UNICAMP -

**Wilson Castro Ferreira Jr.-II Sem 2021**

# Notas de *ÁLGEBRA LINEAR-*

# CAPITULO VI:

# MATRIZES- *A Ação em Espaços Cartesianos*

## I-INTRODUÇÃO

Definições matemáticas, a rigor, não exigem justificativas ou referências "concretas" exteriores à Matemática, a única condição indispensável que as acompanha é uma consistência lógica entre suas informações e afirmações, ou, no jargão matemático, que sejam "***Boas Definições***". Baseado neste fato, muitos textos se bastam com esta condição.

Entretanto, a Matemática é inventada e operada por seres humanos cujo sistema cognitivo consiste de modelos mentais interconectados por analogias e a apreensão de qualquer novo conhecimento por este sistema exige sua integração nesta rede previamente estabelecida. Para tanto é necessária uma argumentação de convencimento e de persuasão, e eventualmente de dedução, que faz uso de fatos familiares e analogias, às vezes completamente alheios ao cenário matemático, mas indispensáveis para a introdução de conceitos e definições matemáticas abstratas e formais. (D.Hofstadter-E.Sander-*Surfaces and Essences*: *Analogy as the Fuel and Fire of Thinking*, Basic 2013).

O termo "aquisição de conhecimento" tem o sentido de uma incorporação sistêmica de novos vértice e conexões em uma rede redundante de modelos mentais em contraste com a aquisição de um virtuosismo operacional "pavloviano" com respeito a regras formais, o que é muito comumente associado ao mesmo termo na "pedagogia" contemporânea.(Infelizmente associado à educação no BrasiL; R.Feynman-*Surely you are joking Mr. Feynman*, V.I.Arnold- artigo "Sobre o ensino brasileiro de Matematica").

O objetivo desta seção inicial é apresentar o conceito de Matrizes sob várias perspectivas que permitam estabelecer conexões com idéias distintas e sirvam de nós de integração ao conhecimento do tema.

A operação de Soma entre Matrizes é um exemplo particular da operação similar para conjuntos de funções com valores numéricos, $M_{mn}(\mathbb{R}) = \{A: I_m \times I_n \to \mathbb{R}\,; A(i,j) = A_{ij}\}$, e parece tão natural que não exige qualquer justificação adicional, pois está imersa em um universo muito maior, familiar e comprovadamente importante na Matemática. Prosseguindo na mesma linha argumentativa a operação de produto entre matrizes deveria seguir um padrão semelhante o que resultaria no chamado produto de Kronecker-Hadamard definido naturalmente, ponto a ponto, isto é,

$(AB)_{ij} = A_{ij}B_{ij}$ *)*. Entretanto, apesar da eminência dos matemáticos mencionados, da simplicidade desejável deste produto, e sua conexão imediata, a operação resultante teve, até agora, pouca relevância e utilidade na teoria de matrizes.

Por outro lado, a operação produto entre matrizes que se mostrou historicamente mais importante e útil em Matemática segue uma formulação algébrica aparentemente arbitrária quando desconectada de qualquer argumentação de suporte à sua definição formal. O procedimento muitas vezes empregado para a sua definição não é persuasiva, mas impositiva e vem na forma de uma admoestação *consequencialista* em linha com a conhecida "*pedagogia de d'Alembert/Feynman*": ("*Vamos em frente pessoal, calem a boca e calculem sem cessar até que, algum dia, a familiaridade imposta e os resultados talvez lhes convençam de que estão no caminho certo. Se não, pelo menos, terão exercitado seus músculos mentais e se conformado com gente melhor do que vocês*". (d'Alembert se referia ao Cálculo no século XVIII e Feynman à Teoria Quântica em meados do século XX, mas a aritmética e a Matemática em geral tem sido ensinada, e "*aprendida"*, com a utilização desta metodologia desde sempre. O conformismo predominante neste procedimento, em geral, põe uma pedra sobre qualquer questionamento a respeito do assunto! (Ref. -WCFJr-*O Silêncio dos Conformistas*, Conf. 2020).

Há, todavia, motivações suficientemente fortes e simples que sugerem, ou praticamente impõe, a consideração da operação de produto matricial tal como ela é usualmente definida; não mencioná-las seria um desperdício injustificável de material auxiliar intuitivo que é sempre necessário para o aprendizado nesta área.

# II- A*s Múltiplas Origens Matemáticas das Matrizes e suas Operações*

A apresentação mais comum das matrizes em livros textos antigos, e ainda hoje, se dá na forma de um ***objeto gráfico*** que tem a sua origem em Tabelas numéricas utilizadas desde a antiguidade (por exemplo, John Graunt- *Bills of Mortality* London, 1662) meramente informativas sem qualquer Estrutura Algébrica natural adjacente. As matrizes somente ganharam o status de ***objetos matemáticos*** com direito a um lugar orgânico na Matemática muito recentemente (final do século XIX) e, na verdade, foi necessário esperar pelo inicio do século XX para assumirem um papel de importância e notoriedade no corpo de conhecimentos da Matemática e nas ementas de ensino superior.(Referências: A.Cayley, Courant-Hilbert volI 1928, Emmy Noether- B.van der Waerden- W.Heinsenberg&M. Born, Jean-Luc Dorier)

Após a metade do século XX, as grades e ementas dos cursos universitários, pouco a pouco, passaram a incluir, de uma forma ou de outra, as Matrizes, e até a Álgebra Linear mais abstrata e mais geral como tema fundamental de ensino nas áreas de Matemática, Física, Engenharias, Computação Científica, Economia e até Psicologia. Contemporaneamente, as Matrizes são objetos matemáticos de uso disseminado e indispensável nas mais variadas aplicações da Matemática e de tal forma fundamentais que o Cálculo numérico com Matrizes domina amplamente o tempo de Computação das grandes redes o que exige um contínuo aperfeiçoamento de algoritmos e idéias nesta área. (Ref. Artigo Quanta 2020).

Na seção seguinte abordaremos algumas das fontes provenientes da Matemática e exteriores a ela que desempenharam um papel importante na introdução do conceito de Matrizes como um objeto matemático dotado de "*personalidade*" Estrutural.

## *- Matrizes: A matematização de um objeto meramente descritivo*

A ocorrência mais antiga e principal das Matrizes como símbolos em Matemática, que ainda hoje é estranhamente apresentada como sendo a *mais autêntica* ou *a única*, é na forma de uma Tabela que teria o papel de mero *arquivo de* **Coeficientes** numéricos das Variáveis de um Sistema de Equações em Primeiro grau (Ahmés, Arquimedes, Baskhara, Gauss e etc.). Neste papel simplesmente descritivo, uma matriz não é objeto matemático, visto que não faz parte de nenhuma estrutura.

A matematização das tabelas de coeficientes de sistemas de Equações de primeiro grau se inicia com a álgebra literal de F.Viéte e R.Descartes sec. XVII com a qual é definida o conceito de "***Proporcionalidade***" entre *variáveis independentes* (dados de entrada ) e *variáveis dependentes* (saídas). No caso de uma variável a relação de proporção (i.e., a popular "*regra de três*")é simplesmente da forma $y = Cx$,sendo $C$ o coeficiente numérico fixo de proporção. Entretanto, se a "*dependencia*" da variável $y$ for relacionada a duas "*variáveis independentes*", ela toma a forma de uma ***Superposição*** das relações isoladas de proporção , $y = C_1x_1 + C_2x_2$ . E daí por diante, se mais "*variáveis dependentes*" $y_k$ são simultaneamente registradas, escreve-se na forma indexada apropriada: $y_j = C_1^j x_1 + C_2^j x_2$ . Ou seja, esta classe de relações exibe sempre duas características operacionais que as fundamentam no caso geral: A relação é sempre de ***Proporcionalidade*** quando restrita à uma variável, e de **Superposição** ( ou de não- interferência) quando resultar de uma *composição* "misturas"entre várias variáveis. (A interferência certamente entre as influencias de duas variáveis se a relação algébrica contivesse termos da forma de produtos $x_1x_2$).

Contemporaneamente, as variáveis são representadas por um único símbolo vetorial que as sub-entende e a relação entre variáveis é descrita pela sintética nomenclatura de "Funções"; $y = f(x)$.

Equações de "Primeiro Grau" significam, algebricamente, que todas as variáveis "*independentes" $x_k$* comparecem na expressão apenas em primeiro grau de potencia, *sem produtos* entre elas e *sem termos constantes*, de tal maneira que para $m$ equações $1 \leq j \leq m$ de ***primeiro grau*** em $n$ variáveis $\{x_k\}_{1\leq k\leq n}$ , pode ser escrito escrito na forma $y_j = \sum_{k=1}^{n} A_{jk}x_k = b_j$. A "*personalidade matemática*" das Tabelas numéricas $\{A_{jk}\}_{1\leq j\leq m}^{1\leq k\leq n}$ começa a ganhar forma no momento em que elas são associadas ao conceito de funções na forma $A: I_n \times I_m \to \mathbb{R}$ ; $A(i,j) = A_{ij}$ o que imediatamente lhes confere a *"cidadania"* de um Espaço Vetorial funcional real (com soma definida ponto a ponto) $\mathcal{F}(I_n \times I_m; \mathbb{R})$ . (Analogamente, para coeficientes complexos).

Entretanto, o "*status matemático*" das matrizes adquire uma situação mandatória mais rica e definitiva, e não apenas conveniente, com a verificação da regra para o cálculo dos novos coeficientes do Sistema de Equações transformado segundo uma "*mudança de variáveis".* A *mudança de variáveis é* uma das manobras algébricas mais úteis e comuns na resolução destas equações, especialmente quando ela ocorre na forma mais "*simples*" possível, isto é, com operações de proporcionalidade. Neste caso, as variáveis originais do sistema, $\{x_k\}_{1\leq k\leq n}$ são substituídas por novas $n$ variáveis $\{y_s\}_{1\leq s\leq n}$ segundo uma transformação **também** de ***primeiro grau*** , ou seja, na forma $x_k = \sum_{j=1}^{n} B_{ks}y_s$ . Substituindo estas expressões , obtemos um novo sistema de $m$ equações de ***primeiro grau*** nas variáveis $\{y_k\}_{1\leq k\leq n}$ descrito na forma extensiva como $\sum_{s=1}^{n} C_{js}y_s = b_j$ em que os coeficientes ${C_{js}}_{1\leq j\leq n}^{1\leq s\leq n}$ são obtidos segundo a seguinte regra de cálculo obtida da manipulação indicada: $C_{js} = \sum_{k=1}^{n} A_{jk}\, B_{ks}$ . A "matematização" da tabela de coeficientes decorre da possibilidade de definir uma operação, denominada ***produto***, que tem um significado "prático", pois permite determinar *operacionalmente* e intrinsecamente a "nova tabela" de coeficientes $\{C_{js}\}$ como resultado da substituição de primeiro grau de um sistema de funções de primeiro grau por outro. Em suma, esta é uma operação intrínseca entre as Tabelas de Coeficientes sem necessidade de se referir às variáveis envolvidas. A verificação de propriedades *operacionais* semelhantes (ainda que distintas) das operações de Soma e Produtos numéricos entre estas Tabelas sugere fortemente a definição de uma Estrutura algébrica no conjunto de Matrizes $M_{nn}(\mathbb{R})$; ou seja, um **Espaço Vetorial** em que está também definida uma operação **Produto**. Assim, a notação algébrica sintética e operacional para a representação do sistema original de equações de primeiro grau toma a forma $Ax = b$ e, se $x = By$ for a transformação linear entre variáveis o sistema resultante toma a forma $Cy = b$ onde $C = AB$ denota o *produto* (intrínseco) da esquerda para a direita ( "*mudança de variável de* $y$ *para* $x$" ) entre matrizes.

É interessante observar que a própria mudança de variáveis, e assim o próprio sistema linear, podem ser definidos por intermédio de uma operação *análoga* de produto matricial considerando agora a Tabela de Coeficientes $b$ como uma Matriz $M_{n1}(\mathbb{R})$ assim como as variáveis $x, y \in M_{n1}(\mathbb{R})$ . Analogamente a mudança de sistema de variáveis com números distintos de termos pode ser igualmente definida como produto de matrizes, sempre respeitando o fato (de origem ) que para a mudança de um sistema de $p$ variáveis $\{y_k\}_{1\le k\le p}$ para um sistema de $n$ variáveis $\{x_k\}_{1\le k\le n}$ será necessária uma "Tabela" $\{C_{js}\}_{1\le s\le p}^{1\le j\le n}$ , que será denotada na forma de uma matriz $M_{np}(\mathbb{R})$.

Vários outros exemplos igualmente antigos e já apresentados anteriormente, demonstram a ubiqüidade das Matrizes como Tabelas de coeficientes numéricos que representam *relações de proporção*, especialmente na descrição de ***Dinâmicas*** Recursivas e Diferenciais dos seus Estados de configuração. ( Nos modelos Newtonianos determinísticos estes Estados são representados em um Espaço Vetorial Cartesiano $\mathbb{R}^m$ . V. Modelo Massa-Mola. As **Dinâmicas probabilísticas de Markov** se passam em um Estado representado por ***funções densidade de probabilidade*** definidas em um Estado Newtoniano que são atualizadas (discreta ou continuamente) por um Operador linear. V. Modelo de Movimento (Caminho) Aleatório).

A notação matricial e suas respectivas Álgebras têm a grande vantagem de organizar as diversas idéias em uma síntese operacional com significado intrínseco. Este procedimento amplia consideravelmente o seu alcance e efetividade. Por exemplo, na descrição de sistemas lineares evita-se uma repetição exaustiva e desnecessária de variáveis, permitindo que os métodos sejam representados e aplicados operacionalmente com maior desenvoltura se referindo apenas às matrizes, ***desde que*** as regras formais sejam conhecidas.

Enfim, o produto matricial tem uma de suas origens mais fundamentais e importantes no procedimento de substituição de relações algébricas de primeiro grau e não de uma "revelação" *extraterreste* ou de uma imposição sem justificativas, como transparece ser em alguns textos. As propriedades operacionais que regulam a Estrutura de Álgebra a ser definida pelo produto no Espaço Vetorial Real $M_{nn}(\mathbb{R})$, (e, analogamente no Espaço Complexo $M_{nn}(\mathbb{C})$ ) constituirão o tema fundamental da teoria de Matrizes como uma representação "concreta" das Estruturas abstratas da Álgebra linear.

O desenvolvimento da Álgebra abstrata como ela é hoje apresentada, é resultado, em grande parte, do trabalho da matemática Emmy Noether (1882-1935)e de sua escola em Göttingen no início do século XX e deve muito à concepção das Matrizes como objetos matemáticos.

## III- AS MÚLTIPLAS FACES DA MATEMATIZAÇÃO do Conceito de MATRIZES

Os fundamentos da Matemática contemporânea estão firmados em uma trindade cujos elementos são mutuamente dependentes entre si: ***Teoria de Conjuntos***, ***Números Naturais*** e ***Funções***. É impossível tratar de um deles sem mencionar os outros dois e não há precedentes a partir do qual eles possam ser definidos.

Sendo assim, um conceito ou método matemático deve estar fundamentado, direta ou indiretamente, nestes três vértices para que ele seja rigorosamente acrescentado ao corpo da Matemática.(A começar dos próprios conceitos de números $\mathbb{Z}, \mathbb{Q}, \mathbb{R}, \mathbb{C}$ de todo o Cálculo e de Espaços Cartesianos, $\mathbb{R}^n = \{v: I_n \to \mathbb{R}\}, \mathbb{C}^n = \{v: I_n \to \mathbb{C}\}$ que são progressivamente construídos a partir do fundamento triuno).

O mesmo, portanto, deve ocorrer com as Matrizes e as seções seguintes tratarão deste tema, notando-se que cada maneira de interpretá-las introduz um distinto ponto de vista que, em muitos casos, leva à obtenção natural de resultados importantes para a sua teoria. Isto significa que a mudança de abordagem e a apresentação de novas definições não são meras roupagens para um mesmo objeto, mas uma forma de expor de maneira mais clara algumas de suas facetas relevantes.

## IIIa- MATRIZES como FUNÇÕES NUMÉRICAS:

A porta de entrada mais simples e natural para que as matrizes sejam definidas como (i.e., "*alçadas a* ") objetos matemáticos se dá pela sua interpretação/representação como funções numéricas : $M_{mn}(\mathbb{R}) = \{A: I_m \times I_n \to \mathbb{R}\,;\ A(i,j) = A_{ij}\}$ . Um dos dividendos imediatos desta interpretação é a conclusão natural de que o conjunto $M_{mn}(\mathbb{R})$ pode ser automaticamente dotado de uma Estrutura de Espaço Vetorial com as operações de Soma e Multiplicação por escalar definidas ponto a ponto. Esta interpretação já traz uma grande vantagem sob o ponto de vista operacional, pois permite a formalização sintética de vários procedimentos utilizados na resolução do problema principal relacionado às Matrizes, ou seja, as Funções de primeira ordem e suas equações. Entretanto, como já observamos, a operação produto pontual sugerida por esta representação não é tão útil; o produto usual entre matrizes terá origem na sua identificação bijetiva com a Álgebra de funções $\mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)$ dotada com produto " composição" que, na verdade, é o próprio procedimento de substtuição de variáveis quando interpretado em termos literais.

## IIIb-MATRIZES como Representantes de Transformações Lineares:

$M_{mn}(\mathbb{R}) \approx \mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m) \approx \mathcal{L}(E, F)$ $(\dim E = n\,, \dim F = m)$.

Se nos termos da antiga álgebra literal as matrizes $M_{mn}(\mathbb{R})$ são representantes de $m$ funções de primeiro grau em $n$ variáveis independentes, por outro lado, nos termos mais contemporâneos da Álgebra Linear esta mesma classe de funções algébricas é identificada com as funções lineares entre Espaços Vetoriais Cartesianos ($A: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ ) e, portanto pertencentes ao Espaço Vetorial $\mathcal{L}(\mathbb{R}^n\ , \mathbb{R}^m\ )$.

De acordo com o Teorema de Representação Numérica do capitulo anterior, existe um isomorfismo linear entre o Espaço Vetorial Matrizes $M_{mn}(\mathbb{R})$ e qualquer $\mathcal{L}(E, F)$ $(\dim E = n\,, \dim F = m)$, incluindo, claro, quando $E = \mathbb{R}^n, F = \mathbb{R}^m$ ).

Estes isomorfismos lineares são especificados a partir da escolha de duas bases respectivas $\{\alpha_k\}_{1\le k\le n} \subset E$ e $\{\beta_j\}_{1\le j\le m} \subset F$ . Em seguida, considerando a representação (biunivoca) dos vetores de $v = \sum_{k=1}^{n} x_k \alpha_k \in E$ na base $\alpha \subset E$ por suas coordenadas $x \in \mathbb{R}^n$ , obtém as coordenadas $y \in \mathbb{R}^m$ do vetor transformado $Tv = \sum_{j=1}^{m} y_j \beta_j \in F$ representado (também biunivocamente) segundo a base $\beta \subset F$. Ou seja, se $T\alpha_j = \sum_{j=1}^{m} A_{jk}\beta_j$ (observe a ordem dos índices de somatória), então $Tv = T(\sum_{k=1}^{n} x_k\, \alpha_k) = (\sum_{k=1}^{n} x_k\, T\alpha_k) = \left(\sum_{k=1}^{n} x_k \left(\sum_{j=1}^{m} A_{jk}\beta_j\right)\right) = \sum_{j=1}^{m}\left(\sum_{k=1}^{n} A_{jk}x_k\right)\beta_j = \sum_{j=1}^{m} y_j\beta_j$ obtém a matriz de coeficientes $A = \{A_{ij}\} \in M_{mn}(\mathbb{R})$ que será denotada por $A = T_{[\alpha\beta]}$ .

Assim, é estabelecida uma associação biunívoca entre um elemento $T \in \mathcal{L}(E, F)$ e sua correspondente matriz $A = T_{[\alpha\beta]} \in M_{mn}(\mathbb{R})$. É claro que esta mesma matriz pode também ser interpretada como um elemento de $\mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)$. O Teorema de Representação garante então que esta associação $\mathcal{L}(E, F) \underset{[\alpha\beta]}{\leftrightarrow} M_{mn}(\mathbb{R}) \approx \mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)$ é um ***isomorfismo linear*** entre ***Espaços Vetoriais***.

Entretanto, interessa-nos aqui a extensão deste resultado que inclui também a preservação da operação de composição entre Transformações lineares $E \underset{T}{\longrightarrow} F \underset{S}{\longrightarrow} G$ , $S \circ T: E \to G$ de tal forma que se $\{\gamma_j\}_{1\le j\le p} \subset G$ for uma base , então $(S \circ T)_{[\alpha\gamma]} = S_{[\beta\gamma]} \cdot T_{[\alpha\beta]}$ em que o símbolo operacional " $\cdot$ " representa o correspondente produto matricial entre matrizes de $M_{mn}(\mathbb{R})$ e matrizes de $M_{np}(\mathbb{R})$.

(Observe-se que a ordem das composições é inversa à ordem das setas e bases).

Considerando agora $E = F = G$ a associação acima estende o isomorfismo linear a um isomorfismo de Álgebras $\mathcal{L}(E) \underset{[\alpha\beta]}{\leftrightarrow} M_{nn}(\mathbb{R}) \approx \mathcal{L}(\mathbb{R}^n)$ que preserva as ***TRÊS*** operações que definem esta Estrutura (Soma, Multiplicação por Escalar e Produto).

Este procedimento dota as Matrizes de uma operação produto que correspondente isomorficamente à operação composição de transformações lineares respectivas.

**Exercicio:**

-Mostre que a função $\mathcal{L}(E,F) \underset{[\alpha\beta]}{\leftrightarrow} M_{mn}(\mathbb{R})$ definida pela correspondência $T \leftrightarrow T_{[\alpha\beta]}$ tal como apresentada acima (em dependência da escolha das respectivas bases $\alpha \subset E, \beta \subset F$ ) é bem definida e um isomorfismo linear.

-Mostre que se $E = F$ e escolhendo a mesma base $\alpha = \beta$ denotando $T_{[\alpha\beta]} = T_{[\alpha]}$ obtemos um isomorfismo de Álgebras entre $\mathcal{L}(E) \underset{[\alpha]}{\leftrightarrow} M_{nn}(\mathbb{R})$

Portanto, o isomorfismo linear entre os espaços vetoriais $T_{[\alpha]} \in M_{nn}(\mathbb{R}) \overset{\alpha}{\leftrightarrow} T \in \mathcal{L}(E)$ pode ser representado por diversas funções dependendo da base $\alpha \in E$ utilizada para definir as coordenadas dos vetores em $E$.

Consideremos agora uma outra base $\beta \subset E$ e a transformação identidade $i: E \to E$ representada pela matriz $i_{[\alpha\beta]} = R$ . Observe que $\left(i_{[\alpha\beta]}\right)^{-1} = i_{[\beta\alpha]}$. Isto significa que a matriz $i_{[\alpha\beta]}$ é que transforma coordenadas de vetores representados na base $\alpha$ para o ***mesmo*** vetor representado na base $\beta$ e, portanto, a composição $T_{[\beta]} = (i \circ T \circ i)_{[\beta\beta]} = R^{-1}T_{[\alpha]}R$ é a representação da transformação do operador linear $T$ na base $\beta$ , em que $R \in GL_n$, ou seja , é inversível. Na verdade, esta é apenas uma formalização contemporânea pedante, mas útil, do procedimento clássico de mudança de variáveis apresentado mais acima e restrito a funções de primeiro grau.

Exercícios:

-*Verifique as afirmações acima*. O acompanhamento dos índices é tedioso, mas é essencial e deve ser feito com cuidado alguma vez na vida!

**DEFINIÇÃO: *Relação de Semelhança*** entre Matrizes de $M_{nn}(\mathbb{R})$ .

-Duas Matrizes $A, B \in M_{nn}(\mathbb{R})$ são ditas ***Semelhantes***, se existir uma matriz $R \in GL_n(\mathbb{R})$ tal que $A = R^{-1}BR$.

-Se as matrizes $G \in GL_n(\mathbb{R})$ que realizam a transformação de semelhança $A = G^{-1}BG$ estão restritas a um subgrupo de matrizes $\mathcal{G} \subset GL_n(\mathbb{R})$ então diz-se que a relação $A \underset{\mathcal{G}}{\approx} B$ definida pela condição $\exists G \in \mathcal{G}$ ; $A = G^{-1}BG$ , é uma relação é de ***$\mathcal{G}$-Semelhança.***

-O exemplo mais importante desta restrição é definida pelo Sub-grupo de matrizes Ortogonais, em que $\mathcal{G} = \{O \in GL_n ; O^T = O^{-1}\}$.

**Observações:**

- $GL_n(\mathbb{R})$ é o subconjunto de $M_{nn}(\mathbb{R})$ que constitui o Grupo de todas as Matrizes inversiveis de ordem $n$ , i.e., o *Grupo Linear de ordem $n$*.

**Exercícios:**

-Mostre que a relação de Semelhança é, de fato, uma Relação de Equivalência que separa as Matrizes $M_{nn}(\mathbb{R})$ e que as classes de equivalência são constituídas por representantes de uma mesma Transformação linear ainda que em bases distintas. Ressalte que a estrutura de grupo de $GL_n(\mathbb{R})$ é a condição básica para que esta seja uma relação de equivalência

A representação Matricial de Propriedades geométricas está intimamente relacionada à descrição cartesiana do espaço Euclideano por intermédio de coordenadas ortogonais. Portanto, uma propriedade geométrica de uma transformação linear é, geometricamente bem definida, pela sua representação matricial somente se ela for invariante com respeito à transformação de semelhança que envolva mudança de coordenadas entre bases ortonormais. Por esta razão, as matrizes que realizam transformações de coordenadas entre bases ortonormais são especialmente importantes e denominadas "Ortogonais" . Intrinsecamente as matrizes Ortogonais são caracterizadas por terem suas colunas formadas por vetores ortonormais, ou, operacionalmente pela igualdade $O^T = O^{-1}$ . Estas e outras propriedades deste importante grupo de Matrizes serão abordadas mais adiante. Por enquanto, registraremos o apenas o conceito restrito de Semelhança Ortogonal.

(O matematico Felix Klein em uma famosa conferencia em Erlangen em 1872 sintetizou a Geometria e estabeleceu um programa para seu desenvolvimento futuro, que ainda vigora, caracterizando-a como o estudo de propriedades que permanecem invariantes com determinados grupos de transformações. Sob esta perspectiva, a Geometria Euclideana consiste no estudo das propriedades do espaço que são invariantes com as transformações ortogonais.Ref. Jerome Gray, J.J.Stillwell).

**Exercícios**:

-Obtenha a representação matricial $i_{[\alpha\beta]}$ para a função identidade no Espaço Vetorial $i: P_n(\mathbb{R} \to P_n(\mathbb{R}))$ em que as bases são a canônica e $\{x^k\} = \alpha$ e $\beta = \{1, x, x(x-1), x(x-1)(x-2)..\}$ para $n = 4$ e, vice-versa, $i_{[\beta\alpha]}$ .

-Obtenha a representação Matricial da Operação linear $L = (D^2 - 2xD + 1) \in \mathcal{L}(P_{n+2}(\mathbb{R}), P_n(\mathbb{R}))$ nas bases $\{x^k\} = \alpha$ e $\beta = \{1, x, x(x-1), x(x-1)(x-2)..\}$ para $n = 4$. (Utilize diversas opções para a base de domínio e contradomínio).

-O mesmo acima para a operação linear $L = (x^2D^2 - 2xD + 1) \in \mathcal{L}(P_n(\mathbb{R}))$ para $n = 4$ .

-Mostre que se $\{\alpha\}_{1\leq k\leq n}$ for uma base de um Espaço Vetorial $E$ , então todas as bases deste espaço podem ser descritas na forma $\beta = R\alpha$ , $(\beta_j = \sum_{k=1}^{n} R_{kj}\alpha_k)$ com $R \in GL_n(\mathbb{R})$ e que a transformação de coordenadas $v = \sum \ x_k\alpha_k = \sum \ y_j\beta_j$ pode ser representada na forma matricial: $y = Rx$.(Este resultado, na verdade, já foi apresentado no capituloV).

-Mostre que a relação de semelhança entre matrizes é uma Relação de Equivalência e cada Classe de Equivalência pode ser interpretada como representantes de uma mesma Transformação $T \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n)$. (Sugestão: Escolhendo um representante de cada classe como sendo a representação de $\mathcal{L}(\mathbb{R}^n)$ na base canônica $T_{ee}$ .

-Obtenha a Classe de representações matriciais para o Operador Linear $xD^2 + 2: P_n(\mathbb{R}) \to P_n(\mathbb{R})$ e em particular para a base canônica dos polinômios $\alpha = \{x^k\}_{1\leq k\leq n}$ e $\beta = Ortonormalização\ de\ \alpha\ com\ \langle p, q\rangle = \sum_{k=0}^{\infty} p(k)q(k)$ . ( Observação: $P_n(\mathbb{R})$ espaço dos polinômio de grau $\leq n$ e $D = \frac{d}{dx}$ ).

## IIIc- MATRIZES como Linhas ordenadas (*seqüenciamento*) de VETORES COLUNAS:

A representação funcional simples ( $A \in \mathcal{F}(I_m \times I_n \to \mathbb{C}$ ) e a representação como transformação linear ( $A \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)$ ) para Matrizes são procedimentos naturais e importantes que permitem dotar estes conjuntos de uma importante Estrutura de Espaço Vetorial e também de Álgebra se $n = m$ .

Entretanto, estas representações não são as maneiras mais apropriadas para "visualizá-las" , pois não levam em conta a organização gráfica das matrizes que é parte fundamental de sua natureza desde a origem. Para recuperar parte desta organização gráfica e visual, voltemos à "Tabela" que representa uma matriz de $M_{mn}(\mathbb{R})$ e observemos que, analisando-a verticalmente, é natural interpretála também como uma seqüência ordenada, da esquerda para a direita, constituída de $n$ vetores colunas do Espaço Cartesiano $\mathbb{R}^m$. Sob este ponto de vista, é natural representar as matrizes como funções vetoriais: $A: I_n \to \mathbb{R}^m, j \longmapsto A^j \in \mathbb{R}^m$, $(A^j)_i = A_{ij}$, ou, equivalentemente, uma coleção de $n$ vetores ordenados no Espaço cartesiano $\mathbb{R}^m$. Esta interpretação nos leva imediatamente ao importante resultado:

**TEOREMA-*Caracterização do Espaço Imagem de uma Matriz*:**

Se $A \in M_{mn}(\mathbb{R})$ for interpretada como $A \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)$, então $R(A) = [A^j] \subset \mathbb{R}^m$ ou seja, a Imagem do operador linear $A$ é gerado pelos seus vetores colunas $A^j \in \mathbb{R}^m$ .

**Demonstração:** Basta observar que o resultado da operação $Ax$ para $x \in \mathbb{R}^n$ é simplesmente uma combinação linear das colunas de $A$ com coeficientes $x_j$, ou seja, $Ax = \sum_{j=1}^{n} x_j A^j$.

## IIId- MATRIZES como Colunas ordenadas (*empilhamento*) de VETORES LINHAS

Por outro lado, observando a "Tabela de Coeficientes" no sentido horizontal é natural interpretar uma matriz de $M_{mn}(\mathbb{R})$ como um "empilhamento" ordenado, de cima para baixo, de $m$ vetores linhas que podem ser interpretados como elementos de um Espaço Cartesiano $\mathbb{R}^n$. Sob este ponto de vista as matrizes serão representadas como funções vetoriais: $A: I_m \to \mathbb{R}^n, A_i \in \mathbb{R}^n$, $(A_i)_j = A_{ij}$, ou, equivalentemente como, uma coleção de $m$ vetores ordenados no espaço $\mathbb{R}^n$. Esta interpretação nos leva imediatamente ao seguinte importante resultado para matrizes REAIS:

**TEOREMA-*Caracterização do Núcleo de uma Matriz*:**

Se $A \in M_{mn}(\mathbb{R})$ for interpretada como $A \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)$, então $N(A)^{\perp} = [A_i] \subset \mathbb{R}^n$ ou seja, o complemento ortogonal do Núcleo do Operador Linear $A$ é gerado pelos seus vetores linha $A_i \in \mathbb{R}^n$ .

**Demonstração:** Basta observar que o resultado $Ax = 0$ pode ser interpretado como os $m$ produtos internos entre $x \in \mathbb{C}^n$ e os vetores linha $A_i$ e, portanto, a igualdade representa que $x$ é ortogonal simultaneamente a todos eles. $(Ax)_j = \sum_{j=1}^{n} x_j A_{ij} = \langle x, A_i \rangle = 0$ ; $1 \leq i \leq m$.

**Exercício**: O Teorema acima exige uma modificação quando se trata de Matrizes complexas, caso em que o produto matricial deve ser tomado na forma hermiteana Analisar o caso.

Em vista dos resultados anteriores e do Teorema Fundamental de Estrutura de Transformações Lineares do capítulo anterior, podemos obter o

**TEOREMA- *Índice Dimensional de uma Matriz: POSTO***

Se $A \in M_{mn}(\mathbb{R})$ for interpretada como $A \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)$, então o sub-Espaço Vetorial gerado por seus vetores colunas em $\mathbb{R}^m$ tem a mesma dimensão do sub-Espaço gerado por seus vetores linhas em $\mathbb{R}^n$, ou seja, $\dim[A^j] = \dim[A_i]$.

**Demonstração:** Basta interpretar a matriz real como uma transformação linear e aplicar o Teorema Fundamental da Estrutura de Operadores Lineares com as interpretações obtidas nos Teoremas acima, ou seja, $\dim[A_i] = \dim Ker(A)^{\perp} = \dim R(A) = \dim[A^j]$.

Com este RESULTADO, podemos definir um importante ***índice*** numérico natural que sintetiza aspectos dimensionais importantes de uma Matriz.

**DEFINIÇÃO: *POSTO DE UMA MATRIZ REAL***

Se $A \in M_{mn}(\mathbb{R})$ definiremos uma função ***índice*** denominada **POSTO** da matriz da seguinte maneira: $r: M_{mn}(\mathbb{R}) \to \mathbb{N}$ , $r(A) = \dim[A^j] = \dim[A_i]$ .

**Observação**: A letra $r$ é tradicionalmente utilizada para representar esta função/índice devido à sua designação original em inglês: "*Rank*".

**Exercícios:**

-Mostre que o máximo posto que uma matriz real $A \in M_{mn}(\mathbb{R})$ pode ter é $r(A) \leq \min\{m, n\}$.

-Mostre que uma Matriz real $A \in M_{mn}(\mathbb{R})$ é injetiva se e somente se $r(A) = n$ e é sobrejetiva se e somente se $r(A) = m$.

-Mostre que uma Matriz real quadrada $A \in M_{nn}(\mathbb{R})$ é inversível se e somente se $r(A) = n$.

-Determine o posto das Matrizes $\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$, $(1 \quad 1 \quad -1)$, $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -1 \\ -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, , $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 4 & 9 \end{pmatrix}$, $V \in M_{nn}$ ; $V_{kj} = (\gamma_k)^{j-1}$; $\gamma_k \in \mathbb{R}$.(Sugestão: Use Método de Gauss na direção "menor" e reconheça a Matriz de Vandermonde).

-Mostre que se $A, B \in M_{nn}(\mathbb{R})$ então $r(AB) \leq \min\{r(A), r(B)\}$ e se $A$ for inversível, $r(AB) = r(B)$.

-Mostre que se $A \in M_{mn}(\mathbb{R})$ e $B \in M_{np}(\mathbb{R})$ então $r(AB) \leq \min\{r(A), r(B)\}$ .

-Demonstre o **TEOREMA-Posto de Transformações Lineares**- : Se $A \in M_{mn}(\mathbb{R})$ e $R \in GL_n(\mathbb{R})$, $S \in GL_m(\mathbb{R})$ então $r(SAR) = r(A)$ e, portanto é possível definir $r: \mathcal{L}(E, F) \to \mathbb{N}, r(T) = r(T_{[\alpha\beta]})$ , ou seja, o Posto de uma Transformação Linear entre Espaços Vetoriais de dimensões finitas.

## IIIe- MATRIZES como Elementos de uma ÁLGEBRA: $M_{nn}(\mathbb{R}) \approx \mathcal{L}(E)$

A representação matricial para funções de primeiro grau, mostra que a operação de composição entre estas funções induz uma operação de produto entre as respectivas matrizes . Assim, é fácil provar que a Estrutura de ***Álgebra*** definida em $\mathcal{L}(\mathbb{R}^n)$ com o produto *composição* é isomorfa a uma Estrutura de Álgebra em $M_{nn}(\mathbb{R})$ com a operação produto matricial usual. Isto mostra que $M_{nn}(\mathbb{R})$ não apenas Representa os Espaços Vetoriais $\mathcal{L}(E)$, $(\dim E = n)$ , mas também Representa a ***Estrutura de Álgebra*** definida pela operação de composição em $\mathcal{L}(E)$. (V. Apêndice sobre Estrutura de Álgebra).

Para cada base $\{\alpha\}_{1 \leq k \leq n} \subset E$ é possível definir um isomorfismo entre Espaços Vetoriais $\varphi_\alpha: T \in \mathcal{L}(E) \longrightarrow T_{[\alpha\alpha]} \in M_{nn}(\mathbb{R})$ que facilmente verificamos ser extensível a um Isomorfismo ente as respectivas Álgebras.

Exercício: Demostre a afirmação acima sobre o isomorfismo entre Álgebras.

# IV-FUNÇÕES LINEARES com Domínio em $M_{nn}(\mathbb{R})$

As diversas representações matemáticas para os conjuntos de Matrizes como modelos de Espaços Vetoriais ($\mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)$, )e, principalmente, como Modelos de Álgebras ($\mathcal{L}(\mathbb{R}^n)$, sugerem que analisemos algumas Funções com domínio nestas Estruturas em que as matrizes aparecem como "*variáveis*" e, com isto, permitam a construção de um Cálculo Operacional Algébrico (envolvendo apenas operações algébricas finitas ) e Analítico (que se estende às operações transcendentais de limite). Nesta seção iniciaremos pelo estudo das principais funções lineares definidas neste domínio.

Funções $\varphi$ com domínio $M_{nn}(\mathbb{R})$ e cujos valores são invariantes em uma classe de semelhança, isto é, tais que, $\varphi(R^{-1}AR) = \varphi(A)$ para qualquer $R \in G_{nn}(\mathbb{R})$ , são particularmente importantes, pois podem ser estendidas a( e entendidas como) funções definidas em Espaços de transformações lineares $\mathcal{L}(E, F)$ em dimensão finita.

**Exercício:** Argumente a afirmação acima com maiores detalhes.

## IVa- TRAÇO: $Tr: M_{nn}(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$

Uma vez estabelecida uma Estrutura de Espaço Vetorial das matrizes $M_{nn}(\mathbb{R})$ as funções mais simples que podem ser definidas neste domínio são as lineares e, dentre elas uma das mais importantes, e simples, é a Função Traço:

**DEFINIÇÃO**: A função ***Traço*** é definida da seguinte maneira: $Tr: M_{nn}(\mathbb{C}) \to \mathbb{C}, TrA = \sum_{k=1}^{n} A_{kk}$ .

Surpreendentemente este simples funcional linear é um "*Teste Arquimediano*" valioso que extrai informações cruciais sobre a sua "variável" $A \in M_{nn}(\mathbb{R})$ ( e também $T \in \mathcal{L}(E)$ ) que serão descritas no seguinte Teorema.

**Teorema do Traço**: A Função $Tr: M_{nn}(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}, TrA = \sum_{k=1}^{n} A_{kk}$ , denominada "***Traço***" satisfaz as seguintes propriedades:

1-$Tr \in \left(M_{nn}(\mathbb{R})\right)^*$ , isto é, o Traço é um *Funcional Linear* em $M_{nn}(\mathbb{R})$.

2-A sua Representação de Riesz segundo o Produto interno de Frobenius é: $TrA = \langle I, A\rangle$

3-$Tr(AB) = Tr(BA)$

4-O Traço é invariante por semelhança: $Tr(P^{-1}AP) = Tr(A)$ , e, portanto, é possível definir consistentemente o funcional Traço de *Operadores Lineares* com as suas matrizes representativas: $Tr: \mathcal{L}(E) \to \mathbb{R}, Tr(T) = Tr(T_{[\alpha]})$.

**Demonstração:** Exercício.

**Exercícios-**

- Verifique as conclusões acima e calcule o $Tr(L)$ em duas *bases distintas à sua escolha* para $L \in \mathcal{L}(E)$ nos seguintes casos:

1) $E = P_n(\mathbb{R}), L = D^2 - xD + 1$ ,

2) $E_N = \{\left[f: \mathbb{N} \to \mathbb{C}\,;\, f(k) = e^{i\frac{2\pi}{N}k}\right]\} \subset \mathcal{F}(\mathbb{N}, \mathbb{C})\}$ , $L = S^2 - S - 1$ $(Sf(k) = f(k+1))$. (Sugestão: O Espaço $E_N$ é gerado pelas funções cujos valores são as $N$raizes da unidade e observe que também admite uma estrutura de Álgebra)

## IVb- OPERAÇÃO DE TRANSPOSIÇÃO : $\boldsymbol{\tau}: \boldsymbol{M_{nn}}(\mathbb{C}) \to \boldsymbol{M_{nn}}(\mathbb{C})$ .

Analisando mais uma vez a organização espacial de uma Matriz quadrada como uma Tabela, uma das características que mais chamam a atenção é sua configuração com relação à sua diagonal principal (sentido NE-SE) e isto pode ser descrito efetuando uma *reflexão da Tabela* através deste eixo o que formalmente é representável com a operação de transposição definida a seguir. Entretanto, uma mera sugestão visual não é suficiente para atestar a utilidade desta operação. A importância da transposição será manifestada nos múltiplos resultados que são possíveis descrever com seu emprego, razão porque é necessário defini-la formalmente e destacar algumas de suas propriedades operacionais elementares.

## DEFINIÇÕES:

### *1-TRANSPOSIÇÃO*:

A função $\tau: M_{nn}(\mathbb{R}) \to M_{nn}(\mathbb{R}), \tau(A)_{ij} = A_{ji}$ é denominada ***Transposição*** e mais comumente denotada por $\tau(A) = A^T$.

### *2-AUTOVETORES À ESQUERDA*:

$A \in M_{nn}(\mathbb{R})$ . Se para $\lambda \in \mathbb{C}$ existir $w \in \mathbb{C}^n - \{0\}$ tal que $A^T w = \lambda w$ , então dizemos que $w$ é *autovetor à esquerda* de $A$ e $\lambda$ seu respectivo autovalor. (**Observação**: Embora a Matriz considerada seja **real**, a definição é **complexificada** por conveniência matemática, pois se estende para soluções complexas tanto para autovetores quanto autovalores, tal como foi feito na definição de autovetores à direita).

O Teorema abaixo são algumas informações básicas sobre a operação de transposição que desempenham papeis fundamentais na Teoria e nas Aplicações da Álgebra Linear.

## TEOREMA: Propriedades Operacionais da Transposição

A Operação de transposição é **1)**Linear, **2)**$(AB)^T = B^T A^T$ , **3)** $r(A) = r(A^T)$ , **4)** A transposição preserva invertibilidade**,** $\tau: GL_n(\mathbb{R}) \to GL_n(\mathbb{R})$ e, $(A^{-1})^T = (A^T)^{-1}$ , **5)**$\langle Ax, y\rangle = \langle x, A^T y\rangle$, **6)**$Sp(A) = Sp(A^T)$, 7)Se $\lambda \neq \gamma \in Sp(A)$ $e$ $Av = \lambda v$ , $A^T w = \gamma w$ então $\langle v, w\rangle = 0$ (i.e., autovetores à esquerda e à direita correspondentes a autovalores **distintos** são ortogonais) **8)** Se $A$ tem n autovalores $\{\lambda_k\}_{1\le k\le n}$distintos então os seus respectivos autovetores à direita e esquerda $\{v_k\}_{1\le k\le n}$ , $\{w_k\}_{1\le k\le n}$ , então $\langle v_k, w_k\rangle \neq 0$ e

$v = \sum_{k=1}^{n} c_k v_k$ ; $c_k = \frac{\langle v, w_k\rangle}{\langle v_k, w_k\rangle}$ , $\forall v$ .

**Demonstração:**Exercício. (Sugestão7)- Observe: $\langle w, Av\rangle = \lambda\langle w, v\rangle = \langle A^T w, v\rangle = \gamma\langle w, v\rangle$ . 8)Como $\langle v_k, w_j\rangle = 0\ \forall j \neq k$ , se algum $\langle v_k, w_k\rangle = 0$ então $\langle v_k, w_j\rangle = 0\ \forall w_j$ e isto implica $v_k = 0$, pois $\{w_j\}$ é base. Faça Produto interno de $v = \sum_{j=1}^{n} c_j v_j$ com $w_k$.

### Exercícios:

-Mostre que $Tr \circ \tau = Tr$.

-Analise a operação de transposição $\tau: M_{nn}(\mathbb{R}) \to M_{nn}(\mathbb{R})$ com respeito à relação de semelhança, isto é, em que subconjuntos a relação é preservada pela transposição.

## IVc- OPERAÇÃO DE CONJUGAÇÃO: $M_{nm}(\mathbb{C}) \to M_{nm}(\mathbb{C}), (\overline{M})_{jk} = M_{jk}$

### DEFINIÇÕES: *Matriz Conjugada e Matriz Adjunta*

A operação $M_{nm}(\mathbb{C}) \to M_{nm}(\mathbb{C}), (\overline{M})_{jk} = M_{jk}$ ,denominada ***Conjugação*** é, obviamente, uma Operação linear no Espaço Vetorial das Matrizes complexas. No caso $n = m$ a composição desta com a transposição $(M^*)_{jk} = \overline{M_{kj}}$ constitui uma operação linear denotada pelo símbolo " $*$ " em que a matriz $M^*$ é denominada ***Matriz Adjunta*** de $M$ que tem papel importante no desenvolvimento da teoria de matrizes complexas.

### *"COMPLEXIFICAÇÃO"* de Matrizes Reais

O Espaço Vetorial ***Real*** $M_{nm}(\mathbb{R})$ (naturalmente com escalares reais) ***não é*** um sub-espaço vetorial do Espaço Vetorial ***Complexo*** $M_{nm}(\mathbb{C})$ (naturalmente com escalares complexos). Entretanto, como $M_{nm}(\mathbb{R}) \subset M_{nm}(\mathbb{C})$ , é possível considerar o conjunto $M_{nm}(\mathbb{R})$ dentro da Estrutura de $M_{nm}(\mathbb{C})$, o que é denominado *Complexificação* de $M_{nm}(\mathbb{R})$ estendendo assim as operações que são admissíveis com relação às matrizes reais. Por exemplo, podemos considerar o problema espectral para $A \in M_{nn}(\mathbb{R})$ na forma de uma equação $Av = \lambda v$ com incógnitas $\lambda \in \mathbb{C}\ e\ v \in \mathbb{C}^n$, o que é denominado de ***complexificação da equação espectral***. A complexificação de uma matriz real é um procedimento tão útil quanto a complexificação de polinômios reais; naquele caso, este procedimento permite a elucidação completa de sua estrutura algébrica, em especial, de suas raízes, o que seria intratável sem este recurso.

Exercícios-

-Mostre que a conjugação é uma operação linear e mais, que ela também preserva o produto de duas matrizes (quando este é admissível): $\overline{M_1 M_2} = (\overline{M_1})(\overline{M_2})$.

-Se $M = A + iB \in M_{nm}(\mathbb{C}), A, B \in M_{nm}(\mathbb{R})$ então obtenha a soma $M_1 + M_2$ e o produto $M_1 M_2$ nesta decomposição e demonstre que $\overline{M_1 M_2} = (\overline{M_1})(\overline{M_2})$ e $(M_1 M_2)^* = {M_2}^* \, {M_1}^*$.

-Se $A \in M_{nn}(\mathbb{R})$ escreva a equação espectral comlexificada, $Av = \lambda v$ com incógnitas $\lambda = \gamma + i\eta \in \mathbb{C}\ e\ v = \alpha + i\beta \in \mathbb{C}^n$ na forma de duas equações reais. (Não necessariamente espectrais).

## IVd-OPERAÇÃO DE SEMELHANÇA : $\tau_R : M_{nn}(\mathbb{R}) \to M_{nn}(\mathbb{R}),\ R^{-1}AR\ , R \in GL_n$

A representação matricial $T_{[\alpha]} \in M_{nn}(\mathbb{R})$ de uma Transformação Linear $T \in \mathcal{L}(E)$ , define um isomorfismo, não apenas linear, mas de Álgebras, $\boldsymbol{\mathcal{L}(E)} \leftrightarrow \boldsymbol{M_{nn}}(\mathbb{R})$ ; $T \leftrightarrow T_{[\alpha]}$ que, obviamente, depende da base $\{\alpha\} = \{\alpha_k\}_{1 \le k \le n} \subset E$ escolhida para intermediar esta representação.

Esta dependência de uma base intermediária $\{\alpha\}$ desempenha um papel importante na classificação das matrizes, pois estabelece uma relação de equivalência " $\approx$ " em $M_{nn}(\mathbb{R})$ cujas classes de equivalência são Matrizes que representam a mesma Transformação linear, ou seja

$$\text{“ } A \approx B\ se\ T_{[\alpha]} = A\ \ e\ \ T_{[\beta]} = B\ \ \ para\ uma\ T \in \mathcal{L}(E)\ representada\ em\ bases \{\alpha\}, \{\beta\} \subset E\text{”}.$$

Em termos ***intrinsecamente matriciais*** esta equivalência é descrita da seguinte maneira: $A \approx B$ se existe uma matriz inversível $R \in GL_n$ tal que $B = RAR^{-1}$ e é denominada **Relação de Semelhança.**

Sob outro ponto de vista, fixando a matriz $R \in GL_n$ (*mudança de coordenadas*) define-se uma função: $\sigma_R : M_{nn}(\mathbb{R}) \to M_{nn}(\mathbb{R})$ , $A \to\ RAR^{-1} = B$ que é linear e, na verdade preserva também o produto.

Exercício:

-Mostre que, dada uma base $\{\alpha\} \subset E$ há uma correspondencia biunívoca entre as matrizes $R \in GL_n$ e as bases $\{\beta\} \subset E$.

-Mostre que esta definição de fato define uma relação de equivalência em $M_{nn}(\mathbb{R})$.

-Mostre que se $\mathcal{G} \subset GL_n$ então a relação definida por " $A\tilde{\mathcal{G}}B$ se existe uma matriz $G \in \mathcal{G}$ tal que $B = GAG^{-1}$ " é uma relação de equivalência. Mostre que as Matrizes Ortogonais $Ort_n = \{O \in M_{nn}\ ;\ O^T = O^{-1}\}$ constituem um subgrupo de$GL_n$ e identifique geometricamente a relação de equivalência com base neste grupo.

-Mostre que dada uma base ortonormal $\{\alpha\} \subset E$ há uma correspondência biunívoca entre$O \in Ort_n$ e as outras bases ortonormais $\{\beta\} \subset E$

-Mostre que $\sigma_R$ é linear e preserva o produto $\sigma_R(AB) = \sigma_R(A)\sigma_R(B)$.

# V-A Função DETERMINANTE: $det: M_{nn}(\mathbb{C}) \to \mathbb{C}$

## *Origens Algébricas e Geométricas*

O Determinante é um dos itens mais mal afamados da Matemática elementar e não é difícil saber a razão. O difícil mesmo é resistir à tentação de se juntar a este descaso, dadas as maneiras pouco amigáveis com que ele é introduzido desde o nível secundário. Na grande maioria dos textos do assunto, o determinante surge bruscamente sem qualquer aviso prévio liderando um longo séquito de fórmulas e propriedades abstrusas culminando com a entrada triunfal da famosa e mágica Regra de Cramer, todas elas imprescindíveis, a quem leve à sério o vestibular.

Na verdade, apesar da complicada fórmula algébrica que o representa, o determinante tem origens geométricas e algébricas que sugerem com muita ênfase a razão de suas exóticas peculiaridades e também da sua necessidade teórica. (Incompreensivelmente, embora o determinante tenha pouca utilidade computacional e prática, esta é exatamente a sua faceta mais enfatizada em alguns textos, o que não melhora em nada a sua já arranhada reputação).

O Determinante de matrizes de ordem menor (2 e 3) tem a sua origem algébrica mais antiga nos trabalhos do matemático japonês Seki Takakazu(1693) e de Gottfried W.Leibniz sobre resolução de sistemas de equações lineares.

A interpretação algébrica de Leibniz para o determinante em termos contemporâneos utiliza o conceito combinatórico de permutação (Funções $Sym(n) = \{\sigma: I_n \to I_n \; ; \; \sigma \equiv bijetiva\}$ ).

É interessante observar que Leibniz foi um dos fundadores da teoria de Combinatória e um de seus textos matemáticos mais importantes é exatamente o "*Dissertatio de arte combinatoria", 1666).* A estrutura de Grupo deste conjunto com a operação de composição, assim como a função "sinal" (índice) $sgn(\sigma)$ é material para ensino básico de Matemática, ou deveria ser . Esta falha de organização pedagógica talvez seja a origem do estranhamento que o conceito de determinante causa, mesmo no nível superior. (Sobre Grupo de Permutações e função de índice, veja Apêndice-Preliminares).

Por outro lado, a interpretação geométrica do determinante (que tem origens muito mais recentes) é, talvez, a motivação mais apropriada para introduzir as suas propriedades fundamentais que servirão de protótipo axiomático para a sua generalização a dimensões superiores, onde, a experiência geométrica não existe e a álgebra literal explícita torna-se intratável.

Neste capitulo o estudo do determinante decorrerá de sua definição como função dos vetores colunas de uma Matriz e de sua interpretação geométrica bi e tridimensional que associa o seu valor, no caso $M_{22}(\mathbb{R}) = \{(A^1, A^2) \; ; \; A^k \in \mathbb{R}^2\}$ , à ***área do paralelogramo*** e, no caso $M_{33}(\mathbb{R}) = \{(A^1, A^2, A^3); \; A^k \in \mathbb{R}^3\}$ , ao ***volume do paralelepípedo*** cujas ***arestas*** são descritas pelos respectivos vetores.

Partindo de sua representação geométrica, é fácil ver que o determinante nestas dimensões pode ser também interpretado como um ***índice*** que "determina" se os vetores colunas são linearmente dependentes, caso em, que o paralelogramo, e, respectivamente, o paralelepípedo *colapsam* e, de fato é a única situação em que o seu valor é nulo. Assim, o determinante diferente de zero, significa a Independência linear destes vetores. (Observe-se que tomando apenas as direções unitárias dos vetores envolvidos, também se torna clara a interpretação do valor absoluto do determinante como sendo uma "*medida de independência linear*" (ou, "*incorrelação linear*") entre os vetores coluna. Em dimensão dois, este valor equivale à medida do seno do ângulo entre os dois vetores).

Esta reformulação analítica do conceito de determinante como um "*índice de independência linear de n vetores em* $\mathbb{C}^n$ " , faz com que a sua extensão para Espaços Cartesianos de dimensão superior seja de grande interesse teórico, mais do que a sua interpretação geométrica.

A extensão do conceito de determinante para dimensão superior utiliza a sua representação como função dos vetores colunas $A^k \in \mathbb{C}^n$ da matriz $M \in M_{nn}(\mathbb{C})$ e, portanto, parte do seguinte cenário:

$det: M_{nn}(\mathbb{C}) = (\mathbb{C}^n)^n = \mathbb{C}^n \times \ldots \times \mathbb{C}^n \longrightarrow \mathbb{C}$, $detA = det(A^1, \ldots, A^n)$ .

As propriedades típicas de produto que o determinante exibirá sugerem a seguinte notação que é conveniente e muito utilizada

$$detA = det(A^1, \ldots, A^n) = A^1 \times . . \times A^k \times \ldots \times A^n$$

denominada "***Produto Exterior***", ou "*Produto Alternado*". (A generalização desta operação tem várias aplicações em Geometria que trata de formas diferenciais e tensores).

A generalização do conceito de determinante seguirá a metodologia Axiomática inventada por Euclides (300 AC), aperfeiçoada por David Hilbert(1900 DC) e amplamente utilizada como padrão na Matemática contemporânea e suas aplicações: Detectamos uma seleção ***mínima*** de suas propriedades ***operacionais*** que sejam : **1)**Facilmente verificadas em casos particulares (duas e três dimensões no caso presente) , **2**) ***Suficientes para caracteriza-lo*** nestes casos particulares e **3**) Formalmente **extensíveis** a dimensões superiores.

As seguintes propriedades operacionais, que podem ser facilmente verificadas no protótipo geométrico bi&tri-mensional, constituirão o sistema **axiomático** que definirá o conceito generalizado da função determinante.

## DEFINIÇÃO: *Determinante*

**Denominaremos função determinante qualquer função** $\Phi: M_{nn}(\mathbb{C}) = \mathbb{C}^n \times \ldots \times \mathbb{C}^n \longrightarrow \mathbb{C}$ **, que satisfizer os seguintes axiomas:**

**1)Normalização**: $\Phi\, I = 1$ (*Normalização*)

**2)Multilinearidade**: (*Linearidade em cada variável vetorial)*

2a) $(A^1 \times \ldots \times A^{k-1} \times \lambda A^k \times A^{k+1} \times . . \times A^n) = \lambda(A^1 \times \ldots \times A^{k-1} \times A^k \times A^{k+1} \times . . \times A^n) = \lambda detA$ (≈Homotetia: O dobro/metade de uma única aresta faz o mesmo com o valor da área/volume)

$$(A^1 \times . . \times A^{k-1} \times (A^k + B^k) \times A^{k+1} \times . . \times A^n) =$$

$$(A^1 \times . . \times A^{k-1} \times (A^k) \times A^{k+1} \times . . \times A^n) + (A^1 \times . . \times A^{k-1} \times (B^k) \times A^{k+1} \times . . \times A^n)$$

(≈Desenhos são sugestivos desta propriedade, assim como as expressões vetoriais para o calculo de áreas de paralelogramos bidimensionais ou volumes de paralelepípedos tridimensionais em termos de ***produtos*** bilineares (vetorial e interno) da Geometria Analitica elementar. V. Apêndice sobre Geom. Analitica Vetorial)

**3)** $(A^1 \times . . \times A^{k-1} \times A^k \times . . \times A^n) = 0$ se $A^{k-1} = A^k$ (≈Colapso dimensional do paralelepípedo com duas arestas distintas iguais)

**Exercicios:**

-Verifique as propriedades acima no contexto de duas e três dimensões sob o ponto de vista experimental (lápis e papel) e também utilizando as expressões operacionais para os dois casos expressas em termos de produto vetorial e interno.(Sugestão:Desenhe. Utilize as expressões do produto vetorial $a \wedge b$ em $\mathbb{R}^2$ e do produto misto $a \wedge b \cdot c = (abc)$ em $\mathbb{R}^3$.

-Mostre que o Produto externo (determinante) é anti-simétrico, isto é, a troca da posição de duas colunas, troca o sinal do determinante:

$(A^1 \times . . \times A^{k-1} \times A^k \times . . \times A^n) = -(A^1 \times . . \times A^{k-2} \times A^k \times A^{k-1} \times A^{k+1} \times . . \times A^n)$ (Sugestão:Usando a bilinearidade do "produto $\times$ " faça uma analogia com a seguinte expressão vetorial: $(a + b) \wedge (a + b) = 0$.

-Mostre em dimensão ***dois*** que as propriedades operacionais listadas acima são necessárias e suficientes para caracterizar completamente a função determinante, ou seja, qualquer função $\delta: \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ que satisfaça 1)2)3) será necessariamente a função determinante, $\delta = det$. (Sugestão: Escreva em dimensão 2: $(x_1e_1 + x_2e_2) \times (y_1e_1 + y_2e_2)$ desenvova o produto utilizando a bilinearidade, lembrando da anti-simetria e que $e_1 \times e_2 = \det I = 1$. Repita o mesmo procedimento em dimensão 3.

-Se $\{e_k\}_{1\le k\le n} \subset \mathbb{R}^n$ for a base canônica ( $e_1 = (1,0,..,0), \dots, e_n = (0,0,\dots,0,1)$) e $\sigma: I_n = \{1,2,\dots n\} \to I_n$ for uma permutação (uma bijeção) mostre que $e_{\sigma(1)} \times e_{\sigma(2)} \times \dots \times e_{\sigma(n)} = sgn(\sigma)$ . (**Sugestão**: Consulte o Apêndice "Preliminares" e constate que $sgn(\sigma) = (-1)^N$ é definido com o número $N$ de permutas simples adjacentes que é necessário realizar para "colocar em ordem" a permutação $\sigma$ . Ou seja, $\sigma = \tau_1 \circ \dots . \circ \tau_N$ onde $\tau_k$ é uma permutação simples de apenas duas posições adjacentes.

-Calcule $det\begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 2 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} = A^1 \times A^2 \times A^3$ onde, por exemplo: $A^1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} = e_1 + 2e_2 - e_3$, ........ utilizando as propriedades do produto externo.

Uma vez decidida a lista de propriedades que desejamos estabelecer como fundamento Axiomático para a caracterização completa da função determinante resta saber: **1)** Se há uma função que de fato as satisfaz em $M_{nn}(\mathbb{C})$, **2)** Se ela é única e **3)** Quais são as propriedades operacionais que podem ser derivadas delas e que, em particular, permitem calcular seus valores.

**TEOREMA: *Existência*, *Unicidade* e Fórmula Algébrica Explícita para a função** $det: M_{nn}(\mathbb{C}) \to \mathbb{C}$

Uma função que satisfaça os axiomas 1)2)3) também satisfará as seguintes propriedades 1) e 2):

1)- $det\left(A^1, .., A^{k-1}, \boldsymbol{A^k + A^{k+1}}, A^{k+1}, .., A^n\right) = detA$ (A substituição de uma coluna $k$ pela soma dela com outra não altera o det)

2) $det: M_{nn}(\mathbb{C}) \to \mathbb{C}$ é antisimétrica:
$det(A^1, . A^{k-1}, u, v, A^{k+2}, .., A^n) = -det(A^1, . A^{k-1}, v, u, A^{k+2}, .., A^n)$

3)(***Expansão/Fórmula de Leibniz***)-A função $det: M_{nn}(\mathbb{C}) \to \mathbb{C}$ que satisfaz aos axiomas 1-2-3 **existe**, é **única** e pode ser calculada segundo a fórmula: $det(A^1, .. A^k, A^k, .., A^n) = \sum_\sigma sgn(\sigma) A_{1\sigma(1)} \cdot\cdot A_{k\sigma(k)} \cdots A_{n\sigma(n)}$ em que $\sigma: I_n \to I_n$ são Permutações e $sgn(\sigma)$ é o sinal da Permutação.

4)**Estrutura algébrica da Fórmula de Leibniz**: $det(A^1, .. A^k, A^k, .., A^n) = \sum_\sigma sgn(\sigma) A_{1\sigma(1)} \cdot\cdot A_{k\sigma(k)} \cdots A_{n\sigma(n)}$ contem $n! = \#Sym(n)$ parcelas e cada uma delas, $sgn(\sigma) A_{1\sigma(1)} \cdot\cdot A_{k\sigma(k)} \cdots A_{n\sigma(n)}$ , contem $n$ fatores $A_{k\sigma(k)}$que representam respectivamente todas as linhas e todas as colunas Matriz. ($A_{st}$ representa a linha $s$ e a coluna $t$)

5) A função $det: M_{nn}(\mathbb{C}) \to \mathbb{C}$ , det $(x_{ij})$ é homogênea de ordem $n$, isto é, $\det(\lambda A) = \lambda^n \det A$.

**6)**A função $det: M_{nn}(\mathbb{C}) \to \mathbb{C}$ ***não é*** linear ($n > 1$) mas preserva o produto: $\det(AB) = (\det A)(\det B)$

7) $A \in M_{nn}(\mathbb{C})$ , é inversível se e somente se $\det A \neq 0$ (Volume do "paralelepípedo & Índice de singularidade)

8) $detA = det(A^T)$

**9)**A expressão algébrica $\det(A - \lambda I) = p(\lambda) = a_0 + a_1\lambda + \cdots + a_{n-1}\lambda^{n-1} + \lambda^n$ é um polinômio de grau $n$ e $a_0 = detA$ e $a_1 = TrA$ e as raízes reais e complexas deste polinômios são todos os autovalores da matriz $A \in M_{nn}(\mathbb{C})$.

10)(***Expansão de Laplace***): $detM = \sum_{k=1}^n (-1)^{i+k} A_{ik} detA^{[ik]}$ em que $A^{[ik]} \in M_{(n-1)(n-1)}$ é denominada Matriz Reduzida obtida de $M$ pela eliminação da linha $i$ e da coluna $j$.

11)Se $A \in M_{nn}(\mathbb{C})$ for uma matriz ***triangular superior*** (isto é, tal que $A_{ij} = 0\,; i < j$ ) então

$detA = A_{11} \cdot\cdot A_{kk} \cdot\cdot A_{nn}$. (Analogamente para matrizes triangulares inferiores)

12)Se $\mathcal{E}_k \in M_{nn}(\mathbb{C})$ for uma Matriz Elementar de Gauss para linhas (isto é, uma representante das três transformações elementares –1)Mutiplicação de linha por um número $\lambda$, 2) Substituição de uma linha pela soma dela com outra, 3) Troca de linhas), então $det\mathcal{E}_1 = \lambda$ , $det\mathcal{E}_2 = 1$ ; $det\mathcal{E}_3 = -1$. Analogamente para colunas.

13)Se $P \in M_{nn}$ for uma matriz de Permutação,(isto é, $P^j = (e_{\sigma(j)})$ onde $\sigma \in Sym(n)$ (Grupo de Permutações, i.e., funções bijetivas $\sigma: I_n \to I_n = \{1,2,..,n\}$, e $\{e_k\} \subset \mathbb{R}^n$ a base canônica ), então $detP = sgn(\sigma)$.

**Demonstração**:**1-2-** Simples manipulação utilizando os axiomas. **3**)Basta expandir segundo a multilinearidade,a antisimetria e a normalização e, revertendo verificar os axiomas.**4-5**)_Formula de Leibniz. **6)**Considere a Função $\frac{1}{detA}\det(AX) = D(X)$.Ela satisfaz aos três axiomas e, portanto, sendo esta função única, necessariamente $D(X) = detX$, de onde vem o resultado.. **7)** Se $A \in GL_n$ ; $AA^{-1} = I$ e aplique (4). Se $detA \neq 0$ as colunas deve ser LI, pois caso contrario $detA = 0$ .Usando o Teor.Fund vê-se que $A$ é bijetora Leibniz.. **8**) segue da expansão de Leibniz. **9**) segue de 4).**10**)Utiliza-se a expansão de Leibniz fatorando em cada parcela o coeficiente que representa a coluna em questão e mostrando que a soma fatorada para cada coeficiente se reduz ao determinante da respectiva matriz reduzida.. 3).**11**)Use Laplace ou, com mais elegância e lucidez, acompanhe o argumento apresentado na sugestão do exercício sobre a Expansão de Leibniz abaixo..**12-13)** Basta verificar as definições.

## Exercícios:

-Analise a Expansão de Leibniz com o seguinte argumento: Uma permutação $\sigma: I_n \to I_n$ tal que $\sigma(k) \leq k, \forall k$ é necessariamente a identidade.(Sugestão: Experimente com os ***possíveis*** valores de $\sigma(1), \sigma(2), \sigma(3), .., \sigma(n)$ e conclua por indução que, necessariamente, $\sigma(k) = k$ ,$\forall k$ . Utilize este fato para mostrar que se $A$ for triangular (superior ou inferior) então $\det A = A_{11} \cdots A_{nn}$.

-Calcule os determinantes das três classes de matrizes elementares de Gauss (utilizadas no Método de Eliminação de Gauss à esquerda e à direita) e mostre que ***a operação de substituição não altera o seu valor***, que a multiplicação de uma linha altera homogeneamente o seu valor e que a troca de duas linhas resulta *em uma simples mudança de sinal*.

-Calcule o determinante $det\begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 2 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ de uma Matriz de ordem 3 utilizando o Método de Eliminação de Gauss na forma matricial e as propriedades 10) e 11).

-Demonstre o **Teorema de Euler-Liouville**: $det\,(A + tI) = \det A + tTrA + t^2 q(t)$ onde $q(t)$ é polinômio, de onde

$\left[\frac{d}{dt}\det(A + tI)\right]_{t=0} = TrA$. Obtenha uma expressão para a derivada de $det\,(A + tH)$ em $t = 0$ se $A$ for inversível.

**Observação**: *Os detalhes da famosa Regra de Cramer não serão apresentados. Em linhas gerais a Regra de Cramer é baseada na seguinte observação sobre a expansão de Laplace: Se a expansão de Laplace utilizar coeficientes de outra linha (ou coluna) que* ***não sejam*** *as indicadas pelas Matrizes Reduzidas (cujos determinantes estão sendo multiplicados) , isto significa que esta expansão espúria, na verdade, se refere a uma Matriz com duas linhas (ou colunas) iguais, e, portanto, é zero. Se, por outro lado os termos coincidirem com a prescrição de Laplace, o resultado será sempre* $\det A$ *. Portanto construindo uma matriz apropriada de valores destes determinantes das matrizes reduzidas obtemos a matriz* $(\det A)I$ *de onde vem a Inversa.*

## Generalizações da Função Determinante

A importância teórica do conceito de determinante induz à sua generalização de várias maneiras. A mais imediata é apresentar a mesma definição para uma estrutura de Álgebras que possa ser utilizada em Métodos Operacionais. Por exemplo, se $\mathcal{A}$ for uma Álgebra, digamos de Operadores lineares, em que está definida uma operação de produto, então podemos construir os Espaços Vetoriais $\mathcal{A}^n$ e as Matrizes Operacionais $M_{nn}(\mathcal{A})$ em que estão definidas as operações de Soma, Multiplicação por escalar e Produto exatamente da mesma maneira original. A definição de determinante, que de acordo com Leibniz, é obtida de uma combinação linear de produtos homogêneos de $n$ elementos da matriz, com coeficientes combinatóricos, certamente será muito mais complicada se a Álgebra $\mathcal{A}$ não for comutativa, pois teria que conter todos os produtos em ordens distintas! Entretanto, a Álgebra $\mathcal{A}$ gerada por um operador linear é comutativa, como no caso do Método de Heaviside em que $\mathcal{A} = [D] = \{p(D); p \in P(\mathbb{C})\}$ , e neste caso a definição de determinante segue exatamente a mesma formalidade do original. (Ref. Bassanezi-

Ferreira). O Método de Eliminação de Gauss também pode ser aplicado *ipsis letteris* neste contexto, exceto na parte de normalização dos elementos da diagonal.

Exercício:

-Aplique formalmente o Método de Eliminação de Gauss para transformar o sistema de equações diferenciais abaixo em um sistema diagona(*) $\left[\begin{array}{l} D^2u - Dv + w = \ x \\ \quad Du - v \quad = \ 1 \\ D^3u + Dw \ = \cos x \end{array}\right.$ escrito na forma operacional matricial como $\begin{pmatrix} D^2 & -D & 1 \\ D & -1 & 0 \\ D^3 & 0 & D \end{pmatrix}\begin{pmatrix} u \\ v \\ w \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ 1 \\ \cos x \end{pmatrix}$.(Sugestão: Substitua a primeira linha pela soma dela com a aplicação de $-D$ na segunda linha e substitua a terceira linha pela soma dela com o resultado da primeira linha aplicada com $-D$ . Observe que sendo $D$ um operador sem inversa o sistema resultante não é exatamente equivalente ao sistema (*), mas soluções de (*) serão soluções de (**). Diz-se que neste caso o sistema (**) contem o sistema (*).

-Obtenha a Matriz Operacional $R(D) \in M_{33}([D])$ tal que $R(D)A(D) = diagonal(D)$.

-Calcule o determinante da matriz operacional: $A(D) = \begin{pmatrix} D^2 & -D & 1 \\ D & -1 & 0 \\ D^3 & 0 & D \end{pmatrix}$

-Utilizando uma analogia do Método de Eliminação de Gauss, procure obter um sistema de equações triangular cujo conjunto de soluções contenha as soluções do sistema original: $\begin{pmatrix} xD & 1 \\ x & D \end{pmatrix}\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$.

**Observação**: O operador linear "multiplicação por $x$" ***não*** comuta com o operador linear " $D$ " (derivação) , ambos do espaço $\mathcal{L}(C^{\infty}(\mathbb{R},\mathbb{R}))$. Portanto a notação $xD$ representa o operador linear que **primeiro** deriva e **depois** multiplica o nresultado obtido por $x$ e esta ordem deve ser mantida. Por exemplo: $(xD)(x^3) = 3x^3$ ; $xD(e^{4x}) = 4xe^{4x}$. Enquanto que o operador $Dx$ significa "multiplique primeiro por $x$" e ***depois*** Derive o resultado obtido: $(Dx)x^3 = 4x^3$ , $(Dx)(e^{4x}) = e^{4x} + 4xe^{4x}$.

-Considere o sistema de Eq.Dif.Ord., $\dot{u} = Au$ , $\frac{d}{dt}\begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{pmatrix}$ escrito na forma operacional

$\begin{pmatrix} 1-D & 1 & 0 \\ 0 & 1-D & 1 \\ 0 & 1 & -D \end{pmatrix}\begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$. Utilizando procedimentos análogos aos utilizados no Método de Eliminação de Gauss, obtenha um sistema diagonal que contenha este sistema e mostre que é equivalente ao sitema desacoplado $p(D)u_k = 0$ , em que o polinômio $p(\lambda) = \det(A - \lambda I)$ é o polinômio característico de $A$. Este é um resultado geral para equações diferenciais do tipo $\dot{u} = Au$ .

# IX-MATRIZES ESPECIAIS:

Nesta seção apresentaremos algumas conjuntos de Matrizes que tem importância especial em diversas situações.

**-MATRIZES INVERSÍVEIS**: $GL_n(\mathbb{R})$

As matrizes inversíveis $GL_n(\mathbb{R}) \subset M_{nn}(\mathbb{R})$ **não** constituem um Sub-Espaço Vetorial, mas **sim** um Grupo e também podem ser *caracterizadas* das seguintes maneiras:

**1-)** $\det A \neq 0$ , **2-** $r(A) = n$ , **3**-)$Ker(A) = \{0\}$ , **4-)** $0 \notin Sp(A)$ , **5-)** $R(A) = Im(A) = \mathbb{R}^n$ , **6-)** $[A^j] = \mathbb{R}^n$,

**Exercício**: Demonstre todas as afirmações acima.

**-MATRIZES BLOCOS-**

**DEFINIÇÕES:**

-Se $A \in M_{nn}(\mathbb{R})$ e $A_i = 0 ; \begin{pmatrix} i < p \\ p + r \leq i \end{pmatrix}$ ; $e\ A^j = 0 \begin{pmatrix} j < q \\ q + r \leq j \end{pmatrix}$ diz-se que a Matriz $A$ é formada por um **Bloco** de dimensão $r$ e **pivô** (*quina superior NE*) em $A_{pq}$ . Se $p = q$ a Matriz é um **Bloco diagonal**.

-As matrizes **Diagonais** $\Delta_{nn}(\mathbb{R}) \subset M_{nn}(\mathbb{R})$ constituem uma classe especial de matrizes tais que $D \in \Delta_{nn}(\mathbb{R})$ se $D_{ij} = 0$ para $i \neq j$ .

**-Exercício:**

-Mostre que as Matrizes Blocos do mesmo tipo (mesma quina $pq$ e mesma dimensão $r$) constituem um sub-Espaço Vetorial de $M_{nn}(\mathbb{R})$

-Mostre que as Matrizes Blocos ***Diagonais*** da mesma dimensão $r$ e localização (mesma quina $p = q$ ) constituem uma sub-Álgebra de $M_{nn}(\mathbb{R})$ isomorfa a Álgebra $M_{rr}(\mathbb{R})$.

-Mostre que se $A \in M_{nn}(\mathbb{R})$ é da forma $A = B_1 \oplus B_2$ em que $B_1$ $e$ $B_2$ são matrizes Blocos Diagonais com, $r_1 + r_2 = n$ e não superpostas ($p_1 = 1$ , $p_2 = p_1 + r_1$ então $detA = (detB_1)(detB_2)$.

-Obtenha o determinante das seguinte matriz bloco:$M = \begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & B \end{pmatrix}$ , $A \in M_{rr}$ , $B \in M_{pp}$.

## MATRIZES TRIANGULARES

**DEFINIÇÃO:**

Uma matriz $A \in M_{nn}(\mathbb{R})$ é dita **triangular superior** se $A_{ij} = 0\,; i < j$ e **triangular inferior** se $A_{ij} = 0\,; i > j$ e **Diagonal** se $A_{ij} = 0\,; i \neq j$ .

Exercício:

-Mostre se $A \in M_{nn}(\mathbb{R})$ for triangular (superior ou inferior) então $detA = A_{11} \cdots A_{nn} = \prod_{k=1}^{n} A_{kk}$ . (Sugestão: Utilize a expansão de Laplace na primeira coluna.)

## MATRIZES REDUZIDAS

**DEFINIÇÃO:**

-Se $A \in M_{nn}(\mathbb{R})$ então definimos a matriz Reduzida $A^{[11]} \in M_{(n-1)(n-1)}(\mathbb{R})$ aplicando o seguinte operação: $\left(A^{[11]}\right)_{ij} = A_{(i+1)(j+1)}$ , ou seja, $A^{[11]}$ é a matriz bloco de ordem $(n-1)$ obtida da extração da primeira linha e primeira coluna de $A$.

Exercício: Mostre que a operação acima é linear.

-Analogamente $A^{[ij]}$ é a matriz de ordem $(n-1)$ obtida da extração da *i-ésima* linha e *j-ésima* coluna de $A$.

A Matriz Reduzida $A^{[ij]}$ pode ser obtida operacionalmente submetendo a Matriz $A \in M_{nn}(\mathbb{R})$ a $i-1$ trocas adjacentes de linhas e $j-1$ mudanças adjacentes de colunas ( *ou seja, a linha i passa a ser a primeira linha e a coluna j passa a ser a primeira coluna. Observe que a matriz resultante tem um determinante igual a* $(-1)^{i+j} \det A$) e em seguida aplicando a operação de Redução , tal como descrita acima.

As matrizes Reduzidas e seus determinantes comparecem na Expansão de Laplace e na construção da Regra de Cramer.

## MATRIZES PERMUTAÇÃO

**DEFINIÇÃO:**

Matrizes Permutação $P \in M_{nn}(\mathbb{R})$ são definidas da forma $P_\sigma = (e_{\sigma(1)}, \dots, e_{\sigma(n)})$ , onde $\{e_k\}$ é a base canônica de $\mathbb{R}^n$ , ou seja, $P^j = e_{\sigma(j)}$ . Estas matrizes são obtidas da matriz identidade pelo rearranjo de suas colunas (ou linhas).

Exercício:

-Calcule $\det P_\sigma$. (Sugestão: Escreva $det P_\sigma = e_{\sigma(1)} \times \dots \times e_{\sigma(n)}$ e faça trocas adjacentes até obter a matriz identidade.

**MATRIZES ORTOGONONAIS**

As Matrizes Ortogonais são originadas de conceitos Geométricos de Espaços Euclideanos,mas também desempenham papel importante no estudo algébrico, numérico e analítico das Matrizes.

**DEFINIÇÃO:**

Uma Matriz $O \in M_{nn}(\mathbb{R})$ é denominada ***Ortogonal*** se $O^T O = I$.

O conjunto de Matrizes Ortogonais será denotado por $Ort_n = \{O \in M_{nn}(\mathbb{R});\ O^T O = I\}$.

**Observações:**

-A motivação para o termo "rotação"  provem da interpretação dinâmica de corpo rígido de Euler a ser abordado no capítulo que trata do Cálculo matricial.

-A complexificação do conceito (real) de matriz ortogonal é representado pelas Matrizes Unitárias $U \in M_{nn}(\mathbb{C})$ com a seguinte condição: $U^* U = I$ em que o produto real é substituído pelo produto hermiteano: $\alpha * \beta = \alpha\bar{\beta}$.

O Teorema a seguir expõe as origens e as propriedades elementares mais importantes desta classe de Matrizes.

**TEOREMA:** *Caracterizações e Propriedades das **Matrizes Ortogonais***

1-A Matriz de transformação de Coordenadas entre bases Ortonormais é uma Matriz Ortogonal e vice-versa.

2-Uma Matriz Ortogonal é inversível,  $O^{-1} = O^T$

3-$\det O = \pm 1$

4-Os autovalores de sua complexificação *podem ser complexos*, mas sempre unitários $|\lambda| = 1$

5-A transformação linear representada por uma Matriz Ortogonal é isométrica

6-Uma Matriz é ortogonal se e somente se as suas colunas constituem um sistema Ortonormal de vetores do espaço $\mathbb{R}^n$. O mesmo com as linhas.

7-$Ort_n = \{O \in M_{nn}(\mathbb{R});\ O^T O = I\}$ é um subgrupo de $GL_n(\mathbb{R})$.

**Demonstração**:

Sejam $\{\alpha_k\}_{1\le k\le n}$ , $\{\beta_j\}_{1\le j\le n} \subset E$ bases Ortonormais do Espaço VPI $E$, e $R$ a matriz de mudança de coordenadas ( $\alpha_k = \sum_{j=1}^n R_{jk}\beta_j$ de onde, se $v = \sum x_k\alpha_k = \sum y_j\beta_j$ , $Rx = y$ ), isto é, $R = I_{[\alpha\beta]}$. Então, $\delta_{ki} = \langle \alpha_k, \alpha_i \rangle = \langle \sum_{j=1}^n R_{jk}\beta_j , \sum_{j=1}^n R_{ji}\beta_j \rangle = \sum_{j=1}^n R_{jk} R_{ji} = \langle R^k, R^i \rangle$ de onde concluímos que as colunas de $R$ são ortonormais e, portanto linearmente independentes, e $R^T R = I$. Portanto $R$ é inversivel e $R^{-1} = R^T$ de onde vem que os vetores linhas também são ortonormais. Calculando $det\ R^T R = \det R \det R^T = (\det R)^2 = \det I = 1$, ou seja, $\det R = \pm 1$. Calculando: $\langle R\,x, Ry \rangle = \langle x, R^T Ry \rangle = \langle x, y \rangle$ , o que implica na conservação de normas e de volumes.  Complexificando a Matriz, ou seja, considerando tanto o autovalor quanto o autovetor complexos, se $Rx = \lambda x$, sendo isométrica, $\langle x, x \rangle = \langle Rx, Rx \rangle = |\lambda|^2 \langle x, x \rangle$ de onde $|\lambda| = 1$.

**Exercício:**

-Mostre que se $M \in M_{nn}(\mathbb{R})$ for isométrica ( $\|Mx\| = \|x\|$ , $\forall x \in \mathbb{R}^n$) , então $\det M = \pm 1$. (Sugestão: Se $M$ preserva a norma Euclideana, então preserva o produto interno. Analise a ação de $M$ sobre uma base ortonormal. (Verifique).

**Observação**: *As matrizes que representam reflexões através de hiper-espaços também tem determinante unitário, mas negativos. Matrizes de rotação são ortogonais e tem autovalores complexos unitários, por exemplo, em* $\mathbb{R}^2$.

**MATRIZES DE REFLEXÃO**:

Uma reflexão através de um Hiper-Espaço vetorial $H_{N_0} = \{\langle h, N_0\rangle = 0\}$ na base ortogonal $\mathbb{R}^n = [N_0] \oplus [v_1] \oplus \quad ... \oplus [v_{n-1}]$ é representada pela Matriz $R = [-1\} \oplus [1] \oplus .. \oplus [1]$.

Exercícios:

-Explique os detalhes da afirmação acima.

-Mostre que $\det R = -1$.

-Mostre que $\langle Rx, Rx\rangle = \langle x, x\rangle$ isto é, a transformação é isométrica.

**MATRIZES DE PROJEÇÃO**

**DEFINIÇÃO:**

**Projeção Ortogonal sobre um Sub-Espaço de** $\mathbb{R}^n$.

Se o sub-espaço $E$ dispõe da base ortonormal $\{\alpha_k\}_{1\leq k\leq p}$ então, $P: \mathbb{R}^n \to E \subset \mathbb{R}^n$ é definida segundo o Teorema de Riesz da seguinte maneira: $Px = \sum_{k=1}^{p} \langle x, \alpha_k\rangle \, \alpha_k$ . Lembrando que $x, \alpha_k \in M_{1n}(\mathbb{R})$ podemos re-escrever a expressão de Riesz na forma matricial:

$$Px = \sum_{k=1}^{p} \alpha_k \langle \alpha_k, x\rangle = \sum_{k=1}^{p} \alpha_k (\alpha_k)^T x = \left(\sum_{k=1}^{p} \alpha_k (\alpha_k)^T\right) x$$

Ou seja $P = \sum_{k=1}^{p} \alpha_k {\alpha_k}^T$.

**Exercicios:**

-Reveja e confirme os detalhes da demonstração acima para a obtenção da estrutura da Matriz de Projeção.

-Mostre que $r(P) = p$ (Posto) e que $P^m = P$ para $m > 1$.

-Mostre que $P^2 = P$ e que $\mathbb{R}^n = P(\mathbb{R}^n) \oplus (I - P)(\mathbb{R}^n)$ , sendo esta uma decomposição Ortogonal.

-Obtenha a Matriz de Projeção $P: \mathbb{R}^n \to E \subset \mathbb{R}^n$ para $n = 3$ e : **1)** $E = [\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}]$. **2)** $E = [\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}]$.

**MATRIZES SIMÉTRICAS** $\mathcal{S}_n = Sim(n) = \{S \in M_{nn}(\mathbb{R}) \, ; \, S^T = S\}$

As Matrizes simétricas são as mais importantes e úteis da Teoria de Matrizes e grande parte desta Teoria se refere a elas. Se as entradas de uma Matriz representam conexões entre vértices, a simetria é naturalmente associada a um conceito de “ação e reação" ou reciprocidade. Geometricamente, as matrizes simétricas positivas definidas representam as deformações e o Teorema de Cauchy-Helmholz, dentre outros, ressalta este aspecto. A Teoria Espectral das Matrizes simétricas representam um dos pontos mais importantes da Teoria de Matrizes e suas aplicações e será abordado mais adiante.

**DEFINIÇÃO:**

-Uma matriz **:** $S \in M_{nn}(\mathbb{R})$ é dita **Simétrica** se $S^T = S$

Sob o ponto de vista das Matrizes como representações de Transformações lineares, as Matrizes simétricas apresentam a seguinte importante propriedade:

**Teorema:** Se $S \in M_{nn}(\mathbb{R})$ for Simétrica, $S^T = S$ , então uma transformação Ortogonal de Semelhança $\Sigma = O^T SO$ , com $O \in Ort_n$ , preserva a simetria, isto é, $\Sigma^T = \Sigma$.

**Demonstração:** ***Exercício***

Diversas e importantes propriedades das Matrizes simétricas serão tratadas na seção especial sobre a Teoria Espectral.

***Exercícios:***

-Mostre que se $\mathrm{A} \in \mathrm{M_{mn}}(\mathbb{R})$ , então as matrizes $\mathrm{AA^T} \in \mathrm{M_{mm}}(\mathbb{R})$ e $\mathrm{A^TA} \in \mathrm{M_{nn}}(\mathbb{R})$ são simétricas e $\mathrm{r(AA^T) = r(A^TA) = r(A)}$

-Mostre que se $A \in M_{nn}(\mathbb{R})$ então a matriz $S = A^T A$ é simétrica e positiva e definida se e somente se $A \in GL_n$.

**MATRIZES SIMÉTRICAS POSITIVAS**

**DEFINIÇÃO:**

-Uma Matriz Simétrica $S \in M_{nn}(\mathbb{R})$ é dita **Positiva** se $\langle Sx, x\rangle \geq 0 \ \forall x \in \mathbb{R}^n$ e **Positiva definida** se $\langle Sx, x\rangle > 0 \ \forall x \in \mathbb{R}^n - \{0\}$.

**Observação:** A definição de Positividade para Matrizes ( também denominada ***Monotonicidade*** em algumas circunstâncias) é uma generalização do conceito para funções reais. Neste caso particular a definição usual é representada pela condição : "$f(x) \geq f(y)$ se $x \geq y$" , o que faz uso da relação de ordem dos números reais e, por este motivo, não pode ser generalizada nestas forma. Entretanto, re-escrevendo esta condição na forma equivalente "$\big((f(x) - f(y))(x - y)\big) \geq 0$ , possibilitamos a sua generalização para funções com valores em um EVPI na forma: $\langle (f(x) - f(y)), (x - y)\rangle \geq 0$ que, no caso de uma função linear $T \in \mathcal{L}(E)$ em um EVPI , pode ser representada pela afirmação: $\langle Tx, x\rangle \geq 0 , \forall x \in E$ , aplicável em particular para matrizes $M_{nn}(\mathbb{R})$.

Exercício:

-Analise Geometricamente a relação entre $Sv$ e o hiperplano $H_v = \{v ; \langle v, x\rangle = 0\}$ e, consequentemente, a ação do campo vetorial $Sx$ ao longo de uma fronteira fechada no plano e no espaço.(Sugestão: Tome $x_0 \in \partial\Omega$ e $x - x_0 = v , x \in \Omega$.

-Mostre que a função com valores reais definida da forma $h(x) = \langle Sx, x\rangle$ sendo continua, atinge máximo e mínimo na esfera unitária ($S = \{x ; \|x\| = 1\}$). Mostre que estes pontos de máximo e mínimo são autovetores de $S$ e que os seus valores extremos (não-negativos) são seus respectivos autovalores. (Sugestão: Considere curvas $x(t) \in S$ cujas velocidades $\frac{dx}{dt}$ são sempre tangentes à esfera e derive $h(x(t)) = \langle Sx(t), x(t)\rangle = \sum \ S_{ij}x_i x_j = \langle Sx, \frac{dx}{dt}\rangle = 0$. As curvas podem então ser "calibradas" para passarem pelo ponto de máximo no instante $t = 0$ e em qualquer direção tangente à esfera, ou seja, no hiperplano perpendicular ao referido ponto/raio. Faça um esboço gráfico da argumentação.

**MATRIZES ANTI-SIMÉTRICAS**

**Definição:**

-Uma matriz **:** $A \in M_{nn}(\mathbb{R})$ é dita **Antisimétrica** se $A^T = -A$. O conjunto das matrizes Anti-simétricas será denotado por $\mathcal{A}_{nn}(\mathbb{R})$.

As matrizes antisimétricas são relacionadas à dinâmica e, portanto algumas de suas propriedades serão tratadas no respectivo capítulo. O Exercício abaixo sugere esta conexão.

**Exercícios:**

-As Matrizes Antisimétricas $\mathcal{A}_{33}(\mathbb{R})$ estão relacionadas com a velocidade de rotação rígida do Espaço Euclideano em torno de um eixo $\omega \in \mathbb{R}^3$ devido à seguinte expressão de Euler para a velocidade linear dos pontos deste espaço : $v(x) = \omega \wedge x = Ax$. Mostre que $A \in \mathbb{R}^3$ é antisimétrica e que há uma correspondência biunívoca $\mathcal{A}_{33}(\mathbb{R}) \leftrightarrow \mathbb{R}^3$ entre o "vetor velocidade de rotação" $\omega$ e sua representação matricial $A$. (Sugestão: v. Apêndice sobre Geometria Analítica Vetorial ).

-Mostre que toda Matriz $M \in M_{nn}(\mathbb{R})$ pode ser decomposta de uma única maneira na forma $M = A + S$ em que $A$ é antisimétrica e $S$ é simétrica e esta decomposição é ortogonal, $\langle S, A \rangle = 0$. (Sugestão: $\frac{1}{2}(M + M^T) = S$.

-Mostre que $\mathcal{A}_{nn}(\mathbb{R})$ é um subespaço de $M_{nn}(\mathbb{R})$ mas ***não*** uma sub-álgebra. O mesmo para matrizes simétricas.

-Mostre que se $A \in \mathcal{A}_{nn}(\mathbb{R})$ então $\langle Ax, x \rangle = 0$ , $\forall x \in \mathbb{R}^n$. (Sugestão: $\langle Ax, y \rangle = \langle x, A^T y \rangle$).

-Mostre que se $A \in \mathcal{A}_{nn}(\mathbb{R})$ , então $\det A = 0$.

-Dada uma matriz $A \in \mathcal{A}_{33}(\mathbb{R})$ determine $KerA$. (Sugestão: Interpretação cinemática de $A$)

Sem sombra de dúvidas os operadores lineares mais importantes da Álgebra Linear, tanto pela riqueza de resultados que eles exibem, quanto pelo seu papel estrutural na Teoria e nas Aplicações são aqueles representados pelas Matrizes Simétricas.

Um resultado simples, que tem origem na fundamentação dos Modelos Matemáticos para a Dinâmica do Contínuo (Fluidos, Elásticos e etc.) e explicita claramente a importância estrutural desta classe de matrizes é o Teorema de Cauchy-Helmholz.

**Teorema-Cauchy-Helmholz-**

Definindo $\mathcal{A}_n = \{A \in M_{nn}(\mathbb{R})\ ;\ A^T = -A\}$ e $\mathcal{S}_n = \{S \in M_{nn}(\mathbb{R})\ ;\ S^T = S\}$ então;

1- $\mathcal{A}_n{}^{\perp} = \mathcal{S}_n$ (Produto interno de Frobenius)
2- $M_{nn}(\mathbb{R}) = \mathcal{A}_n \oplus \mathcal{S}_n$
3- $\dim \mathcal{A}_n = \frac{n^2-n}{2}$ e $\dim \mathcal{S}_n = \frac{n^2+n}{2}$

**Demonstração: Exercício**.(Sugestão: $M = \frac{1}{2}(M + M^T) + \frac{1}{2}(M - M^T)$ .

**Observação:** Esta decomposição é fundamental para o estudo de Fluxos em Dinâmica do Meio Contínuo, pois decompõe ***localmente*** um campo de velocidades , $v(x_0 + h) = v(x_0) + \frac{\partial v}{\partial x}(x_0)h + o(h)$ em três compoentes: uma translação comum, $v(x_0)$ que não representa nenhum movimento relativo entre os pontos, e duas componentes com significados distintos, uma parte (Simétrica), $S_{ij} = \frac{1}{2}(\frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i})$ que representa a deformação do meio e outra (Antisimétrica), $A_{ij} = \frac{1}{2}(\frac{\partial v_i}{\partial x_j} - \frac{\partial v_j}{\partial x_i})$ que representa um movimento rígido de rotação/vórtices, pois para $n = 3$ , como já foi visto, é possivel re-escrever esta componente na forma vetorial $Ah = \omega \wedge h$ , de onde vem $\omega = rotv\,(x_0)$. (Ref. C.Lin&L.Segel-Math applied to Natural Sciences, SIAM 1990).

Na próxima seção apresentaremos alguns resultados da Teoria Espectral elementar que se refere especificamente às Matrizes Simétricas e desempenham papel fundamental na Matemática e em suas Aplicações.

# X-TEORIA ESPECTRAL: *Decomposição Fundamental da Teoria de Matrizes*

## -Introdução

As Matrizes simétricas são originalmente definidas simplesmente pela sua aparência visual ou sua organização gráfica (isto é, a simetria dos seus coeficientes com relação à diagonal) o que, em principio, não indica qualquer propriedade estrutural notável. Entretanto, ao analisarmos as suas propriedades operacionais e o seu variado papel na representação de diversos conceitos matemáticos e das aplicações, torna-se clara a sua importância fundamental para toda a Teoria de Matrizes.

As matrizes Simétricas são particularmente relacionadas à estrutura de produto interno e a sua caracterização operacional, que permitirá uma generalização para operadores lineares $T \in \mathcal{L}(E)$, $E$ qualquer EVPI, é descrita neste contexto.

**Teorema**: *Caracterização **Operacional** de uma Matriz Simétrica*

Uma Matriz $S \in M_{nn}(\mathbb{R})$ é simétrica ***se e somente se*** satisfaz à seguinte condição:

$$\langle Sx, y\rangle = \langle x, Sy\rangle \ , \forall x, y \in \mathbb{R}^n$$

**Demonstração**:Exercício. (Sugestão: Se $\langle Sx, y\rangle = \langle x, Sy\rangle \Leftrightarrow \langle (S - S^T)x, y\rangle = 0$, de onde $(S - S^T)x = 0 \ , \forall x$).

Utilizando a Metodologia usual de Euclides-Hilbert generalizaremos o conceito de "*Simetria*" para operadores lineares $T \in \mathcal{L}(E)$ independente da dimensão e da constituição do Espaço Vetorial com Interno $E$ :

**DEFINIÇÃO: *Operadores Simétricos***

Se $E, \langle , \rangle$ for um EVPI , então $T \in \mathcal{L}(E)$ é dito *Simétrico* se $\langle Tv, w\rangle = \langle v, Tw\rangle \ , \forall v, w \in E$.

**Observação**: *É importante ressaltar que o Espaço Vetorial $E$ pode ser dotado de várias estruturas de produto interno e, portanto, a definição de simetria para um Operador Linear deve explicitar a qual delas se refere*. Um operador linear $T \in \mathcal{L}(E)$ pode ser simétrico em $\{E, \langle , \rangle\}$ e não o ser em $\{E, [\ ,]\}$.

Se um operador $T \in \mathcal{L}(E)$ for simétrico em uma estrutura $E, \langle , \rangle$ de EVPI a sua representação matricial também deve levar em conta este fato. O Teorema abaixo explica e explicita esta questão:

Teorema: *Representação Matricial de Operadores simétricos em Espaços Vetoriais de dimensão Finita*

Se operador $T \in \mathcal{L}(E)$ for simétrico em uma estrutura $E, \langle , \rangle$ de EVPI então a sua representação matricial $T_{[\alpha]} \in M_{nn}(\mathbb{R})$ será uma matriz simétrica *se e somente se* a base $\alpha = \{\alpha_k\}_{1 \le k \le n} \subset E$ for ortonormal e, portanto, as representações matriciais simétricas para $T$ são semelhantes com relação ao grupo ortogonal, ($T_{[\alpha]} = O^T T_{[\beta]} O$).

**Demonstração**:Exercício.

Exercícios:

-Demonstre o Teorema acima.

-Considere o EVPI $E = \{f \in P(\mathbb{R}); f(0) = f(1) = 0\}$ dotado de dois produtos internos: $\langle f, g\rangle = \int_0^1 f(x)g(x)dx$ e $[f, g] = \int_0^1 f(x)g(x)dx + \int_0^1 f'(x)g'(x)dx$. Mostre que o Operador linear $T = D^2 = \frac{d^2}{dx^2}$ é simétrico com relação ao primeiro EVPI ($\{E, \langle , \rangle\}$) e não com relação ao segundo EVPI $\{E, [\ ,]\}$. (Sugestão-Utilize integração por tantas vezes quanto necessárias para "passar" a derivada de um termo para outro sucessivamente).

## Xb- O Teorema Espectral

A Teoria Espectral Elementar que apresentaremos logo a seguir é uma coleção de resultados específicos que se referem a Matrizes Simétricas Reais de $M_{nn}(\mathbb{R})$ que em decorrência do Teorema acima pode ser reformulado em termos de Operadores Simétricos em Espaços VPI de dimensão finita. A extensão desta teoria para Operadores Simétricos em Espaços Funcionais de dimensão infinita constituiu-se em um dos programas mais bem sucedidos e influentes da Matemática e suas Aplicações ao longo dos séculos XIX e XX e ainda em curso. Por esta razão, embora as suas versões em dimensão infinita não sejam temas destas Notas, apresentaremos o Teorema utilizando uma nomenclatura que é facilmente identificável em sua maior generalidade o que facilitará consideravelmente esta transição em tempo oportuno. O Método de Fourier que é uma das técnicas mais importantes da Matemática contemporânea e representa a metodologia empregada na aplicação da Teoria Espectral, será apresentada também em uma versão de dimensão finita, mas com a roupagem adequada para sua generalização.

**TEORIA ESPECTRAL DE MATRIZES E OPERADORES SIMÉTRICOS:**

**Cenário: $S \in M_{nn}(\mathbb{R})$ é uma Matriz Real Simétrica, $S^T = S$**

1-A complexificação da uma matriz real $S$ (isto é, considerando-a imersa em $S \in M_{nn}(\mathbb{C})$ ) admite apenas autovalores reais e autovetores reais.

2-Autovetores de $S$ correspondentes a autovalores distintos, são ortogonais.

3-A Transformação $S$ é invariante em Sub-espaços ortogonais a Espaços gerados por seus autovetores.

4-Os autovalores máximo $\lambda_M$ e mínimo $\lambda_m$de $T$ podem ser calculados variacionalmente segundo o Método de Courant-Fisher: $\lambda_M = \max_{\|x\|=1}\|Sx\|$ $\lambda_m = \min_{\|x\|=1}\|Sx\|$.

**5**-Existe uma ***base ortonormal*** $\{v_k\}_{1\le k\le n}$ de ***autovetores*** de $S$ para o espaço $\mathbb{R}^n$, $Sv_k = \lambda_k v_k$ .

6-A Matriz $O$ cujas colunas são os autovetores de $S$, $O^j = v_j$ , é Ortonormal e $O^T S O = diag\{\lambda_k\}$ em que os autovalores $\lambda_k$se repetem na diagnonal tanto quantos forem as respectivas dimensões de $Ker(S-\lambda_k)$, ou seja, $S$ é ***diagonalizável*** por transformação de Semelhança Ortogonal,

7-O Espaço $\mathbb{R}^n$ pode ser decomposto em Soma direta ortogonal de Auto-Espaços de $S$ :

$\mathbb{R}^n = \sum_{\oplus} Ker(S-\lambda_k)$

**8**-É possível decompor a ação de $S$ em somas diretas de Projeções

$$S = \sum_{k=1}^{p} \lambda_k P_k = \sum_{k=1}^{n} \lambda_k {v_k}^T v_k$$

em que $P_k$ são matrizes de projeção ortogonal no sub-espaço $Ker\{S-\lambda_k\}$ e a matriz ${v_k}^T v_k$ representa a Projeção em $v_k$.

**Demonstração**:

**1)**- $\langle v, Sv\rangle = \bar{\lambda}\langle v, v\rangle = \langle Sv, v\rangle = \lambda\langle v, v\rangle$ e, como $\langle v, v\rangle > 0$ conclui-se que $\bar{\lambda} = \lambda$. **2)**- $\langle Sv, w\rangle = \lambda\langle v, w\rangle = \langle v, Sw\rangle = \mu\langle v, w\rangle$ , de onde $(\mu-\lambda)\langle v, w\rangle = 0$ . **3)**-$\langle Sv, w\rangle = \lambda\langle v, w\rangle = \langle v, Sw\rangle$. Portanto, se $\langle v, w\rangle$ então $\langle v, Sw\rangle = 0$.

**4).**Considere uma função ( “curva sobre a esfera unitária”) $x: \mathbb{R} \to \Sigma = \{v \in \mathbb{R}^n, \|v\|^2 = 1\}$. Então, derivando $\|x(t)\|^2 = 1$ , conclui-se que$\frac{dx}{dt}(t) \perp x(t)$ o que é geometricamente óbvio. Como a função $\langle Sv, v\rangle$ é continua em $\mathbb{R}^n$, ela atinge mínimo em um ponto $x_m \in \Sigma$ . Utilize agora curvas que passam pelo ponto de mínimo (ou máximo) no “instante” $t = 0$ $(x(0) = x_m$ ) e com tangente $\frac{dx}{dt}(0) = w$ a escolher. Derivando agora a função $\langle Sx(t), x(t)\rangle$ e aplicando a regra de Leibniz na expressão com coordenadas e a simetria de $S$, obtém-se $\langle Sx_m, \frac{dx}{dt}(0)\rangle = 0$ de onde, pela arbitrariedade do vetor tangente $\frac{dx}{dt}(0) = w$ conclui-se que $Sx_m \parallel x_m$, ou seja, $Sx_m = \lambda x_m$ de onde $\langle Sx_m, x_m\rangle = \lambda_m$ é o valor mínimo da função. Esse valor então pode ser calculado segundo o Método de Courant-Fisher.

**5)**-Consideremos o autovalor mínimo $\lambda_m$ obtido pelo Método Variacional de Courant-Fisher e tomemos uma base ortonormal $\{v_k\}_{1\le k\le n_1}$para $Ker(S-\lambda_m)$, cuja dimensão é $n_1 > 0$. Se $n_1 = n$ então o Teorema está demonstrado e $S = \lambda_m I$ . Caso contrário, observamos que a transformação linear $S$ é invariante em $\{Ker(S-\lambda_m)\}^{\perp} = E_1$ onde $\dim E_1 = n - n_1 > 0$ e $S: E_1 \to E_1$ é simétrica. Portanto,podemos repetir o processo neste sub-espaço e daí por diante até que os autovalores de $S$ se esgotem.

**6)**Basta escrever as expressões $Sv_k = \lambda_k v_k$ na forma matricial por colunas e teremos $SO = O\ diag(\lambda_k)$ de onde vem o resultado.

Os outros itens são demonstrados utilizando os resultados anteriores e reformulando-os apropriadamente. Em particular, lembre-se da Expressão matricial para um operador Projeção Ortogonal.

O resultado 4) é denominado Método Variacional de Courant-Fisher para o Calculo de Autovalores (e Autovetores)e pode ser repetido para os espaços ortogonais aos Auto-espaços que são sucessivamente obtidos e com isto todo o espectro pode ser calculado.

Os resultados 5) , 6) são a essência do Método de Fourier e a expressão 8) é uma formulação utilizada por J. von Neumann na primeira metade do século XX para a extensão deste Teorema a situações muito mais gerais em dimensão infinita. (P.Lax-*Functional Analysis*, J.Wiley 2002).

## Xc-Método Espectral de Fourier-Difusão e Oscilações

Consideremos o sistema de Equações Diferenciais Ordinárias lineares da forma vetorial cuja incognita é uma função $x: \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n, x(t) = \begin{pmatrix} x_1(t) \\ \dots . \\ x_n(t) \end{pmatrix}$ que, na verdade é uma coleção de funções reais $x_k(t)$, caracterizadas pela EDO $\frac{dx}{dt} = \begin{pmatrix} \frac{dx_1(t)}{dt} \\ \dots . \\ \frac{dx_n(t)}{dt} \end{pmatrix} = Sx$ , onde $S$ é uma matriz simétrica.

(V.por exemplo o processo de Difusão compartimental em que $x_k(t)$ representa a concentração de uma substância em uma seção de um tubo e a matriz $S$ é tridiagonal que representa a "Lei de Fick" segundo o seguinte Modelo: $\frac{dx_k}{dt} = D(x_{k-1} - x_k) + D(x_{k+1} - x_k) = D(x_{k-1} - 2x_k + x_{k+1})$ com, $x_{n+1} = x_0 = 0$ . Ref. WCFerreira jr-Notas de Modelos em Biomatemática).

**O Método de Fourier parte da seguinte observação (quase óbvia):**

***"Se $v \in \mathbb{R}^n$ for um autovetor da matriz $A \in M_{nn}(\mathbb{R})$ com respeito ao autovalor $\lambda$ , então a função vetorial $h(t) = e^{\lambda t} v$ é solução da equação diferencial $\frac{dx}{dt} = Ax$ para funções $x: \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$ ".***

Para verificar isto basta derivar a função $\frac{d}{dt}h(t) = \lambda e^{\lambda t} v$ e calcular $Sh = Se^{\lambda t} v$ $=e^{\lambda t} Sv = e^{\lambda t}\lambda v$ e colher a conclusão.

**Observação:** A frase acima pode ser *complexificada*, assumindo, respectivamente, $v \in \mathbb{C}^n$, $A \in M_{nn}(\mathbb{C})$ e $x: \mathbb{R} \to \mathbb{C}^n$.

Utilizando agora o Teorema Espectral tomemos a base ortonormal $\{v_k\}_{1\le k\le n}$ de autovetores de $S$, cada um deles originando uma solução (real) $h_k(t) = e^{\lambda_k} v_k$ com seus respectivos autovalores (reais) $\{\lambda_k\}_{1\le k\le n}$ . Desta forma, em vista da linearidade da operação de derivação e da operação matricial, podemos escrever a solução geral da Equação vetorial na forma: $x(t) = \sum_{k=1}^{n} c_k\, e^{\lambda_k t} v_k$ para quaisquer coleções de coeficientes (reais) $\{c_k\}$ (Verifique).

Se agora desejamos obter a solução especifica da dinâmica que parte da condição inicial $x(0) = x^0 \in \mathbb{R}^n$**, basta acertar os coeficientes** $\{c_k\}$ para que $x(0) = \sum_{k=1}^{n} c_k\, e^{\lambda_k 0} v_k = \sum_{k=1}^{n} c_k\, v_k = x^0$. Mas como os vetores $v_k$ são ortonormais (e esta é a grande vantagem do Método de Fourier com matrizes simétricas), conclui-se que $c_k = \langle v_k, x^0 \rangle$.

Assim, a solução final de Fourier para o problema de valor inicial: $\dot{x} = Sx$ , $x(0) = x^0$ é dado pela expressão:

.
$$x(t) = \sum_{k=1}^{n} e^{\lambda_k t} \langle v_k, x^0 \rangle v_k$$

ou, na forma operacional que representa o ***Operador solução*** $U(t)$ (que associa uma solução $U(t)x_0$ a cada condição inicial $x^0$ ) da seguinte maneira:

$$x(t) = \left(\sum_{k=1}^{n} e^{\lambda_k t} P_k\right) x^0 = U(t)\, x^0 \, .$$

Problemas de Oscilações de Estruturas elásticas ou a propagação de ondas são freqüentemente representados por um Modelo Matemático da forma:

$$\frac{d^2x}{dt^2} = Sx$$

em que $S$ é uma matriz simétrica. Sendo este um problema Dinâmico de segunda ordem, ele exige condições iniciais que estipulem tanto a posição do sistema quanto a sua velocidade no instante $t = 0$: $x(0) = x_0$ e $\dot{x}(0) = w_0$. O procedimento de Fourier para este problema segue o mesmo argumento apresentado acima com algumas modificações e pode ser consultado em R.Bassanezi-WCFerreir Jr.-Equações Ordinárias, Harbra 1988.

A grande lição do Método de Fourier é a explicitação e a focalização do comportamento dinâmico do sistema nos ***autovalores do operador simétrico*** (gerador de dinâmica) $S$, razão porque também é denominado Método Espectral. Esta também é a razão porque o estudo e desenvolvimento de métodos de análise e cálculo do espectro de vários operadores lineares ocupa uma extensa atividade da Matemática e suas Aplicações contemporâneas.

## Xd-Método de Diagonalização (*Desacoplamento*) de Fourier: *Dinâmica Recursiva*

Consideremos uma dinâmica é recursiva na forma $\varphi_{k+1} = S\varphi_k$ onde a incógnita é a função $\varphi: \mathbb{N} \to \mathbb{C}$ e $S \in M_{nn}(\mathbb{R})$ é uma Matriz.

É fácil escrever a solução formal desta recursão como $\varphi_k = S^k \varphi_0$ o que parece ter finalizado a questão. Entretanto, o cálculo de potencias de matrizes exige um tempo computacional excessivo, mesmo para sistemas de pequena dimensão e por poucas iterações. (Um modelo demográfico simples de Fibonacci-Euler para a população Brasileira utiliza matrizes de ordem 50, com 2500 coeficientes e cada passo da recursão, que deve ser analisada por 100 iterações, exige o calculo de $6 \times 10^8$ produtos).

O procedimento de diagonalização é uma maneira de poder calcular eficientemente potencias de uma matriz que, se forem feitas segundo a definição de produto, levariam anos para serem finalizadas, mesmo com computadores atualizados.

Suponhamos então que a matriz $S$ seja diagonalizável por uma transformação de Semelhança $PSP^{-1} = diag(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$, (o que as matrizes simétricas admitem, mas não são as únicas).

Multiplicando a equação pela matriz $P$ , $P\varphi_{k+1} = PS\varphi_k$ e fazendo o arranjo:

$$P\varphi_{k+1} = PSP^{-1}\,P\varphi_k$$

obtemos uma recursão equivalente, mas "*desacoplada*" (isto é, quando cada equação escalar é independente das outras) para a função $\psi_k = P\varphi_k$:

$$\psi_{k+1} = diag(\lambda_1, \dots, \lambda_n)\psi_k = D\psi_k\ .$$

Obviamente, como $D$é diagonal $D^k = diag\left({\lambda_1}^k, \dots, {\lambda_n}^k\right)$ de onde tiramos uma expressão explicita para a solução da recursão:

$$\varphi_k = P^{-1}\,diag\left({\lambda_1}^k, \dots, {\lambda_n}^k\right)P\ \varphi(0).$$

**EXERCÍCIOS:**

-Mostre que a Recursão de Fibonacci de segunda ordem($F(n+2) = F(n=1) + F(n)\ ;\ \forall n \in \mathbb{N}$ ) e dimensão 1 (isto é, numérica) pode ser escrita como uma recursão ***equivalente*** de primeira ordem e dimensão dois da seguinte maneira:$\varphi(n+1) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\varphi(n);\ \forall n \in \mathbb{N}$ em que $\varphi(n) = \begin{pmatrix} F(n) \\ F(n+1) \end{pmatrix}$. (Obs:Equivalencia significa que todas as soluções de uma recursão podem ser transformadas em soluções da outra recursão e vice-versa)

-Utilize o Método de Fourier Espectral para descrever explicitamente a Dinâmica recursiva de Fibonacci vetorializada $\varphi(n+1) = S\ \varphi(n)$ de forma geral.

-Utilize o Método de Fourier Diagonal (Desacoplamento) para descrever explicitamente a Dinâmica recursiva de Fibonacci vetorializada $\varphi(n+1) = S\ \varphi(n)$ de forma geral.

-Calcule a solução do Problema de valor Inicial $F(0) = 1, F(1) = 2$ nos dois casos e compare as soluções.

-Com a solução de Fourier (nas duas formas) mostre que $F(n)$ cresce exponencialmente quando $n \to \infty$ e argumente sobre a influencia de $Sp(S)$ neste comportamento. (Crescimento expoencial significa que existem constantes $C, \gamma > 0$ tal que $|F(n)| \geq Ce^{\gamma n}$ ,$\forall n > 0$.

**XXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXX**

# APÊNDICE:

## ÁLGEBRAS : *OPERADORES LINEARES, MATRIZES*

### I- INTRODUÇÃO:

A Estrutura de Álgebra $\mathcal{A}$ sintetiza abstratamente a existência de uma operação ***produto*** em **Espaço Vetorial** com valores nele mesmo, $E \times E \to E$ , que, em geral, denotaremos simplesmente por justaposição $uv$ . (**Observação**: Um *produto interno,* $\langle\ ,\ \rangle: E \times E \to \mathbb{R}\ (\mathbb{C})$, não faz parte desta classe de estruturas, pois, apesar do nome, assume valores exteriores ao espaço vetorial. Curiosamente, o *produto vetorial* definido em Espaços Euclideanos, embora produza *resultados internos*, $\wedge: E \times E \to E$ , é comumente denominado de *produto exterior*; uma das muitas incongruências entre a nomenclatura matemática e o uso cotidiano da linguagem).

A origem do conceito de produto em um Espaço Vetorial é devida a importantes protótipos (Modelos) representados pelos seguintes Espaços Vetoriais e os respectivos produtos que são definidos naturalmente : Números Complexos ($\mathbb{C}\,, +, \cdot$ ) com o produto complexo, Matrizes Quadradas de mesma ordem ( $M_{nn}(\mathbb{R})\,/M_{nn}(\mathbb{C})$ com o produto matricial usual, Operações Lineares em um Espaço Vetorial ($\mathcal{A} = \mathcal{L}(E)$,∘) com a composição, e em um outro contexto, os Espaços Vetoriais de Funções com valores reais (ou complexos) e domínio qualquer $\Omega\,; \mathcal{F}(\Omega, \mathbb{R}) \subset (\mathcal{F}(\Omega, \mathbb{C})\,)$, e particularmente $C^k([0,1], \mathbb{R})$ ,com produto ponto a ponto, e as expressões Polinomiais $P(\mathbb{R})$ com o produto algébrico. Em linhas gerais, qualquer conjunto de funções $\mathcal{F}(\Omega, \mathcal{A})$ com domínio qualquer $\Omega$ e com valores (contradomínio) em uma Álgebra $\mathcal{A}$ com as operações Soma e Produto ponto a ponto herdadas de $\mathcal{A}$ , constitui uma Álgebra.

Observe que em um mesmo Espaço Vetorial podem ser definidos mais de uma operação produto e, portanto a caracterização da Estrutura de Álgebra inclui não apenas a especificação do Espaço Vetorial "hospedeiro", mas também o produto considerado. Exemplo típico disso é representado pelo espaço das matrizes no qual podem ser definidos dois produtos naturais completamente distintos: 1)Produto matricial usual e 2)Produto ponto a ponto (também denominado Produto de Kronecker ou de Hadamard)

A extensão e relevância dos exemplos desta lista indica claramente a importância e a necessidade de um conceito sintetizador. Embora o foco deste texto esteja sobre as Álgebras $\mathcal{A} = \mathcal{L}(E)$,∘) e ( $M_{nn}(\mathbb{R})\,/M_{nn}(\mathbb{C})$ , a caracterização axiomática operacional desta Estrutura será apresentada em seguida com o objetivo de abranger os importantes Modelos já citados e, eventualmente, outros.

## II – DEFINIÇÕES GERAIS

## DEFINIÇÃO: ÁLGEBRAS

**Uma Álgebra $\boldsymbol{\mathcal{A}}$ é um Espaço Vetorial** $E$ (Real ou Complexo) no qual está definido um **Produto** binário $E \times E \to E$ , que representaremos, em geral, por justaposição $uv$ e satisfazendo os seguintes Axiomas ( $u, v, w \in \boldsymbol{\mathcal{A}}\,\,, \gamma, \alpha\,\in \mathbb{R}\,(\mathbb{C})$ **) :**

1)***Associatividade do Produto*** entre vetores: $(uv)w = u(vw)$

***2)Associatividade da Multiplicação*** por Escalar: $\gamma(\alpha u) = (\gamma\alpha)u$

**3**)-***Homogeneidade***: $u(\gamma v) = \gamma(uv)$ ,

**4)*Distributividade Bilateral***: $u(v + w) = uv + uw\quad \&\ (u + v)w = uw + vw$

## DEFINIÇÕES de Estruturas Específicas de ÁLGEBRA:

-**Álgebra com Identidade:** Se existir um elemento neutro $\theta$ (dito identidade) tal que: $\theta u = u\theta = u$.

-**Álgebra Comutativa**: Se $uv = vu$

-**Álgebra com Divisão**: Elementos não nulos admitem recíprocos (i.e., $\forall u \in \mathcal{A}\,, u \neq 0\,, \exists w\,; uw = \theta$ ).

-**Sub-Álgebra**: Se $\mathcal{A}$ for uma Álgebra e $H \subset \mathcal{A}$ for um sub-espaço vetorial que contem a identidade $\theta$ e é fechada (estável) para o produto, i.*e.,* " $u, v \in H \Longrightarrow uv \in H$ " *,* então diz-se que $H$ é uma sub-Álgebra de $\mathcal{A}$.

## ISOMORFISMO entre ÁLGEBRAS:

**Dadas duas Álgebras** $(\mathcal{A}_1,\cdot), (\mathcal{A}_2,*)$ , então, um *Isomorfismo Linear* $\varphi\colon \mathcal{A}_1 \to \mathcal{A}_2$entre as respectivas Estruturas de Espaços Vetoriais hospedeiras é dito ***Isomorfismo entre Álgebras*** se $\varphi(a \cdot b) = \varphi(a) * \varphi(b)$.

**Observação**: Na definição acima utilizamos notações distintas para designar os produtos nas duas Álgebras com o objetivo de enfatizar o papel de cada um deles, mas, em geral, a justaposição simples é a notação utilizada a menos que haja possibilidade de confusão.

## Exercícios:

-Mostre que os números Racionais, Reais e Complexos com suas operações de soma usual e Multiplicação por escalares diversos $(\mathbb{Q}, \mathbb{R}, \mathbb{C})$ com os seus produtos usuais constituem Álgebras comutativas com Identidade e Divisão.

-Mostre que as matrizes $\mathcal{M} = \left\{\begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}, a, b \in \mathbb{R}\,,\right\} \subset M_{nn}(\mathbb{R})$ constituem uma sub-álgebra de $M_{nn}(\mathbb{R})$ isomorfa à Álgebra dos Números complexos $\mathbb{C}$ com escalares reais. (Sugestão: $\varphi\colon \mathbb{C} \to \mathcal{M};\ \varphi(a + ib) = \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}$).

-Mostre que o Espaço Vetorial Cartesiano Real $\mathbb{R}^2$ dotado de um produto ( $*$ ) definido segundo a "*fórmula complexa*" : $(a,b)*(x,y)=(ax-by,ay+bx)$ constitui uma Álgebra, com Identidade, Comutativa, com Divisão e isomorfa à Álgebra natural dos Números Complexos. com que seja $\mathbb{C}=\{x+iy;x,y\in\mathbb{R}\}$ com suas operações usuais de soma, multiplicação por escalar ($\mathbb{C}$) e produto complexos é isomorfa à sub-Álgebra de $M_{22}(\mathbb{R})$ constituída das matrizes: $\begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}, a,b\in\mathbb{R}$

-Mostre que o sub-conjunto des Matrizes $\begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}, a,b\in\mathbb{R}, a^2+b^2=1$ constituem uma Estrutura de Grupo com operação de produto de Matrizes e que é isomorfo ao sub-grupos de Números complexos $S_1=\{e^{i\theta}\ ;\ \theta\in\mathbb{R}\ \}$.

-Mostre que sobre o mesmo Espaço Vetorial $M_{nn}(\mathbb{C})$ podem ser definidas duas estruturas de Álgebras comutativas com elementos neutros distintos: 1)Produto Matricial usual,( $(AB)_{ij}=\sum_{k=1}^{n}A_{ik}B_{kj}$) e 2)Produto de Kronecker-Ponto a Ponto $(AB)_{ij}=A_{ij}B_{ij}$ . Mostre que estas Álgebra não são Isomorfas.(Sugestão: Compare os elementos neutros dos dois produtos)

## -Sub-Álgebra Gerada por um Elemento

$h\in\mathcal{A}$ . Se $\mathcal{A}$ for uma Álgebra e $h\in\mathcal{A}$ , então, o conjunto descrito na forma $[\![h]\!]=\{u=\sum_{k=0}^{m}c_kh^k; m\in\mathbb{N}, c_k\in\mathbb{R}\}=\{u=p(h),p\in P(\mathbb{R})\}$ constitui uma sub-Álgebra de $\mathcal{A}$ que se diz gerada por $h$.

**Exercício**: Mostre que existe uma bijeção (Isomorfismos entre Álgebras) $[\![h]\!]\leftrightarrow P(\mathbb{R})$ definida pela associação natural $u=\sum_{k=0}^{m}c_kh^k \leftrightarrow p(x)=\sum_{k=0}^{m}c_kx^k$ e, portanto, $[\![h]\!]$ é sempre uma Álgebra Comutativa com elemento identidade.

## -Sub-Álgebra Gerada por um conjunto:

Se $\mathcal{A}$ for uma Álgebra e $H\subset\mathcal{A}$ , então o conjunto $[\![H]\!]=\left\{h=\sum_{|\alpha|=0}^{m}c_\alpha {h_1}^{\alpha_1}\cdots {h_p}^{\alpha_p}\ ;\ m\in\mathbb{N},\alpha\in(\mathbb{Z}^+)^p, |\alpha|=\alpha_1+\cdots+\alpha_p, c_\alpha\in\mathbb{R}\ \right\}$ de todos os elementos da Álgebra representados finitamente como Combinações lineares de Produtos entre os elementos de $H$ constitui uma sub-Álgebra denominada sub-Álgebra gerada por $H$.

**Exercício**: Se $E=C^\infty(\mathbb{R},\mathbb{R})$ Mostre que a sub-Álgebra de $\mathcal{L}(E)$ gerada pelos operadores *(Multiplicação por função)* $M_x: E\to E, M_xf(x)=xf(x)$ e (*Derivação*) $D: E\to E, Df(x)=f^{/}(x)$ **não** é comutativa , pois $M_xD\neq DM_x$ .

## -*Operadores Polinomiais Diferenciais*-

Diz-se que um Operador Diferencial Linear de Coeficientes Constantes $\mathcal{L}=a_0+\ldots+a_kD^k+\cdots+a_nD^n\in[\![D]\!]$ é associado ao Polinômio $p(x)=a_0+\ldots+a_kx^k+\cdots+a_nx^n\in P(\mathbb{R})$ e usualmente denotado na forma: $\mathcal{L}=P(D)$.

## -Álgebra Comutativa dos Operadores Polinomiais Diferenciais:

Se $C^\infty(\mathbb{R},\mathbb{R})=E$ for o espaço vetorial de todas as funções reais com derivadas de todas as ordens e $D: E\to E, Du\ (x)=\frac{du}{dx}$, então $[\![D]\!]=\{p(D);p\in P(\mathbb{R})\}$ é a ***Álgebra dos Operadores Polinomiais Diferenciais***.(Também chamada *Álgebra de Heaviside*)

## Exercícios:

-Mostre que existe um Isomorfismo natural ente as Álgebras dos Operadores Polinomiais e a Álgebra dos Polinômios $p(D)=a_0+\ldots+a_kD^k+\cdots+a_nD^n\in[\![D]\!] \leftrightarrow p(x)=a_0+\ldots+a_kx^k+\cdots+a_nx^n\in P(\mathbb{R})$ .

--Escreva o Operador Polinomial Diferencial que descreve a Equação de um Sistema Massa-Mola-Atrito Viscoso:

$$m\frac{d^2u}{dt^2}-c\frac{du}{dt}-ku=0$$

## -Álgebra dos Operadores Polinomiais de Recursão:

Se $\mathcal{F}(\mathbb{N},\mathbb{R})=E$ for o espaço vetorial de todas as funções com variável inteira e valores reais,(ou, seqüência de números reais), então $S: E\to E, Su\ (k)=u(k+1)$ , é linear e $[\![S]\!]=\{p(S);p\in P(\mathbb{R})\}$ é a ***Álgebra dos Operadores Polinomiais Recursivos***. (Observação: A letra "*S*" é utilizada para representar este Operador devido a origem do termo em inglês "*Shift*", ou seja, Deslocamento).

-Um operador de recorrência $p(S) = a_0 + \ldots + a_k S^k + \cdots + a_n S^n \in [\![S]\!]$ diz-se polinomial e associado ao polinômio $p(x) = a_0 + \ldots + a_k x^k + \cdots + a_n x^n \in P(\mathbb{R})$

## Exercícios:

-Mostre que existe um Isomorfismo natural ente as Álgebras dos Operadores Recursão e a Álgebra dos Polinômios $p(S) = a_0 + \ldots + a_k S^k + \cdots + a_n S^n \in [\![S]\!] \leftrightarrow p(x) = a_0 + \ldots + a_k x^k + \cdots + a_n x^n \in P(\mathbb{R})$

-Escreva o Operador Polinomial de recursão que descreve a recursão de Fibonacci: $F(k+2) - F(k+1) - F(k) = 0$.

## -**Álgebra de Séries Formais**:

Se $\mathcal{F}_0(\mathbb{N},\mathbb{R}) = \{h \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}; Existe\ N_h\ , h(k) = 0\ \ se\ k > N_h\}$ for o Espaço vetorial das funções com variável inteira e valores reais finitas, é possível definir um produto (denominado de convolução) escrevendo cada seqüência $h, g \in \mathcal{F}_0(\mathbb{N},\mathbb{R})$ como uma série Formal $h \approx \sum_{k=0}^{\infty} h_k x^k$ de tal forma que $hg \approx (\sum_{k=0}^{\infty} h_k x^k)(\sum_{k=0}^{\infty} g_k x^k) = \sum_{p=0}^{\infty}\{\sum_{j=0}^{p} h_{p-j} g_j\} x^p$ de tal forma que $h * g\ \ (p) = \sum_{j=0}^{p} h_{p-j} g_j$.

## Álgebra de Taylor (Analítica) –

As funções de variável real e valores reais (ou complexos) definidas em alguma (qualquer) vizinhança da origem por séries de Taylor convergentes: $C^{\omega}(0) = \{f: (-\delta,\delta) \to \mathbb{R}\ ; f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k\}$ com as operações de soma e produto ponto a ponto constituem uma sub-Álgebra da Álgebra de Polinômios $P(\mathbb{R})$. (**Observação**: De acordo com o teste da raiz para a convergencia de séries de potências, estas funções podem também ser caracterizadas pelas sequencias $\{a_k\}$ de coeficientes que são exponencialmente limitadas, ou seja, para as quais existem constantes positivas $C, \gamma > 0\ \ e\ \ |a_k| \le C\gamma^k\ , \forall k$. Ref. Bons textos de Cálculo, por exemplo, R.Courant, P.D.Lax e etc.).

## Exercício:

-Mostre que a Álgebra acima pode ser considerada como Induzida pela bijeção natural $\varphi: \mathcal{F}_0(\mathbb{N},\mathbb{R}) \to P(\mathbb{R})$; $\varphi(h)(x) = \sum_{k=0}^{\infty} h(k) x^k$

-

## DEFINIÇÃO: Isomorfismo entre Grupos-

Se $G\ e\ H$ são dois Grupos (com suas respectivas operações denotadas por simples justaposição dos fatores), então, uma **bijeção** $\varphi: G \to H$ é um ***Isomorfismo entre os dois Grupos*** $G\ e\ H$ se preservar a operação intrínseca de grupo, isto é, $\varphi(ab) = \varphi(a)\varphi(b)$.

## TEOREMA: Construção de Álgebras por Indução

Se $\varphi: E \to H$ for Isomorfismo entre Espaços Vetoriais e $E$ for uma Álgebra com a operação produto ," $\cdot$ " $: E \times E \to E$ , então é possível "*induzir*" uma operação produto " $*$ " $: H \times H \to H$ em $H$ segundo a regra $h_1 * h_2 = \varphi\big((\varphi^{-1}(h_1) \cdot \varphi^{-1}(h_1)\big)$ que faz de $H$ uma Álgebra de tal forma que $\varphi: E \to H$ é um ***Isomorfismo entre Álgebras***.

**Demonstração: Exercício**.

-Mostre que se $\varphi: E_1 \to E_2$ for um isomorfismo **entre Espaços Vetoriais** e se $E_2$ for dotado de uma Estrutura de Álgebra com produto," $\cdot$ " , então é possível "i*nduzir*" uma operação produto "$*$"em $E_1 \times E_1$ da forma $u * w = \varphi^{-1}(\varphi(u) \cdot \varphi(w))$ que é um produto e faz de $\varphi: E_1 \to E_2$ um Isomorfismo **entre Espaços Álgebras**.

-Exemplifique esta construção induzindo no Espaço Vetorial das seqüências que se anulam depois da algum ponto, $\mathcal{F}_0(\mathbb{N},\mathbb{C}) = \{a: \mathbb{N} \to \mathbb{C}\ , Existe\ N_a, tal\ que\ a(n) = 0\ se\ n > N_a\}$ um produto a partir do Isomorfismo entre espaços vetoriais $\varphi: \mathcal{F}_0 \to P(\mathbb{R})$ em que $\varphi(a) = p$ é o polinômio com respectivos coeficientes $a(k)$.

-Mostre que o produto **vetorial** " $\wedge$ " definido em $\mathbb{R}^3$ **não** faz deste Espaço Vetorial Cartesiano uma Álgebra.

-Mostre que os números complexos $\mathbb{C}$ , com o produto complexo constituem uma Álgebra comutativa, com identidade e com divisão.(Observação: Extensões desta idéia para espaços de dimensão superior são os quaternions , octonions e demais números hipercomplexos.Ref. I.Shafarevich, J.Stillwell)

-Mostre que Funções Continuas $C^0([0,1],\mathbb{R})$ com o produto ponto a ponto,é uma Álgebra, Comutativa, com identidade.

-Mostre que os polinômios $P(\mathbb{R})$ formam uma sub-Álgebra comutativa, com identidade de $C^0([0,1],\mathbb{R})$. Mostre também que designando a função identidade como $i(x) = x$ então , $[\![i]\!] = P(\mathbb{R})$.

-Mostre que as Matrizes $M_{nn}(\mathbb{R})$ com o produto matricial usual é uma Álgebra, não comutativa, com elemento identidade.

-**Demonstre o TEOREMA**: O Espaço Vetorial das transformações lineares $\mathcal{A} = \mathcal{L}(E)$,∘) com o produto composição (∘) constituem uma Álgebra, não comutativa, com identidade, e se $\dim E = n$ , ela é isomorfa à Álgebra de Matrizes $M_{nn}(\mathbb{R})$ .

-Se $\mathcal{F}(\mathbb{N},\mathbb{R}) = E$ for o espaço vetorial de todas as funções com variável inteira e valores reais, então $\delta: E \to E, \delta u\,(k) = u(k+1) - u(k)$ , denominado "operador de diferença" é linear e $[\![\delta]\!] = \{p(\delta); p \in P(\mathbb{R})\}$ é a ***Álgebra dos Operadores Polinomiais Recursivos***.