13 Quádricas e Superfícies

1. Encontrar a equaçao da superfície cilíndrica determinada pelo vetor $\vec{v} = (1, -1, 2)$ e a curva diretriz

$$\mathcal{C} : \begin{cases} z^2 + 4yz - y^2 + 3y - 5 = 0 \\ x = 0 \end{cases} .$$

Resposta:

$$(z - 2x)^2 + 4(y + x)(z - 2x) - (y + x)^2 + 3(y + x) = 5.$$

2. Mostre que

$$9x^2 + y^2 + 2z^2 + 2xy - 8xz - 1 = 0$$

determina a equação de uma superfície cilíndrica e determine uma equação da curva diretriz e um vetor paralelo com a reta geratriz.

3. a) Determine a superfície cônica, com vértice na origem, obtida a partir da curva definida por

$$x^2 + \frac{y^2}{3} = 1 \text{ e } z = 2.$$

b) Encontre uma parametrização dela.

Resposta: a) Cone elíptico de equação:

$$4x^2 + \frac{4}{3}y^2 = z^2,$$

b)

$$(*) \begin{cases} h_1(r, \theta) & = \frac{r}{2}\cos(\theta) \\ h_2(r, \theta) & = \frac{\sqrt{3}r}{2}\sin(\theta) \\ h_3^{\pm}(r, \theta) & = \pm r \end{cases} \qquad (r, \theta) \in [0, +\infty) \times [0, 2\pi).$$

4. Encontrar a equação (em coordenadas cartesianas) da superfície cilíndrica S com curva diretriz

$$C\colon x^2 + 4y = 0$$

no plano $z = 0$ e retas geratrizes paralelas ao vetor

$$\vec{v} = (-2, 4, -6).$$

Resposta:

$$\left(x - \frac{z}{3}\right)^2 + 4\left(y + \frac{2z}{3}\right) = 0.$$

5. Reduzir cada uma das equações de forma a identificar a quádrica que ela representa.

   a) $4x^2 - 2y^2 + z^2 = 1$;
   b) $3x^2 + 4y^2 + z^2 - 12x - 8y - 2z + 16 = 0$;
   c) $x^2 + y + z^2 = 0$;

d) $4x^2 - 8x - 9y^2 + 6y - 36z + 3 = 0$.

Resposta: Em cada caso trabalhamos as expressões, seja completando quadrados ou colocando nas formas canônicas, para identificar as quádricas.

a) Hiperboloide de 1-folha.

b) Elipsoide.

c) Paraboloide elíptico.

d) Paraboloide hiperbólico.

6. a) Obtenha a equação do lugar geométrico dos pontos que eqüidistam do plano $\pi : x = 2$ e do ponto $P = (-2, 0, 0)$. Que conjunto é este?

b) Obtenha a equação do lugar geométrico dos pontos que eqüidistam das retas $r : y = z = 0$ e $l : x = y - 1 = 0$. Que conjunto é este?

c) Determine a equação do lugar geométrico dos pontos $P = (x, y, z)$ tais que a soma das distâncias de P aos dois pontos $(2, 0, 0)$ e $(-2, 0, 0)$ é igual a 6. Que lugar geométrico é este?

Resposta:

a) Paraboloide elíptico de equação

$$y^2 + z^2 = -8x.$$

b) Paraboloide hiperbólico de equação.

$$(z')^2 - (x')^2 = (-2)(y')$$

c) Elipsoide de equação

$$\rightarrow \quad \frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{5} + \frac{z^2}{5} = 1,$$

7. Dadas as equações da curva diretriz e um vetor paralelo às retas geratrizes determine a equação da superfície cilíndrica.

a) $y^2 = 4x$, $z = 0$ e $\vec{v} = (1, -1, 1)$

b) $x^2 - y^2 = 1$, $z = 0$ e $\vec{v} = (0, 2, -1)$

c) $x^2 + z^2 = 1$, $y = 0$ e $\vec{v} = (4, 1, 0)$

d) $4x^2 + z^2 + 4z = 0$, $y = 0$ e $\vec{v} = (4, 1, 0)$.

Resposta:

a)

$$(y + 1)^2 = 4(x - 1).$$

b)

$$(x)^2 - (y + 2)^2 = 1.$$

c)

$$(x - 4)^2 + z^2 = 1.$$

d)
$$4(x-4)^2 + z^2 + 4z = 0.$$

8. Mostre que cada uma das equações representa uma superfície cilíndrica e determine a equação da curva diretriz e um vetor paralelo às retas geratrizes.

   a) $x^2 + y^2 + 2z^2 + 2xz - 2yz = 1$;
   b) $17x^2 + 2y^2 + z^2 - 8xy - 6xz - 2 = 0$.

9. Determine a equação da superfície de revolução gerada pela rotação da curva dada em torno do eixo especificado.

   a) $9x^2 + 4y^2 = 36$ e $z = 0$ em torno do eixo y;
   b) $yz = 1$ e $x = 0$ em torno do eixo z.

   Resposta:

   a)
   $$9x^2 + 9z^2 + 4y^2 = 36.$$

   b)
   $$\pm z\sqrt{y^2 + x^2} = 1$$

10. Mostre que cada uma das equações representa uma superfície de revolução e determine o seu eixo de revolução e a equação da curva geratriz.

    a) $x^2 + y^2 - z^3 = 0$;
    b) $y^6 - x^2 - z^2 = 0$