Lista 5 - MA311

Pedro Sader Azevedo RA: 243245
Pedro Sader Azevedo

① (I) $u'' + 1u' - tu = 0$, $u(0) = 2$ e $u'(0) = 1$

Observe que $t=0$ é um ponto ordinário da equação (I) pois ambos $P(t) = 1$ e $Q(t) = t$ são analíticos em $t=0$. Como $P(t)$ e $Q(t)$ são analíticos para todo $t \in \mathbb{R}$, o Teorema do Ponto Ordinário garante que existe solução na forma

$$u(t) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k t^k, \quad \text{com raio de convergência infinito}$$

Assim, temos:

$$u'(t) = \sum_{k=1}^{\infty} c_k k t^{k-1}, \quad u''(t) = \sum_{k=2}^{\infty} c_k k(k-1) t^{k-2}$$

Substituindo em (I):

$$\sum_{k=2}^{\infty} c_k k(k-1) t^{k-2} + \sum_{k=1}^{\infty} c_k k t^{k-1} + \underbrace{t \sum_{k=0}^{\infty} c_k t^k}_{= \sum_{k=0}^{\infty} c_k t^{k+1}} = 0$$

Queremos que todos somatórios tenham t^k como fator comum, então substituímos $k = k+2$ no primeiro, $k = k+1$ no segundo, e $k = k-1$ no terceiro

$$\Rightarrow \sum_{k=0}^{\infty} c_{k+2}(k+2)(k+1) t^k + \sum_{k=0}^{\infty} c_{k+1}(k+1) t^k + \sum_{k=1}^{\infty} c_{k-1} t^k = 0$$

Para podermos "juntar" os somatórios, é necessário que todos comecem do mesmo índice, então vamos separar o primeiro termo ($k=0$) dos dois primeiros somatórios

$$\Rightarrow 2c_2 + c_1 + \sum_{k=1}^{\infty} \left(c_{k+2}(k+2)(k+1) + c_{k+1}(k+1) - c_{k-1} \right) t^k = 0$$

Então, pelo Princípio de Identidade de Séries:

$$\begin{cases} 2c_2 + c_1 = 0 & \text{(II)} \\ c_{k+2}(k+2)(k+1) + c_{k+1}(k+1) - c_{k-1} = 0 & \text{(III)} \end{cases}$$

OS VALORES DE C_0 E C_1 SÃO DADOS PELOS VALORES INICIAIS:

$$C_0 = u(0) = 2$$
$$C_1 = u'(0) = 1$$

PORTANTO $C_2 = -1/2$ PELA EQUAÇÃO (II)

E $C_{K+2} = \dfrac{C_{K-1} - C_{K+1}(K+1)}{(K+1)(K+2)}$ PELA EQUAÇÃO (III) PARA $K \geq 1$.

$$K=1: \quad C_3 = \frac{C_0 - C_2 \cdot 2}{2 \cdot 3} = \frac{2 - (-1/2)2}{2 \cdot 3} = \frac{2+1}{6} = \frac{1}{2}$$

$$K=2: \quad C_4 = \frac{C_1 - C_3 \cdot 3}{3 \cdot 4} = \frac{1 - (1/2) \cdot 3}{3 \cdot 4} = \frac{-1}{24}$$

ENTÃO OS 5 PRIMEIROS TERMOS DA SÉRIE QUE RESOLVE A EQUAÇÃO SÃO:

$$\boxed{u(t) = 2 + t - \frac{1}{2}t^2 + \frac{1}{2}t^3 - \frac{1}{24}t^4 \ \ldots}$$

2 i) $x(x-1)y'' + 6x^2y' + 3y = 0$

$$\Rightarrow y'' + \underbrace{\boxed{\frac{6x}{(x-1)}}}_{P(x)} y' + \underbrace{\boxed{\frac{3}{x(x-1)}}}_{Q(x)} y = 0$$

OBSERVE QUE $x=0$ E $x=1$ ANULAM O DENOMINADOR DE $Q(x)$, ENTÃO SÃO PONTOS SINGULARES DA EQUAÇÃO. AGORA RESTA SABER SE SÃO REGULARES

★ $x=0$

$$\lim_{x\to 0} (x-0)\,P(x) = \lim_{x\to 0} \frac{6x^2}{x-1} = 0 = p_0$$

$$\lim_{x\to 0} (x-0)^2\,Q(x) = \lim_{x\to 0} \frac{3x}{x-1} = 0 = q_0$$

ENTÃO $\boxed{x=0 \text{ É PONTO SINGULAR REGULAR}}$

Scanned with CamSca

★ $x = 1$

$$\lim_{x\to 1} (x-1)\,P(x) = \lim_{x \to 1} (x-1)\,\frac{6x}{(x-1)} = 6 = p_1$$

$$\lim_{x\to 1} (x-1)^2\,Q(x) = \lim_{x \to 1} (x-1)^{\cancel{2}}\,\frac{3}{x\cancel{(x-1)}} = 0 = q_1$$

ENTÃO $\boxed{x = 1 \text{ É PONTO SINGULAR REGULAR}}$

(ii) EQUAÇÃO INDICIAL: $r(r-1) + p_0 r + q_0 = 0$

DA QUESTÃO ANTERIOR: $p_0 = 0$ E $q_0 = 0$ PARA $x = 0$

$$\Rightarrow r(r-1) + 0 + 0 = 0 \Rightarrow \boxed{r_1 = 1,\ r_2 = 0}$$

DA QUESTÃO ANTERIOR: $p_1 = 6$ E $q_1 = 0$

$$\Rightarrow r(r-1) + 6r + 0 = 0 \Rightarrow r^2 + 5r = 0 \Rightarrow \boxed{r_3 = -5}$$

(iii) O TEOREMA DE FROBENIUS GARANTE QUE, PARA A MAIOR RAIZ r DA EQUAÇÃO INDICIAL, EXISTE SOLUÇÃO NA FORMA $y = \sum_{k=0}^{\infty} c_k x^{k+r}$ ENTÃO

$$y' = \sum_{k=0}^{\infty} c_k (k+r) x^{k+r-1} \quad \text{E} \quad y'' = \sum_{k=0}^{\infty} c_k (k+r)(k+r-1) x^{k+r-2}.$$

SUBSTITUINDO NA EQUAÇÃO ORIGINAL:

$$x^2 \sum_{k=0}^{\infty} c_k (k+r)(k+r-1) x^{k+r-2} - x \sum_{k=0}^{\infty} c_k (k+r)(k+r-1) x^{k+r-2}$$
$$+ 6x^2 \sum_{k=0}^{\infty} c_k (k+r) x^{k+r-1} + 3 \sum_{k=0}^{\infty} c_k x^{k+r} = 0$$

$$\Rightarrow \sum_{k=0}^{\infty} c_k (k+r)(k+r-1) x^{k+r} - \overbrace{\sum_{k=0}^{\infty} c_k (k+r)(k+r-1) x^{k+r-1}}^{k = k+1}$$
$$+ \underbrace{\sum_{k=0}^{\infty} 6 c_k (k+r) x^{k+r+1}}_{k = k-1} + \sum_{k=0}^{\infty} 3 c_k x^{k+r} = 0$$

$$\Rightarrow \sum_{k=0}^{\infty} c_k (k+r)(k+r-1) x^{k+r} - \sum_{k=-1}^{\infty} c_{k+1} (k+r+1)(k+r) x^{k+r}$$
$$+ \sum_{k=1}^{\infty} 6 c_{k-1} (k+r-1) x^{k+r} + \sum_{k=0}^{\infty} 3 c_k x^{k+r} = 0$$

$$\Rightarrow c_0\, r\overset{0}{\cancel{(r-1)}}\, x^r - c_0\, r \overset{0}{\cancel{(r-1)}}\, x^{r-1} - c_1 (r+1) r x^r + 3 c_0 x^r$$
$$+ \sum_{k=1}^{\infty} \left(c_k (k+r)(k+r-1) - c_{k+1} (k+r+1)(k+r) + c_{k-1}(k+r-1) + 3 c_k \right) x^{k+r} = 0$$

ENTÃO, PELO PRINCÍPIO DE IDENTIDADE DAS SÉRIES:

$$\begin{cases} 3 c_0 x^r - 2 c_1 x^r = 0 \\ c_k (k+r)(k+r-1) \cdots + 3 c_k = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} c_1 = \frac{3}{2} c_0 \\ c_{k+1} = \ldots \end{cases}$$

$$C_{k+1} = \frac{C_k(k+r)(k+r-1) + C_{k-1}(k+r-1) + 3C_k}{(k+r+1)(k+r)} \qquad \text{PARA } k \geq 1$$

$$r = 1 \Rightarrow C_{k+1} = \frac{C_k(k+1)k + C_{k-1}k + 3C_k}{(k+2)(k+1)} \qquad \text{PARA } k \geq 1$$

$$k=1: \quad C_2 = \frac{C_1 \cdot 2 + C_0 \cdot 1 + 3C_1}{3 \cdot 2} = \frac{2\left(\frac{3}{2}\right)C_0 + C_0 + \frac{9}{2}C_0}{3 \cdot 2} = \frac{17}{12}C_0$$

$$k=2: \quad C_3 = \frac{C_2 \cdot 3 \cdot 2 + C_1 \cdot 2 + 3C_2}{4 \cdot 3} = \frac{9C_2 + 2C_1}{4 \cdot 3} = \frac{\left(9\left(\frac{17}{12}\right) + 2\left(\frac{3}{2}\right)\right)C_0}{4 \cdot 3}$$

$$= \frac{\left(3\left(\frac{17}{4}\right) + 3\right)C_0}{4 \cdot 3} = \frac{\frac{17}{4} + \frac{4}{4}}{4}C_0 = \frac{21}{16}C_0$$

$$k=3: \quad C_4 = \frac{C_3 \cdot 4 \cdot 3 + C_2 \cdot 3 + 3C_3}{5 \cdot 4} = \frac{C_3 4^2 + C_2 \cdot 3}{5 \cdot 4} = \frac{21C_0 + \frac{17}{4}C_0}{20}$$

$$= \frac{\frac{84}{4} + \frac{17}{4}}{20}C_0 = \frac{101}{80}C_0$$

ENTÃO OS 4 PRIMEIROS TERMOS NÃO-NULOS DA SOLUÇÃO SÃO:

$$\boxed{y(x) = C_0x + \frac{3}{2}C_0x^2 + \frac{17}{12}C_0x^3 + \frac{21}{16}C_0x^4 \ldots}$$

PARA $C_0 \neq 0$