

(c) Há plano tangente a $z = f(x,y)$ em $(0,0,0)$? Justifique.

Questão 2. (3 pontos) Utilize o método de multiplicadores de Lagrange para determinar os valores extremos da função

$$f(x, y, z) = \sqrt[3]{xyz},$$

sobre a esfera

$$x^2 + y^2 + z^2 = 3,$$

e classifique-os como máximo ou mínimo.

Questão 3. (2 pontos) Encontre as equações dos planos tangentes ao gráfico de $f(x, y) = 24 - x^2 + y^2$ que passam por ambos os pontos $(2, 0, 0)$ e $(3, 0, 4)$.

Questão 4. (2 pontos) Determine e classifique os pontos críticos de $f(x, y) = y \operatorname{sen} x$.

Questão 5. (1 ponto) Determine a curva de nível de $f(x, y) = 9x^2 + y^2$ que seja tangente à curva descrita por $xy = 1$, $x > 0$ e $y > 0$. Qual o ponto de tangência?

1a) Vamos calcular $\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$, onde a função $f(x,y)$ é dada por:

1

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{xy}{x^2+y^2}, & \text{se } (x,y) \neq (0,0) \\ 0, & \text{se } (x,y) = (0,0). \end{cases}$$

Analisando o caminho $x=y$:

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{xy}{x^2+y^2} \underset{x=y}{\overset{\downarrow}{=}} \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2}{2x^2} = \frac{1}{2}$$

Analisando agora o caminho $y=2x$:

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{xy}{x^2+y^2} \underset{y=2x}{\overset{\downarrow}{=}} \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{2x^2}{5x^2} = \frac{2}{5}$$

Como os limites são diferentes quando nos aproximamos de $(0,0)$ por caminhos diferentes, 0,3 concluímos que $\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$ não existe. 0,3

Logo, f não é contínua em $(0,0)$. 0,3

1b) $$\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = \lim_{h\to 0} \frac{f(0+h,0)-f(0,0)}{h} \overset{0,2}{=} \lim_{h\to 0} \frac{\frac{h\cdot 0}{h^2+0^2} - 0}{h} = 0^{\,0,1}$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(0,0) = \lim_{h\to 0} \frac{f(0,0+h)-f(0,0)}{h} \overset{0,2}{=} \lim_{h\to 0} \frac{\frac{0\cdot h}{0^2+h^2} - 0}{h} = 0^{\,0,1}$$

1c) f não admite plano tangente em $(0,0)$ pois f não é diferenciável em $(0,0)$ 0,2 - Pelo item (a), f não é contínua em $(0,0)$. 0,3

Questão 2:

Se denotamos $g(x,y,z) = x^2+y^2+z^2$, consideramos o método dos multiplicadores e examinamos o sistema

$$\begin{cases} \nabla f(x,y,z) = \lambda \nabla g(x,y,z) \\ g(x,y,z) = 3 \end{cases} . \quad (*)$$

0,4

0,1

Para x, y, z todos não nulos, temos

$$f_x(x,y,z) = \frac{yz}{(xyz)^{2/3}},$$ 0,2

$$f_y(x,y,z) = \frac{xz}{(xyz)^{2/3}},$$ 0,2

$$f_z(x,y,z) = \frac{xy}{(xyz)^{2/3}}.$$ 0,2

Além disso, claramente

$$\nabla g(x,y,z) = (2x, 2y, 2z).$$ 0,2

Logo, a equação vetorial $(*)$ nos fornece

$$2\lambda (xyz)^{2/3} = \underbrace{\frac{yz}{x} = \frac{xz}{y} = \frac{xy}{z}}$$

$$\Downarrow$$

$$x^2 = y^2 = z^2,$$ 0,3

donde ao substituir na segunda equação do sistema encontramos

$$3x^2 = 3 \Rightarrow \underbrace{x = \pm 1 \quad \therefore \quad \begin{matrix} y = \pm 1 \\ z = \pm 1 \end{matrix}}_{0{,}3}$$

Portanto, para

$$\overbrace{(x_{max}, y_{max}, z_{max}) \in \{(1,1,1), (1,-1,-1), (-1,1,-1), (-1,-1,1)\}}^{0{,}2},$$

temos valor máximo

$f(x_{max}, y_{max}, z_{max}) = 1,$ 0,3

enquanto que, para

$$\overbrace{(x_{min}, y_{min}, z_{min}) \in \{(-1,-1,-1), (-1,1,1), (1,-1,1), (1,1,-1)\}}^{0{,}2},$$

temos valor mínimo

$f(x_{min}, y_{min}, z_{min}) = -1.$ 0,3

Observe ainda que, se alguma das variáveis x, y ou z se anula, não só f tem valor nulo, como para pontos próximos sobre a esfera f pode assumir valores negativos ou positivos, mostrando não haver sequer extremo local nesta situação. 0,1

Questão 3:

Recorde que a equação do plano tangente ao gráfico de f no ponto $(x_0, y_0, f(x_0,y_0)) = (x_0, y_0, z_0)$ é dada por

0,3 $$f_x(x_0,y_0)(x-x_0) + f_y(x_0,y_0)(y-y_0) = z - z_0, \quad (x,y,z) \in \mathbb{R}^3.$$

Ora, $\overbrace{f_x(x_0,y_0) = -2x_0}^{0{,}1}$ e $\overbrace{f_y(x_0,y_0) = 2y_0}^{0{,}1}$.

Como os planos devem passar pelos pontos $(2,0,0)$ e $(3,0,4)$, isto nos leva a analisar

$$\begin{cases} -2x_0(2-x_0) + 2y_0(0-y_0) = 0 - z_0 \\ -2x_0(3-x_0) + 2y_0(0-y_0) = 4 - z_0 \end{cases}, \quad 0{,}3$$

ou melhor,

$$\begin{cases} 2x_0^2 - 2y_0^2 - 4x_0 + z_0 = 0 & (\mathrm{I}) \\ 2x_0^2 - 2y_0^2 - 6x_0 + z_0 = 4 & (\mathrm{II}) \end{cases} \quad 0{,}2$$

A subtração $(\mathrm{I}) - (\mathrm{II})$ assegura 0,2
$2x_0 = -4 \Rightarrow x_0 = -2.$

Temos

$$z_0 = f(x_0,y_0) = f(2,y_0) = 24 - 4 + y_0^2 = 20 + y_0^2.$$

Por substituição em (I), obtemos

$$2 \cdot 4 - 2y_0^2 - 4 \cdot (-2) + 20 + y_0^2 = 0,$$

isto é,

$$y_0^2 = 36 \Rightarrow y_0 = \pm 6. \quad] \; 0{,}2$$

Logo, os planos tangentes solicitados são

$$4(x+2) + 12(y-6) = z - 56 \quad] \; 0{,}3$$

e

$$4(x+2) - 12(y+6) = z - 56. \quad] \; 0{,}3$$

4

$f(x,y) = y \operatorname{sen} x$

$\frac{\partial f}{\partial x} = y \cos x$ 0,1

$\frac{\partial f}{\partial y} = \operatorname{sen} x$ 0,1

$\Rightarrow \nabla f = 0 \Rightarrow \begin{cases} y \cos x = 0 \\ \operatorname{sen} x = 0. \end{cases}$ 0,2

$\operatorname{sen} x = 0 \Rightarrow$

$x = k\pi, \quad k \in \mathbb{Z}.$ 0,2

$y \cdot \cos(k\pi) = 0 \Rightarrow y = 0.$

Pontos críticos: $(k\pi, 0)$, $k \in \mathbb{Z}$. 0,3

Classificação:

$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = -y \operatorname{sen} x$ 0,1

$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 0$ 0,1

$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \cos x$ 0,1

$H(x,y) = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y) \cdot \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y) - \left[\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}\right]^2$ 0,2

$\Rightarrow H(k\pi, 0) = \cancel{0 \cdot \operatorname{sen} k\pi \cdot 0}^{\,0} - [\cos(k\pi)]^2 < 0$ 0,3

$\Rightarrow$ todos pontos críticos $(k\pi, 0)$, $k \in \mathbb{Z}$ são pontos de sela. 0,3

5) Curva de Nível de $f(x,y) = 9x^2 + y^2$ tangente a curva $xy = 1$, $x > 0$, $y > 0$. Qual o ponto de tangencia? 5

$f(x,y) = 9x^2 + y^2 \rightsquigarrow \nabla f = (18x, 2y)$

$g(x,y) = xy \qquad \nabla g = (y, x)$

$$\begin{cases} \nabla f = \lambda \nabla g \\ g(x,y) = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 18x = \lambda y & (1) \\ 2y = \lambda x & (2) \\ xy = 1 & (3) \end{cases} \quad 0{,}2$$

De (1) temos: $\lambda = \frac{18x}{y}$

De (2) temos: $\lambda = \frac{2y}{x}$

Por (3), temos que $x \neq 0$ e $y \neq 0$. Portanto a operação está bem definida!

0,1

Fazendo (1) = (2), temos: $\frac{18x}{y} = \frac{2y}{x}$ 0,1 $\Rightarrow 18x^2 = 2y^2 \Rightarrow 9x^2 = y^2$

De (3), temos $x = \frac{1}{y}$ e daí

0,1 0,1

$9 \cdot \frac{1}{y^2} = y^2 \Rightarrow y^4 = 9 \Rightarrow \boxed{y = \sqrt{3}}$ usamos $x > 0$ e $y > 0$.

De $9x^2 = y^2$ obtemos: $9x^2 = 3 \Rightarrow x^2 = \frac{1}{3} \Rightarrow \boxed{x = \frac{\sqrt{3}}{3}}$ 0,1

0,2 Curva de nível: $f\left(\frac{\sqrt{3}}{3}, \sqrt{3}\right) = 9\left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right)^2 + (\sqrt{3})^2 = 9 \cdot \frac{3}{9} + 3 = 6$

$\Rightarrow \boxed{9x^2 + y^2 = 6}$

0,1 Ponto de tangencia: $\left(\frac{\sqrt{3}}{3}, \sqrt{3}\right)$