Departamento de Matemática - IMECC - Unicamp

MA211- Segundo Semestre de 2019

Prova 1 - 20/09/2019 (6^a - Manhã)

Nome: ____

RA: ___________________________________ Turma [   ]

Questões	Notas
Q1	
Q2	
Q3	
Q4	
Q5	
Total	

- Desligue o celular.
- A prova contém cinco questões. Resolva cada questão em sua respectiva folha.
- Não retire o grampo da prova nem destaque páginas da prova.
- Não é permitido o uso de calculadoras.
- Respostas sem justificativas não serão consideradas.

Justifique suas respostas!

Questão 1. (2.0 pontos) Seja

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^2 - xy}{x^2 + y^2} & , \quad (x,y) \neq (0,0), \\ 0 & , \quad (x,y) = (0,0). \end{cases}$$

1. f é contínua em $(0,0)$? e em $(1,1)$? Justifique.
2. Calcule, se existir, $f_x(0,0)$ e $f_y(0,0)$.

Questão 2. (2.0 pontos) Considere a função $V(x, y, z) = 6x^3 - 5xy + xyz$.

(a) Determine a taxa de variação da função V em $P = (3, 4, 5)$ na direção do vetor $v = i + j - k$.

(b) Em que direção V varia mais rapidamente em P?

(c) Qual a taxa máxima de variação em P?

Questão 3. (2.0 pontos) Determine e classifique os pontos críticos da função

$$f(x, y) = e^{x^2} \cos(y).$$

Questão 4. (2.0 pontos) Encontre o maior e o menor valor de $f(x,y) = x^2 - xy + y^2$ no círculo $x^2 + y^2 = 1$. Em que pontos tais valores são atingidos?

Questão 5. (2.0 pontos) Ache o(s) ponto(s) que pertencem à superfície dada por $x^2 - y^2 + z = 0$ cujo o plano tangente é paralelo ao plano $z = 2x + 4y$.

Gabarito - Prova 1 - MA211 (Manhã)

Questão 1:

1- Sabemos que a função é contínua em (0,0) se

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = f(0,0) = 0. \quad 0,1$$

Observe que consideramos o caminho $C_1 = \{(x,y) : x = t, y = t\}$ temos que

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = \lim_{t\to 0} \frac{t^2 - t.t}{t^2+t^2} = 0 \quad 0,3$$

Agora, se tomamos o caminho $C_2 = \{(x,y) : x = t, y = 0\}$ obtemos

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = \lim_{t\to 0} \frac{t^2 - t.0}{t^2+0^2} = 1. \quad 0,3$$

Como o limite por dois caminhos diferentes são distintos, segue que o limite $\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$ não existe. Portanto a função não é contínua em (0,0). 0,2

Vamos analisar agora se f é contínua em (1,1). Observe que, para $(x,y) \neq (0,0)$, f é uma função racional. Assim,

$$\lim_{(x,y)\to(1,1)} f(x,y) = \lim_{(x,y)\to(1,1)} \frac{x^2-xy}{x^2+y^2} = \frac{1-1.1}{1^2+1^2} = 0 = f(1,1) \quad 0,2$$

Logo, f é contínua em (1,1). 0,1

2 - Pela definição de derivada parcial, temos que

$$f_x(0,0) = \lim_{h\to 0} \frac{f(0+h,0) - f(0,0)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{\frac{h^2-0}{h^2+0^2} - 0}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{1}{h}$$ e $\lim_{h\to 0} \frac{1}{h}$ não existe. ✓ 0,3

Por outro lado,

$$f_y(0,0) = \lim_{h\to 0} \frac{f(0,0+h) - f(0,0)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{\frac{0^2 - 0.h}{0^2+h^2} - 0}{h} = 0.$$ ✓ 0,3

Portanto, $f_x(0,0)$ não existe e $f_y(0,0) = 0$. ✓ 0,2

Questão 2:

a) Queremos determinar o valor de $D_u f(P)$, onde u é o vetor unitário na mesma direção de $v = (1,1,-1)$, ou seja,

$$u = \frac{v}{\|v\|} = \frac{1}{\sqrt{3}}(1,1,-1). \quad \checkmark 0{,}2$$

Como V é diferenciável, segue que $D_u f(P) = \nabla V(P) \cdot u$.
Observe que

$\nabla V(x,y,z) = (18x^2 - 5y + yz, -5x + xz, xy)$. ✓0,3

Logo,

$$\nabla V(3,4,5) = (18.3^2 - 5.4 + 4.5, -5.3 + 3.5, 3.4)$$
$$= (162, 0, 12) \quad \checkmark 0{,}3$$

Portanto,

$$D_u f(3,4,5) = (162, 0, 12) \cdot \frac{1}{\sqrt{3}}(1,1,-1) = \frac{162}{\sqrt{3}} - \frac{12}{\sqrt{3}} = \frac{150}{\sqrt{3}} = 50\sqrt{3}. \quad \checkmark 0{,}6$$

b) A direção em que V varia mais rapidamente em P é a direção do vetor gradiente de V no ponto P, ou seja, na direção de

$\nabla V(3,4,5) = (162, 0, 12)$ ✓0,3

c) A taxa de variação máxima é $\|\nabla V(3,4,5)\| = \sqrt{162^2 + 12^2} =$

$\sqrt{26388} = 6\sqrt{733}$. ✓0,3

Questão 3:

Primeiramente, vamos calcular as derivadas parciais da f. Temos:

$f_x(x,y) = e^x \cos y$ ✓0,3 e $f_y(x,y) = -e^x \operatorname{sen} y$ ✓0,3

Para determinar os pontos críticos, devemos encontrar os pontos (x,y) que satisfazem

$$\begin{cases} e^x \cos y = 0 & (I) \\ -e^x \operatorname{sen} y = 0 & (II) \end{cases}$$ ✓0,4

Da equação (I) temos que, como $e^x \neq 0 \ \forall x \in \mathbb{R}$, então $\cos y = 0$, se e somente se, $y = \frac{\pi}{2} + k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$. ✓0,3 Mas, observe que $\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2} + k\pi\right) \neq 0$, $\forall k \in \mathbb{Z}$. ✓0,2 Logo a equação (II) não é válida se $y = \frac{\pi}{2} + k\pi$, $\forall k \in \mathbb{Z}$. ✓0,2

Portanto, f não possui pontos críticos. ✓0,3

Questão 4:

Pelo método dos multiplicadores de Lagrange, devemos resolver

$$\begin{cases} \nabla f(x,y) = \lambda \nabla g(x,y) \\ g(x,y) = 1 \end{cases}$$ 0,2

onde $g(x,y) = x^2+y^2$. Como temos

$$\nabla f(x,y) = (2x-y\,,\,2y-x)$$
$$\text{e}\ \nabla g(x,y) = (2x\,,\,2y)$$

segue que devemos resolver então o sistema

$$\begin{cases} 2x-y = \lambda 2x & (\mathrm{I}) \\ 2y-x = \lambda 2y & (\mathrm{II}) \\ x^2+y^2 = 1 & (\mathrm{III}) \end{cases}$$ 0,5

Observe que de (I) temos $\lambda = \dfrac{2x-y}{2x}$ e de (II) $\lambda = \dfrac{2y-x}{2y}$. 0,2

Logo,

$$\frac{2x-y}{2x} = \frac{2y-x}{2y} \Leftrightarrow 2y(2x-y) = 2x(2y-x) \Leftrightarrow 4xy - 2y^2 = 4xy - 2x^2$$

$\Leftrightarrow y^2 = x^2$. 0,2

Substituindo em (III) temos $2x^2 = 1 \Leftrightarrow x = \pm\frac{1}{\sqrt{2}}$. Logo, $y = \pm\frac{1}{\sqrt{2}}$. Portanto, os candidatos a extremos são $\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$, $\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$, $\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$ e $\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$. 0,3 Basta então avaliar f nos pontos encontrados. Temos que:

$$f\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right) = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2 - \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right) + \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2 = \frac{1}{2};$$

$$f\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2 - \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)\cdot\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\right) + \left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2 = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = \frac{3}{2};$$

$$f\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right) = \left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2 - \left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right) + \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2 = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = \frac{3}{2};$$

e

$$f\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = \left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2 - \left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\right) + \left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2 = \frac{1}{2}$$

✓ 0,3

Portanto o menor valor é $\frac{1}{2}$ e é atingido nos pontos $\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$ e $\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$ e o maior valor é $\frac{3}{2}$ que é atingido nos pontos $\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$ e $\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$.

✓ 0,3

Questão 5:

Seja $z = f(x,y) = y^2 - x^2$. A equação do plano tangente à superfície num ponto (x_0, y_0, z_0), com $z_0 = f(x_0, y_0)$, é dada por

$$z - z_0 = f_x(x_0,y_0)(x-x_0) + f_y(x_0,y_0)(y-y_0)$$ 0,3

ou seja,

$$z - z_0 = -2x_0(x-x_0) + 2y_0(y-y_0)$$ 0,5

Para que este plano seja paralelo ao plano $z = 2x+4y$, os vetores normais a estes planos devem ser paralelos, ou seja,

$$(-2x_0, 2y_0, -1) = k(2,4,-1)$$, k constante. 0,5

Assim, devemos ter $k=1$; $x_0 = -1$ e $y_0 = 2$. 0,2

Como $z_0 = f(x_0, y_0) = y_0^2 - x_0^2 = 2^2 - (-1)^2 = 3$, 0,2 segue que o ponto procurado é $(-1, 2, 3)$. 0,3