

Projeto 01 - Dinâmica na Ionosfera

Equipe Donner

Diogo Silva, Guilherme Shimada, Leonardo Vieira, Lucca Miranda, Pedro Azevedo

30 de Agosto, 2021

Resumo

Este artigo apresenta uma discussão teórica a respeito do comportamento de partículas subatômicas carregadas da ionosfera. Para esse propósito, apresentaremos equações que modelam o ambiente em questão, a fim de melhor compreender a dinâmica dessas partículas quando as mesmas saem de uma situação de equilíbrio.

Palavras-chave: ionosfera, força elétrica, oscilações, equações diferenciais.

1 Introdução

Nesse artigo, discutiremos aspectos teóricos da dinâmica e da cinemática do plasma atmosférico. Esse estado da matéria é formado quando um gás é aquecido até que a energia de agitação molecular supere a energia de órbita dos elétrons. Esse processo é favorecido por pressões baixas, visto que assim ocorre menos perda de energia cinética dos elétrons devido a colisões. Por esse motivo, esse processo ocorre predominantemente nas camadas superiores da atmosfera terrestre (onde a pressão é mais baixa), mais especificamente região denominada ionosfera.

Considerando um sistema neutro formado por elétrons livres e íons positivos fixos, ambos com densidade volumétrica n_0 , usaremos as leis de Newton para discutir física e matematicamente as consequências de um deslocamento do equilíbrio de cargas ao longo do eixo x . Além disso, precisamos discutir os efeitos que possam causar resistência ao movimento dos elétrons livres.

Inicialmente, a pesquisa está focada em encontrar uma equação que descreva a movimentação dos elétrons em torno dos íons positivos, mais especificamente a força restauradora que “atrai” os elétrons para seu estado de equilíbrio. Ademais, os estudos também estão voltados para o encontro de um modelo simples que possa demonstrar efeitos resistivos dessa situação.

2 Metodologia

2.1 Densidade final de carga

Sabemos pelo enunciado que a densidade volumétrica inicial de elétrons é n_0 . Assumindo que a distribuição de elétrons é homogênea na direção horizontal, tomamos N pelo número de elétrons naquela região e A pela área perpendicular a Δx . Assim podemos expressar tal densidade como

$$n_0 = \frac{N}{A\Delta x}. \quad (1)$$

Quando ocorre o deslocamento de densidade para fora do equilíbrio na mesma direção de Δx , o A não muda. Então a densidade eletrônica final é

$$n_f = \frac{N}{A(\Delta x + \Delta s)}, \quad (2)$$

onde N/A é uma constante que pode ser isolada na equação 1 e substituída na equação 2, obtendo

$$n_f = \frac{n_0\Delta x}{\Delta x + \Delta s} = \frac{n_0}{1 + \frac{\Delta s}{\Delta x}}. \quad (3)$$

Como veremos na seção 2.2, uma força elétrica restauradora garante que as oscilações Δs são pequenas em comparação a Δx . Isso significa que $\Delta s/\Delta x \ll 1$,

então podemos usar a expansão de Taylor para aproximar a equação 3 para a mais conveniente

$$n_f \approx n_0(1 - \frac{\Delta s}{\Delta x}). \quad (4)$$

A partir dessa equação, de dimensão [“elétrons” m^{-3}], obtemos mudança de densidade de carga $\Delta\rho$, de dimensão $[C\ m^{-3}]$, multiplicando a primeira por um fator dimensional $[-q_e C\ \text{“elétrons”}^{-1}]$, onde q_e é a constante de carga elementar:

$$\Delta\rho = \Delta n \left[\frac{\text{elétrons}}{m^3} \right] \left[\frac{-q_e C}{\text{elétrons}} \right] \quad (5)$$

$$\Rightarrow \Delta\rho = -(n_f - n_0)q_e = (n_0 - n_f)q_e \quad (6)$$

$$\Rightarrow \Delta\rho = (n_0 - n_0(1 - \frac{\Delta s}{\Delta x}))q_e = \frac{n_0 q_e \Delta s}{\Delta x} \quad (7)$$

$$\Rightarrow \rho = \frac{dQ}{dV} = \frac{n_0 q_e ds}{dx}. \quad (8)$$

2.2 Força restauradora

A forma diferencial da equação 8 nos permite avaliar o fluxo de campo elétrico usando a Lei de Gauss, assim

$$\int \vec{E} \cdot d\vec{A} = \int \nabla \cdot \vec{E} dV = \int \frac{\rho}{\epsilon_0} dV \quad (9)$$

$$\Rightarrow \|\nabla \cdot \vec{E}\| = \frac{\rho}{\epsilon_0}. \quad (10)$$

Pela simetria do problema, sabemos que o campo elétrico resultante será nulo em todas as direções exceto a do eixo x, portanto:

$$\nabla \vec{E} = \left(\frac{\rho}{\epsilon_0}, 0, 0 \right) \quad (11)$$

$$\Rightarrow \frac{d\vec{E}}{dx} = \frac{\rho}{\epsilon_0} = \frac{n_0 q_e ds}{\epsilon_0 dx} \quad (12)$$

$$\Rightarrow \int \frac{d\vec{E}}{dx} dx = \int \frac{n_0 q_e ds}{\epsilon_0 dx} dx \quad (13)$$

$$\Rightarrow \int d\vec{E} = \int \frac{n_0 q_e ds}{\epsilon_0} \quad (14)$$

$$\Rightarrow \vec{E} = \frac{n_0 q_e s}{\epsilon_0} + K. \quad (15)$$

O campo elétrico é nulo quando $s = 0$, então $K = 0$. Sabendo disso, usamos a 1ª Lei de Coulomb para avaliar a força elétrica como

$$F_{el} = q_e E = q_e \frac{n_0 q_e s}{\epsilon_0} = \frac{n_0 q_e^2 s}{\epsilon_0}, \quad (16)$$

sendo essa a força restauradora que faz o sistema retornar ao estado de equilíbrio inicial.

2.3 Oscilação Livre

Como a força elétrica é a única força atuando sobre o sistema, ela é a resultante. O enunciado nos permitiu assumir que a dinâmica dos elétrons pode ser modelada pela mecânica newtoniana (o que não é exatamente verdade, considerando que alguns comportamentos bizarros dos elétrons só podem ser propriamente modelados pela mecânica quântica), então pela segunda Lei de Newton temos

$$F_{el} = m_e \frac{d^2 s}{dt^2} = \frac{n_0 q_e^2 s}{\epsilon_0}. \quad (17)$$

Observe que segunda derivada de s equivale a s multiplicada por uma constante. Isso significa que a solução para essa equação é da forma $\cos(\omega x)$, onde ω é a frequência angular da oscilação harmônica estabelecida pelos elétrons. Percebendo isso, conseguimos resolver a equação 17 e isolar a frequência angular como

$$\omega = \frac{n_0 q_e^2}{\epsilon_0 m_e}. \quad (18)$$

Essa é a solução pro caso mais simples, isto é, sem amortecimento. Para o caso amortecido, veremos a solução adiante.

2.4 Oscilação Amortecida

Para o caso da oscilação amortecida, vamos modelar a força de amortecimento F_{am} como proporcional a velocidade e com sinal negativo para indicar que ela tem sentido contrário ao movimento:

$$F_{am} = -b \frac{dx}{dt}, \quad (19)$$

então a resultante, que é a soma vetorial da força de amortecimento e da força elétrica, equivale a

$$R = -b \frac{dx}{dt} - \frac{n_0 q_e^2 s}{\epsilon_0}. \quad (20)$$

Aplicando a segunda Lei de Newton a 20 obtemos

$$-b \frac{dx}{dt} - \frac{n_0 q_e^2 s}{\varepsilon_0} = m_e \frac{d^2 x}{dt^2} \quad (21)$$

$$\Rightarrow b \frac{dx}{dt} + \frac{n_0 q_e^2 s}{\varepsilon_0} + m_e \frac{d^2 x}{dt^2} = 0, \quad (22)$$

a qual pode ser reescrita em termos de frequência angular e usando $\gamma = b/m_e$ como coeficiente de amortecimento:

$$\frac{d^2 x}{dt^2} + \gamma \frac{dx}{dt} + \omega^2 s = 0, \quad (23)$$

$$\Rightarrow \omega = \sqrt{\frac{n_0 q_e^2}{\varepsilon_0 m_e}}. \quad (24)$$

Por fim, utilizamos a expressão de frequência angular para obter como equação horária de posição dos elétrons

$$x(t) = A q_e^{-\frac{\gamma t}{2}} \cos(\omega t + \phi). \quad (25)$$

Isso encerra o desenvolvimento de nossos métodos matemáticos de investigação.

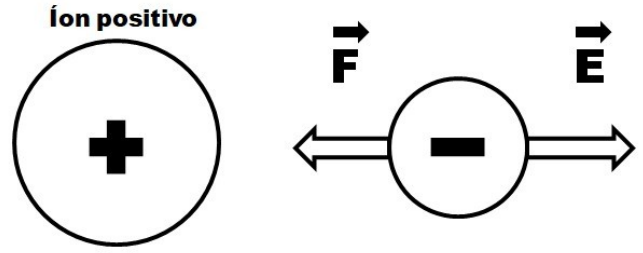
3 Resultados e Discussão

Em primeira análise, o sistema proposto era de uma região com densidade de elétrons e íons iguais a n_0 , haja vista que o sistema estava em equilíbrio eletrostático. No entanto, devido a uma perturbação no sistema, os elétrons são deslocados uma distância s ao longo do eixo x , assim aumentando o volume disponível e diminuindo a densidade do novo sistema, como pode ser visto na equação 4.

Ademais, em razão desse deslocamento, existe um efeito sentido pelos elétrons: este efeito está relacionado a uma força atrativa que ocorre naturalmente entre uma carga positiva e uma carga negativa, sendo esta calculada pela fórmula da Lei de Coulomb. É válido ressaltar que esse efeito que os elétrons sofrem está relacionado com o campo elétrico \vec{E} gerado pelos íons (vide figura 1), haja vista que, após o deslocamento, surge uma distância entre as partículas que propicia esse fenômeno. Tal efeito foi calculado através de uma equação diferencial 15.

Analisando mais especificamente esse movimento, quando o elétron é deslocado e, em seguida, forçado a retornar a sua posição de origem, ele ganha uma certa energia cinética e, em virtude disso, acaba ultrapassando a posição de origem. Essa dinâmica é realizada consecutivas vezes, fazendo com

Figura 1 – Força e campo elétrico no elétron



Fonte: Autoral

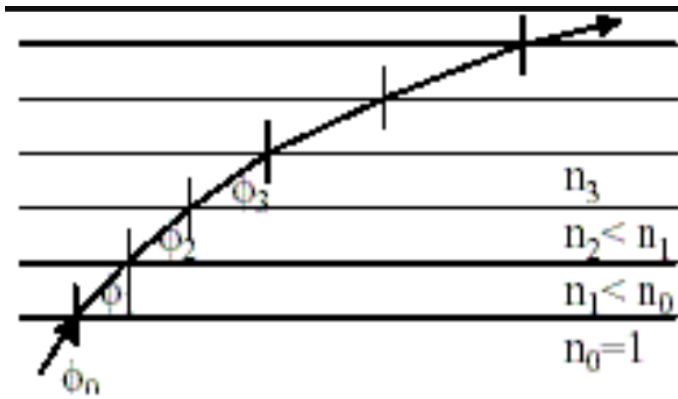
que esse movimento se assemelhe a um movimento harmônico, ou seja, é aquele em que um corpo oscila em torno de uma posição de equilíbrio em razão de uma força restauradora (equação 16). Em primeiro momento, é de se admitir que o sistema é conservativo, logo o elétron terá comportamento análogo a um pêndulo simples ou uma mola. Esta última, por sua vez, tem sua força restauradora originada pela pressão do gás, enquanto o objeto desse estudo (elétrons no plasma) tem por força restauradora as forças eletrônicas.

Após o equacionamento da força restauradora e de seu desenvolvimento é possível encontrar a frequência natural do plasma e sua equação horária. Dentre desses resultados, pode-se inferir que a oscilação de elétrons ocorre tanto na ionosfera quanto em metais a alta temperatura (a ser determinada pela equação de Saha-Langmuir (DRESSER, 1968)). No caso dos metais, o fenômeno de "mar de elétrons" permite certa mobilidade a essas partículas carregadas, facilitando o processo de ionização térmica para esse tipo de material.

Dentro desse contexto, a ionosfera sofre esse fenômeno devido aos raios ultravioleta do Sol, os quais arrancam elétrons livres das moléculas de ar e produzem elétrons livres e íons positivos. Um dos efeitos que tal situação proporciona à ionosfera é que apenas ondas com frequências maiores que a do plasma conseguem atravessar a camada atmosférica, por exemplo as ondas via satélite que são lançadas ao espaço. Outro ponto a se ressaltar é que as comunicações via rádio também são influenciadas por essa frequência natural do plasma contida na ionosfera, pois é possível que as ondas de rádio (cuja frequência é mais baixa) sejam refletidas pela ionosfera e assim ampliem seu alcance.

Nessa perspectiva, o índice de refração vai diminuindo com a altura, com camadas paralelas de densidade semelhantes, de acordo com a Lei de Snell, um incidente procedente da Terra, se curvará até atingir uma trajetória horizontal.

Figura 2 – Refrações sucessivas



Fonte: Wiki do IFSC¹

Observe, na imagem acima, que a um raio oblíquo que passa por sucessivas refrações eventualmente atinge o ângulo limite. Nessa situação, ocorre o fenômeno de reflexão total.

Em relação aos metais, existe uma densidade n_o muito grande de partículas e, consequentemente, uma frequência natural muito elevada também. Ainda assim, há uma possibilidade de “ver” as oscilações dos elétrons. Conforme a mecânica quântica, uma frequência harmônica natural ω_p , possui níveis de energia divididos por incrementos de energia $\hbar\omega_p$. Logo, se atirmos alguns elétrons através de uma folha de alumínio, quando olharmos para os mesmos após a penetração e calcularmos os níveis de energia, será possível perceber que os elétrons terão perdido uma energia $\hbar\omega_p$ para as oscilações dos plasmas dos metais.

Além dos resultados obtidos, é possível ainda descrever um sistema no qual as oscilações harmônicas não são conservativas. Isso ocorre quando existe uma perda de energia gerada por atrito e por colisões entre os elétrons, que levam a dissipação de energia cinética em forma de calor. Nesse caso, podemos modelar a força resistiva como diretamente proporcional a velocidade, como visto na equação 19. Utilizando esse modelo, fomos capazes de calcular a frequência natural desse sistema amortecido.

4 Conclusão

Após nossa análise, concluímos que método de modelagem matemática escolhido permitiu significativo avanço na representação analítica da situação física estudada. Essa representação, por sua vez, possibilitou melhor compreensão do comportamento do sistema físico, tanto do ponto de vista da dinâmica quanto da cinemática.

¹ Disponível em <https://wiki.sj.ifsc.edu.br/wiki/images/3/36/4_0IFSC_Engenharia_ANT_2016_1.pdf>.

Acesso em: 7 jun. 2021

Referências

DRESSER, M. J. The saha langmuir equation and its application. *Journal of Applied Physics*, v. 39, n. 1, p. 338–339, 1968. Citado na página [3](#).

FEYNMAN, R. P.; LEIGHTON, R. B.; SANDS, M. L. *The Feynman lectures on physics: the definitive and extended edition*. [S.l.]: Addison-Wesley, 2009. Nenhuma citação no texto.

HALLIDAY, D.; RESNICK, R.; WALKER, J. *Haliday and Resnick Fundamentals of Physics Volume III*. [S.l.]: John Wiley and Sons, 2008. Nenhuma citação no texto.

MAZUR, E. et al. *Principles and practice of physics: global edition*. [S.l.]: Pearson Education Limited, 2016. Nenhuma citação no texto.