UNICAMP

Wilson Castro Ferreira Jr.-II Sem 2021

Notas de AULA: *ÁLGEBRA LINEAR-*

CAPÍTULO IV :

GEOMETRIZAÇÃO DE ESPAÇOS VETORIAIS: *PRODUTO INTERNO*

I-INTRODUÇÃO:

O Conceito de Comprimento de Deslocamentos, Representação Cartesiana, e sua Generalização Axiomática para Espaços Vetoriais abstratos*.*

OBSERVAÇÃO INICIAL : *É importante ressaltar mais uma vez a distinção conceitual entre*

(1) *o* ***Espaço Ecológico*** *(originário da nossa percepção do ambiente e que fundamenta o conceito de "retas" na observação de trajetórias luminosas em meios homogêneos, cujas raízes são pré-históricas e evolucionárias e tem base "Sensorial" e "Experimental"(acc. J.von Uexküll),*

(2) *a* ***Geometria Euclideana*** *(estabelecida axiomaticamente em termos do conceito de reta por Euclides -sec. IV AC e totalmente baseada na percepção ecológica),*

(3) a *Representação Vetorial da Geometria Euclideana devida a H.Grassmann&G.Peano (sec.XIX) e estabelecida axiomaticamente como uma* ***Estrutura de Espaço Vetorial****, e*

(4) *Os* ***Espaços Vetoriais Cartesianos (Matriciais)****,isto é,* $\mathbb{R}^3 \approx M_{31}(\mathbb{R}), ou\ \mathbb{R}^2$ *(sec. XIX), que são Modelos Numéricos especificos da Estrutura Vetorial. Ao longo do texto estes termos serão utilizados alternadamente, mas devem ser entendidos da forma mais apropriada ao contexto.*

A **motivação e** ***intuição*** *provem da Geometria Ecológica, a* ***abstração e generalização*** *da teoria Axiomática de Espaços Vetoriais e os* ***exemplos*** *"numéricos" e aplicações matemáticas provem dos Espaços Cartesianos e dos Espaços Funcionais.*

A Geometria Euclideana empresta o conceito de deslocamentos retilíneos das trajetórias de luz em meio ***homogêneo*** *e seus objetos de estudo são retas e pontos. Se os deslocamentos que conectam pontos forem associados a outra classe de trajetórias (por exemplo, da própria luz, mas em um meio refrativo ou, do movimento de um taxi que trafega apenas ao longo de coordenadas retangulares) então obteríamos outras Geometrias ditas não-Euclideanas.*

*A importância da Geometria Euclideana e da intuição que ela permite desenvolver devido à sua proximidade conceitual com a Geometria Ecológica ("Sensorial"/"Experimental") tem sido diminuída nos últimos tempos e progressivamente vem dando lugar a manipulações simbólicas. Na Grécia antiga e até recentemente, o termo "geômetra" era sinônimo do termo "matemático" e até mais utilizado. Para avaliar esta mudança intelectual, basta lembrar que Isaac Newton preferiu escrever a primeira edição de seu monumental tratado "Principia Matematica" fazendo uso unicamente de construções da Geometria Euclideana para demonstar suas teses, muito embora àquele tempo já tivesse inventado e desenvolvido as técnicas do Cálculo. Este texto hoje é incompreensível mesmo para o leitor bem versado na Matematica bourbakista predominante. (*N.Gucciardini-*Isaac Newton and Natural Philosophy*, Cambridge UP 1999*.,* S.Chandrasekhar-*Newton's Principia for the Common Reader,* Oxford UP 2003*,* J.Gray-*Worlds out of Nothing-History of Geometry,* Springer 2010*).*

A Geometria Euclideana faz uso de uma classe de conceitos relativos à mensuração de objetos geométricos (comprimentos de deslocamentos, áreas e volumes de regiões, e ângulos entre vetores) que são indispensáveis para a descrição elementar do Espaço Ecológico da qual ela se origina.

Estes conceitos geométricos não estão representados explicitamente e nem implicitamente no Sistema de Axiomas para Espaço Vetorial apresentados no capítulo 01, uma vez que aquele Sistema discorre especificamente sobre os aspectos puramente "algébricos" e operacionais desta Estrutura relacionados às operações básicas de soma e multiplicação por escalar.(*Sobre a questão de Mensuração consulte o Apêndice sobre Análise Dimensional- Cap.03*).

Portanto, para alcançar uma maior *completude* da Teoria Axiomática da Álgebra Linear quanto à sua descrição do Modelo Euclideano de Espaço, é necessário que as idéias responsáveis pela descrição de conceitos geométricos fundamentais sejam sintetizadas e adicionadas operacionalmente aos Axiomas da Estrutura de Espaços Vetoriais.

A mensuração geométrica Euclideana mais primitiva e fundamental refere-se ao *Comprimento de um Deslocamento* que resulta imediatamente no conceito de distância entre os seus extremos, tal como é feito na reta real. (E, tal como também ocorre no caso real, a introdução de um conceito de *distância* entre os pontos de um Espaço Vetorial abre as portas para o conceito de aproximação e daí para a caracterização de elementos por aproximação limite que é exatamente a essência do Cálculo e da ***Análise***).

A generalização deste conceito Euclideano/Ecológico de comprimento para as Estruturas de Espaços Vetoriais E gerais utiliza igualmente uma função, denominada ***Norma***, que atribui valores não negativos $\|v\| \geq 0$ a cada vetor $v \in E$. A abstração axiomática (sintética) das propriedades essenciais que caracterizam o seu protótipo Euclideano será estudada a seguir.

O sistema de Axiomas que sintetiza operacionalmente um objeto matemático suficiente para caracterizar e descrever a interpretação geométrica de "comprimento de um deslocamento" será dado pelas 3 propriedades seguintes.

CARACTERIZAÇÃO *AXIOMÁTICA* DE NORMAS em um Espaço Vetorial Abstrato

DEFINIÇÃO-

Uma função $\|\,.\,\|: E \to \mathbb{R}^+, \|v\|$ é denominada ***Norma*** no Espaço Vetorial E se satisfaz aos seguintes TRÊS Axiomas:

1)*Positividade definida:* $\|u\| > 0 \; se \; u \neq 0$,

2)*Homogeneidade*: $\|\lambda u\| = |\lambda|\|u\|$, $\lambda \in \mathbb{R}$,

3)*Desigualdade triangular*: $\|v + u\| \leq \|v\| + \|u\|$.

Uma Norma é dita ***Estritamente Convexa*** se a desigualdade estrita

4) $\|v + u\| < \|v\| + \|u\|$ ocorrer sempre que os vetores u, v *não forem* colineares.

Exercícios:

-Mostre ***geometricamente*** ("*lápis e papel*") que, de fato, a medida Euclideana de comprimento de um deslocamento retilíneo no Espaço Ecológico satisfaz as propriedades operacionais 1)2)3), ou seja, o comprimento de um deslocamento é uma *Norma* neste Modelo concreto de Espaço Vetorial. (Na verdade, este é o protótipo desta ideia).

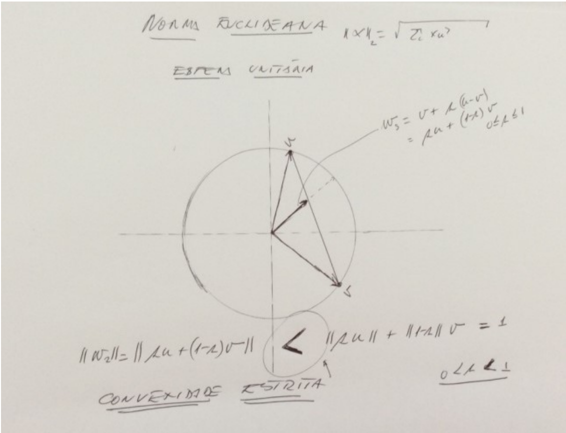
-Mostre ***geometricamente*** ("*lápis e papel*") que a medida Euclideana de comprimento satisfaz também o Axioma 4) caracterizando-se portanto como uma norma ***estritamente convexa***.

-Mostre que na representação da Geometria Euclideana de deslocamentos com o Espaço Vetorial Cartesiano $\mathbb{R}^3$, o **Teorema de Pitágoras** (sec.IV AC) implica que o comprimento Euclideano de um vetor $x = (x_1, x_2, x_3)$ é dado na forma:

$\|x\|_2 = (\sum_{k=1}^{3}(x_k)^2)^{\frac{1}{2}}$ (Normalmente denotada por $\|x\|$).E screva a desigualdade triangular na representação cartesiana.(A demonstração puramente algébrica desta desigualdade, sem “ajuda explícita” do seu significado geométrico, é devida a A.L. Cauchy (sec.XIX) e será tratada mais adiante em toda a sua generalidade). Observe que a expressão algébrica cartesiana para comprimento de um ***deslocamento*** se modifica com o sistema de coordenadas (translação da origem e mudança de eixos ortogonais), mas o valor permanece o mesmo, pois é geometricamente consistente.

–Expresse analiticamente (i.e., simbolicamente/algebricamente) a condição de *convexidade estrita* da norma Euclideana segundo a sua representação cartesiana.

Convexidade Estrita da Norma Euclideana demonstrada Geometricamente na sua correspondente



“Esfera Unitária”

-Mostre que **o conjunto de três** Axiomas que define uma Norma é: **(1) Independente**, (ou seja, é impossível deduzir um axioma deles a partir dos outros dois- (Sugestão: Apresente um Modelo considerado consistente, simples e concreto, que satisfaz dois e não o outro, par a par) , é **(2) Consistente** (Sugestão: Exiba um Modelo simples que cumpra as três condições e que “sem nenhuma sombra de dúvida razoável” é consistente, por exemplo $\mathbb{R}^1$), é **(3)Completo** (Sugestão: A norma Euclideana satisfaz os axiomas).

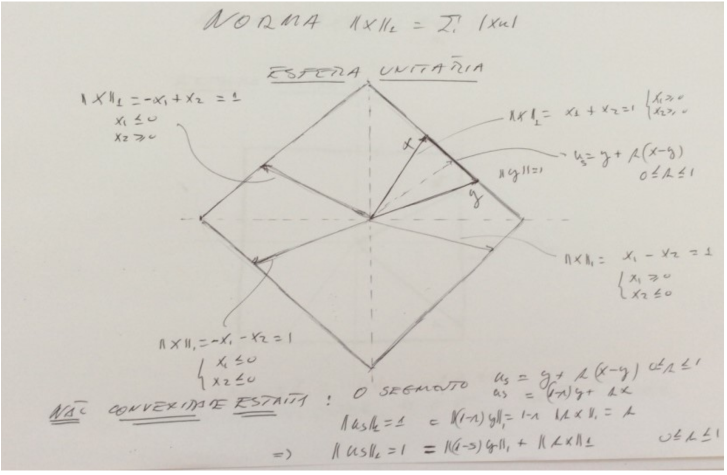
-Demonstre que, segundo os 03 Axiomas de norma, $\|u\| = 0 \; se \; e \; somente \; se \; u = 0$.

-Mostre que se u, v forem colineares, a Desigualdade triangular é, de fato, uma igualdade, mas ***não*** tente provar a recíproca, pois isto somente ocorre com normas estritamente convexas que constituem uma subclasse das normas gerais como se pode ver no próximo exercício.

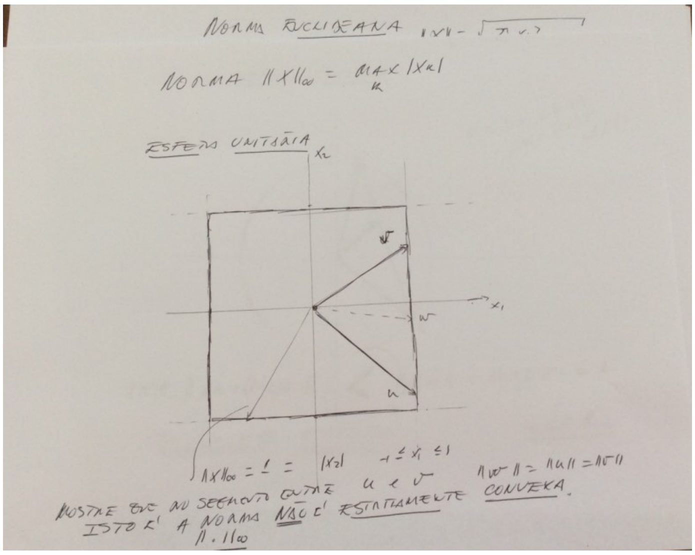
-Mostre que as *medidas de comprimentos* no Espaço Vetorial Cartesiano $\mathbb{R}^3$ definidas como $\|x\|_1 = \sum_{k=1}^{3}|x_k|$, $\|x\|_\infty = \max_{1\le k\le 3}|x_k|$ ***,*** , ***são*** Normas (pois satisfazem 1)2)3)), mas ***não são*** estritamente convexas, pois há vetores não colineares para os quais ocorre a igualdade $\|v + u\| = \|v\| + \|u\|$. Interprete estes exemplos geometricamente.(**Sugestão**:Analise as “esferas” unitárias $\|x\|_1 = 1, \|x\|_\infty = 1$ em $\mathbb{R}^2$). Argumente com estes exemplos que a convexidade estrita é uma propriedade independente dos três axiomas que caracterizam uma Norma.

-Mostre que as normas $\|x\|_1$ e $\|x\|_\infty$ ***não são*** geometricamente consistentes no sentido de que seus valores se modificam com o sistema de coordenadas cartesianas, ao contrario dos valores da norma Euclideana-Pitagórica $\|x\|_2 = (\sum_{k=1}^{3}(x_k)^2)^{\frac{1}{2}}$.(Sugestão:Considere dois eixos de coordenadas no plano com angulo de $\frac{\pi}{4}$ e um vetor na bissetriz)

Não Convexidade estrita da "*Norma do Taxímetro*" e a "*Região de tarifa Unitária*"



Não Convexidade estrita da Norma *Max* (∞) na Esfera Unitária



- Mostre que a *medida de comprimento* no Espaço Vetorial Cartesiano $\mathbb{R}^3$ definidas como , $\|x\|_{1\omega} = \sum_{k=1}^{3} \omega_k |x_k|$, com uma chamada "*ponderação*", $\omega_k > 0$, é uma Norma (denominada "***Norma do Taxímetro***") que generaliza o exemplo $\omega = 1$. Argumente sobre a razão desta denominação e apresente uma interpretação para os valores da ponderação ω_k .

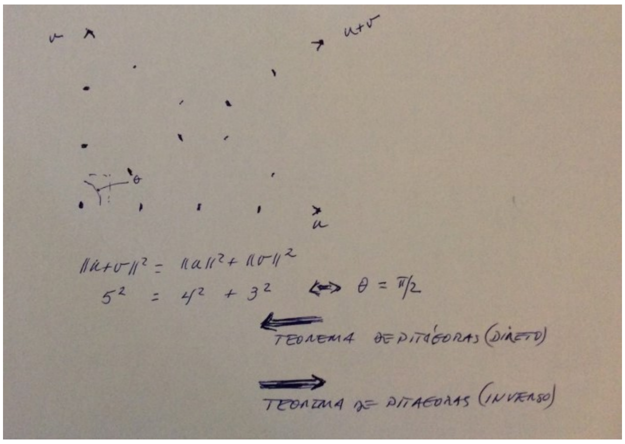
"*Correlação Direcional*": *Ângulo entre Vetores não nulos*

Estes últimos exemplos mostram que os Axiomas 1)2)3) que escolhemos para sintetizar o conceito geral de comprimento abrange uma classe importante de "Normas", mas muito mais *permissiva* do que sugere a nossa intuição. A condição extra de *convexidade estrita* elimina algumas "*estranhezas*" (como aquelas apresentadas pela norma do taxímetro) mas não é suficiente para representar o Modelo de comprimento Euclideano. Este Modelo exibe propriedades geométricas mais especificas que não estão necessariamente contempladas na teoria baseada nos 3 Axiomas de Norma. Assim, com o propósito de obter uma teoria mais próxima da intuição Ecológica/Euclideana, passaremos a analisar propriedades que podem ser incluídas nos Axiomas com esta finalidade, o que faremos através de sua representação cartesiana.

A função Norma no Modelo Geométrico Euclideano (comprimento de deslocamentos) diz respeito apenas a um vetor isoladamente. Entretanto, para descrever completamente esta Geometria é indispensável também estabelecer métodos que permitam descrever o conceito de ***direção relativa entre*** dois vetores, isto é, o "***Ângulo***" entre dois vetores não nulos, ou seja, uma "***correlação***" entre eles.

Para isto, analisemos a abordagem desta questão na Representação Cartesiana da Geometria Euclideana. Com base no conceito Euclideano de comprimento, o Teorema de Pitágoras *Recíproco* nos mostra que a relação de perpendicularidade/ortogonalidade ***entre*** dois vetores v, u pode ser expressa apenas com o conceito de comprimento da seguinte forma (*utilizada por marceneiros para fazer enquadramento retangular com esquadros, por exemplo, com as medidas 3,4,5, como na Figura abaixo*)

Teorema de Pitágoras (*Recíproco* -*Siga os Pontos*)



Dois vetores v, u são ortogonais (o que se denotará pelo símbolo $v \perp u$) ***se e somente se*** *vale a igualdade:* $\|v+u\|^2 = \|v\|^2 + \|u\|^2$.

Para estabelecer o conceito de ortogonalidade da Geometria de Euclides em termos de sua Representação Cartesiana, consideramos dois vetores $u = (x_1, x_2, x_3)$ e $v = (y_1, y_2, y_3)$, e escrevemos

$$\|v+u\|^2 = \sum_{k=1}^{3}(x_k + y_k)^2 = \|v\|^2 + \|u\|^2 = \sum_{k=1}^{3}(y_k)^2 + \sum_{k=1}^{3}(x_k)^2$$

e observamos imediatamente que a ***condição Pitagórica de ortogonalidade*** entre u e v nas suas representações cartesianas é equivalente à igualdade: $\sum_{k=1}^{3} x_k y_k = 0$. Portanto, verifica-se que esta expressão $\sum_{k=1}^{3} x_k y_k$ contem uma informação sobre uma posição relativa (correlação) ***entre*** dois vetores.

Observa-se em seguida que o valor da expressão $\sum_{k=1}^{3} x_k y_k$ associado à representação cartesiana de vetores v, u pode também ser re-escrito em termos de Normas-Comprimentos:

$$\sum_{k=1}^{3} x_k y_k = \frac{1}{4}(\|v+u\|^2 - \|v-u\|^2)$$

Esta igualdade demonstra imediatamente que o valor da expressão analítica, $\sum_{k=1}^{3} x_k y_k$ ***não depende*** do sistema de eixos cartesianos utilizados na representação do deslocamento (pois, como sabemos também não dependem, obviamente, os comprimentos), isto é, qualquer que seja o seu significado geométrico em geral, esta é uma medida *consistentemente* geométrica. Por este motivo instituiremos um termo especial, "***produto interno***" , para designar a medida. Resta saber o que ele representa na Geometria Euclideana quando seu valor não estabelece uma ortogonalidade.

Para verificar esta pendência, já que o seu valor é *invariante* com o sistema de eixos cartesianos, utilizaremos ("*maliciosamente*") um sistema de coordenadas particularmente apropriado, tomando o primeiro eixo na direção de u e o segundo eixo (perpendicular a u) no mesmo plano em que estão u e v. Assim, neste sistema, as suas respectivas coordenadas cartesianas serão da forma $u = (X_1, 0{,}0)$ (onde ${X_1}^2 = \|u\|^2 = \sum_{k=1}^{3}(x_k)^2$) e $v = (Y_1, Y_2, 0)$ (e, portanto $\|v\|^2 = {Y_1}^2 + {Y_2}^2 = \sum_{k=1}^{3}(y_k)^2$).

Neste novo sistema de eixos, teremos ainda $\sum_{k=1}^{3} x_k y_k = X_1 Y_1$, que pode (com alguma perspicácia geométrica) ser re-escrito na forma: $X_1 Y_1 = |X_1| \sqrt{Y_1{}^2 + Y_2{}^2} \cos\theta = \|u\|(\|v\| \cos\theta)$ em que $\theta \in [0, \pi]$ é o ângulo orientado entre os dois vetores segundo a trigonometria plana. (Verifique)

Portanto, concluímos que, em ***qualquer eixo de coordenadas*** temos:

$\sum_{k=1}^{3} x_k y_k = \|u\|\|v\| \cos\theta$

em que $\theta \in [0, \pi]$ continua sendo o ângulo orientado entre os dois vetores segundo a trigonometria plana. Assim, define-se de forma geometricamente consistente, o ângulo entre dois vetores (não nulos) em termos do ***produto interno*** da forma:

$$\cos\theta = \frac{\sum_{k=1}^{3} x_k y_k}{\sqrt{\sqrt{\sum_{k=1}^{3}(y_k)}^2}\ \sqrt{\sqrt{\sum_{k=1}^{3}(x_k)^2}}}$$

A verificação analitica da consistência geométrica para o valor $\cos\theta$ (independente de coordenadas cartesianas) pode ser comprovada com a fórmula:

$\cos\theta = \frac{\frac{1}{4}(\|v+u\|^2 - \|v-u\|^2)}{\|u\|\|v\|}$.

É fácil demonstrar analiticamente que, na representação cartesiana, a desigualdade de Cauchy equivale à desigualdade triangular para vetores do Espaço tridimensional. Como esta última é geometricamente óbvia, fica, portanto, ***geometricamente*** demonstrada a famosa, importante (e não trivial) desigualdade analítica de Cauchy:

$|\sum_{k=1}^{3} x_k y_k| \leq \left(\sqrt{\sum_{k=1}^{3}(y_k)^2}\right)\left(\sqrt{\sum_{k=1}^{3}(x_k)^2}\right)$.

Exercício - Mostre que a desigualdade triangular para a função $\|x\| = \sqrt{\sum_{k=1}^{n}(x_k)^2}$ definida para vetores em $\mathbb{R}^n$ gerais é equivalente à desigualdade de Cauchy correspondente.

Em vista de todos estes argumentos, conclui-se que a representação da Geometria Euclideana por Espaços Cartesianos pode também ser concisamente expressa em termos da operação binária entre vetores denotada por $\langle u, v\rangle$, denominada "***Produto Interno***", e definida pela expressão: $\langle u, v\rangle = \sum_{k=1}^{3} x_k y_k$, cujo valor, como acabamos de ver, é independente das coordenadas cartesianas.

As propriedades *operacionais **independentes**s* e ***fundamentais*** (Axiomas) satisfeitas por esta operação escolhidas para caracterizar axiomaticamente um conceito análogo no contexto abstrato são: **1)***Comutatividade*,($\langle u, v\rangle = \langle v, u\rangle$) **2)***Positividade estrita*($\langle u, u\rangle > 0 se\ u \neq 0$) e **3)***Bilinearidade, isto é, Homogeneidade,(* $\langle u, \lambda v\rangle = \lambda\langle u, v\rangle$*) e Distributividade:* ($\langle u, v + w\rangle = \langle u, v\rangle + \langle u, w\rangle$)

Exercicios -

-Mostre que, de fato, a operação $\langle u, v\rangle = \sum_{k=1}^{3} x_k y_k$ em $\mathbb{R}^3$satisfaz as condições acima-

-Mostre que a Bilinearidade ("distributividade e homogeneidade") para os dois fatores decorre dos 3 axiomas e não há necessidade de explicitá-lo, pois seria redundante.(Sugestão: Use a comutatividade)

-Mostre que a propriedade " $\langle u, u\rangle = 0$ se e somente se $u = 0$" é redundante com os três axiomas, isto é, decorre deles e, portanto, não é necessário explicitá-lo como um axioma adicional.

Sem dúvida, o sistema escolhido de 3 axiomas é bem reduzido e, como veremos mais tarde, *não são redundantes*, ou seja, nenhum deles pode ser deduzido dos outros dois. A *consistência* é previamente verificada porque o Modelo Cartesiano satisfaz estas propriedades, e ele é considerado de "confiança" neste aspecto, ou seja, não há possibilidades de obter conclusões conflitantes deduzidas a partir deles. A "*completude*" é um conceito relativo, mas será satisfatoriamente resolvida quando mostrarmos que estes axiomas determinam os produtos internos de Espaço Cartesiano, o que, por si só já é um Modelo importante. Se estes axiomas são suficientes para descrever aspectos geométricos substanciais em Espaços abstratos, somente a prática responde, mas é claro que a história já respondeu afirmativamente a esta questão, pois caso contrário ele não seria apresentado na literatura matemática com tanta ênfase.

A abordagem axiomática do produto interno tem a grande virtude de sintetizar de maneira sucinta e abrangente *tanto* a medida geométrica de *comprimento* de **um** vetor, *quanto* a medida de *ângulo relativo* ***entre*** vetores não nulos em uma única operação.

O Primeiro passo na Abstração: ***A Generalização do conceito de produto interno para*** $\mathbb{R}^n$ $n > 3$

O termo "produto" é utilizado para designar esta função (de duas variáveis vetoriais), $\langle\, .\, \rangle : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$, $\langle u, v \rangle$, devido a sua propriedade ***Bilinear*** (***homogeneidade*** e **distributividade** nas ***duas*** variáveis separadamente). A introdução desta operação, além de ampliar a representatividade geométrica da estrutura, facilitará também a manipulação operacional (algébrica) da geometria, razão porque a tomaremos como ponto de partida.

Faltando um Modelo visual para Espaços Vetoriais Cartesianos $\mathbb{R}^n, n > 3$, nada mais natural e imediato do que atribuir a nomenclatura de "comprimento" à função $\sqrt{\sum_{k=1}^{n}(x_k)^2}$ estendida para vetores $x = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ $n > 3$ de forma completamente análoga ao Modelo Euclideano $(n = 3)$ e denotá-la igualmente pelo mesmo símbolo, $\|x\| = \sqrt{\sum_{k=1}^{n}(x_k)^2}$. Resta saber se esta *nomenclatura* é consistente com a linguagem dos Axiomas que caracterizam uma Norma. De fato, é possível demonstrar que sim, mas adiaremos esta demonstração para mais adiante.

A grande vantagem da representação Cartesiana em $\mathbb{R}^3$ destes conceitos geométricos Euclideanos é a possibilidade de generalizá-los imediatamente para Espaços Vetoriais Cartesianos gerais $\mathbb{R}^n$ (utilizando uma expressão análoga, $\langle X, Y \rangle = \sum_{k=1}^{k=n} X_k Y_k$) cujo tratamento, por analogia, passa a utilizar a mesma linguagem geométrica e, com isto, herda a preciosa intuição que adquirimos sobre os Espaços ecológicos (plano e espacial) , mesmo que não façam qualquer sentido cognitivo para $n > 3$. (Como um vôo com instrumentos em região desconhecida por intermédio da sua representação *virtual* na tela de um radar). A poderosa argumentação intuitiva que resulta desta analogia facilita enormemente a compreensão e a apreensão da teoria abstrata neste contexto formal e é instrumento intelectual indispensável para a Matemática.

Todavia, os Espaços Cartesianos $\mathbb{R}^n$ não são os únicos Modelos da Estrutura de Espaço Vetorial e o próximo passo natural é estender a caracterização destes conceitos geométricos de forma ***intrínseca*** e operacional, isto é, independentes de coordenadas cartesianas circunstanciais.

A introdução da estrutura geometrizadora de um "produto interno" para Espaços Vetoriais gerais que não dispõem de uma representação cartesiana (por exemplo, os Espaços de Funções) deve ser feita de uma maneira completamente intrínseca que caracterize esta operação, não por intermédio de formulações explícitas, (como as fórmulas $\langle X, Y \rangle = \sum_{k=1}^{k=n} X_k Y_k$) mas como ***conseqüência*** (implícita) de algumas propriedades ***operacionais*** que serão apresentadas *axiomaticamente*.

É, surpreendente, que todos os aspectos mensuráveis da Geometria Euclideana possam ser sintetizados em uma única operação binária entre dois vetores, cuja caracterização pode ser estabelecida por apenas ***três*** concisos axiomas que a "descolam" completamente de sua descrição cartesiana original e ainda assim permitem preservar uma linguagem geométrica consistente com o seu sentido original.

OBSERVAÇÃO: O termo "*Produto*" é empregado de forma genérica para designar uma função binária entre dois vetores de um Espaço Vetorial Real com valor em um Espaço Vetorial (que pode ser o próprio E ou mesmo $\mathbb{R}$) , $b: E \times E \to F$, $b(u,v)$, no caso em for distributivo nas duas variáveis separadamente, i.e., $b(u+w,v) = b(u,v) + b(w,v)$ e $b(v,u+wb) = b(v,u) + b(v,w)$. Se também for válida a homogeneidade, $b(\lambda u,v) = \lambda b(u,v), b(u,\lambda v) = \lambda b(u,v)$, diz-se que $b(u,v)$ é uma função bilinear. Por uma questão de familiaridade operacional adquirida em outros contextos, é psicologicamente vantajoso, denotá-los na forma usual de "produto": $b(v,u) = v \cdot u$.

No capítulo seguinte trataremos também de funções bilineares denominadas *"Quadráticas"* $Q: E \times E \to \mathbb{R}$, $Q(u,v)$ que se comportam quase como produtos internos exceto por não serem necessariamente positivos definidos.

O produto interno em Espaços Vetoriais Complexos (a ser apresentado ao final deste capitulo) é distributivo em ambos fatores, mas são *hermiteanos no segundo fator (que é uma adaptação conveniente da homogeneidade para o caso complexo)*, significando que a mudança de ordem acarreta uma conjugação complexa do resultado.

Em capítulos seguintes encontraremos *produtos* multilineares, $\wedge: E \times .. \times E = E^n \to F$, $(v_1 \wedge ... \wedge v_n)$ o mais comum e útil deles sendo o determinante; $D: E \times .. \times E = E^n \to \mathbb{R}\ (\mathbb{C})$, $D(v_1, ..., v_n)$. Produtos binários cujos valores são vetores, $B: E \times E \to E$, também serão abordados especificamente em um próximo capítulo. Espaços Vetoriais munidos de "produtos" , $B: E \times E \to E$ são denominados , genericamente, de Álgebras e os exemplos mais importantes, são os números complexos (com multiplicação usual), Homomorfismos Lineares (com a composição), as funções com valores escalares e produto ponto a ponto, e os polinômios com produto de convolução. Álgebras definidas em espaços $\mathbb{R}^n$ tem uma longa história que inclui o produto vetorial em $\mathbb{R}^3$ e, outros produtos tais como produto compexo, os quaternions, octônions e etc. O "produto vetorial" $\wedge: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, $u \wedge v$ definido geometricamente no espaço tridimensional, é bilinear e anti-comutativo, mas não é associativo e nem intrínseco, já que depende da orientação do sistema de coordenadas. O caráter deste produto é discutido no Apêndice *Geometria Vetorial* e uma generalização de sua interpretação cinemática será apresentada mais adiante no capítulo sobre dinâmica matricial.

É claro que vários *produtos internos* não relacionados entre si, e menos ainda com o sentido geométrico do exemplo original, poderão ser definidos em um mesmo Espaço Vetorial; cada um deles resultando em uma *Geometria peculiar* associada a ele quando interpretados desta forma. De qualquer maneira, a Geometria Euclideana que é especificamente associada ao Espaço Euclideano/Ecológico representado Cartesianamente por $\mathbb{R}^3$ serve de protótipo e modelo intuitivo para todos os casos.

Portanto, a diversidade de Espaços Vetoriais com Produtos Internos *não é* um estorvo, mas um *recurso* vantajosamente empregado na Matemática que possibilita a utilização de uma mesma intuição geométrica inata para o tratamento de uma enorme variedade de questões completamente distintas e, geralmente, destituídas de uma interpretação familiar óbvia na sua origem. (Sem contar que a percepção espacial ecológica e a visão ocupam a parte mais "*nobre*" e extensa do cérebro. Ref. D.Hubel-*Eye Brain and Vision*,W.H.Freeman).

II-AXIOMAS do PRODUTO INTERNO *em* Espaço Vetoriais **Reais Abstratos**

A síntese das propriedades operacionais intrínsecas que caracterizarão o conceito de produto interno será expressa nos seguintes **Três Axiomas**:

DEFINIÇÃO (Axiomas): ***PRODUTO INTERNO em Espaços Vetoriais Reais***

Um ***Produto Interno em um Espaço Vetorial Real*** $\{E, +, 0, \mathbb{R}\}$ é uma função $b: E \times E \to \mathbb{R}$ usualmente denotada por uma das formas $b(u,v) = uv = u \cdot v = \langle u, v \rangle$, e apresentando as seguintes propriedades operacionais:

1)Comutatividade: $u \cdot v = v \cdot u$

2)Bilinearidade(**Homogeneidade &Distributividade**) $v \cdot (u + \lambda w) = v \cdot u + \lambda (v \cdot w)$

3)Positividade Estrita (Definida): $u \cdot u > 0$ se $u \neq 0$.

Exercícios:

00--Mostre que os Axiomas que definem um Produto Interno são **(1) Independentes**, (ou seja, é impossível deduzir um axioma dos outros dois (*Sugestão*:Apresente um Modelo considerado consistente, simples e concreto, que satisfaz dois e não o outro axioma, par a par) , são **(2) Consistentes** (*Sugestão*: Exiba um Modelo simples numérico e "respeitável" que cumpre as três condições) e são **(3)Completos** (*Sugestão*: Mostre que a norma euclideana ***geométrica*** satisfaz os axiomas).

0-Mostre, com base nos axiomas acima, que um produto interno é de fato linear nos dois fatores/variáveis (isto é, bilinear) e que : *" $u \cdot u = 0$ se e somente se : $u = 0$ "*.

1a-Mostre que o "produto interno" usual definido em Espaços Cartesianos $\mathbb{R}^n$ coordenada a coordenada pela expressão

$\langle x, y \rangle = x \cdot y = \sum_{k=1}^{k=n} x_k y_k$ satisfaz, de fato, às propriedades acima e, portanto, é um Modelo consistente para o sistema de axiomas.

1b-(**Vice-versa)**- Mostre, por outro lado, que uma operação binária $u * v$ em $\mathbb{R}^n$ que satisfaça os Axiomas da definição abstrata de produto interno pode ser descrito sempre na forma $x * y = \sum_{k,j=1}^{k,j=n} \omega_{kj} x_j x_k$ onde ω_{kj} é uma matriz simétrica ($\omega_{kj} = \omega_{jk}$) para a qual é válida a condição " $\sum_{k,j=1}^{k,j=n} \omega_{kj} x_j x_k > 0$ *para todo* $x \neq 0$ ".

(**Observação**:Em Capítulo que trata especificamente da teoria de Matrizes, analisaremos esta importante classe de Matrizes denominadas ***Positivas Definidas*** que, de certa maneira, estão biunivocamente associadas aos diferentes "produtos internos" que podem ser definidos em $\mathbb{R}^n$. Este exemplo revela toda a variedade de produtos internos que podem ser definidos em um mesmo Espaço Vetorial Cartesiano).

1c-Em particular, demonstre que a operação binária definida por " $x * y = \sum_{k=1}^{k=n} \omega_k x_k y_k$ com números reais estritamente positivos $\omega_k \in \mathbb{R}^{++}$ "**,**denominados "*pesos*", ou "*ponderação",* é um produto interno.(Observe que este é um caso particular dos produtos gerais descritos em 1b) em que a matriz é diagonal). Ilustre geometricamente no plano e espaço a positividade definida.

2-Mostre que as expressões abaixo são "bem definidas" e satisfazem os Axiomas de Produto Interno para os respectivos Espaços Vetoriais:

Observação:Em particular, observe que este exercício demonstra a enorme diversidade de produtos internos que podem ser considerados em um mesmo Espaço Vetorial Funcional e, para grande proveito.

-$C^0([0,1], \mathbb{R})$: $\langle f, g \rangle = \int_0^1 f(t)g(t)\, \omega(t)dt$, onde $\omega \in C^0([0,1], \mathbb{R})$ e $\omega(t) > 0$, $0 < t < 1$ é denominada "*função peso*", ou "*ponderação"*.

- $\mathcal{F}_{00}(\mathbb{N}, \mathbb{R}) = \{f : \mathbb{N} \to \mathbb{R};\ Existe\ N_f > 0\ ;\ f(k) = 0\ para\ k > N_f\}$: $\langle f, g \rangle = \sum_{k=0}^{\infty} f(k)g(k)$

- $P(\mathbb{R}) = \{Polinômios\}$: $\langle p, q \rangle = \sum_{k=0}^{\infty} p^{(k)}(0)q^{(k)}(0)$.(**Observação**: $p^{(k)}(0)$ é a *k*-ésima derivada do polinômio calculada na origem).

-$P_n(\mathbb{R}) = \{Polinômios\ de\ grau\ \leq n\}$: $\langle p, q \rangle = \sum_{k=0}^{n} p(k)\, q(k)$. (**Observação:**Lembre-se do Teor. Fund. Da Álgebra e da decomposição de um polinômio em fatores de primeiro grau)

- $P(\mathbb{R}) = \{Polinômios\}, \langle p, q \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} p(x)q(x)e^{-x^2}\, dx$. (Observe que a integral imprópria é bem definida).

- $M_{mn}(\mathbb{R}) = \{Matrizes\ reais\ de\ ordem\ m \times n\}$: $\langle A, B \rangle = \sum_{i=1,j=1}^{i=m,j=n} A_{ij} B_{ij}$ - ***Produto Interno de Frobenius***

- $M_{nn}(\mathbb{R}) = \{Matrizes\ Quadradas\ de\ ordem\ n\}$ - $\langle A, B \rangle = Tr(AB^t)$ (**Observação**: O Traço de uma Matriz quadrada A de ordem n é definido como $Tr(A) = \sum_{j=1}^{j=n} A_{jj}$ e A^t é a matriz transposta de A definida por: $(A^t)_{ij} = A_{ji}$)

3-Considere um Espaço Vetorial $E = E_1 \times .. \times E_n$ resultado de um produto cartesiano de n Espaços Vetoriais com Produto Interno, $E_k, \langle\ ,\ \rangle_k$. Mostre que a expressão $\langle u, v \rangle = \sum_{k=1}^{n} \langle u_k, v_k \rangle_k$ é um produto interno, onde $u = (u_1, \dots .., u_n), v \in E$.

A Geometrização do Produto Interno abstrato

A *geometrização Euclideana* do produto interno nos Espaços Cartesianos $\mathbb{R}^3$ e, vice-versa, a *algebrização Cartesiana* dos conceitos de ângulo e comprimento no Espaço Euclideano, dependem fundamentalmente do "*dicionário*" representado pela expressão $x \cdot y = \sum_{k=1}^{k=3} x_k y_k = \|x\|\|y\| \cos \widehat{x,y}$ que traduz os conceitos da Geometria para a Álgebra e vice-versa, mas principalmente do fato de que para $x, y \neq 0$ a expressão $\frac{x \cdot y}{\sqrt{x \cdot x}\sqrt{y \cdot y}}$ tem sempre o seu valor no intervalo $[-1,1]$ e, portanto pode ser identificada como cosseno de um ângulo.

Obviamente, para Espaços Vetoriais Cartesianos $\mathbb{R}^n$, com $n > 3$, embora seja possível definir uma expressão perfeitamente análoga $x \cdot y = \sum_{k=1}^{k=n} x_k y_k$, por outro lado, a sua interpretação geométrica é inexistente neste contexto por absoluta falta de familiaridade cognitiva ("ecológica") com estes Espaços Vetoriais numéricos e muito menos para Espaços completamente abstratos.

Assim, para resolver esta dificuldade interpretativa adotamos uma estratégia oposta: Verificaremos em seguida que o produto interno definido **axiomaticamente** em um Espaço Vetorial abstrato, necessariamente satisfaz a desigualdade $-1 \leq \frac{x \cdot y}{\sqrt{x \cdot x}\sqrt{y \cdot y}} \leq 1$ (para $x, y \neq 0$), o que nos possibilitará "geometrizar" , ***por analogia***, a *linguagem* que descreve o produto interno geral com as seguintes (*sugestivas*) ***nomenclaturas***:

1- $\widehat{x,y} = arc \cos\left(\frac{x \cdot y}{\sqrt{x \cdot x}\sqrt{y \cdot y}}\right) \in [0, \pi]$, que será ***definido*** como ***Ângulo entre dois vetores*** não nulos , e
2- $\|x\| = \sqrt{x \cdot x}$, que será , de fato, uma ***Norma (****segundo os Axiomas que a caracterizam****)*** ,e pretende representar, por analogia, um conceito de *medida de comprimento* para um vetor de $\mathbb{R}^n$.

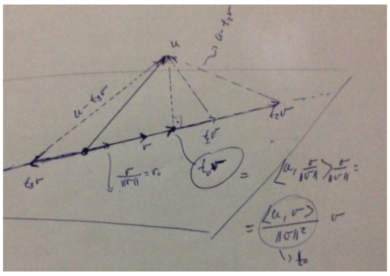
A desigualdade que avalizará a *consistência interpretativa* destas definições em um contexto geral é o justificadamente famoso (tanto que leva o nome de três importantes matemáticos de três nacionalidades rivais)

TEOREMA: ***Desigualdade Fundamental de CAUCHY-SCHWARTZ-BUNYAKOVSKII***

Se $\{E, +\{0\}, \mathbb{R}, \langle,\rangle\}$ for um Espaço Vetorial Real com *Produto Interno* então vale

1- A ***Desigualdade CSB***: $|\langle u, v\rangle| \leq \|u\|\|v\|$, onde $\|u\| = \sqrt{\langle u, u\rangle}$, em que
2- A Igualdade $|\langle u, v\rangle| = \|u\|\|v\|$ ocorre se e somente se os vetores $u \; e \; v$ forem ***Colineares*** , isto é, ***Linearmente Dependentes***.

Demonstração: A igualdade é óbvia se um dos vetores for nulo, ou se forem colineares. Portanto, consideremos os casos restantes. Analisando geometricamente as distancias entre o vetor u e os vetores tv do sub-espaço unidimensional gerado por v, obtemos a expressão estritamente positiva $\|u - tv\|^2 = \langle u - tv, u - tv\rangle = \|v\|^2 t^2 - 2\langle u, v\rangle \, t + \|u\|^2 > 0$ e verificamos que ela é visivelmente mínima (v. figura) quando ela se dá exatamente na projeção ortogonal de u sobre o unitário $\frac{v}{\|v\|}$ que pode ser escrita como $\langle u, \frac{v}{\|v\|}\rangle \frac{v}{\|v\|}$. Tomando então $tv = \frac{\langle u,v\rangle}{\|v\|^2} v$ atinge-se o mínimo, (estritamente positivo se $u \; e \; v$ não forem colineares), ou seja, $-\frac{\langle u,v\rangle^2}{\|v\|^2} + \|u\|^2 > 0$ de onde vem o resultado.

FIGURA 

Observação: A ilustração geométrica apresentada na demonstração apenas indicou a expressão provável para a distância mínima; a verificação do resultado é completamente operacional e, portanto, formalmente independe dos "desenhos". Com o objetivo claro de parecer mais formal ("rigoroso") e "menos geométrico" a demonstração usualmente apresentada em livros textos analisa (sem motivação aparente) o polinômio de segundo grau $= \langle u - tv, u - tv \rangle = \|v\|^2 t^2 - 2\langle u, v \rangle\, t + \|u\|^2$,para então determinar o seu mínimo via Calculo Diferencial e, para surpresa geral (!), obter o resultado final. O argumento geométrico análogo ao apresentado acima será utilizado na demonstração da versão deste resultado para espaços vetoriais complexos com produto interno em que o artifício do Cálculo não é aplicável.

Exercício: Esclareça os detalhes da demonstração.

É importante ressaltar que a demonstração da desigualdade de CSB decorre unicamente dos Axiomas de caracterização operacional do Produto Interno, e não de alguma fórmula. Muito pelo contrário, várias fórmulas não triviais em contextos especiais são expressões especificas desta desigualdade geral, dentre eles a própria desigualdade de Cauchy em $\mathbb{R}^n$.

Resta agora verificar se a função definida pela expressão $\sqrt{\langle u, u \rangle}$ em um Espaço Vetorial com Produto Interno é de fato uma ***Norma*** segundo os Axiomas que a caracterizam. Com isto, o uso do termo se tornará consistente em relação ao significado de ***comprimento de vetores*** na Geometria Euclideana, o que, por conseqüência, permitirá a utilização da linguagem geométrica com segurança e grande vantagem intuitiva nos contextos abstratos. Para confirmar esta (desejável) correspondência demonstraremos o seguinte Teorema.

TEOREMA: *Norma e Ângulo definidos em Espaços Vetoriais com um Produto Interno*

Em um Espaço Vetorial E dotado de um produto interno $\langle \, , \rangle$, a expressão $\|u\| = \sqrt{\langle u, u \rangle}$ determina uma Norma e a expressão $arc \cos \left\{ \frac{\langle u,v \rangle}{\|u\| \|v\|} \right\} = \widehat{u, v}$ é *bem definida* como ângulo entre dois vetores *não nulos* u, v, pois as seguintes propriedades são verificadas:

1-***Positividade Definida***: $\|u\| > 0 \quad (Para\ quaisquer\ u \in E\ \ e\ \ u \neq 0\ )$

2- ***Homogeneidade****:* $\|\lambda u\| = |\lambda|\ \|u\|$ $(Para\ quaisquer\ u \in E\ \ e\ \lambda \in \mathbb{R}$, onde $|\lambda|$ representa o módulo de λ).

3-***Desigualdade Triangular***: $\|u + v\| \leq \|u\| + \|v\|$ (Para quaisquer vetores $u, v \in E$) e,

4- $-1 \leq \frac{\langle u,v \rangle}{\|u\| \|v\|} \leq 1$, (Para quaisquer vetores $u, v \in E$ não nulos)

Demonstração: Exercício.

Exercícios.

-*Demonstre o Teorema.*

*-Mostre o "**Teorema de-Pitágoras"***: Para quaisquer vetores $u, v \in E$, $\|u + v\|^2 = \|u\|^2 + \|v\|^2$ ***se e somente se*** $arc \cos \left\{ \frac{\langle u,v \rangle}{\|u\| \|v\|} \right\} = \widehat{u, v} = \frac{\pi}{2}$, (isto é $\langle u, v \rangle = 0$)

-Mostre que $\|u\| = 0$ *se e somente se* $u = 0$.

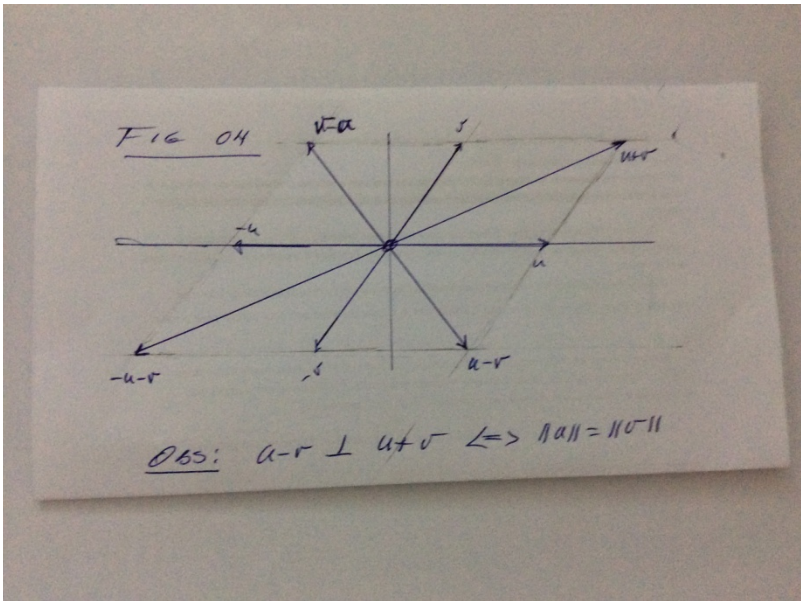
-Escreva a Desigualdade CSB para vetores do $\mathbb{R}^n$ em termos de coordenadas. Esta é a forma original obtida por Cauchy e Bunyakovskii e cujas demonstrações são muito mais elaboradas do que a simples demonstração apresentada no caso geral.

-Escreva a desigualdade CSB em termos do produto interno definido para o Espaço Vetorial de funções contínuas $C^0([-1,1], \mathbb{R})$ na forma $\langle p, q \rangle = \int_{-1}^{1} p(x) q(x) dx$.

A Relação entre Norma e Produto Interno

O conceito de Norma é o conceito geométrico mais primitivo na Geometrização de um Espaço Vetorial, pois diz respeito apenas ao comprimento de um vetor sem qualquer informação sobre as posições relativas entre vetores, um tema que, como acabamos de ver, é explicitamente abordado pelo conceito de produto interno. Portanto, é de se esperar que uma Norma proveniente de um Produto Interno (isto é, definida como $\|v\| = \sqrt{\langle v, v\rangle}$) apresente peculiaridades geométricas específicas que a destaquem do caso geral. O seguinte Teorema trata exatamente deste aspecto.

As propriedades peculiares (condições *necessárias*) satisfeitas por uma Norma proveniente de um produto interno são várias, mas duas tem significado geométrico e operacional importantes. Estas condições permitem discriminar se uma norma é ou não resultante de um produto interno, e no caso positivo, se as propriedades peculiares são *suficientes* para determinar o produto interno original. Os Teoremas a seguir tratam desta questão:



Regra das Diagonais

TEOREMA: ***Peculiaridades Geométricas de uma Norma originada de um Produto Interno***

Se E for um Espaço com uma Norma $\|\ ,\ \|$, então

1-A Regra das Diagonais ($\|u+v\|^2 + \|u-v\|^2 = 2(\|u\|^2 + \|v\|^2)$, para quaisquer vetores $u, v \in E$)

é uma condição ***Necessária e Suficiente*** para que a Norma $\|\ ,\ \|$ seja originada de um Produto Interno.

2-A Convexidade Estrita ($\|u+v\| = \|u\| + \|v\|$ se e somente se os vetores $u, v \in E$ forem linearmente dependentes/colineares) é uma condição *apenas* ***necessária***, mas ***não suficiente*** para que a Norma $\|\ ,\ \|$ seja originada de um Produto Interno.

Demonstração*:* **Exercício***.* A necessidade da Regra das Diagonais e da Convexidade é facilmente verificada operacionalmente.

Para demonstrar a suficiência da “Regra das Diagonais” o produto interno original, deve naturalmente ser caracterizado com a expressão: $\langle u, v\rangle = \frac{1}{4}(\|u+v\|^2 - \|u-v\|^2)$ de onde (junto com os axiomas de norma e a Regra das Diagonais) devem ser deduzidas os axiomas de produto interno. (Sugestão:Para deduzir a homogeneidade, lembre-se da expansão binária dos números reais e, portanto, basta demonstrar a linearidade $\langle u, \lambda w\rangle = \lambda\langle u, w\rangle$ para$\lambda = 2 \ e \ \lambda = \frac{1}{2}$).

A demonstração da **não** suficiência da convexidade estrita, decorre, por exemplo, da análise das normas definidas por $\|v\|_p = (\sum_{k=1}^{n} |x_k|^p)^{\frac{1}{p}}$ (para $p > 1$) em $\mathbb{R}^n$ (Chamadas Normas l_p) que são, de fato, todas elas, estritamente convexas. Entretanto, somente a norma $p = 2$ (Pitagórica-Euclideana) satisfaz a Regra das Diagonais e, portanto, para $p \neq 2$ não são originárias de um Produto Interno. Remeta a demonstração destes fatos não triviais a textos de Análise, por exemplo, P.Lax-*Functional Analysis*, Wiley 2012)

Exercícios:

-*Mostre que a Regra das Diagonais é equivalente à afirmação* $(u + v) \perp (u - v)$ para vetores $\|u\| = \|v\|$. Ilustre o fato com gráficos no Modelo Euclideano plano.

-Considere as funções $\|f\|_\infty = \max_{0\leq x\leq 1}|f(x)|$ e $\|f\|_1 = \int_0^1 |f(x)|dx$ definidas no Espaço Vetorial Funcional das funções continuas $C^0([0,1], \mathbb{R})$ e no Espaço Vetorial Funcional complexo das funções continuas $C^0([0,1], \mathbb{C})$. Mostre que estas funções são normas, mas não provém de um Produto Interno, pois, não satisfazem a Regra das Diagonais. Mostre que elas também **não são** estritamente convexas.

Sob o ponto de vista geométrico, o conceito de norma (*Comprimento* de um vetor) parece ser mais primitivo do que o de produto interno e, historicamente, isto é verdade. O conceito de produto interno, como já vimos, surgiu muito mais tarde do que a representação da norma Pitagórica-Euclideana em $\mathbb{R}^3$ e ganhou um status importante na Matemática, não somente porque o seu caráter operacional é mais apropriado à Matemática contemporânea, mas também porque ele permite descrever mais aspectos geométricos do que o conceito de norma.

Os Exercícios acima mostram que há Normas definidas em Espaços Vetoriais que não são provenientes de Produtos Internos, ou seja, é possivel estudar Geometrias interessantes de Espaços Vetoriais que não são exatamente inspiradas na Geometria Euclideana. Em outros termos, o conceito de norma é “descolável” do conceito de produto interno.Talvez pudéssemos denominar estas normas de *não-Euclideanas*, mas, como já discutimos anteriormente, este termo tem outras conotações históricas em Matemática. O conceito geral de Norma é fundamental no contexto da Análise de Funções reais e não será tema específico deste texto.

Neste capítulo, em especial, nos concentraremos na rica Geometria de Espaços Vetoriais com Produto Interno.

Para confirmar ainda mais a adequação da linguagem geométrica sugerida pelas propriedades do produto interno apresentaremos abaixo diversas definições e resultados que o/a leitor/a deve acompanhar com lápis e papel na mão ilustrando cada passo com desenhos sugestivos as situações análogas no contexto familiar do Plano e do Espaço.

III-A GEOMETRIZAÇÃO dos Espaços Vetoriais Reais: *Produto Interno*

INTRODUÇÃO:

A Geometrização de operações simbólicas (algébricas e analíticas) em diversas áreas da Matemática torna-se possível em termos de um produto interno e é um dos dividendos metodológicos mais importantes da Teoria de Espaços Vetoriais. Por exemplo, dentre inúmeras outras ocorrências em Matemática, a operação produto entre matrizes ***pode*** *ser interpretada como resultado de produtos internos entre vetores linhas e vetores colunas de Espaços cartesianos* $\mathbb{R}^n$*, assim como qualquer integral definida pode ser também interpretada como um produto interno entre elementos de um Espaço funcional. Por si mesmas estas duas classes de operações abrangem uma considerável parte das manipulações simbólicas da Matemática que, desta forma, têm à sua disposição uma concepção* *geométrica e visual inestimável para a compreensão da Teoria e para o desenvolvimento de Métodos. O objetivo desta seção é enfatizar a conexão de duas vias entre procedimentos simbólicos e suas interpretações geométricas, principalmente por intermédio de uma escolha apropriada e sugestiva dos termos e da linguagem. Com este mesmo objetivo a grande maioria dos exemplos e exercícios apresentados envolve operações matriciais e, embora com menos freqüência, também integrais de funções.*

EXERCÍCIO GERAL: (Para ser trabalhado ao longo das seções seguintes)*: Geometrize as diversas variantes para a abordagem do problema de Arquimedes segundo os conceitos e linguagem que serão apresentados a seguir.*

DEFINIÇÕES DE LINGUAGEM e PROPRIEDADES GEOMÉTRICAS

Nas seções abaixo, E é um Espaço Vetorial ***Real*** *com Produto Interno $\langle\ ,\rangle: E \times E \to \mathbb{R}$.*

DEF.- ***VETOR UNITÁRIO***

Um vetor $u \in E$ é dito **unitário** se $\|u\| = 1$. Dado um vetor *não nulo* $u \in E$, denominaremos vetor ***unitário na direção e sentido*** de u ao vetor $u_0 = \frac{u}{\|u\|}$.

-DEF.- ***BOLA***

Uma Bola de raio $r > 0$ centrada no ponto $a \in E$ é o conjunto denotado e definido da seguinte maneira: $B_r(a) = \{x \in E;\ \|x - a\| \le r\}$.

-DEF.- ***ESFERA***

Uma Esfera de raio $r > 0$ centrada no ponto $a \in E$ é o conjunto denotado e definido da seguinte maneira: $S_r(a) = \{x \in E;\ \|x - a\| = r\}$.

-DEF. -***ORTOGONALIDADE – CONJUNTOS ORTOGONAIS & ORTONORMAIS***

-Dados dois vetores não nulos $u, v \in E$ diz-se que são ***perpendiculares/ortogonais entre si*** se $\langle u, v\rangle = 0$.

-Um conjunto de vetores $K = \{v_1, \ldots., v_n\} \subset E$ é dito um ***Conjunto Ortogonal*** se $\langle v_k, v_j\rangle = 0$ para $k \neq j$ e ***Conjunto Ortonormal*** se $\langle v_k, v_j\rangle = \delta_{kj}$.

Exercícios:

-Teorema:Mostre que um Conjunto Ortogonal $K = \{v_1, \ldots., v_n\} \subset E$ é necessariamente **L I /MINIMAL/ Não-Redundante.**

-TEOREMA DE PITÁGORAS: Mostre que se $\{v_1, \ldots., v_n\} \subset E$ for um conjunto ortogonal, então $\sum_{k=1}^{n} \|v_k\|^2 = \|\sum_{k=1}^{n} v_k\|^2$.

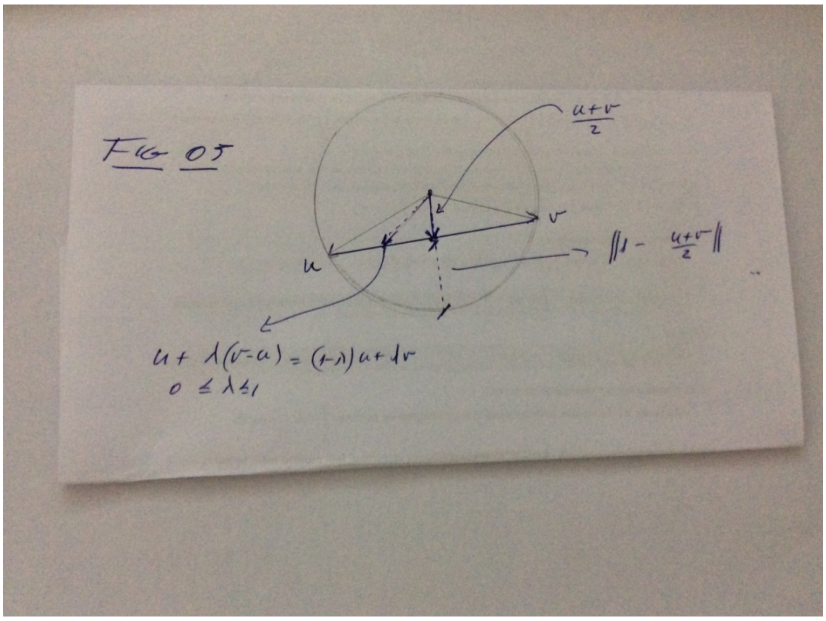
-Mostre que se u, v, w são três pontos na Esfera unitária , sendo que $\langle u, w\rangle = -1$ então $\langle u - w, u - v\rangle = 0$. Interprete geometricamente este resultado operacional no Espaço Euclideano.

-Mostre que $\langle (u - v), (u + v)\rangle = 0$ se e somente se $\|u\| = \|v\|$ e interprete geometricamente esta afirmação no Espaço Euclideano.

-Obtenha a fórmula trigonométrica para $cos\left(\frac{\theta}{2}\right)$ em termos de $\cos\theta$ utilizando vetores na esfera unitária $S_1(0)$ e apenas operações intrínsecas de Espaço Vetorial com Produto interno.

-Considere dois pontos distintos da Esfera Unitária centrada na origem $u \neq v \in S_1(0)$. Mostre ***geometricamente*** no Espaço Euclideano plano que $\|u - v\| \to 0$ se e somente se $\left\|\frac{u+v}{2}\right\| \to 1$. Em seguida, mostre que, de fato, $\|u - v\| < 2\sqrt{\left(1 - \left\|\frac{u+v}{2}\right\|\right)}$, sendo que a igualdade somente virá com $u = v$. Obtenha agora este resultado simbolicamente para vetores em um Espaço Vetorial com Norma proveniente de um Produto Interno.(Sugestão: Analise $\left\|\frac{u+v}{2}\right\|^2$ e $\|u - v\|^2$ em termos do produto interno).

Convexidade Estrita da Norma Euclideana



-Considere dois vetores não nulos ortogonais $u \perp v$ no Espaço Vetorial com Produto interno E. Argumente geometricamente sobre a razoabilidade de denominar a curva consistindo dos pontos $\varphi(t) = (\cos t)u + (sen\ t)v$ como uma *elipse* neste Espaço.

-Argumente geometricamente sobre alguns aspectos da curva definida por $\varphi(t) = (e^{-t}\cos t)u + (e^{-t} sen\ t)v$ que justifiquem denominá-la como uma *espiral* em $E = [u, v]$ convergente para a origem.

-Mostre que $\varphi(t) = (\cos t)e_1 + (\cos t)(sen\ t\,)e_2 + (sen^2 t)e_3 \in S_1(0) \equiv$ *Esfera unitária centrada na origem*, se $\{e_k\} \in E$ são ortonormais . Procure generalizar a construção e escreva uma curva análoga sobre a esfera unitária $S_1(0)$ fazendo uso de uma Base ON $\{e_k\}_{1 \le k \le n}$.

DEF.- *PROJEÇÃO ORTOGONAL sobre um VETOR*

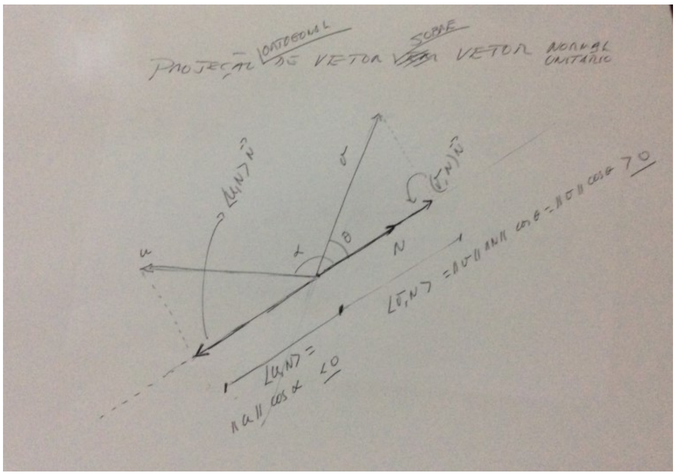
Esta operação pode ser considerada como uma das mais fundamentais da Teoria de Espaços Vetoriais com Produto Interno e sua interpretação geométrica, simples e natural, é crucial para a descoberta e implementação de vários argumentos.

-Dado um vetor unitário $N \in E$, e um vetor qualquer $v \in E$, denominaremos ***Projeção Ortogonal*** de v ***na direção*** de N (ou "*sombra*" ortogonal do vetor v sobre a "*reta*" definida por N) ao número real $\langle \boldsymbol{v}, \boldsymbol{N} \rangle$ que pode ter valor positivo ou negativo.

-Define-se *Projeção Ortogonal Vetorial* sobre N ao seguinte ***vetor*:** $\boldsymbol{v_N} = \langle \boldsymbol{v}, \boldsymbol{N} \rangle\, \boldsymbol{N}$.

Observe que o sinal algébrico do número real $\langle v, N \rangle$ determinará se a Projeção Vetorial $v_N = \langle v, N \rangle N$ será um vetor no mesmo sentido de N se $\langle v, N \rangle > 0$, ortogonal a N se $\langle v, N \rangle = 0$ ou, no sentido contrário de N, se $\langle v, N \rangle < 0$.

Projeção Ortogonal sobre vetor unitário ("*Sombra*" e Vetor)



Exercício:

-Utilizando sua intuição geométrica euclideana no plano, defina operacionalmente (isto é, utilizando apenas as operações de soma, multiplicação por escalar e produto interno) a projeção de um vetor v sobre um vetor unitário N na direção do vetor unitário P e verifique se a sua definição generaliza o conceito de projeção ortogonal, isto é, se ela é consistente com a definição de projeção ortogonal quando $\langle P, N\rangle = 0$. (**Sugestão**:Resolva o sistema de equações para s, t fazendo o produto interno da expressão $u_{P,N} = sN = u + tP$ por P e N . Analise a condição para que o sistema tenha solução em termos geométricos.

-DEF.- *HIPERESPAÇO*-

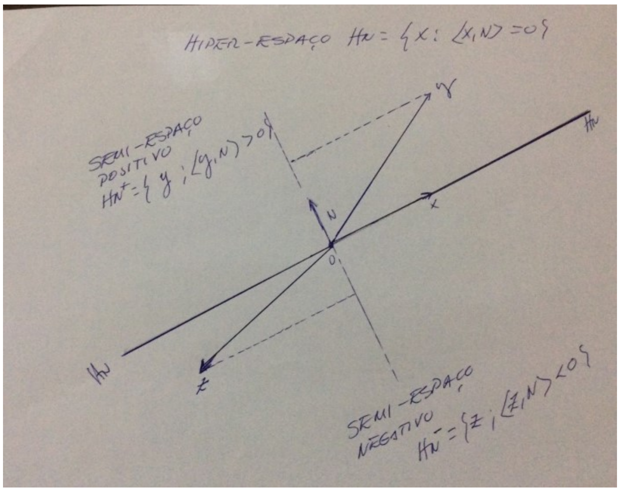
Dado um Vetor ***Unitário*** $N \in E$, então o *Subespaço vetorial* definido por $H_N = \{x \in E \,;\, \langle N, x\rangle = 0\}$ é denominado ***HiperEspaço Ortogonal a*** N que é denominado ***vetor diretor*** do Hiper-Espaço H_N .

Exercícios:

-Mostre que, de fato, H_N é um sub-espaço vetorial de E.

-Mostre que os vetores unitários N e $(-N)$ são os únicos que definem o mesmo Hiper-Espaço, isto é, $H_N = H_{-N}$ e se $H_G = H_N$, (para um vetor unitário G) então, $G = N$ ou $G = -N$.

Hiper-Espaço& Semi Espaços



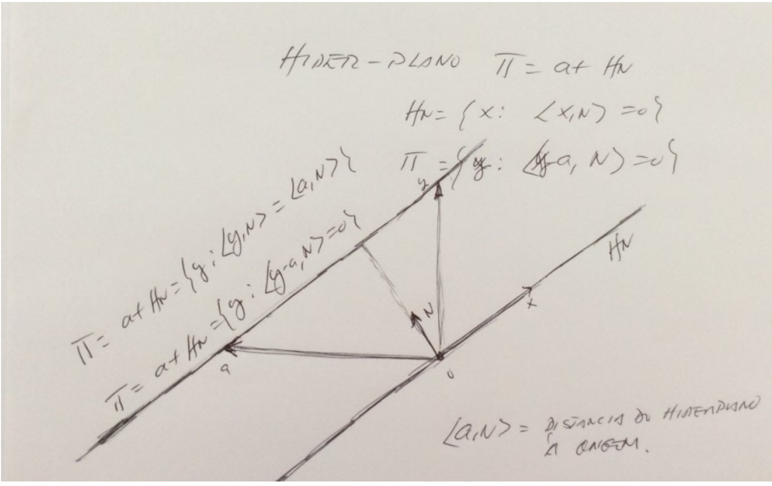
-DEF. HIPERPLANO

Se H_N for um Hiper-Espaço, então um conjunto da forma

$\pi = a + H_N = \{y = a + h; h \in H_N\} = \{y \in E;\ (y - a) \perp N\}$

é denominado **Hiperplano *paralelo*** ao Hiper-Espaço H_N , ou, ***translação do HiperEspaço*** H_N. O vetor a é denominado um ***Ponto de Apoio*** e N uma de suas (duas) ***normais***.

Hiper-Plano (em $\mathbb{R}^2$)



-DEF. - *SEMI-ESPAÇOS:*

Dado um HiperPlano $\pi = \{x \in E;\ \langle (x - a), N\rangle = 0\}$ denomina-se ***Semi-Espaço Positivo*** delimitado pelo Hiperplano π ao conjunto: $\pi^+ = \{x \in E; \langle (x - a), N\rangle > 0\}$,e ***Negativo***, $\pi^- = \{x \in E; \langle (x - a), N\rangle < 0\}$.

Exercício:

-Mostre que se um vetor $v \in \pi^+$então a sua reflexão $v_r \in \pi^-$ e vice-versa.

-Dado o vetor $N = \frac{1}{\sqrt{6}}\begin{pmatrix}1\\-1\\2\end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$ com produto interno Euclideano, $\langle x, y\rangle = \sum_{k=1}^{3} x_k y_k$,determine a posição dos pontos $\lambda\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix} = P_\lambda$, $-\infty < \lambda < \infty$ com relação aos Hiperplanos $a + H_N = \pi$ para $a = \begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}$. (Isto é, para que valores de λ o ponto P_λ está sobre o hiperplano, ou se no Semi-Espaço Positivo ou Negativo.

-A mesma questão anterior com o produto interno $\langle x, y\rangle = \sum_{k=1}^{3} k x_k y_k$.

-Dado o vetor $N = \frac{1}{\sqrt{6}}\begin{pmatrix}0 & -1 & 1\\1 & 0 & -1\\-1 & 1 & 0\end{pmatrix} \in M_{nn}(\mathbb{R})$ com produto interno de Frobenius $\langle A, B\rangle = \sum_{k,j=1}^{3,3} A_{kj}B_{kj}$ determine a posição dos *pontos* $\lambda\begin{pmatrix}1 & 0 & 1\\0 & 1 & 0\\0 & 0 & 1\end{pmatrix} = M_\lambda$, $-\infty < \lambda < \infty$ com relação aos Hiperplanos $a + H_N = \pi$ para $a = \begin{pmatrix}0 & -1 & 1\\1 & 0 & 1\\1 & 1 & 1\end{pmatrix}$.

-Determine a Projeção da Matriz $\begin{pmatrix}0 & -1 & 0\\1 & 0 & 1\\0 & 1 & 1\end{pmatrix}$ sobre o Hiperplano π do exercício anterior.

-Mostre que um Hiperplano π somente é um Subespaço vetorial se $0 \in \pi$ for seu ponto de apoio.

-Mostre que os pontos eqüidistantes a dois pontos distintos $a, b \in E$ é um hiperplano e determine suas normais e um ponto de apoio. Ilustre a questão no plano Euclideano.

-Obtenha uma condição operacional para determinar os pontos que são eqüidistantes de três pontos distintos de um Espaço Vetorial com produto interno E. Ilustre a questão no plano Euclideano.

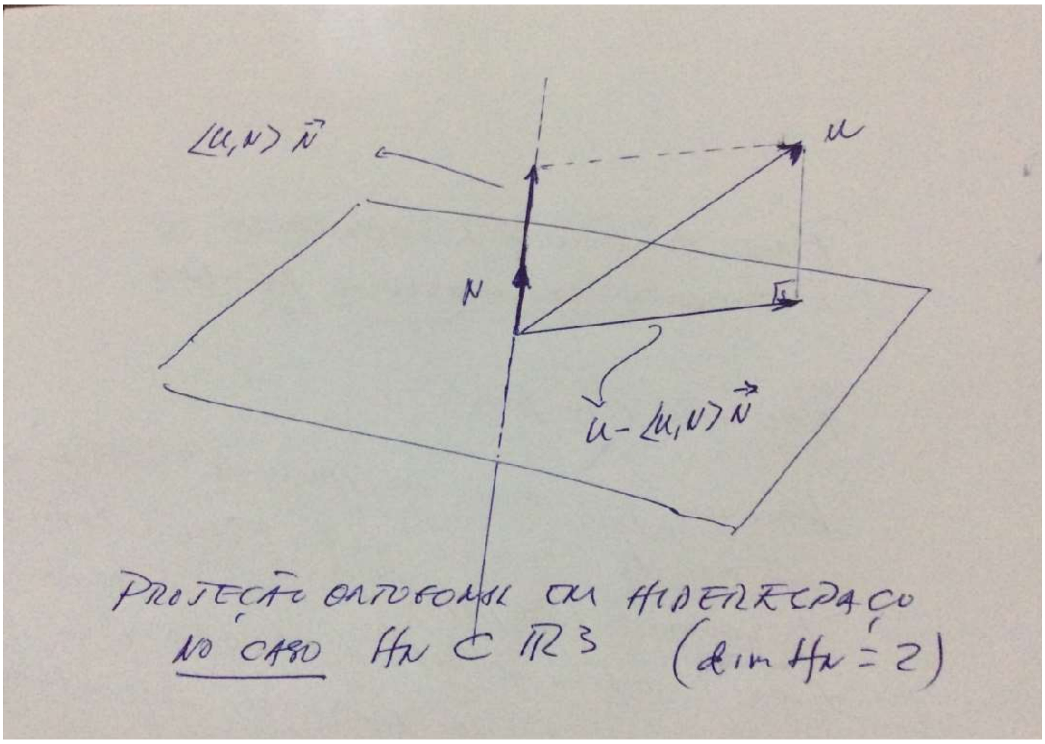
-Analise condições que permitam obter pontos eqüidistantes de m pontos distintos $P_1, \dots, P_m$ em um Espaço com produto interno E .Ilustre a questão no plano Euclideano.

DEF. –

PROJEÇÃO ORTOGONAL sobre um HIPER-ESPAÇO:

Dado um Hiper-Espaço $H_N \subset E$ então diz-se que o vetor $(u - \langle u, N\rangle\, N) \in H_N$ é a ***Projeção Ortogonal*** de $u \in E$ ***sobre*** H_N.

Projeção Ortogonal ***sobre*** Hiper-Espaço



Exercícios:

- Mostre que, de fato, $(v - \langle v, N\rangle\, N) \in H_N$ e interprete este fato nos Modelos Euclideanos plano e espacial.

- **(Teorema de Decomposição)** – Mostre que Se H_N for um HiperEspaço de E, então é possível escrever: $E = [N] \oplus H_N$.
(**Sugestão**: Projete ortogonalmente $x \in E$ em H_N na forma $x = \langle x, N\rangle N + (x - \langle x, N\rangle N)$)

-Mostre que se $H_N \subset E$ for um HiperEspaço do Espaço Vetorial com Produto interno E de dimensão finita,($\dim E = n < \infty$), então $\dim H_N = n - 1$.

DEF. : ***Projeção Ortogonal de um Ponto sobre um HIPERPLANO*** $\boldsymbol{\pi}$.

-**Exercício**: Utilizando uma analogia geométrica, defina a projeção ortogonal de um ponto do espaço $w \in E$ sobre um Hiperplano π com ponto de apoio a e normal N.

DEF_Espaço Afim:

Se $F \subset E$ for um Sub-espaço vetorial de E então, para qualquer $a \in E$ o conjunto $a + F = \{y \in E; y = x + a, x \in F\}$ é denominado ***Espaço Afim*** ou transladado de F. O Hiperplano é um exemplo especial de espaço afim.

-REFLEXÃO Ortogonal através de HIPER-PLANOS –

Iniciemos com a geometria elementar de reflexão através de um HiperEspaço $H_N = \{h\,;\, \langle h, N\rangle = 0\}$ que será definido da seguinte forma natural: Dado $u \in E$ projeta-se ortogonalmente este vetor sobre o vetor unitário diretor do Hiper-Espaço na forma $u_N = \langle u, N\rangle N$. Com isto, temos a projeção ortogonal no Hiper-Espaço $u_r = u - u_N = u - \langle u, N\rangle N$.

DEFINIÇÃO: ***Reflexão Ortogonal através de um HiperEspaço***:

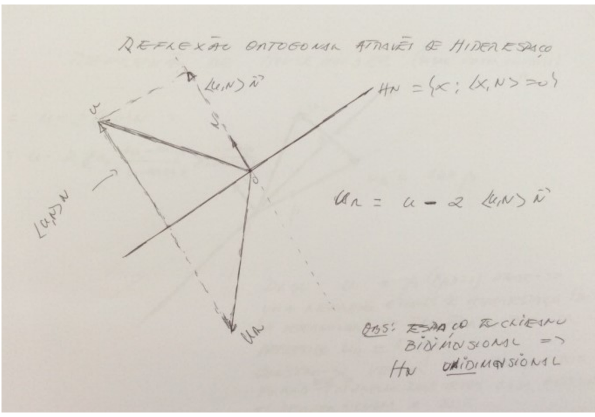
A reflexão de um vetor $u \in E$ através de um Hiper-Espaço H_N é definida como o vetor

$$u_r = u - 2u_0 = u - 2\langle u, N\rangle N\ .$$

Exercicio:

--Ilustre o processo de reflexão através de um Hiper-Espaço e Hiperplano em um Modelo Euclideano de duas dimensões.

-Defina analogamente uma Reflexão através de um Hiper-Plano Π.



Reflexão através de Hiper Espaço

Reflexão Parcial:

Se $E = G \oplus F$ e $N \in F$ for vetor normal então $H_N = \{g \in F;\ \langle g, N\rangle = 0\}$ é um Hiper-Espaço em F e a reflexão de um vetor $f \in F$ através do Hiper-Espaço H_N será denotado por f_N. Então, dado um vetor qualquer $v \in E$, $v = h + f$ o vetor $v_N = h + f_N$ é denominado de **reflexão parcial** através do hiper espaço G_N. Observa-se que a reflexão é "parcial" porque se dá apenas na componente do vetor no espaço F enquanto que a outra componente permanece inalterada.

-Generalizando no particular, podemos definir uma ***reflexão de*** um vetor u ***no Espaço*** $\mathbb{R}^1$ com respeito ao subespaço $\{0\}$ ao vetor $-u$.

Exercícios:

-Escreva a Reflexão Ortogonal através de um Hiper Espaço em termos matriciais, isto é, considerando vetores de $\mathbb{R}^n$ como matrizes colunas M_{n1}.

-Visualize Geometricamente no espaço tridimensional $\mathbb{R}^3$ e exemplifique uma reflexão parcial através de uma reta em um plano.(Observe que $\mathbb{R}^3 = \mathbb{R}^1 \times \mathbb{R}^2$ e que uma reta em $\mathbb{R}^2$ é um hiper-espaço neste espaço vetorial.

-Mostre que se u, v são dois vetores do Espaço com produto interno E , $H_N \subset E$ um hiper-Espaço e u_r, v_r suas respectivas reflexões através de H_N então $\langle u, v\rangle = \langle u_r, v_r\rangle$.

--Mostre que se u, v são dois vetores do Espaço com produto interno E , $H_N \subset E$ um hiper-Espaço e u_p, v_p suas respectivas projeções ortogonais em H_N , analise geometricamente e operacionalmente quando ocorre a igualdade: $\langle u, v\rangle = \langle u_p, v_p\rangle$.

-Mostre que se $L = \{\alpha_1, \dots, \alpha_p\}$ for um conjunto de vetores LI de um Espaço Vetorial com Produto Interno E , H_N um hiper-Espaço e $L_N = \{\gamma_1, \dots, \gamma_n\}$ a reflexão respectiva de L, então $L_N = \{\gamma_{N1}, \dots, \gamma_{Np}\}$ é também LI. (Ou seja, uma reflexão através de um hiper-Espaço sempre leva Base em Bases.

-Mostre que se $L = \{\alpha_1, \dots, \alpha_p\}$ for um conjunto OrtoNormal de vetores de um Espaço Vetorial com Produto Interno E , H_N um hiper-Espaço e $L_N = \{\gamma_1, \dots, \gamma_n\}$ a reflexão respectiva de L, então $L_N = \{\gamma_{N1}, \dots, \gamma_{Np}\}$ é ON.

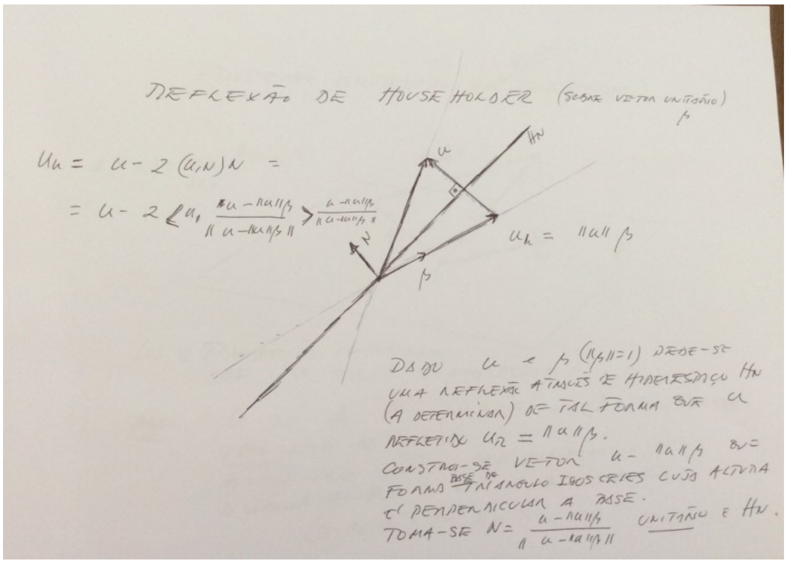
Reflexão de Householder:

Um procedimento geométrico de reflexão ortogonal através de hiper-espaços devido a Alan Householder (~1958) é utilizado em várias áreas da Matemática Computacional com grandes vantagens com respeito ao tempo de cálculo.

Dado um vetor ***fixo*** não nulo $u \in E$ e um vetor *unitário* β desejamos obter *algum* Hiper Espaço H_N de tal forma que a reflexão de u através de H_N , que denotaremos por u_h , seja colinear com β e preserve a sua norma $\|u\|$, ou seja, $u_h = \|u\|\beta$.

Para determinar este Hiper Espaço é necessário calcular sua normal diretora N e um esboço gráfico deste contexto no Espaço Euclideano plano nos fornece, não apenas uma excelente idéia intuitiva da questão, mas na verdade, a própria solução dela:

Reflexão de Householder



Seguindo a sugestão do gráfico Euclideano, a expressão adequada para o cálculo de N deve ser:

$N = \frac{u-\|u\|\beta}{|\| u-\|u\|\beta\||}$, de onde $u_h = u - 2\langle u, N\rangle N$=$\|u\|\beta$ é a reflexão de Householder.

Exercício:

-Verifique o premeditado, isto é, mostre "*operacionalmente*" que em ***qualquer*** Espaço Vetorial com Produto interno o que foi obtido geometricamente de construções no ***plano*** Euclideano, isto é, se a vale a expressão $u_h = u - 2\langle u, N\rangle N$=$\|u\|\beta$.

-Ilustre geometricamente e analiticamente que há **duas** possibilidades para a expressão de N. Computacionalmente, é preferível utilizar aquela que torna o divisor $|\| u - \|u\|\beta\||$ o maior possível para evitar a instabilidade numérica causada por divisões com denominadores muito pequenos.(Sugestão: Considere o vetor $u + \|u\|\beta$).

A reflexão apresentada acima é denominada **Reflexão de Householder**.

Esse procedimento tem um papel importante na elaboração de algoritmos da Álgebra Linear, pois demonstra-se que o seu emprego em algoritmos fundamentais nos espaços $\mathbb{R}^n$ (isto é, em matrizes) diminui substancialmente o número de operações aritméticas com relação a técnicas previamente tradicionais. Assim, tornou-se factível a realização de cálculos com as enormes matrizes que são a regra em diversas áreas que fazem uso de massiva computação científica tal como Meteorologia, Epidemiologia, Fusão Nuclear, Instrumentação Médica (Tomografia) e etc. (Sobre este tema consulte o excelente L.Trefethen-D.Bau III- *Numerical Linear Algebra*- SIAM 1997).

Exercicios:

- Dado o vetor $u = (2,0,-1,1,2,3,1,0,1) \in \mathbb{R}^9$ obtenha o hiperEspaço e a reflexão ortogonal de Householder neste hiper-Espaço para que o vetor, resulte no seguinte vetor refletido: $u_h = \|u\|(1,0,0,0,0,0,0,0,0,0)$= $\|u\|e_1$. Obtenha as duas opções.

-Utilizando a mesma reflexão construída no exercício anterior e obtenha o resultado de sua ação sobre o vetor $v = (-1,0,1,1,1,0,1,0,1)$.

-Utilize o Método para o vetor $u = (0,0,-1,1,2,3,1,0,1) \in \mathbb{R}^9$ com relação ao vetor $e_3$da base canônica.

Hiperplanos como Classificadores

Hiper-Planos são objetos geométricos que tem capacidade classificadora de pontos em $x \in \mathbb{R}^n$ separando-os em regiões segundo os Semi-Espaços definidos por eles. A interseção de vários deles determinam um "hiper-poliedro" (ou "hiper-poligono") que aglutinam pontos mais próximos entre si.

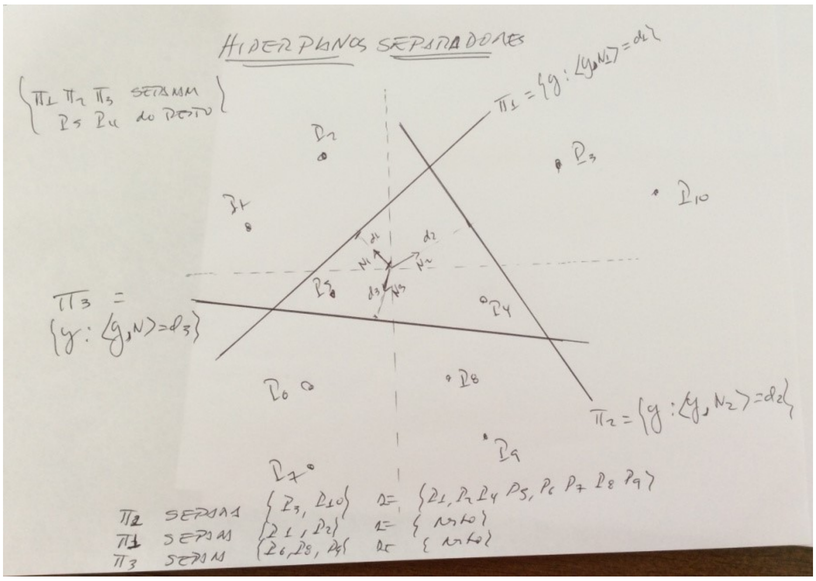
Em muitos casos, os pontos $x \in \mathbb{R}^n$representam coordenadas de dados sobre indivíduos (ou amostras e etc.), ou seja, cada ponto $x = (x_1, \dots, x_n)$ representa um conjunto ordenado de medidas x_k relativas a aspectos mensuráveis importantes para a descrição de cada indivíduo de uma população em um determinado contexto ou situação.

Por exemplo, as coordenadas podem se referir a : $x_1 = idade$, $x_2 = peso$, $x_3 = carga\ viral\ COVID$, $x_4 = renda\ mensal$, $x_5 = tempo(grau)\ de\ estudo$, $x_6 = número\ de\ co - residentes$, e etc., etc., etc. . Assim, cada individuo é representado por um ponto neste Espaço cartesiano que é, justificadamente, denominado "***Espaço de Aspectos***". (A dimensão n ,em geral, é muito grande e, quanto maior for n, mais detalhada pode ser a descrição registrada para cada indivíduo, ou seja, mais informações são arquivadas).

Hiperplanos são então utilizados para separar grupos de indivíduos com estas características mensuráveis aproximadamente semelhantes segundo uma métrica (norma/distância) neste espaço, ou seja, geometricamente eles classificam agrupamentos de pontos próximos. A Análise de uma grande quantidade de dados permite que agrupamentos poliédricos disjuntos sejam delimitados por interseções de Semi-espaços.

A idéia é de que cada uma destas regiões (hiperpoliedros) reduzidas, definem medidas de respectivos aspectos muito semelhantes. Com isto, supõe-se que indivíduos pertencentes a uma mesma região (hiperpoliedro) ***também*** compartilhem outras características não incluídas no Espaço de Aspecto (que, talvez sejam impossiveis de discriminar ou medir diretamente), mas dependam do conjunto daquelas que são representadas na região. (Por exemplo, preferência por tipos de comida, ideologia politica, risco de óbito e etc.).   Este procedimento geométrico tem sido amplamente utilizado em processos automatizados (algoritmizados) que , desta forma, classificam a “personalidade”/ “face” / etc. de um determinado individuo segundo a “região” (hiperpoligono) em que o vetor de suas medidas caracteristicas (coordenadas no Espaço de Aspecto) o colocam.Este Método tem sido amplamente utilizado em Psicologia, Economia e“*Marketing*”, Sociologia e Análise de Dados Massivos em Química, Biologia, Medicina e Física. (Em muitos casos em que se tem uma alta capacidade computacional disponível e, portanto, é possível registrar e classificar uma grande população de indivíduos em Espaços de Aspectos de grande dimensão, este procedimento é até denominado “Inteligência Artificial” ! . Ref. R.Berwick-*An Idiot’s Guide to Support Vector Machines*, Slide Lect. MIT-online, , B.Scholkpf-A.Smola-*Support Vector Machnines*, MIT 2018).

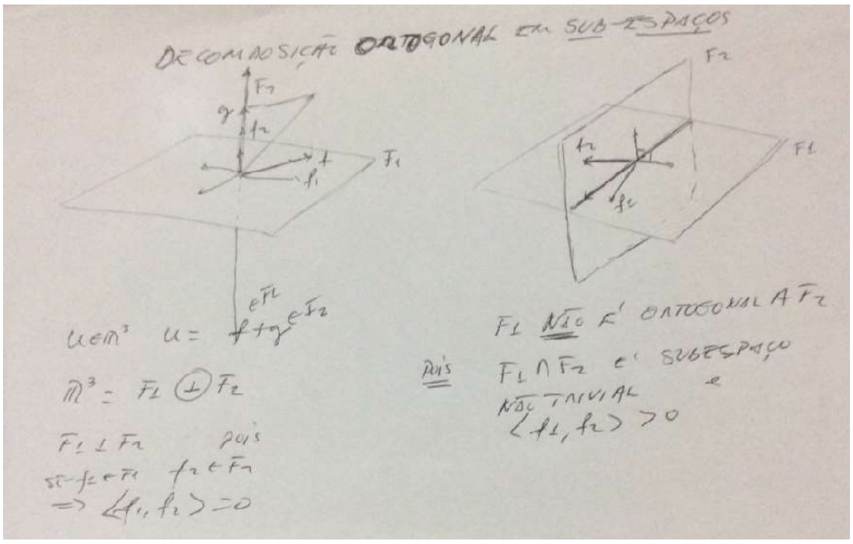
Separação de Pontos de um *Espaço de Aspecto* ($n = 2$) por 3 Hiper Planos (*retas*)



-DEF.- ***SUB-ESPAÇOS ORTOGONAIS***:

Dois Subespaços $E_1, E_2 \subset E$ são ditos **ORTOGONAIS** se $\langle u_1, u_2 \rangle = 0$ para quaisquer $u_i \in E_i$ e denotamos esta relação com o símbolo $E_1 \perp E_2$.

Decomposição de um Espaço em Sub-Espaços Ortogonais



Exercícios:

-Mostre que se $E_1, E_2 \subset E$ são **ORTOGONAIS** então $E_1 \cap E_2 = \{0\}$ e é possível construir o sub-espaço soma direta:$F = E_1 \oplus E_2$.

-DEF.- SOMA ORTOGONAL- Decomposição Ortogonal – Complemento Ortogonal

No caso em que $E_1 \perp E_2$ e $E = E_1 \oplus E_2$ diremos que o Espaço E é uma **SOMA (ou DECOMPOSIÇÃO) ORTOGONAL** por dois espaços ortogonais $E_1 e\ E_2$e denotamos o fato pelo símbolo $E = E_1 \boxplus E_2$, (ou $E = E_1 \perp E_2$) e que também é denominado de ***Decomposição/Fatoração*** ortogonal de E. Também se diz que E_2 é o ***Complemento Ortogonal*** de E_1com relação a E e escreve-se $E_2 = {E_1}^{\perp}$.

Exercício:

-Mostre que o Espaço Vetorial das matrizes $M_{nn}(\mathbb{R})$ com Produto Interno de Frobenius pode ser representado com a seguinte decomposição ortogonal: $M_{nn}(\mathbb{R}) = \Sigma_{nn}(\mathbb{R}) \boxplus \mathrm{A}_{nn}(\mathbb{R})$ em que $\Sigma_{nn}(\mathbb{R}) = \{S \in M_{nn}(\mathbb{R})\ ;\ S^t = S\}$=(*Matrizes simétricas*) e $\mathrm{A}_{nn}(\mathbb{R}) = \{A \in M_{nn}(\mathbb{R})\ ;\ A^t = -A\ \}$=(*Matrizes anti-simétricas).*

IV-BASES ORTONORMAIS: *Teorema Fundamental de Descartes-Fourier*

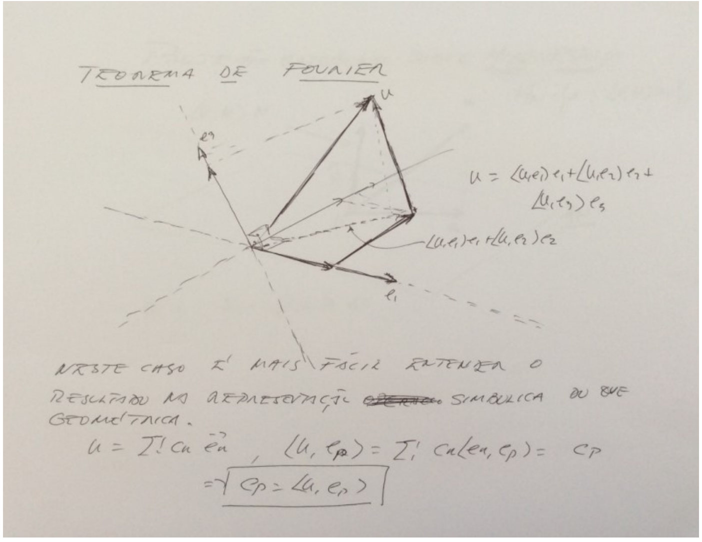
Como já observamos, as Bases de um Espaço Vetorial são subconjuntos notáveis, e desejáveis, em virtude de sua capacidade de descrever todos os elementos do espaço de forma eficiente, isto é, de maneira não redundante e minimal.

Um dos problemas mais fundamentais da Álgebra Linear consiste na obtenção da representação dos vetores $v \in E$ como combinações lineares de vetores de um ***dado*** conjunto gerador do Espaço Vetorial, $[K] = E$. Se este conjunto K não for uma Base, a representação não é única. A obtenção destas representações em todos estes casos é a tarefa típica resolvida pelo importante Método de Eliminação de Gauss. Embora este seja um dos algoritmos mais notáveis e infalíveis da Matemática, a sua implementação exige a realização de uma quantidade muito grande de operações aritméticas, o que, em muitos casos, inviabiliza o seu emprego prático. Portanto, é necessário procurar atalhos para este procedimento.

Uma outra abordagem para simplificar a representação dos vetores do Espaço consiste em previamente calcular Bases peculiares do Espaço Vetorial que facilitem esta tarefa.

Dentre estas, as Bases de vetores Ortonormais constituem uma classe especial de Bases em que a representação pode ser obtida com o mínimo de operações o que as tornam objetos igualmente mais notáveis e desejáveis na Álgebra Linear e suas aplicações.

O seguinte Teorema tem uma interpretação geométrica simples e clara no seu Modelo Cartesiano na Geometria Elementar, e estabelece explicitamente as vantagens computacionais peculiares das Bases ONs na resolução desta questão fundamental.



Decomposição de Fourier (GA)

TEOREMA de FOURIER-Descartes: *Representação de Vetores em Bases ONs*

Se $B = \{v_1, .., v_n\}$ for uma Base Ortonormal de um Espaço Vetorial real com Produto Interno E, isto é, $\langle v_j, v_k \rangle = \delta_{kj}$, então qualquer vetor $v \in E$ pode ser *imediatamente* descrito nesta Base segundo a expansão de Fourier: $v = \sum_{k=1}^{n} c_k v_k = \sum_{k=1}^{n} \langle v, v_k \rangle v_k$ onde os coeficientes $c_k = \langle v, v_k \rangle$ são denominados "*Coeficientes de Fourier*" de v na Base Ortonormal B (em Geometria Analitica, "*Coordenadas Cartesianas*").

Demonstração: Como uma descrição de v na Base B existe, digamos, $v = \sum_{k=1}^{n} c_k v_k$, e ela é única, basta obter os coeficientes c_k , que podem ser calculados efetuando os produtos internos $\langle v, v_j \rangle = \langle \sum_{k=1}^{n} c_k v_k , v_j \rangle = c_j = \langle v, v_j \rangle$ de onde vem o resultado.

Observações:

- Uma demonstração tão simples para um significado tão fundamental em Matemática! Não se iluda com a propalada "*lenda matemática*" de que a importância de um Teorema é invariante com o contexto e se mede unicamente pela dificuldade de sua demonstração.

-A designação "Teorema de Fourier-Descartes não é utilizada na literatura e serve aqui para chamar a atenção para a sua origem francamente geométrica (Descartes) e para a sua utilização extensamente analítica (Fourier) a ser oportunamente indicada.

Exercícios:

-Considere o Espaço Vetorial dos polinômios $P_n(\mathbb{R})$com produto interno $\langle p, q \rangle = \sum_{k=0}^{n} p(k)q(k)$ e os vetores :$p_0(x) = \frac{1}{n+1}$, $p_1(x) = \frac{x}{a}, p_2(x) = \frac{x(x-1)}{b}, p_3(x) = \frac{x(x-1)(x-2)}{c}$, ... Obtenha a, b, c para normalizar os respectivos vetores, mostre que $\{p_0, p_1, p_2, p_3\}$ formam uma base ON de $P_3(\mathbb{R})$e obtenha a **Expansão de Fourier** para o polinômio $p(x) = 1 - 2x + x^3$ nesta base.

-Mostre que um Problema linear (sistema de equações lineares) $Ax = b$, com $A \in M_{nn}(\mathbb{R}), b \in \mathbb{R}^n$ é facilmente resolvido por uma Expansão de Fourier se os vetores colunas da matriz A constituírem um sistema ortogonal em algum (qualquer) produto interno no Espaço Vetorial cartesiano $\mathbb{R}^n$.

-Considere o Espaço Vetorial $M_{22}(\mathbb{R})$ com o produto interno de Frobenius. Mostre que o conjunto de matrizes

$K = \left\{A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, C = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, D = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\right\}$ é ortogonal, normalize-o, mostre que é uma Base e represente a matriz $M = \begin{pmatrix} -3 & 5 \\ -2 & 7 \end{pmatrix}$ como uma expansão de Fourier nesta Base ortonormal.

-**FOURIER MATRICIAL**: Escreva a expansão de Fourier $v = \sum_{k=1}^{n} \langle v_k, w \rangle v_k$ na forma Matricial no caso em que $E = M_{n1}(\mathbb{R}) \approx \mathbb{R}^n$.(**Sugestão**: Escreva $\langle v_k, w \rangle v_k$ como um produto matricial $v_k (v_k)^t w$, observando que uma multiplicação entre matrizes de ordens respectivamente: $M_{n1} \times M_{1n} \times M_{n1} \equiv M_{n1}$ resulta da forma: $v = \sum_{k=1}^{n} v_k (v_k)^t\, w$=$(\sum_{k=1}^{n} v_k (v_k)^t)$ w.

-Escreva o vetor $\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$ na base ON $B = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \frac{-1}{\sqrt{2}} \\ 0 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ utilizando o Método de Fourier direto e Matricial.

-Escreva um vetor genérico $v = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ na base do exercício acima utilizando o Método de Fourier direto e Matricial.

Observação: A expansão de Fourier na forma Matricial é semelhante à notação bra-ket devida a Paul Dirac, amplamente utilizada em Física e raramente em Matemática. Em capítulos seguintes voltaremos a uma terceira notação para esta expansão que é mais comum em Análise e tem a sua origem nos trabalhos do matemático húngaro Frigyes Riesz. A referência a nomes tão ilustres sugere a importância deste tema.

-INTRERPRETAÇÃO DE ORTOGONALIDADE em termos de INFORMAÇÃO:

Interpretando Espaços Vetoriais como repositórios de ***Informação***, é razoável *quantificar* o total de Informação contida em um sub-espaço vetorial como algo relacionado à sua dimensão. Assim, para dois vetores *linearmente independentes*, $u, v \in E$, cada sub-espaço unidimensional $[u], [v] \subset E$ seria repositório de informações distintas e $[u, v] \subset E$ conteria o total destas informações.

Por outro lado, também é razoável associar uma *quantidade de informação compartilhada* pelos dois sub-espaços unidimensionais (não colineares) segundo um conceito de "***correlação***", ou seja, de ***quão distintas*** são as informações descritas pelos dois vetores. Obviamente, quando são colineares, eles compartilham totalmente as informações que são redundantes, ou seja ambos contem exatamente a mesma informação, enquanto que dois vetores ortogonais não compartilham qualquer informação. Observe-se que as situações extremas são perfeitamente interpretáveis sob o ponto de vista da informação, tal como no caso geométric; resta-nos analisar oas casos intermediários. Seguindo uma analogia dos argumentos geométricos, é razoável mensurar a o "*compartilhamento de informações*" ("correlação") como função do ângulo plano **entre** eles por intermédio do produto interno,ou seja, $\frac{|\langle x,y \rangle|}{\|x\|\|y\|}$. Este valor não depende dos comprimentos dos vetores, mas sim da posição relativa entre eles e aumenta segundo o comprimento da projeção de um unitário sobre o outro $\frac{|\langle x,y \rangle|}{\|x\|\|y\|} = \left|\langle \frac{x}{\|x\|}, \frac{y}{\|y\|} \rangle\right|$. Esta medida, portanto, determina um valor numérico em $[0,1]$ que pode ser também ser interpretado "***probabilisticamente*** " .

O conceito pode ser generalizado tratando-se de "correlação" entre sub-espaços vetoriais $E_1, E_2 \subset E$ em termos da medida do ângulo entre eles definido como$\widehat{E_1 E_2} = \max_{v_i \in E_i} \widehat{v_1 v_2}$. Assim a decomposição de um Espaço Vetorial E em Somas diretas de Espaços Ortogonais, $E = \boxplus_{k=1}^{k=n} E_k = E_1 \perp \cdots \perp E_n$ representaria a forma mais econômica de ***arquivar*** a informação total representada por E em sub-espaços sem compartilhamentos, isto é, sem redundâncias de informação entre eles. Se E tem dimensão finita o seu *arquivamento completo ótimo* é obtido quando cada compartimento representa uma unidade de informação não compartilhada, isto é, unidimensional, uma situação equivalente à obtenção de uma Base Ortogonal para o Espaço.

Por esta razão (dentre tantas outras de caráter geométrico e computacional) é fácil prever que a construção de Bases Ortonormais é uma questão de fundamental importância teórica e nas aplicações da Álgebra Linear , razão porque será tratada pelos Teoremas seguintes. O esforço na obtenção de uma Base ortonormal, em geral. é amplamente compensado pela facilidade com que um vetor do Espaço pode ser expresso como combinação linear dos seus vetores, como mostrou o Teorema de Fourier.

V-CONSTRUÇÃO GERAL DE BASES ORTONORMAIS

A construção de Bases para um Espaço Vetorial é uma das questões mais fundamentais da Álgebra Linear porque permite uma descrição ***minimal*** e biunívoca de todo o Espaço e a enorme diversidade destas Bases facilita a resolução de inúmeros problemas da Álgebra Linear.

A construção de Bases ***Ortonormais*** melhora ainda mais esta capacidade descritiva porque elas são ***totalmente não redundantes***, uma vez que os seus vetores não compartilham informações, ou seja, não são ***correlacionados*** entre si.

O Método de Eliminação de Gauss é um algoritmo fundamental e eficiente que reduz um conjunto gerador redundante a uma Base (minimal) do Espaço, porém não necessariamente Ortonormal.

O Teorema de Fourier demonstrado acima explicita claramente a grande vantagem computacional das Bases ONs sobre todas as outras, pois possibilita a representação dos elementos de um Espaço Vetorial imediatamente com o simples calculo de seus produtos internos com elementos da Base. Por este motivo, Métodos de construção de Bases ONs a partir de uma dada Base são instrumentos teóricos e computacionais importantes em Álgebra Linear

O Teorema de Ortogonalização apresentado a seguir descreve explicitamente um dos algoritmos mais fundamentais para a construção de Bases ONs a partir de uma **Base qualquer**. Este Método pode também pode ser encarado como uma *variação ortogonal* do Teorema de Completamento de Bases apresentado no capítulo III.

-MÉTODO DE ORTOGONALIZAÇÃO DE GRAM-SCHMIDT

É importante acompanhar a demonstração deste Teorema utilizando uma representação geométrica euclideana (*lápis e papel*) do argumento para observar que o procedimento é extremamente natural e intuitivo, apesar da necessária abstração do contexto.

Exercício: Mostre que uma família $K = \{v_1, \dots, v_n\}$ de vetores não nulos ortogonais entre si é necessariamente LI.

TEOREMA de GRAM-SCHMIDT: Existência e Método de Construção de Bases Ortonormais

Considere um Espaço Vetorial Real com produto interno E , $\langle\, , \rangle$ de dimensão $\dim E = n$, uma **Base** qualquer $B = \{w_1, \dots, w_n\}$, e os sub-espaço *crescentes* $E_k = [\{w_1, \dots, w_k\}], E_n = E$.

Então, uma Base ***Ortonormal*** $O_n = \{v_1, \dots, v_n\}$ de E pode ser construída com a seguinte seqüência finita de conjuntos (1) **ortonormais** $O_k = \{v_1, \dots, v_k\}, 1 \le k \le n$ tais que (2) $[O_k] = E_k$.

0)Obtenção de O_1 : $v_1 = \frac{w_1}{\|w_1\|}$ (**Normalização**) . Observe-se que $O_1 = \{v_1\}$ é (**1**)Ortonormal e (**2**) $[O_1] = [w_1]$. Se $n = 1$, então o processo está concluído.

Caso contrário, para $1 < k < n$:

A-Supondo (1) $O_k = \{v_1, \dots, v_k\}$ Ortonormal e **(2)** $[w_1, \dots, w_k] = [O_k]$. **Observe** que

$w_{k+1} \notin [O_k] = [w_1, \dots, w_k]$, ou seja, w_{k+1} é independente dos vetores$\{w_1, \dots, w_k\}$.

B- Projete w_{k+1} no Sub-Espaço $[O_k]$ obtendo: $\tilde{w}_{k+1} = \sum_{i=1}^{k} \langle w_{k+1}, v_i \rangle \, v_i$

C-Ortogonalização: Calcule a contribuição ortogonal complementar de w_{k+1} com relação ao subespaço $[O_k]$:

$\tilde{v}_{k+1} = w_{k+1} - \sum_{i=1}^{k} \langle w_{k+1}, v_i \rangle \, v_i$ (que é **não nulo**,pois $w_{k+1} \notin [B_k]$)

D-Normalização: Normalize a contribuição ortogonal de w_{k+1}

$v_{k+1} = \frac{\tilde{v}_{k+1}}{\|\tilde{v}_{k+1}\|}$.

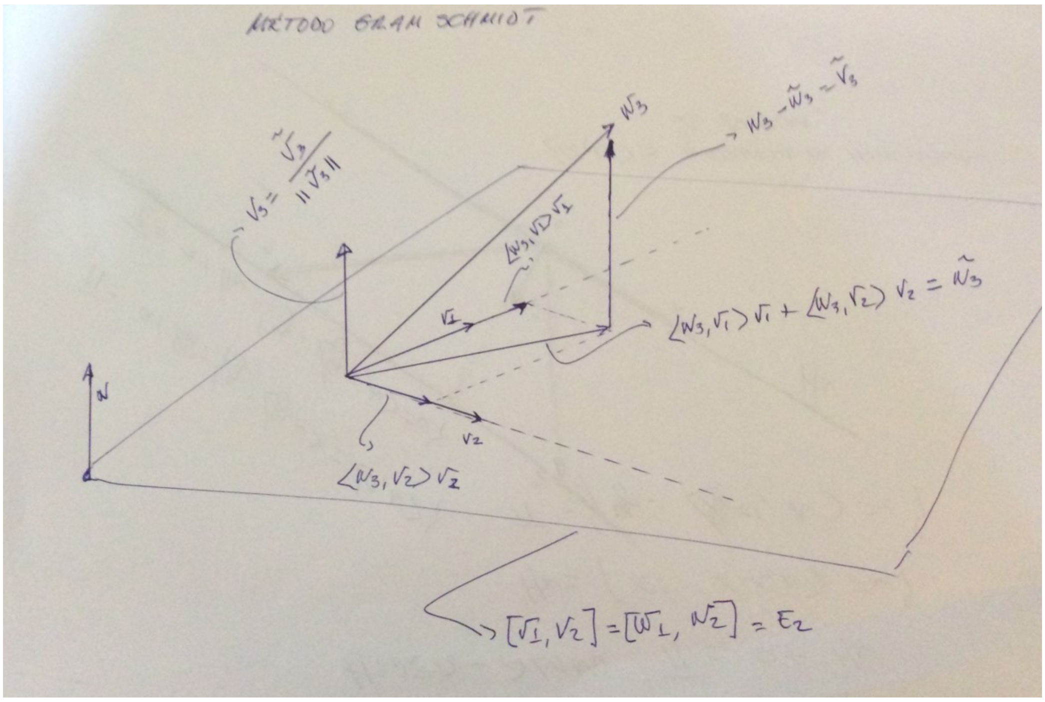
O conjunto $O_{k+1} = \{v_1, \dots, v_k, v_{k+1}\}$ é **(1)** Ortonormal e **(2)** $[O_{k+1}] = [\{w_1, \dots, w_k, w_{k+1}\}]$

Se $k + 1 = n$, fim do processo.

Se $k + 1 < n$, as condições para a execução do procedimento ABCD estão cumpridas e pode ser executado novamente **até que o seu completamento.** Obviamente $[O_n] = E$.

Demonstração: A primeira asserção é óbvia, já que um conjunto de vetores ortonormais é sempre linearmente independente. A segunda asserção pode ser facilmente entendida por intermédio de uma ilustração geométrica euclideana e suas afirmações verificadas *a posteriori*.

Método de Ortonormalização de Gram-Schmidt: *Complemento Ortogonal de* w_3 *com relação ao Subespaço* $[v_1, v_2] = [w_1, w_2]$



Exercícios:

-Interprete geometricamente as motivações os procedimentos passo a passo e a conclusão do Método de Gram-Schmidt com gráficos no plano e no espaço.

-Demonstre os detalhes do Método.

- **Polinomios ortogonais de Legendre**.Considere o Espaço Vetorial dos Polinômios reais $P(\mathbb{R})$ com o produto interno $\langle p, q \rangle = \int_{-1}^{1} p(x)q(x)dx$. Obtenha uma Base ortonormal para o subespaço $P_N(\mathbb{R}) = \{p(x) = \sum_{k=0}^{N} c_k x^k \ ; \ c_k \in \mathbb{R}]$ utilizando o Método de

Gram-Schmidt para o conjunto gerador (não ortonormal) $K_m = \{1, x, \dots, x^m\}$. Obtenha uma Base Ortonormal $B = \{L_k\}$ de polinômios para $P_5(\mathbb{R})$.(L_k são denominados polinômios de Legendre).

-Utilizando a Base ortonormal calculada no exercício anterior, escreva o polinomio $p(x) = 1 + 2x + x^4$ na forma: $p = \sum_{k=0}^{4} c_k L_k$.

-Utilizando a Base Ortonormal de Legendre obtenha a projeção ortogonal da função $f(x) = e^x$, sobre o subespaço $P_4(\mathbb{R})$ de polinomos de grau$\leq$ 4 do Espaço Vetorial $C^\infty([-1,1], \mathbb{R})$ com produto interno $\langle p, q\rangle = \int_{-1}^{1} p(x)q(x)dx$, e, posteriormente, o complemento ortogonal da mesma com relação ao mesmo.

-Resolva uma questão análoga à anterior considerando agora o Espaço Vetorial $C^\infty([-1,1], \mathbb{R})$ com produto interno $\langle p, q\rangle = \int_{-1}^{1} p(x)q(x)(1 - x^2)dx$.

-Considere o Espaço de polinômios de grau $\leq n$, $P_n(\mathbb{R})$ e um conjunto de pontos ***distintos*** $\{x_k\}_{0\leq k\leq n}$. Considere agora o conjunto de $n + 1$ polinômios, $\mathcal{L}_k(x) \in P_n(\mathbb{R})$ de grau n tais que $\mathcal{L}_k(x_j) = \delta_{kj}$. Mostre que este conjunto é Linearmente Independente e que $\{\mathcal{L}_k\}_{0\leq k\leq n}$ é base do Espaço de polinômios de grau $\leq n$, $P_n(\mathbb{R})$.

-Defina um produto interno no Espaço Vetorial do Ex. anterior para que $\{\mathcal{L}_k\}_{0\leq k\leq n}$ seja uma Base ortogonal. Aplique nesta Base o procedimento de ortogonalização de Gram-Schmidt para $n = 4$, $x_k = k$ e o produto interno $\langle p, q\rangle = \int_{-1}^{1} p(x)q(x)dx$.

OBSERVAÇÃO: POLINÔMIOS ORTOGONAIS:

O espaço vetorial de Polinômios reais $P(\mathbb{R})$ dispõe de uma base infinita e canônica $B = \{1, x, \dots, x^n, \dots.\}$. Quando interpretado como um *sub-espaço* do Espaço Vetorial das funções contínuas $C^0([a,b], \mathbb{R})$ com um produto interno definido por uma função de peso $\omega \in C^0([a,b], \mathbb{R}), \omega(x) > 0, x \in (a,b), \langle f, g\rangle = \int_a^b f(x)g(x)\omega(x)dx$, o Método de Gram-Schmidt pode ser empregado para a construção de uma Base Ortonormal $\mathcal{B}_\omega = \{\rho_1, .., ..\}$ que permite representar um polinômio de grau n segundo a expansão de Fourier $p(x) = \sum_{k=0}^{n} c_k \rho_k(x)$, cujos coeficientes podem ser imediatamente calculados: $c_k = \int_a^b p(x)\rho(x)\omega(x)dx$. A diversidade de funções peso $\omega(x)$ disponíveis para a realização deste procedimento e a conhecida possibilidade de aproximar qualquer função continua em intervalo fechado por polinômios (Teorema de Aproximação de Weierstrass) abre as portas para uma enorme classe de Métodos de Análise que tem sido estudada e aplicada intensamente desde o inicio do século XX. Os Polinômios ortonormais de Legendre $\{L_n(x)_{0\leq k}\}$, com $(a = -1, b = 1, \omega = 1)$, são os mais antigos, mas a classe das bases polinomiais ortogonais utilizadas é ampla e cada uma delas adequada para propósitos específicos. (Ref. Ph.Davis-*Extrapolation and Approximation*, Dover, I.Gohberg-S.Goldberg-M.Kaashoek-*Basic Classes of Linear Operators*, Birkhauser).

Em Análise, onde são consideradas combinações lineares infinitas (isto é, séries convergentes) o espaço gerado por um conjunto LI infinito como $\{1, x, \dots, x^N, \dots\}$ em $P(\mathbb{R})$ é muito maior do que o gerado algebricamente (combinações lineares finitas) e, com isto, pode descrever espaços de funções muito mais abrangentes. A vasta e fundamental Teoria de Fourier trata destas questões para o conjunto ortogonal trigonométrico $\{\varphi_k(t) = \cos k2\pi t\}_{-\infty<k<\infty}$ em $C^0([0,1], \mathbb{R})$, $\langle f, g\rangle = \int_0^1 f(t)g(t)dt$ (Ref.A.N.Kolmogorov-S.V.Fomin-*Elementos de Análise de Funções*, MIR 1980, T.Korner-*Fourier Analysis*, Cambridge UP 1998).

EXERCÍCIOS:

-Mostre que em um Espaço com dimensão finita E , $\dim E = n$, com uma base qualquer $B = \{\beta_k\}$ é sempre possível definir um Produto Interno de tal forma que B seja uma Base Ortonormal neste produto. (Sugestão: Defina $\langle \beta_k, \beta_j\rangle = \delta_{kj}$ e para os outros vetores utilize suas respectivas descrições nesta base supondo, naturalmente, que as propriedades de produto interno sejam satisfeitas. Verifique a consistência do resultado).

-Com base no exercicio anterior, descreva a variedade completa de produtos internos que podem ser definidos em um Espaço vetorial com dimensão finita. (

-Demonstre o importante e simples **Teorema**: Se $B = \{v_1, \dots, v_n\} \subset E$ for uma família de *n* vetores do Espaço Vetorial com Produto Interno E **ortogonais** entre si , então B é *Linearmente Independente, Minimal e Não Redundante*.

-Mostre que o conjunto infinito $\{\varphi_k(t) = \cos k2\pi t\}_{-\infty<k<\infty}$ é formado por funções ortogonais entre si no Espaço Vetorial com produto interno $C^0([0,1], \mathbb{R})$, $\langle f, g\rangle = \int_0^1 f(x)g(t)dt$ e, portanto, constituem um conjunto minimal, não-redundante, LI, mas não gerador (algébrico) do espaço todo. (**Sugestão**:Qualquer combinação linear destas funções é uma função periódica e, portanto, não pode descrever todas as funções do espaço considerado cujas funções, em sua maioria, não são periódicas).

-Considere o sub-espaço dos polinômios $E_0 = [\{1, x, x^2\}] \subset P(\mathbb{R})$ com o produto interno $\langle p, q\rangle = \int_0^\infty p(x)q(x)e^{-x}dx$. Obtenha uma Base Ortonormal para E_0. Calcule a distância $d(r, E_0)$ para $r(x) = 1 + x^n, n \geq 0$ de acordo com a sua intepretação geométrica euclideana e determine o polinômio $h^* \in E_0$ que realiza este mínimo, isto é, $\|r - h^*\| = d(r, E_0)$ argumentando geometricamente.

-A mesma questão anterior considerando o produto interno em $P(\mathbb{R})$ dado por $\sum_{k=0}^{\infty} p^{(k)}(0)\, q^{(k)}(0) = \langle p, q\rangle_{\infty}$.(Mostre inicialmente que esta expressão é "bem definida" como um produto interno no Espaço Vetorial dos polinômios reais $P(\mathbb{R})$.

-Escreva a desigualdade do CSB para o exemplo em $P(\mathbb{R})$ dado por $\sum_{k=0}^{\infty} p^{(k)}(0)\, q^{(k)}(0) = \langle p, q\rangle_{\infty}$

-Demonstre o **TEOREMA DE BESSELL-PITÁGORAS**: Dada uma Base ON $B = \{v_1, \dots, v_n\} \subset E_0$ de um subespaço $E_0 \subset E$ então para qualquer $w \in E$ vale a **desigualdade** $\sum_{k=1}^{n} |\langle w, v_k\rangle|^2 \le \|w\|^2$; A igualdade se verifica ***se e somente se*** $w \in E_0$.

-Demonstre o **TEOREMA DE PITÁGORAS** para *n* vetores ortogonais: Se $K = \{v_1, \dots, v_n\}$ for uma família de vetores mutuamente ortogonais (isto é, $v_k \cdot v_j = \delta_{kj}\|v_k\|^2$) então $\|\sum_{k=1}^{n} v_k\|^2 = \sum_{k=1}^{n}\|v_k\|^2$ e interprete-a em termos geométricos como um Teorema de Pitágoras para o subespaço $[K]$.

CONSTRUÇÃO DE BASE ON a partir de um conjunto Gerador

O Método de Gam-Schmidt clássico descrito acima parte do conhecimento de uma Base, significando que um passo importante já foi implementado. Suponhamos que o Espaço E seja descrito por um conjunto gerador do espaço $K = \{w_1, \dots, w_m\}$, $[K] = E$, mas não necessariamente uma Base, isto é, $m \ge \dim E$. A questão é como construir uma Base ON diretamente a partir de K adaptando-se o Método Geométrico de Gram-Schmidt. O procedimento é semelhante, mas com adaptações.

Exercícios:

- Descreva um Algoritmo que constrói uma Base ON a partir de um conjunto Gerador utilizando a idéia de Gram-Schmidt.

-Demonstre o importante **Teorema**: Se $\dim E < \infty$ e F é sub-espaço de E , então existe o complemento ortogonal $F^{\perp}$ e $\dim F \oplus \dim\ F^{\perp} = \dim E$.

-Mostre que se $A \in M_{mn}(\mathbb{R})$ for uma matriz com *m* vetores linha $(A_j)^t \in \mathbb{R}^n$ e *n* vetores coluna $A^k \in \mathbb{R}^m$ então os elementos $(AB)_{jk}$ do produto matricial AB, podem ser escritos como: $(AB)_{jk} = \langle (A_j)^t, B^k\rangle$.

-Mostre que $N(A) = \{X \in \mathbb{R}^n; AX = 0\}$ pode ser identificado também com o complemento ortogonal do Espaço Gerado pelas suas linhas, isto é, $[(A_j)^t] \subset \mathbb{R}^n$ com produto interno Euclideano.(**Sugestão**: Escreva a matriz como uma coluna de vetores linhas).

-Obtenha uma Base Ortogonal para $N(A)$, $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 0 \end{pmatrix}$.(**Sugestão**: Utilize o Método de Gram-Schmidt)

-Obtenha o complemento ortogonal $N(A)^{\perp} \subset \mathbb{R}^n$.

(**Sugestão**: Utilize o Método de Gram-Schmidt)

-Obtenha o complemento ortogonal $R(A)^{\perp}$ para $R(A) = \{Y = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 0 \end{pmatrix} X\ ;\ X \in \mathbb{R}^3\} \subset \mathbb{R}^3$. (**Sugestão**: Idem).

-Obtenha uma Base ortonormal do subespaço vetorial gerado pelos vetores $K = \left\{A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, C = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}, D = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\right\}$ do Espaço Vetorial $M_{22}(\mathbb{R})$ com o produto interno de Frobenius e o seu complemento ortogonal.

Vc-REPRESENTAÇÃO GERAL DAS BASES ORTONORMAIS

A descrição no Capítulo III do conjunto de todas as Bases ordinárias $w = \{w_k\}_{1\leq k\leq n}$de um Espaço Vetorial a partir de uma determinada Base fixada $v = \{v_k\}_{1\leq k\leq n}$ na forma $w = Pv$, onde $P \in M_{nn}(\mathbb{R})$ percorre o conjunto das Matrizes inversíveis, tem a sua versão "ortonormal" que será abordada no seguinte Teorema.

TEOREMA: *Descrição de Todas as Bases ONs de um Espaço Vetorial*

1-Se $v = \{v_k\}_{1\leq k\leq n}$ for uma Base Ortonormal do Espaço Vetorial com produto interno E , então todas as Bases Ortonormais deste Espaço serão da forma $w = Pv$, onde $P \in M_{nn}(\mathbb{R})$ percorre o conjunto de todas as Matrizes cujos vetores linha $\{P_1, \dots, P_n\}$ constituem uma Base ON do Espaço $\mathbb{R}^n$, ou seja, $\langle P^k, P^j\rangle = \delta_{kj}$.

2-Além disso, $P^t w = v$, o que mostra que a matriz P é inversível, tem seus vetores colunas $\{P^1, \dots, P^n\}$ Ortonormais e $P^t = P^{-1}$, ou seja, P é uma ***Matriz Ortonormal***.(v. Definição logo abaixo.)

Demonstração: Como $w_k = \sum_{r=1}^n P_{kr} v_r$, basta fazer o produto $\langle w_k, w_j\rangle = \langle \sum_{r=1}^n P_{kr} v_r , \sum_{p=1}^n P_{jp} v_p \rangle = \sum_{r=1}^n P_{kr} P_{jr}$ para observarmos que $\langle w_k, w_j\rangle = \delta_{kj} \iff \sum_{r=1}^n P_{kr} P_{pr} = \delta_{kp}$.

O papel fundamental exercido pelas matrizes de $M_{nn}(\mathbb{R})$ que fazem a transição entre Bases ortonormais já é razão suficiente para destacá-las com uma designação própria, que, além disso, será corroborada por diversas outras aparições em temas variados da Teoria e Aplicação de Matrizes.

DEFINIÇÃO: *MATRIZES ORTONORMAIS*

Uma Matriz $P \in M_{nn}(\mathbb{R})$ será denominada Ortonormal se $P^t = P^{-1}$, ou seja, $P^t P = PP^t = I$.

O subconjunto de $M_{nn}(\mathbb{R})$ formado pelas Matrizes Ortonormais é designada pelo símbolo: $\mathcal{O}_n(\mathbb{R})$.

Exercícios:

1-Mostre que as Matrizes $\mathcal{O}_n(\mathbb{R})$ constituem um Subgrupo das matrizes inversíveis de ordem n com respeito à operação de produto, mas não um sub-Espaço Vetorial de $M_{nn}(\mathbb{R})$. (V. Definição de Grupo nas Notas Preliminares).

1-Mostre *Geometricamente* nos espaços Euclideanos plano e espacial que as Bases obtidas a partir da Base Canônica por efeito de ***rotação*** em torno de eixos ou de ***reflexão*** através de hiperEspaços são Ortonormais e, determine as Matrizes responsáveis por estas modificações segundo o Teorema acima. (GeomAnalítica).

VI- GEOMETRIA DAS APROXIMAÇÕES ÓTIMAS: *Problemas e Métodos Variacionais* *(Gauss, Euler, Dirichlet , Riesz, Galerkin..)*

Os chamados **Problemas Variacionais** se referem à Minimização de uma função de valores reais, $J: \Omega \to \mathbb{R}, J(x)$ cujo interesse provem de questões relativas à otimização de medidas em Física, Engenharia, Economia, Logistica, Teoria da Computação e etc., mas também de questões puramente matemáticas. (Bassanezi-Ferreira, Luenberger, Brinkhuis&Tikhomirov, Levi).

Esta classe de problemas consiste, em geral, de duas etapas: **1)**-Mostrar que existe o valor ínfimo da função no domínio Ω e , **2)**-Determinar os valores $x_* \in \Omega$ (denominados "*Pontos de Mínimo*", "*Minimizantes*" ,"*Otimizadores*" e etc.) que ***realizam*** este ínfimo no domínio Ω, isto é, tais que $J(x_*) \leq J(x), \ \forall x \in \Omega$. O domínio Ω é preferivelmente um subconjunto de algum Espaço Vetorial, mas pode também ser constituído de objetos matemáticos que não fazem parte natural de nenhum Espaço Vetorial, mas sejam descritos parametricamente por eles.

A função J é denominada "***Função Objetivo***" em Matemática, enquanto que na Física e na Engenharia freqüentemente ela se refere à Energia de um sistema, e em Economia ao custo de um processo. A “*variável*” x representa as suas possíveis configurações no domínio admissível Ω . O **Problema variacional** deste tipo é usualmente expresso na forma simbólica: $inf_{x\in\Omega}\{J(x)\}$ e impõe a tarefa de encontrar **(1)**o valor ínfimo e (**2**) os realizadores do valor ínfimo.

OBS: O símbolo “***inf***” se refere ao *limite inferior* (*ínfimo*) dos valores $J(x)$, para $x \in \Omega$, que, talvez não seja atingido por algum elemento $x_* \in \Omega$, isto é, nem sempre existe o seu “***Minimizador***” efetivo. Sobre o conceito de “***inf***” e o estudo de problemas variacionais, com ou sem minimizadores, em um contexto elementar, mas representativo, consulte seu texto preferido de Cálculo (se ele for bom) ou, então um dos excelentes: R.Courant-*Cálculo Diferencial e Integral*, vol1, Ed.Globo 1958, ou P.Lax-M.Terrell-*Calculus* , vol 1, Springer, 2010.

Os **Métodos Variacionais**, por sua vez, são destinados à resolução dos Problemas Variacionais baseados na *expectativa otimista* de que a construção de uma seqüência de pontos x_n que tornam progressivamente menores os valores $J(x_n) \to inf_{x\in\Omega}\{J(x)\}$ da função na direção de seu ínfimo, produz automaticamente uma seqüência de pontos aproximantes de um ***ponto de mínimo***, isto é, que

“ $J(x_n) \to inf_{x\in\Omega}\{J(x)\}$ ***implica que*** $x_n \to x_*$ “. (Poderíamos dizer que este Método se baseia na estratégia de “*Atirar no que se vê para acertar no que não se vê*”).

Obviamente, esta *expectativa otimista* nem sempre é confirmada, mas, os casos em que ela é válida incluem uma grande quantidade de problemas fundamentais da Matemática, razão de sua importância como Método Geral de Resolução. (Particularmente representativo desta situação favorável é o exemplo elementar descrito por uma função objetivo ***quadrática*** $J: \mathbb{R} \to \mathbb{R}, J(x) = x^2 + bx + c$, cujo gráfico é uma parábola convexa para baixo).

A eficiência dos Métodos Variacionais é tão notável, que muito freqüentemente se torna conveniente vantajosa a transformação de problemas matemáticos não originalmente variacionais, para uma forma Variacional com o objetivo de possibilitar a aplicação dos referidos Métodos. (A história da Matemática contem um interessante capítulo sobre a frustração desta *expectativa* e posteriormente sua recuperação no que se refere ao Problema de Dirichlet para Equações Diferenciais que pode ser consultada em C.Reid-*Hilbert-A Biography*, Springer e....).

Exercicios:

1-Mostre exemplos simples do Calculo elementar em que a *expectativa* do Método Variacional não se cumpre, 1)Por não existir o minimizante, 2)Por não existir o minimizante bem definido, ou 3)Por existir mais do que um minimizante(Sugestão: $f(x) = e^{-x}, f(x) = e^{-x}\cos^2 x, f(x) = 1 + \cos^2 x$).

2-Faça um gráfico da função quadrática $f(x) = x^2 - 2$ e elabore um ***Método Variacional*** para o Cálculo de $\sqrt{2}$ com argumentos puramente *geométricos* mas analiticamente representáveis e, assim, determine uma estimativa da aproximação do ***minimizante*** (*ponto de mínimo*) em termos da aproximação do **valor** mínimo, em suma, estimando (“o que não se vê”) $|x_n - \sqrt{2}|$,em termos de (“o que se vê”) $|f(x_n) - 0| = |x_n{}^2 - 2|$. (Sugestão: $|x_n - \sqrt{2}| = \frac{1}{x_n + \sqrt{2}}|x_n{}^2 - 2|$. Calcule $\sqrt{2}$ com uma aproximação de 10^{-2}.

Em Cálculo de funções de variáveis reais $J: \Omega \to \mathbb{R}, f(x_1, \dots, x_n)$ diferenciáveis o Método de Fermat estabelece uma condição necessária (mas não suficiente) satisfeita pelos pontos minimizantes interiores ao domínio como solução de um sistema de n equações (não necessariamente lineares)$\frac{\partial J}{\partial x_k}(x) = 0 , 1 \leq k \leq n$. Este resultado transforma o Problema Variacional em outro problema, em geral, igualmente difícil. As funções “quadráticas” são caracterizadas pelo fato de que o Problema de Fermat resultante é um sistema de Equações ***lineares*** o que torna esta classe acessível aos Métodos e Interpretações Geométricas da Teoria de Espaços Vetoriais com Produto Interno, e, vice-versa. (G.Strang-*Computational Science and Engineering*, Wellesley 2006)

Assim, uma ampla classe de Problemas e Métodos Variacionais pode ser representada geometricamente em termos de **distâncias** em Espaços Vetoriais com Produto Interno, cujas funções objetivo são “quadráticas”, ou convexas, para as quais a *expectativa* é válida e, portanto, o Método Variacional é aplicável.

Apresentaremos abaixo alguns exemplos de Problemas Geométricos de minimização de distâncias em Espaços Vetoriais com Produto Interno que tem significado em muitas outras áreas da Matemática e de suas aplicações.

1- DISTÂNCIA Média Mínima a um Conjunto $A = \{a_1, \dots, a_M\}$ de Pontos –(Problema de Torricelli)

Função Objetivo: *Média Quadrática das distâncias:* $inf_{x \in \mathbb{R}^n} \left\{ \frac{1}{\sqrt{M}} \sqrt{\sum_{k=1}^{M} \|x - a_k\|^2} \right\}$

Considere n pontos/vetores $\{a_k\} \in A \subset E$ em Espaço Vetorial com Produto interno E e o Problema: Determinar vetores $x_* \in E$ que minimizam a função objetivo: “*Média Quadrática das distancias aos pontos* $\{a_k\}$” , ou seja ,$M_2 : E \to \mathbb{R}^+$; $M_2(x) = \frac{1}{\sqrt{M}} \sqrt{\sum_{k=1}^{M} \|x - a_k\|^2}$.

A Primeira questão que surge naturalmente é: “*Porque utilizar a Média Quadrática e não a Média Aritmética , ou Geométrica, Harmônica e etc.*?”. A resposta é pragmática: “*Porque esta Média permite a utilização do Produto Interno e é analiticamente mais tratável pelo motivo que se segue*”.

Observação:Uma Média de M *valores positivos* $\{0 < r_1 \le \cdots \le r_M\}$ é um valor intermediário que representa este conjunto e definido em geral na forma: $M_\varphi(r_1, , , , r_M) = \varphi^{-1}\left(\frac{1}{M}\sum_{k=1}^{M} \varphi(r_k)\right)$, onde φ é uma função real positiva estritamente crescente e convexa. A média Aritmética, obviamente utiliza a função identidade. Determine a função apropriada para as Médias Quadrática, Geométrica,Harmônica que são as mais conhecidas.

Observe que a raiz quadrada não tem um papel especifico para a determinação dos minimizantes porque os ***pontos minimizantes*** que realizam o mínimo de $M_2(x)$ são os mesmos que realizam o mínimo de $J(x) = \sum_{k=1}^{M} \|x - a_k\|^2$ que pode ser convenientemente expresso em termos de produtos internos como $J(x) = \sum_{k=1}^{M} \langle x - a_k, x - a_k \rangle = n\|x\|^2 - 2\langle x, a_k \rangle - \|a_k\|^2$.

Este Problema Variacional é um dos mais antigos desta classe e se refere a Evangelista Torricelli (1608-1647), contemporâneo de Galileo, porque pode ser interpretado como a representação do seguinte problema mecânico tratado por ele no século XVII: Determinar a posição de equilíbrio do ponto x ligado por molas de Hooke aos pontos fixados em $\{a_k\}$ em que as expressões $\|x - a_k\|^2$ são relacionadas à energia elástica da deformação causada pela posição de x . Segundo o “Princípio de Torricelli” , esta posição de equilíbrio é determinada pela minimização da Energia Potencial (elástica) dentre todas a configurações admissíveis. É claro que este não é o único problema matemático, ou aplicado, que pode ser representado desta forma.

Exercício:

-Mostre que a posição de “equilíbrio” para o Problema Variacional de Torricelli é realizada no Minimizante $x_* = \frac{1}{M}\sum_{k=1}^{M} a_k$, curiosamente , a “*Média Aritmética Vetorial”* dos pontos, também chamado de centro de gravidadade. (Sugestão: O teorema do contemporâneo Pierre Fermat(1607-1645) para o Calculo de mínimos utiliza derivadas parciais ou, melhor ainda, se souber, utilize a derivada gradiente e obtenha que o vetor que a anula. Interprete geometricamente este resultado em termos da ortogonalidade da configuração ao gradiente).

-Considere os três pontos $a_1 = (-1,), a_2 = (0,1), a_3 = (0, h); h > 0$, resolva o Problema de Torricelli e analise geometricamente o resultado.

2-DISTÂNCIA Mínima dos pontos de um *Hiper Espaço* H_N *a um Ponto* $w \in E$:

$d(w, H_N) = inf_{x \in H_N} \|x - w\|$

Neste caso, o Problema Variacional pode ser representado pela função quadrática definida em H_N: $J: H_N \to R, J(x) = \|x - w\|^2$.

Este problema foi resolvido anteriormente e tem uma solução que provem de uma interpretação geométrica simples: $x_* = w - \langle w, N \rangle N$.

Exercicios:

-Mostre que $h_w = w - \langle w, N \rangle N$ minimiza de fato as distâncias entre o vetor fixo w e os pontos $h \in H_N$; ilustre este fato geometricamente em gráficos espaciais.

-Defina o Problema análogo para Hiperplanos e mostre que a sua solução se remete ao Problema com Hiperespaços.

-Mostre que este ponto é o único que minimiza as distâncias entre pontos do hiperplano e w, razão porque utilizamos o símbolo h_w para designá-lo.(Sugestão. Escreva $g = h_w + h$; $h \in H_N$, considere $\|g - w\|^2$ desenvolvendo-o como um produto interno e analise os termos mostrando a desigualdade estrita$\|g - w\|^2 > \|h_w - w\|^2$ se $h \neq 0$). Acompanhe o argumento com gráficos ilustrativos.

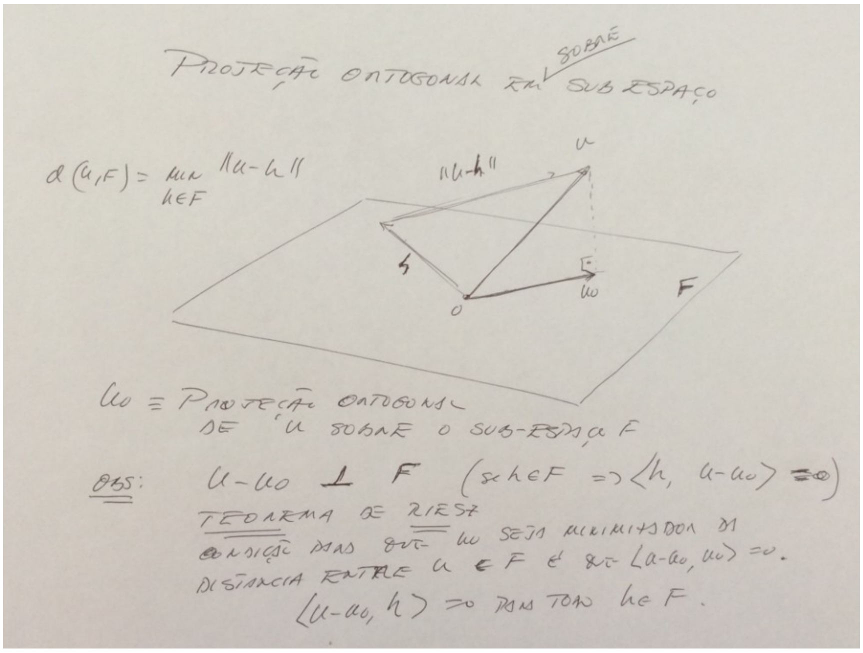
3-PROBLEMA DE RIESZ: Otimização da distancia entre um ponto fixo $w \in E$ e os pontos de um Sub-Espaço $F \subset E$: $d(w, H_N) = inf_{x \in F} \|x - w\|$

Obviamente o Problema de Riesz generaliza o Problema 2 em que foi considerado apenas hiper-espaços, e cuja solução é simples. Quando o Domínio $\Omega = F$ da Função Objetivo definida como a Distância a um ponto fixo w é um sub-espaço fixo $F \subset E$, o Problema Variacional torna-se um pouco mais delicado, mas também muito mais importante.

Este Problema é representativo de uma ampla gama de problemas Variacionais e, por esta razão será tratado com maiores detalhes. Por exemplo, a resolução de um Sistema de Equações lineares representado segundo a teoria matricial na forma $Ax = b$, para $x \in \mathbb{R}^n$, $b \in \mathbb{R}^m$ e uma matriz $A \in M_{mn}(\mathbb{R})$, pode ser interpretado sob um ponto de vista "Variacional" como o problema de aproximação do ponto $b \in \mathbb{R}^m$ pelo subespaço vetorial $R(A)$ gerado pelas colunas de A , ou seja, determinar o elemento $y_* = Ax_* \in R(A)$ minimizador da distância $d(b, [A^k])$. Portanto, x_* será sempre unicamente determinado e pode ser interpretado como a solução generalizada do problema. Observe que esta formulação produz uma única solução y_* mesmo que "*o sistema seja impossível*", isto é, quando $b \notin R(A)$.

Observe, entretanto, que a unicidade de solução y_* do Problema Variacional não implica em solução única para o problema original, pois vários x_* podem ser levados a resolver $y_* = Ax_*$.

Teorema Riesz-Projeção Ortog. em Sub-espaços- Dist. de ponto a SubEspaço



O Teorema que apresentaremos abaixo é um dos pilares da Análise Linear que determina a (1)Existência, (2)Unicidade e (3) Caracteriza computacionalmente o *desejável* elemento *Minimizador/Ponto ótimo* das distâncias entre um ponto fixo $w \in E$ e os elementos $x \in F$ de um Sub-espaço vetorial $F \subset E$.

A interpretação geométrica do problema é clara em virtude da linguagem geométrica utilizada e conduz a uma solução visível que pode ser imediatamente implementada para o caso geral, pois tão somente as propriedades operacionais do produto interno são empregadas para descrever os argumentos. A previsão deste resultado e sua posterior demonstração fazendo uso de procedimentos puramente simbólicos desperdiça um extraordinário recurso cognitivo que pode ser decisivo para a sua mais ampla compreensão.

-TEOREMA DE PROJEÇÃO de RIESZ: *Caracterização Geométrica do Minimizante*

Se E for um Espaço Vetorial com produto interno, $F \subset E$ um Sub-espaço de E, e $w \in E$, então,

1)*Caso exista*, o elemento ***minimizante*** $w_* \in F$, tal que $\|w_* - w\| = inf_{f \in F}\|f - w\|$ é ***único***.

2)A condição ***necessária e suficiente*** para que um elemento $w_* \in F$ seja minimizante

é que $(w_* - w) \perp F$ (Isto é, que o vetor $w_* - w$ seja perpendicular a todos os vetores de F)

3)Se $\dim F < \infty$ então o elemento Minimizante w_* **existe** , e se $B = \{v_1, \dots., v_n\}$ for Base ON de F , então $w_* = \sum_{k=1}^{n} \langle w, v_k \rangle v_k$.

4) Se $\dim F < \infty$ então é possível definir a função $P_F: E \to F$, $P(w) = w_*$ denominada Projeção Ortogonal do Espaço E no subespaço F e, naturalmente $P_F(f) = f$ se $f \in F$.

Demonstração:

1)Sejam $f_*, f_{**} \in F$ pontos minimizantes da distância entre w e F : $(\|f_* - w\| = \|f_{**} - w\| = d = inf_{f \in F}\|w - f\|$. Analisemos então os pontos do segmento $[f_*, f_{**}] = \{f_s = sf_* + (1 - s)f_{**}, 0 \leq s \leq 1\} \subset F$, pois são combinações lineares de f_* e f_{**}. Então

$d \leq \|w - f_s\| = \|(sw - sf_*) + (1 - s)(w - f_{**})\| \leq \|s(w - f_*)\| + \|(1 - s)(w - f_{**})\| = sd + (1 - s)d = d$, de onde $[f_*, f_{**}] \subset S_d(w)$. Mas como a norma do produto interno é estritamente convexa, a única possibilidade de um segmento estar totalmente em uma esfera $S_d(w)$ é que este segmento seja trivial, isto é, $f_* = f_{**}$.

2)Para ***qualquer*** elemento não nulo $h \in F$ considere a "trajetória" $f(s) = w_* + sh$ e a distancia quadrática $D(s) = \|f(s) - w\|^2 = \|w_* + sh - w\|^2 = \|h\|^2 s^2 - 2s\langle h, w_* - w \rangle + \|w_* - w\|^2$ que atinge o único mínimo em $s = 0$. Portanto, o Teorema de Fermat nos garante que $\langle h, w_* - w \rangle = 0$ para qualquer $h \in F$. E vale a recíproca porque se$\langle h, w_* - w \rangle = 0$ e, sendo, $h \neq 0$, o polinômio de segundo grau $\|h\|^2 s^2 + \|w_* - w\|^2$tem mínimo estrito sempre em $s = 0$.

3) Se $\dim F = n < \infty$, tomemos uma base ortonormal $B = \{v_1, \dots., v_n\}$ de F. Então geometricamente é fácil ver que o "teorema de Pitágoras " nos dá $dist(H, w)^2 = \|w\|^2 - \sum_{k=1}^{n} |\langle w, v_k \rangle|^2$ o que nos leva à solução $w_* = \sum_{k=1}^{n} \langle w, v_k \rangle v_k$. (Verifique esta afirmação algebricamente e geometricamente. Lembre-se da condição de perpendicularidade 2).

4)Como o elemento existe (porque $\dim F < \infty$) e como é único, a função Projeção P_F está bem definida.

Observe que a demonstração da unicidade do minimizador utiliza apenas a convexidade estrita da norma e a convexidade do conjunto F (quando se assume que $[f_*, f_{**}] \subset F$). Portanto, este importante resultado sobre a unicidade do minimizante se estende para o mesmo Problema Variacional em conjuntos convexos em espaços com norma estritamente convexas, também conhecido como Problema/Teorema de Riesz.

Como acabamos de verificar na versão acima do Teorema de Riesz, a expressão do elemento minimizante para um Subespaço de dimensão finita é imediatamente obtida em termos de uma Base Ortonormal neste Sub-espaço. Tal fato comprova mais uma vez a importância desta classe de Bases para o cálculo de soluções de problemas fundamentais da Matemática.

Exercícios:

-Analise a solução do $Ax = b$ utilizando o Teorema de Riesz para o subespaço gerado pelas colunas de uma matriz e o ponto b no caso em que $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ -1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ $b = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ utilizando o Método de Ortonormalização de Gram Schmidt para construir uma base ortonormal a partir do sistema $A^1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, A^2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}, A^3 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ *guardando as transformações do Método para obter a solução descrita como elemento de* $[A^k]$, *que é a forma desejada para a solução original.*

-O mesmo para $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ -1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ e $b = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, e $b_0 = \begin{pmatrix} 5 \\ 4 \\ 5 \end{pmatrix}$.

Observações:

Geometricamente, é fácil ser levado à conclusão de que o minimizante para este problema geral para subespaços $F \subset E$ sempre existe, o que de fato ocorre em dimensões **finitas**. Todavia, para sub-espaços F de dimensão infinita, nem sempre existe um minimizante $w_* \in F$ que realize a distância do subespaço F a um ponto fixo $w \in E$. Para exemplificar este cenário considere o Espaço Vetorial $C^0([0,1], \mathbb{R})$ das funções continuas com o produto interno $\langle f, g \rangle = \int_0^1 f(x)g(x)dx$ e o subespaço das funções polinomiais $F = P(\mathbb{R})$ e a função $w \in E$, $w(x) = e^x$. É fácil ver que esta função não é polinomial pois $w^{(k)}(0) = 1 \neq 0, \forall k \geq 0$. Por outro lado, ela admite uma expansão de Taylor $w(x) = e^x = \sum_{k=0}^{\infty} c_k\, x^k$ é tal que $|w(x) - \sum_{k=0}^{n} c_k\, x^k| \leq Cx^{n+1}$ de onde é claro que $\|w - \sum_{k=0}^{n} c_k\, x^k\|^2 \leq \int_0^1 C^2\, x^{2n+2} dx \to 0$ quando $n \to \infty$ e, portanto $d(w, F) = 0$. Se existisse um polinômio minimizante $p(x) = \sum_{k=0}^{m} a_k x^k$ teríamos$\|w - p\|^2 = \int_0^1 |w(x) - p(x)|^2\, dx = 0$ e sendo o integrante não negativo e continuo, necessariamente concluimos que $w(x) = p(x)$, o que é contraditório pois $w \notin P$. Esta é uma questão detalhadamente elucidada pela Análise Funcional desenvolvida por David Hilbert(1862-1943), Stefan Banach(1892-1945) e outros no começo do século XX.

VII-A GEOMETRIZAÇÃO DE ESPAÇOS VETORIAIS COMPLEXOS: *Produto Interno*

A ***complexificação*** de objetos matemáticos originalmente definidos por intermédio de números reais ***não é***, em geral, motivada diretamente por modelos de natureza "concreta", mas decorre de uma estratégia matemática. A finalidade deste procedimento é sempre imergir a estrutura real em uma grande estrutura complexa em que se dispõe de um *espaço de manobra* maior, e tem sua própria origem na extensão do campo real para o complexo, permitindo assim a resolução de problemas reais com amplos métodos complexos. Apesar desta motivação meramente técnica, é comum (ou quase inevitável) que *a posteriori* os objetos complexificados acabem por se tornar de grande utilidade na própria formulação de modelos. (A formulação da Teoria Quântica nas primeiras décadas do século XX, por exemplo, seria impossível sem a anterior complexificação das funções reais que ocorreu sem qualquer motivação prática um século antes).

Embora os números complexos tenham uma representação geométrica no plano que é de grande auxílio à intuição, outros objetos que os utilizam na sua construção são notoriamente destituídos de uma representação geométrica simples. O mais fundamental e importante destes são os Espaços Vetoriais (com escalares reais ou complexos) definidos formalmente por *n*-uplas de números complexos $\mathbb{C}^n$ em completa e direta analogia com os Espaços Reais (de origem Euclideana) $\mathbb{R}^n$, mas cuja representação intuitiva direta é ainda mais distante do que os $\mathbb{R}^n$. Todavia, a falta de um Modelo geométrico para os espaços vetoriais $\mathbb{C}^n$ não impede que utilizemos a Geometria Euclideana do $\mathbb{R}^3$

como seu fundamento intuitivo, considerando, naturalmente, as devidas ressalvas, tal como já foi feito para a análise dos $\mathbb{R}^n$, $n > 3$.

Como $\mathbb{R} \subset \mathbb{C}$, um dos critérios mais naturais para a definição de objetos em que participam os números Complexos é que tais definições, não apenas façam sentido quando restritas apenas aos números reais, mas que, neste caso, deve-se obter exatamente o objeto real originalmente definido, exatamente como foi feito ao se definir os Espaços Vetoriais $\mathbb{C}^n$ como extensões de $\mathbb{R}^n$.

Para a definição de produto interno em $\mathbb{C}^n$ seguiremos novamente este critério, mas é importante observar de saída que este procedimento não determina completamente uma definição, mas várias possibilidades. Para identificarmos a definição adequada é necessário utilizar outras argumentações relacionadas à sua finalidade, no caso, uma geometrização análoga para estes espaços complexos.

A geometrização dos $\mathbb{R}^n$ foi completamente fundamentada no conceito de métrica (“comprimento de vetores”) que, obviamente, deve ser representado por um numero real não negativo. Em $\mathbb{R}^1$ verifica-se que o comprimento de um vetor é dado pelo módulo do número real definido na forma operacional como $\|x\| = \sqrt{x \cdot x}$. A generalização desta definição para $z \in \mathbb{C}^1$ deve produzir consistentemente a definição natural de “comprimento” já previamente instituída para um número complexo $|z| = \sqrt{x^2 + y^2},\ z = x + yi$. Observe-se que, para isto, é necessário que se utilize, não o produto simples (como no caso real) mas o ***produto conjugado***, ou seja, $\|z\| = |z| = \sqrt{z \cdot \bar{z}}$.

O produto conjugado $z * w = z\overline{w}$ é também denominado de ***Produto Hermiteano*** em “*homenagem*” ao matemático Charles Hermite (que mereceu mais do isso) e caracteriza-se pela assimetria conjugada:

$z * w = \overline{w * z}$. (Uma complexificação *apressada* da expressão de norma real que utilizasse o produto complexo usual sem conjugação, não produziria, em geral, um “comprimento real” para norma/módulo de números complexos).

É imediato que a definição de norma de um número real está consistentemente imersa nesta definição *complexificada*, pois o conjugado de um número real é o próprio.

Partindo deste exemplo, é razoável (embora não forçoso) que em $\mathbb{C}^n$ o produto interno também faça uso desta estratégia definindo a norma de um elemento $z = (z_1, \dots, z_n)\mathbb{C}^n$ da seguinte maneira: $\|z\| = \sqrt{\sum_{k=1}^{k=n} z_k \overline{z_k}}$ e, analogamente o produto interno na forma hermiteana: $\langle z, w \rangle = \sum_{k=1}^{k=n} z_k \overline{w_k}$. (Ainda aqui podemos constatar a consistência desta generalização com respeito à definição real, pois, sendo $\mathbb{R}^n \subset \mathbb{C}^n$, o produto interno complexo de dois elementos de $\mathbb{R}^n$ considerados como elementos de $\mathbb{C}^n$, reduz-se ao produto interno real já definido entre eles.

Entretanto, a definição intrínseca de produto interno em Espaços Vetoriais gerais e abstratos não pode fazer uso de coordenadas. Sendo assim, a axiomatização geral do produto interno em Espaços Vetoriais Complexos deve seguir o modelo $\mathbb{C}^n$, mas deve ser caracterizado intrínseca e ***operacionalmente*** da seguinte maneira:

AXIOMAS de PRODUTO INTERNO em Espaços Vetoriais Complexos:

Se $\{E, +, \cdot, \mathbb{C}\}$ for um Espaço Vetorial complexo então um produto interno neste espaço é qualquer função binária $b: E \times E \to \mathbb{C}$, $b(u, v) = \langle u, v \rangle = u \cdot v$ que satisfaz as seguintes propriedades:

1)Linear na primeira variável: $\langle u + \lambda w, v \rangle = \langle u, v \rangle + \lambda \langle w, v \rangle$

2)*Hermiteano* (Assimetria e Conjugação): $\langle u,v\rangle = \overline{\langle v,u\rangle}$

3)Positivo definido: $\langle z,z\rangle > 0 \ \ se\ z \neq 0.$

DEFINIÇÃO de NORMA $\|.\|$ associada ao Produto Interno $\langle , \rangle$:

$\|u\| = \sqrt{\langle u,u\rangle}$

Exercícios:

-Demonstre a afirmação "*2) implica que $\langle z,z\rangle$ é sempre real*" . (A consistência do uso deste termo ("Norma") será verificada no Teorema abaixo.

-Mostre que o axioma 3) é independente e, portanto, necessário. (Sugestão: Considere o "produto" $[u,v] = -\langle u,v\rangle$ e verifique que satisfaz às condições 1) e 2) mas, obviamente , não a 3).).

Imediatamente concluímos as seguintes propriedades decorrentes (e desejáveis) do produto interno e da Norma associada a ele que justificam o uso de grande parte da linguagem geométrica e permitem uma analogia intuitiva com o espaço Euclideano ($\mathbb{R}^3$), tal como já fizemos com $\mathbb{R}^n$.

TEOREMA: *NORMA em Espaços Vetoriais Complexos com Produto Interno*

Se $\langle u,v\rangle$ for um produto interno no Espaço Vetorial **Complexo** $\{E,+,\cdot,\langle , \rangle,\mathbb{C}\}$ então:

1)-Sesquilinearidade: $\langle v,u+\lambda w\rangle = \langle v,u\rangle + \bar{\lambda}\langle v,w\rangle$, em particular, $\langle v,\lambda w\rangle = \bar{\lambda}\,\langle v,w\rangle$

2)Desigualdade de CSB-Complexa: $|\langle u,v\rangle| \leq \|u\|\|v\|$ e $|\langle u,v\rangle| = \|u\|\|v\|$ se e somente se $u\ e\ v$ são colineares, $i.e., Linearmente\ Dependentes.$

3)A Expressão $\|u\| = \sqrt{\langle u,u\rangle}$ de fato determina uma Norma, isto é, satisfaz aos Axiomas:
A)*Positividade Definida*: $\|u\| \geq 0 \ \ e \ \ \|u\| = 0 \iff u = 0$, **B)-***Homotetia*: $\|\lambda u\| = |\lambda|\|u\|$, $\lambda \in \mathbb{C}$, e
C) *Triangularidade*: $\|u+v\| \leq \|u\| + \|v\|$.

4)A Norma é necessariamente ***Estritamente Convexa***, ou seja, $\|u+v\| = \|u\| + \|v\| \iff$
$u,v\ \ forem\ colineares$

5)A Norma necessariamente satisfaz a *Regra das Diagonais*: $\|u+v\|^2 + \|u-v\|^2 = 2(\|u\|^2 + \|v\|^2)$

6) A ***Regra das Diagonais*** é condição também suficiente para que uma Norma Complexa defina um Produto Interno original, neste caso, caracterizado pela seguinte expressão:

$\langle u,v\rangle = \frac{1}{4}\{\|u+v\|^2 - \|u-v\|^2 + i\|u+iv\|^2 - i\|u-iv\|^2\}$ (*J.von Neumann*).

Demonstração: 2)Considere o produto $\langle u-\alpha v, u-\alpha v\rangle = \|u\|^2 - 2Re(\alpha\langle v,u\rangle) + |\alpha|^2\|v\|^2 \geq 0$. Tome $\alpha = \frac{\langle u,v\rangle}{\|v\|^2}$ (maliciosamente sugestionado/a pela projeção na geometria real para minimizar a expressão) e o resultado será obtido após alguma simples manipulação algébrica com números complexos. Para a propriedade 6) consulte V.P.Maslov-*Méthodes Opératorielles*, MIR 1985)

As Definições de ortogonalidade, ortonormalidade entre vetores e Espaços Vetoriais, bem como diversos resultados enunciados em termos geométricos aplicados a Espaços Reais com produto interno podem ser repetidas aqui e admitem uma analogia com a interpretação geométrica euclideana *permitindo assim uma abordagem intuitiva de grande importância para a compreensão e aplicação dos métodos e conceitos desta seção.*

DEFINIÇÃO: ***Matrizes Hermiteanas****:*

As matrizes $H \in M_{nn}(\mathbb{C})$ que performam a transição entre bases ONs de Espaços Vetoriais Complexos são denominadas ***Hermiteanas*** e são caraterizadas pelas *propriedades:* $HH^* = H^*H = I$ *onde* H^* *é a matriz autoadjunta de* H *definida por* $H^* = \overline{H^t}$ *, ou seja,* $(H^*)_{jk} = \overline{H}_{kj}$. Um estudo introdutório sobre esta classe de matrizes será apresentado no capítulo VI.

Exercícios:

-Mostre que no Espaço Vetorial complexo $M_{nn}(\mathbb{C})$ das matrizes complexas , a operação $\langle A, B\rangle = \sum_{k=1,j=1}^{n,n} A_{kj}\overline{B_{kj}}$ é um produto interno.

-Mostre que o conjunto de vetores $\left\{v_1 = \begin{pmatrix}1\\ i\\ 0\end{pmatrix}, v_2 = \begin{pmatrix}1\\ 0\\ 1\end{pmatrix}, v_3 = \begin{pmatrix}0\\ i\\ i\end{pmatrix}\right\}$ do espaço vetorial complexo $\mathbb{C}^3$ com o produto interno usual é uma Base. Utilize o Método de Gram-Schmidt para obter uma base ortonormal a partir desta base.

-O mesmo para funções $C^0([0,1],\mathbb{C}) = \{f(t) = u(t) + iv(t), u, v \in C^0([0,1],\mathbb{R})\}$ com a operação $\langle f, g\rangle = \int_0^1 f(t)\overline{g(t)}\,dt$. (Observe que $\int_0^1 f(t)dt = \int_0^1 u(t)dt + i\int_0^1 v(t)dt$ e $\frac{d}{dt}f(t) = \frac{d}{dt}u(t) + i\frac{d}{dt}v(t)$)

-Mostre que o conjunto de funções $\{e^{ik2\pi t}\}_{k\in\mathbb{Z}} \subset C^0([0,1],\mathbb{C})$ constitui um Sistema Ortogonal no espaço vetorial complexo com produto interno acima descrito. Obtenha um Sistema Ortonormal correspondente.

-Obtenha a distancia e a projeção ortogonal de uma função $f \in C^0([0,1],\mathbb{C})$ no Sub-espaço gerado pelas funções $\{e^{ik2\pi t}\}_{-N\le k\le N}$ e exemplifique com as funções $f(t) = t^3 - t^2 + 2t - 1$, $f(t) = \cos 3t + 3sen\,5t$, $f(t) = e^{-2t}$.

APÊNDICE:

DEFINIÇÕES:

$1 - \int_0^1 f(t)dt = \int_0^1 u(t)dt + i\int_0^1 v(t)dt$

$2 - \frac{d}{dt}f(t) = \frac{d}{dt}u(t) + i\frac{d}{dt}v(t)$)

3-$\alpha = a + ib \in \mathbb{C}$, $e^\alpha = e^a(\cos\, b + i\,sen\,b)$.

4-$C^0([0,1],\mathbb{C}) = \{f(t) = u(t) + iv(t), u, v \in C^0([0,1],\mathbb{R})\}$

Exercícios:

-Mostre que $e^{it} = \cos t + i\,sen\,t$ de onde vem que $\frac{d}{dt}e^{it} = ie^{it}$ e de onde $\frac{d}{dt}e^{\alpha t} = \alpha e^{\alpha t}$.

-Mostre que vale o Teorema Fundamental do Cálculo para funções com variável real e valores complexos, ou seja, $\int_a^b \frac{df}{dt}dt = f(b) - f(a)$ e utilize este fato para calcular as integrais $\int_0^{2\pi} e^{ikt}dt$.

-Mostre que vale a regra de Leibniz para a derivação de produto complexo de funções: $\frac{d}{dt}(f(t)g(t)) = g(t)\frac{d}{dt}f(t) + f(t)\frac{d}{dt}g(t)$, onde os produtos indicados é o produto complexo usual.

-Mostre que vale a "*integração por partes*": $\int_0^1 f\frac{d}{dt}g\,dt = \int_0^1 \frac{d}{dt}(fg)dt - \int_0^1 g\frac{d}{dt}f\,dt$.

xxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxx

REFERÊNCIAS:

D.Hubel-*The Eye, Brain and Vision*, W.H.Freeman 1995

J. von Uexküll-*Dos Animais e dos Homens: Uma Teoria do Significado*, 1982

N.Gucciardini-*Isaac Newton and Natural Philosophy*, Cambridge UP 1999*.,*

S.Chandrasekhar-*Newton's Principia for the Common Reader,* Oxford UP 2003*,*

J.Gray-*World out of Nothing-History of Geometry,* Springer 2010*.*

D.Luenberger-*Optimization by Vector Spaces Methods*, J.Wiley 1997

J.Brinkhuis-V.Tikhomirov-*Optimization: Insights and Applications*, Princeton UP 2005)

R.Berwick-*An Idiot's Guide to Suppor Vector Machines*, Slide Lect.- http://web.mit.edu/6.034/wwwbob/svm-notes-long-08.pdf

B.Scholkpf-A.Smola-*Learning Kernels*, MIT 2018

K. van Rijsbergen-The Geometry of Information Retrieval, Cambridge UP, 2004