MA211 - Lista 03

Derivadas Parciais e Aproximações Lineares

14 de setembro de 2016

EXERCÍCIOS RESOLVIDOS

1. ([1], seção 14.3) Determine as derivadas parciais de primeira ordem da função.

   a) ★ $f(r,s) = r\ln(r^2+s^2)$

   b) ★ $f(x,y) = \displaystyle\int_y^x \cos^2 t \; \mathrm{d}t$

   Solução:

   a) Sendo $f(r,s) = r\cdot\ln(r^2+s^2)$, temos que as derivadas parciais em relação a r e s, respectivamente, são:

   $\bullet f_r(r,s) = 1\cdot\ln(r^2+s^2) + r\cdot\dfrac{1}{r^2+s^2}\cdot 2r = \ln(r^2+s^2) + \dfrac{2r^2}{r^2+s^2}.$

   $\bullet f_s(r,s) = 0\cdot\ln(r^2+s^2) + r\cdot\dfrac{1}{r^2+s^2}\cdot 2s = \dfrac{2rs}{r^2+s^2}.$

   b) Sendo $f(x,y) = \displaystyle\int_y^x \cos(t^2)\,dt$, temos que as derivadas parciais em relação a x e y, respectivamente, são:

   $\bullet \dfrac{\partial}{\partial x} f(x,y) = \dfrac{\partial}{\partial x}\left(\displaystyle\int_y^x \cos(t^2)\right) = \cos(x^2).$

   $\bullet \dfrac{\partial}{\partial y} f(x,y) = \dfrac{\partial}{\partial y}\left(\displaystyle\int_y^x \cos(t^2)\right) = \dfrac{\partial}{\partial y}\left(-\displaystyle\int_x^y \cos(t^2)\right) = -\cos(y^2).$

   Notemos que nas soluções das derivadas parciais acima utilizamos o Teorema Fundamental do Cálculo.

2. ([2], seção 10.1) ♦ Considere a função dada por $z = x\,\mathrm{sen}\left(\dfrac{x}{y}\right)$. Verifique que

$$x\,\frac{\partial z}{\partial x} + y\,\frac{\partial z}{\partial y} = z.$$

   Solução: Primeiramente, vamos calcular $\dfrac{\partial z}{\partial x}$ e $\dfrac{\partial z}{\partial}$. Assim,

$$\bullet\ \frac{\partial z}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x}\left[x\cdot\mathrm{sen}\left(\frac{x}{y}\right)\right] = 1\cdot\mathrm{sen}\left(\frac{x}{y}\right) + x\cdot\cos\left(\frac{x}{y}\right)\cdot\frac{1}{y}$$

$$= \mathrm{sen}\left(\frac{x}{y}\right) + \frac{x}{y}\cdot\cos\left(\frac{x}{y}\right)$$

$$\bullet\ \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y}\left[x\cdot\mathrm{sen}\left(\frac{x}{y}\right)\right] = 0\cdot\mathrm{sen}\left(\frac{x}{y}\right) + x\cdot\cos\left(\frac{x}{y}\right)\cdot\left(-\frac{x}{y^2}\right)$$

$$= -\frac{x^2}{y^2}\cdot\cos\left(\frac{x}{y}\right).$$

Então,

$$x \cdot \frac{\partial z}{\partial x} + y\frac{\partial z}{\partial y} = x \cdot \left[\operatorname{sen}\left(\frac{x}{y}\right) + \frac{x}{y} \cdot \cos\left(\frac{x}{y}\right)\right] + y \cdot \left[-\frac{x^2}{y^2} \cdot \cos\left(\frac{x}{y}\right)\right]$$

$$= x \cdot \operatorname{sen}\left(\frac{x}{y}\right) + \frac{x^2}{y}\cos\left(\frac{x}{y}\right) - \frac{x^2}{y} \cdot \cos\left(\frac{x}{y}\right)$$

$$x \cdot \operatorname{sen}\left(\frac{x}{y}\right) = z.$$

3. ♦ ([1], seção 14.4) Determine a aproximação linear da função $f(x, y, z) = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$ em $(3, 2, 6)$ e use-a para aproximar o número $\sqrt{(3,02)^2 + (1,97)^2 + (5,99)^2}$.

Solução: Vamos determinar a aproximação linear da função f em $(3, 2, 6)$. Primeiramente, calculamos as derivadas parcias f_x, f_y e f_z, para todo (x, y, z).

$\bullet f_x(x, y, z) = \dfrac{1}{2}(x^2 + y^2 + z^2)^{-1/2} \cdot 2x = \dfrac{x}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}.$

$\bullet f_y(x, y, z) = \dfrac{1}{2}(x^2 + y^2 + z^2)^{-1/2} \cdot 2y = \dfrac{y}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}.$

$\bullet f_z(x, y, z) = \dfrac{1}{2}(x^2 + y^2 + z^2)^{-1/2} \cdot 2z = \dfrac{z}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}.$

Agora, calculamos as derivadas parciais de f no ponto $(3, 2, 6)$, então

$\bullet f_x(3, 2, 6) = \dfrac{3}{\sqrt{3^2 + 2^2 + 6^2}} = \dfrac{3}{7}.$

$\bullet f_x(3, 2, 6) = \dfrac{2}{\sqrt{3^2 + 2^2 + 6^2}} = \dfrac{2}{7}.$

$\bullet f_x(3, 2, 6) = \dfrac{6}{\sqrt{3^2 + 2^2 + 6^2}} = \dfrac{6}{7}.$

Assim, a aproximação linear da função f em $(3, 2, 6)$ é

$$\begin{aligned}
f(x, y, z) &\approx f(3, 2, 6) + f_x(3, 2, 6)(x - 3) + f_y(3, 2, 6)(y - 2) + f_z(3, 2, 6)(z - 6) \\
&= 7 + \frac{3}{7}(x - 3) + \frac{2}{7}(y - 2) + \frac{6}{7}(z - 6) \\
&= \frac{3}{7}x + \frac{2}{7}y + \frac{6}{7}z + \left(7 - \frac{9}{7} - \frac{4}{7} - \frac{36}{7}\right) \\
&= \frac{3}{7}x + \frac{2}{7}y + \frac{6}{7}z.
\end{aligned}$$

Agora, vamos aproximar o número $\sqrt{(3,02)^2 + (1,97)^2 + (5,99)^2}$. Assim,

$$\begin{aligned}
\sqrt{(3,02)^2+(1,97)^2+(5,99)^2} &= f(3,02\,,\,1,97\,,\,5,99) \\
&\approx \frac{3}{7}(3,02)+\frac{2}{7}(1,97)+\frac{6}{7}(5,99) \\
&\approx 6,9914.
\end{aligned}$$

4. ♦ ([2], seção 11.3) Determine o plano que é paralelo ao plano $z = 2x + 3y$ e tangente ao gráfico de $f(x, y) = x^2 + xy$.

Solução: Considere

$$z - f(x_0, y_0) = \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)(x - x_0) + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)(y - y_0)$$

o plano tangente ao gráfico de f. Assim,

$$z = \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)\cdot x + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)\cdot y + \left[f(x_0, y_0) - \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)\cdot x_0 - \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)\cdot y_0\right].$$

Como tal plano é paralelo ao plano $z = 2x + 3y$, obtemos que

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) = 2 \qquad \text{e} \qquad \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) = 3.$$

Notemos que

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = 2x + y \qquad \text{e} \qquad \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = x.$$

Assim, temos o seguinte sistema de equações

$$\begin{cases} 2x_0 + y_0 = 2 \\ x_0 = 3 \end{cases}$$

Logo, $x_0 = 3$ e $y_0 = -4$. A partir desses valores temos que $f(x_0, y_0) = -3$, $\dfrac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)\cdot x_0 = 6$ e $\dfrac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)\cdot y_0 = -12$. Portanto, o plano desejado tem equação

$$z = 2x + 3y - 3 - 6 + 12,$$

ou seja,

$$z = 2x + 3y + 3.$$

EXERCÍCIOS PROPOSTOS

5. ♦ ([1], seção 14.3) A temperatura T de uma localidade do Hemisfério Norte depende da longitude x, da latitude y e do tempo t, de modo que podemos escrever
$T = f(x, y, t)$. Vamos medir o tempo em horas a partir do início de Janeiro.

   a) Qual é o significado das derivadas parciais $\partial T/\partial x$, $\partial T/\partial y$ e $\partial T/\partial t$?

   b) Honolulu tem longitude de $158°W$ e latitude de $21°N$. Suponha que às 9 horas em 1° de Janeiro esteja ventando para nordeste uma brisa quente, de forma que a oeste e a sul o ar esteja quente e a norte e leste o ar esteja mais frio. Você esperaria que $f_x(158, 21, 9)$, $f_y(158, 21, 9)$ e $f_t(128, 21, 9)$ fossem positivas ou negativas? Explique.

6. ([1], seção 14.3) O índice de sensação térmica W é a temperatura sentida quando a temperatura real é T e a velocidade do vento, v. Portanto, podemos escrever $W = f(T, v)$. Considerando a tabela abaixo:

		Velocidade do vento (km/h)					
Temperatura real (°C)	T \ v	20	30	40	50	60	70
	−10	−18	−20	−21	−22	−23	−23
	−15	−24	−26	−27	−29	−30	−30
	−20	−30	−33	−34	−35	−36	−37
	−25	−37	−39	−41	−42	−43	−44

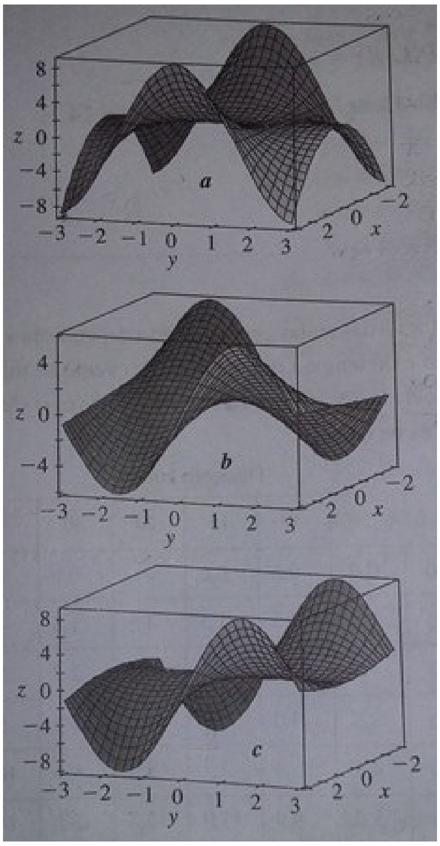
   a) Estime os valores de $f_T(-15, 30)$ e $f_v(-15, 30)$. Quais são as interpretações práticas desses valores?

   b) Em geral, o que se pode dizer sobre o sinal de $\partial W/\partial T$ e $\partial W/\partial v$?

   c) Qual parece ser o valor do seguinte limite

$$\lim_{v\to\infty} \frac{\partial W}{\partial v}?$$

7. ([1], seção 14.3) As seguintes superfícies, rotuladas a, b e c, são gráficos de uma função f e de suas derivadas parciais f_x e f_y. Identifique cada superfície e dê razões para sua escolha.



8. ([1], seção 14.3) Determine as derivadas parciais de primeira ordem da função.

a) $f(x,y) = x^5 + 3x^3y^2 + 3xy^4$

c) $u = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2}$

f) $u = x^{y/z}$

b) $f(x,y) = \dfrac{x-y}{x+y}$

d) $u = te^{w/t}$

9. ([1], seção 14.3) Determine a derivada parcial $f_x(3,4)$, onde $f(x,y) = \ln(x + \sqrt{x^2+y^2})$.

10. ([1], seção 14.3) Use a definição de derivadas parciais como limites para encontrar $f_x(x,y)$ e $f_y(x,y)$, sendo $f(x,y) = x^2y - x^3y$.

11. ♦ ([1], seção 14.3) Use a derivação implicíta para determinar $\partial z/\partial x$ e $\partial z/\partial y$.

a) $x - z = \text{arctg}(yz)$

b) $\text{sen}(xyz) = x + 2y + 3z$

12. ([1], seção 14.3) Determine $\partial z/\partial x$ e $\partial z/\partial y$, sendo $z = f(x) + g(y)$.

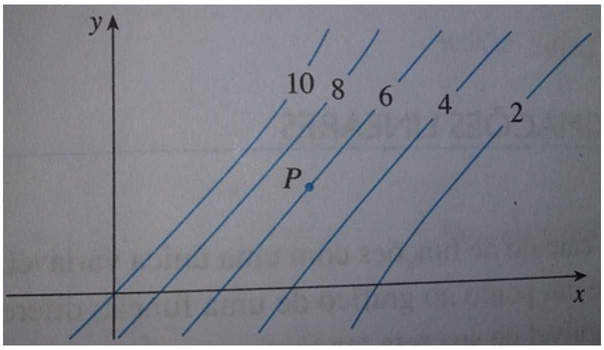
13. ([1], seção 14.3) Determine as derivadas parciais indicadas.

a) ★ $u = e^{r\theta} \operatorname{sen}\theta$; $\quad \dfrac{\partial^3 u}{\partial r^2 \partial \theta}$

b) $w = \dfrac{x}{y+2z}$; $\quad \dfrac{\partial^3 w}{\partial z \partial y \partial x}$, $\quad \dfrac{\partial^3 w}{\partial x^2 \partial y}$

14. ([1], seção 14.3) São mostradas as curvas de nível de uma função f. Determine se as seguintes derivadas parciais são positivas ou negativas no ponto P.

a) f_x
b) f_y
c) f_{xx}
d) f_{xy}
e) f_{yy}



15. ([1], seção 14.3) Verifique que a função $u = 1/\sqrt{x^2+y^2+z^2}$ é uma solução da equação de Laplace tridimensional $u_{xx} + u_{yy} + u_{zz} = 0$.

16. ([1], seção 14.3) Verifique que a função $z = \ln(e^x + e^y)$ é uma solução das equações diferenciais

$$\frac{\partial z}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial y} = 1 \qquad e \qquad \frac{\partial^2 z}{\partial^2 x} + \frac{\partial^2 z}{\partial^2 y} - \left(\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}\right)^2 = 0.$$

17. ★ ([1], seção 14.3) A lei dos gases para uma massa fixa m de um gás ideal à temperatura absoluta T, pressão P e o volume V é $PV = mRT$, onde R é a constante do gás. Mostre que

$$\frac{\partial P}{\partial V}\frac{\partial V}{\partial T}\frac{\partial T}{\partial P} = -1.$$

18. ★ ([1], seção 14.3) Disseram-lhe que existe uma função f cujas derivadas parciais são

$$f_x(x,y) = x + 4y \quad \text{e} \quad f_y(x,y) = 3x - y,$$

e cujas derivadas parciais de segunda ordem são contínuas. Você deve acreditar nisso?

19. ★ ([1], seção 14.3) O elipsoide $4x^2 + 2y^2 + z^2 = 16$ intercepta o plano $y = 2$ em uma elipse. Determine as equações paramétricas da reta tangente à elipse no ponto $(1, 2, 2)$.

20. ([1], seção 14.3) Seja

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^3y - xy^3}{x^2+y^2}, & \text{se } (x,y) \neq (0,0), \\ 0, & \text{se } (x,y) = (0,0). \end{cases}$$

a) Use um computador para traçar o gráfico de f.

b) Determine $f_x(x,y)$ e $f_y(x,y)$ quando $(x,y) \neq (0,0)$.

c) Determine $f_x(0,0)$ e $f_y(0,0)$ use a definição das derivadas parciais como limite.

d) Mostre que $f_{xy}(0,0) = -1$ e $f_{yx}(0,0) = 1$

e) O resultado da parte (d) contradiz o Teorema de Clairaut? Use o gráfico de f_{xy} e f_{yx} para ilustrar sua resposta.

21. ♦ ([2], seção 10.1) Determine as derivadas parciais.

a) $f(x,y) = 5x^4y^2 + xy^3 + 4$

b) $z = \cos(xy)$

c) $z = \dfrac{x^3+y^2}{x^2+y^2}$

d) $f(x,y) = e^{-x^2-y^2}$

e) $z = x^2\ln(1+x^2+y^2)$

f) $z = xye^{xy}$

g) $f(x,y) = (4xy - 3y^3)^3 + 5x^2y$

h) $z = \operatorname{arctg}\dfrac{x}{y}$

i) $g(x,y) = x^y$

j) $z = (x^2+y^2)\ln(x^2+y^2)$

l) $f(x,y) = \sqrt[3]{x^3+y^2+3}$

m) $z = \dfrac{x \operatorname{sen} y}{\cos(x^2+y^2)}$

22. ([2], seção 10.1) Considere a função $z = \dfrac{xy^2}{x^2+y^2}$. Verifique que $x\dfrac{\partial z}{\partial x} + y\dfrac{\partial z}{\partial y} = z$.

23. ♦ ([2], seção 10.1) Seja $\phi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ uma função de uma variável real, diferenciável e tal que $\phi'(1) = 4$. Seja $g(x,y) = \phi\left(\dfrac{x}{y}\right)$. Calcule

a) $\dfrac{\partial g}{\partial x}(1,1)$

b) $\dfrac{\partial g}{\partial y}(1,1)$

24. ([2], seção 10.1) Seja $g(x,y) = \phi\left(\dfrac{x}{y}\right)$ a função do exercício anterior. Verifique que, para todo $(x,y) \in \mathbb{R}^2$, com $y \neq 0$, temos que

$$x\,\frac{\partial g}{\partial x}(x,y) + y\,\frac{\partial g}{\partial y}(x,y) = 0.$$

25. ([2], seção 10.1) A função $p = p(V,T)$ é dada implicitamente pela equação $pV = nRT$, onde n e R são constantes não-nulas. Calcule $\dfrac{\partial p}{\partial V}$ e $\dfrac{\partial p}{\partial T}$.

26. ([2], seção 10.1) Seja $z = e^y \phi(x-y)$, onde ϕ é uma função diferenciável de uma variável real. Mostre que

$$\frac{\partial z}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial y} = z.$$

27. ([2], seção 10.1) Seja $\phi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ uma função diferenciável de uma variável real e seja
$f(x,y) = (x^2+y^2)\phi\left(\frac{x}{y}\right)$. Mostre que

$$x\,\frac{\partial f}{\partial x} + y\,\frac{\partial f}{\partial y} = 2f.$$

28. ([2], seção 10.1) Determine $\dfrac{\partial f}{\partial x}$ e $\dfrac{\partial f}{\partial y}$, sendo $f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x+y^4}{x^2+y^2}, & \text{se } (x,y) \neq (0,0), \\ 0, & \text{se } (x,y) = (0,0). \end{cases}$

29. ([2], seção 10.2) Calcule as derivadas parciais.

a) $f(x,y,z) = xe^{x-y-z}$

b) $w = x^2 \operatorname{arcsen} \dfrac{y}{z}$

c) $w = \dfrac{xyz}{x+y+z}$

d) $f(x,y,z) = \operatorname{sen}(x^2+y^2+z^2)$

e) $s = f(x,y,z,w)$ dada por $s = xw \ln(x^2+y^2+z^2+w^2)$

30. ([2], seção 10.2) Seja $f(x,y,z) = \dfrac{x}{x^2+y^2+z^2}$. Verifique que

$$x\frac{\partial f}{\partial x} + y\frac{\partial f}{\partial y} + z\frac{\partial f}{\partial z} = -f.$$

31. ([2], seção 10.2) Seja $s = f(x,y,z,w)$ dada por $s = e^{\frac{x}{y} - \frac{z}{w}}$. Verifique que

$$x\frac{\partial s}{\partial x} + y\frac{\partial s}{\partial y} + z\frac{\partial s}{\partial z} + w\frac{\partial s}{\partial w} = 0.$$

32. ([3], seção 11.3) Nos itens abaixo encontre $\partial f/\partial x$ e $\partial f/\partial y$.

a) $f(x,y) = (x^2-1)(y+2)$

b) $f(x,y) = (xy-1)^2$

c) $f(x,y) = 1/(x+y)$

d) $f(x,y) = e^{-x}\,\operatorname{sen}(x+y)$

e) $f(x,y) = e^{xy}\ln y$

f) $f(x,y) = \cos^2(3x-y^2)$

33. ♦ ([3], seção 11.3) Nos itens abaixo, encotre f_x, f_y e f_z.

a) $f(x,y,z) = 1 + xy^2 - 2z^2$

b) $f(x,y,z) = x - \sqrt{y^2+z^2}$

c) $f(x,y,z) = (x^2+y^2+z^2)^{-1/2}$

d) $f(x,y,z) = \ln(x+2y+3z)$

e) $f(x,y,z) = e^{-(x^2+y^2+z^2)}$

f) $f(x,y,z) = e^{-xyz}$

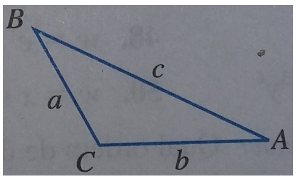
34. ([3], seção 11.3) Seja $w = f(x,y,z)$ uma função de três variáveis independentes. Escreva a definição formal de derivada parcial $\partial f/\partial z$ em (x_0, y_0, z_0). Use essa definição para encontrar $\partial f/\partial z$ em $(1,2,3)$ para $f(x,y,z) = x^2yz^2$.

35. ♦ ([3], seção 11.3) Encontre o valor de $\partial z/\partial x$ no ponto $(1,1,1)$ sabendo que a equação

$$xy + z^3x - 2yz = 0$$

define z como uma função de duas variáveis independentes x e y e que a derivada parcial existe.

36. ([3], seção 11.3) De acordo com o triângulo abaixo:



a) Expresse A implicitamente como uma função de a, b e c e calcule $\partial A/\partial a$ e $\partial A/\partial b$.

b) Expresse a implicitamente como uma função de A, b e B e calcule $\partial a/\partial A$ e $\partial a/\partial B$.

37. ([2], seção 14.1) Calcule todas as derivadas parciais de 2ª ordem.

a) $f(x,y) = x^3y^2$

b) $z = e^{x^2-y^2}$

c) $z = \ln(1+x^2+y^2)$

d) $g(x,y) = 4x^3y^4 + y^3$

38. ([2], seção 14.1) Seja $f(x,y) = \dfrac{1}{x^2+y^2}$. Verifique que

a) $x\,\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y) + y\,\dfrac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x,y) = -3\dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y)$

b) $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y) + \dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y) = \dfrac{4}{(x^2+y^2)^2}$

39. ([2], seção 14.1) Verifique que $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 0$, onde $f(x,y) = \ln(x^2+y^2)$.

40. ([2], seção 14.1) Verifique que $x\,\dfrac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} + y\,\dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 0$, onde $z = (x+y)e^{x/y}$.

41. ♦ (Prova, 2006) Considere a superfície dada implicitamente por

$$x^2 + 2y^2 + 2z^2 = -4xyz.$$

a) Calcule as derivadas $\dfrac{\partial z}{\partial x}$ e $\dfrac{\partial z}{\partial y}$ em um ponto genérico.

b) Quais os pontos nos quais as derivadas parciais calculadas no item anterior não estão definidas?

42. (Prova, 2010) Seja $f(x,y) = \dfrac{x^2y^2}{x^2+y^2}$.

a) Calcule as derivadas parciais $\dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y)$ e $\dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y)$, num ponto $(x,y) \neq (0,0)$.

b) Calcule o limite, se existir.

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\partial f}{\partial x}(x,y)$$

43. (Teste, 2013) Considere a função

$$f(x,y) = \log(9 - x^2 - 9y^2).$$

a) Esboce no plano xy o domínio de f.

b) Calcule as derivadas parciais f_x e f_y.

44. ♦ (Prova, 2014) Considere a função

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{xy}{x^2+y^2}, & \text{se } (x,y) \neq (0,0), \\ 0, & \text{se } (x,y) = (0,0). \end{cases}$$

a) A função f é contínua em $(0,0)$? Justifique sua resposta.

b) Calcule as derivadas parciais $\dfrac{\partial f}{\partial x}(0,0)$ e $\dfrac{\partial f}{\partial y}(0,0)$.

c) Determine $\dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y)$ e $\dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y)$ para $(x,y) \neq (0,0)$.

d) f é diferenciável em $(0,0)$? Justifique sua resposta.

45. (Prova, 2014) Considere a função

$$f(x,y) = \begin{cases} x+y, & \text{se } xy = 0, \\ \kappa, & \text{caso contrário}, \end{cases}$$

em que κ é um número real. Determine as derivadas parciais de primeira ordem de f em $(0,0)$.

46. ★ (Prova, 2014) Considere a função

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{xy^2}{x^2+y^4}, & \text{se } (x,y) \neq (0,0), \\ 0, & \text{se } (x,y) = (0,0). \end{cases}$$

a) A função é contínua em $(0,0)$? Justifique sua resposta.

b) Determine as derivadas parciais $\dfrac{\partial f}{\partial x}(0,0)$ e $\dfrac{\partial f}{\partial y}(0,0)$.

47. (Prova, 2014) Se $z = \operatorname{sen}(x + \operatorname{sen} y)$, mostre que $\dfrac{\partial z}{\partial x}\dfrac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \dfrac{\partial z}{\partial y}\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2}$.

48. ([1], seção 14.4) Determine uma equação do plano tangente à superfície no ponto especificado.

a) $z = 4x^2 - y^2 + 2y, \quad (-1,2,4)$.

b) $z = 3(x-1)^2 + 2(y+3)^2 + 7, \quad (2,-2,12)$.

c) $z = \sqrt{xy}, \quad (1,1,1)$.

d) $z = y\cos(x-y), \quad (2,2,2)$.

49. ([1], seção 14.4) Explique por que a função é diferenciável no ponto dado. A seguir, encontre a linearização $L(x,y)$ da função naquele ponto.

a) $f(x,y) = x\sqrt{y}, \quad (1,4)$.

b) $f(x,y) = \dfrac{x}{x+y}, \quad (2,1)$.

c) $f(x,y) = e^{-xy}\cos y, \quad (\pi, 0)$.

50. ([1], seção 14.4) Determine a aproximação linear da função $f(x,y) = \sqrt{20 - x^2 - 7y^2}$ em $(2,1)$ e use-a para aproximar $f(1,95; 1,08)$.

51. ([1], seção 14.4) Determine a diferencial da função.

a) $z = x^3 \ln y^2$.

b) $m = p^5 q^3$.

c) $R = \alpha\beta^2\cos\lambda$.

52. ([1], seção 14.4) Se $z = 5x^2 + y^2$ e (x,y) varia de $(1,2)$ a $(1,05; 2,1)$, compare os valores de Δz e dz.

53. ([1], seção 14.4) Se $z = x^2 - xy + 3y^2$ e (x,y) varia de $(3;-1)$ a $(2,96; -0,95)$, compare os valores de Δz e dz.

54. ([1], seção 14.4) O comprimento e a largura de um retângulo foram medidos como 30 cm e 24 cm, respectivamente, com um erro de medida de, no máximo, $0,1$ cm. Utilize as diferenciais para estimar o erro máximo cometido no cálculo da área do retângulo.

55. ([1], seção 14.4) Utilize as diferenciais para estimar a quantidade de estanho em uma lata cilíndrica fechada com 8 cm de diâmetro e 12 cm de altura se a espessura da folha de estanho for de $0,04$ cm.

56. ([1], seção 14.4) Se R é a resistência equivalente de três resistores conectados em paralelo, com resistências R_1, R_2, R_3, então

$$\frac{1}{R} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3}.$$

Se as resistências medem, em ohms, $R_1 = 25\Omega$, $R_2 = 40\Omega$, $R_3 = 50\Omega$, com margem de erro de $0,5\%$ em cada uma, estime o erro máximo no valor calculado de R.

57. ([1], seção 14.4) Quatro números positivos, cada um menor que 50, são arredondados até a primeira casa decimal e depois multiplicados. Utilize os diferenciais para estimar o máximo erro possível no cálculo do produto que pode resultar do arredondamento.

58. ([1], seção 14.4) Mostre que a função $f(x,y) = xy - 5y^2$ é diferenciável achando os valores ε_1 e ε_2 que satisfaçam a Definição 7 da Seção 14.4 do Stewart.

59. ★ ([1], seção 14.4) Considere a função

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{xy}{x^2+y^2}, & \text{se } (x,y) \neq (0,0), \\ 0, & \text{se } (x,y) = (0,0). \end{cases}$$

Mostre que $f_x(0,0)$ e $f_y(0,0)$ existem, mas f não é diferenciável em $(0,0)$.

60. ♦ ([2], seção 11.1) f é diferenciável em $(0,0)$? Justifique.

a) $f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^2-y^2}{x^2+y^2}, & \text{se } (x,y) \neq (0,0), \\ 0, & \text{se } (x,y) = (0,0) \end{cases}$

b) $f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^2y}{x^2+y^2}, & \text{se } (x,y) \neq (0,0), \\ 0, & \text{se } (x,y) = (0,0) \end{cases}$

c) $f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^4}{x^2+y^2}, & \text{se } (x,y) \neq (0,0), \\ 0, & \text{se } (x,y) = (0,0) \end{cases}$

61. ♦ ([2], seção 11.2) Verifique que a função dada é diferenciável.

a) $f(x,y) = e^{x-y^2}$

b) $f(x,y) = x^4 + y^3$

c) $f(x,y) = x^2 y$

d) $f(x,y) = \ln(1 + x^2 + y^2)$

e) $f(x,y) = x\cos(x^2 + y^2)$

f) $f(x,y) = \operatorname{arctg} xy$

62. ([2], seção 11.2) Determine o maior conjunto de pontos em que a função dada é diferenciável. Justifique.

a) $f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{xy}{x^2+y^2}, & \text{se } (x,y) \neq (0,0), \\ 0, & \text{se } (x,y) = (0,0) \end{cases}$

b $f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^3}{x^2+y^2}, & \text{se } (x,y) \neq (0,0), \\ 0, & \text{se } (x,y) = 0 \end{cases}$

c) $f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{xy3}{x^2+y^2}, & \text{se } (x,y) \neq (0,0), \\ 0, & \text{se } (x,y) = 0 \end{cases}$

d) $f(x,y) = \begin{cases} e^{\dfrac{1}{x^2+y^2-1}}, & \text{se } x^2+y^2 < 1, \\ 0, & \text{se } x^2+y^2 \geq 1 \end{cases}$

63. ♦ ([2], seção 11.3) Determine as equações do plano tangente e da reta normal ao gráfico da função dada, no ponto dado.

a) $f(x,y) = 2x^2y$ em $(1, 1, f(1,1))$.

b) $f(x,y) = x^2 + y^2$ em $(0, 1, f(0,1))$.

c) $f(x,y) = 3x^3y - xy$ em $(1, -1, f(1,-1))$.

d) $f(x,y) = xe^{x^2-y^2}$ em $(2, 2, f(2,2))$.

e) $f(x,y) = \operatorname{arctg}(x - 2y)$ em $\left(2, \dfrac{1}{2}, f\left(2, \dfrac{1}{2}\right)\right)$.

f) $f(x,y) = xy$ em $\left(\dfrac{1}{2}, \dfrac{1}{2}, f\left(\dfrac{1}{2}, \dfrac{1}{2}\right)\right)$.

64. ([2], seção 11.3) Determine o plano que passa pelos pontos $(1,1,2)$ e $(-1,1,1)$ e que seja tangente ao gráfico de $f(x,y) = xy$.

65. (Prova, 2014) Determine a equação dos planos tangentes ao gráfico de $f(x,y) = -x^2 - y^2$ que passam por ambos os pontos $(1,0,7)$ e $(3,0,3)$.

66. ([2], seção 11.3) Determine o plano que é paralelo ao plano $z = 2x + y$ e tangente ao gráfico de $f(x,y) = x^2 + y^2$.

67. ([2], seção 11.3) $z = 2x + y$ é a equação do plano tangente ao gráfico de $f(x, y)$ no ponto $(1, 1, 3)$. Calcule $\dfrac{\partial f}{\partial x}(1, 1)$ e $\dfrac{\partial f}{\partial y}(1, 1)$.

68. ([2], seção 11.3) $2x + y + 3z = 6$ é a equação do plano tangente ao gráfico de $f(x, y)$ no ponto $(1, 1, 1)$.

    a) Calcule $\dfrac{\partial f}{\partial x}(1, 1)$ e $\dfrac{\partial f}{\partial y}(1, 1)$.

    b) Determine a equação da reta normal no ponto $(1, 1, 1)$.

69. ([2], seção 11.3) Considere a função $f(x, y) = x\ \phi\left(\frac{x}{y}\right)$, em que $\phi(u)$ é uma função derivável de uma variável. Mostre que os planos tangentes ao gráfico de f passam pela origem.

70. ★ (Prova, 2013) Determine a equação do plano que é tangente ao paraboloide $z = 2x^2 + 3y^2$ e paralelo ao plano $4x - 3y - z = 10$.

71. ([2], seção 11.3) Determine os planos que são tangentes ao gráfico de $f(x, y) = x^2 + y^2$ e que contenham a interseção dos planos $x + y + z = 3$ e $z = 0$.

72. ([2], seção 11.3) Determine os planos tangentes ao gráfico de $f(x, y) = 2 + x^2 + y^2$ e que contenham o eixo x.

73. ([2], seção 11.3) Considere a função $f(x, y) = x\ g(x^2 - y^2)$, em que $g(u)$ é uma função derivável de uma variável. Mostre que o plano tangente ao gráfico de f no ponto $(a, a, f(a, a))$ passa pela origem.

74. (Prova, 2010) Mostre que o plano tangente ao parabolóide $z = x^2 + y^2$ no ponto $(1, 2, 5)$ intercepta o plano xy na reta

$$\begin{cases} 2x + 4y - 5 = 0 \\ z = 0 \end{cases}.$$

RESPOSTAS DOS EXERCÍCIOS PROPOSTOS

5. **a)** $\partial T/\partial x$ é a taxa de variação da temperatura quando a longitude muda, mas a latitude e o tempo são constantes;
   $\partial T/\partial y$ é a taxa de variação da temperatura quando a latitude muda, mas a longitude e o tempo são constantes;
   $\partial T/\partial t$ é a taxa de variação da temperatura quando o tempo muda, mas a longitude e a latitude são constantes.

   b) $f_x(158, 21, 9) > 0$, $f_y(158, 21, 9) < 0$ e $f_t(158, 21, 9) > 0$.

6. **a)** $f_T(-15, 30) \approx 1.3$ Isto significa que quando a temperatura real é -15°C e a velocidade do vento é 30km/h, a temperatura aparente aumenta cerca de 1.3°C para cada 1°C que a temperatura real aumenta;
   $f_v(-15, 30) \approx -0.15$ Isto significa que quando a temperatura real é -15°C e a velocidade do vento é 30km/h, a temperatura aparente diminui cerca de 0.15°C para cada 1km/h que a velocidade do vento aumenta.

   b) $\frac{\partial W}{\partial T} > 0$ e $\frac{\partial W}{\partial v} \leq 0$.

   c) $\lim_{v\to\infty} \frac{\partial W}{\partial v} = 0$.

7. a) f_y, b) f_x, c) f.

8. **a)** $\dfrac{\partial f}{\partial x} = 5x^4 + 9x^2y^2 + 3y^4$ e $\dfrac{\partial f}{\partial y} = 2x^3y + 12xy^3$.

   b) $\dfrac{\partial f}{\partial x} = \dfrac{2y}{(x+y)^2}$ e $\dfrac{\partial f}{\partial y} = -\dfrac{2x}{(x+y)^2}$.

   c) $\dfrac{\partial u}{\partial x_i} = \dfrac{x_i}{\sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2}}$ para todo $i = 1, \cdots, n$.

   d) $\dfrac{\partial u}{\partial t} = e^{w/t}\left(1 - \dfrac{w}{t}\right)$ e $\dfrac{\partial u}{\partial w} = e^{w/t}$.

   f) $\dfrac{\partial u}{\partial x} = \dfrac{y}{z} x^{(y/z)-1}$, $\dfrac{\partial u}{\partial y} = x^{y/z} \ln x$ e $\dfrac{\partial u}{\partial z} = -\dfrac{yx^{y/z}}{z^2} \ln x$.

9. $f_x(3, 4) = \frac{1}{5}$.

10. $f_x = y^2 - 3x^2y$ e $f_y = 2xy - x^3$.

11. **a)** $\dfrac{\partial z}{\partial x} = \dfrac{1 + y^2z^2}{1 + y + y^2z^2}$ e $\dfrac{\partial z}{\partial y} = -\dfrac{z}{1 + y + y^2z^2}$.

    b) $\dfrac{\partial z}{\partial x} = \dfrac{1 - yz\cos(xyz)}{xy\cos(xyz) - 3}$ e $\dfrac{\partial z}{\partial y} = \dfrac{2 - xz\cos(xyz)}{xy\cos(xyz) - 3}$.

12. $\dfrac{\partial z}{\partial x} = f'(x)$ e $\dfrac{\partial z}{\partial y} = g'(y)$.

13. **a)** $\dfrac{\partial^3 u}{\partial r^2 \partial \theta} = \theta e^{r\theta}(2\operatorname{sen}\theta + \theta\cos\theta + r\theta\operatorname{sen}\theta)$.

b) $\dfrac{\partial^3 w}{\partial z \partial y \partial x} = \dfrac{4}{(y+2z)^3}$ e $\dfrac{\partial^3 w}{\partial x^2 \partial y} = 0$.

14. **a)** Negativa

b) Positiva

c) Positiva

d) Negativa

e) Positiva

15. $u_{xx} = \dfrac{2x^2 - y^2 - z^2}{(x^2+y^2+z^2)^{5/2}}$, $u_{yy} = \dfrac{2y^2 - x^2 - z^2}{(x^2+y^2+z^2)^{5/2}}$ e $u_{zz} = \dfrac{2z^2 - x^2 - y^2}{(x^2+y^2+z^2)^{5/2}}$.

16. $\dfrac{\partial z}{\partial x} = \dfrac{e^x}{e^x + e^y}$, $\dfrac{\partial z}{\partial y} = \dfrac{e^y}{e^x + e^y}$,

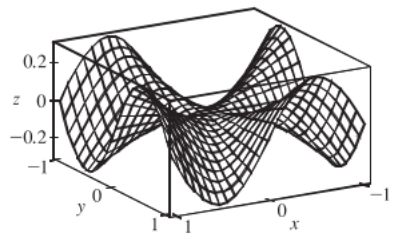
$\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2} = \dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2} = \dfrac{e^{x+y}}{(e^x+e^y)^2}$, $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = -\dfrac{e^{x+y}}{(e^x+e^y)^2}$.

17. $\dfrac{\partial P}{\partial V} = -\dfrac{mRT}{V^2}$, $\dfrac{\partial V}{\partial T} = \dfrac{mR}{P}$ e $\dfrac{\partial T}{\partial P} = \dfrac{V}{mR}$.

18. Não, pois pelo Teorema de Clairaut deveria ser verdade que $f_{xy} = f_{yx}$, mas temos $f_{xy} = 4 \neq 3 = f_{yx}$.

19. $x = 1 + t$, $y = 2$, $z = 2 - 2t$.

20. **a)** Gráfico de f:



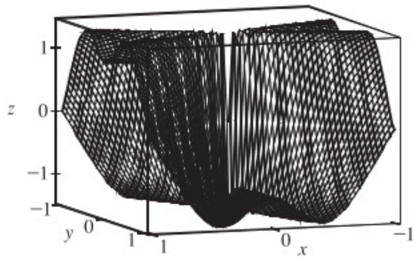
b) $f_x = \dfrac{x^4 y + 4x^2y^3 - y^5}{(x^2+y^2)^2}$ e $f_y = \dfrac{x^5 - 4x^3y^2 - xy^4}{(x^2+y^2)^2}$ quando $(x,y) \neq (0,0)$.

c) $f_x(0,0) = f_y(0,0) = 0$.

d) Use $f_{xy}(0,0) = \lim\limits_{h\to 0} \dfrac{f_x(0,h) - f_x(0,0)}{h}$ e $f_{yx}(0,0) = \lim\limits_{h\to 0} \dfrac{f_y(h,0) - f_y(0,0)}{h}$.

e) Para $(x,y) \neq (0,0)$, $f_{xy} = x^6 + 9x^4y^2 - 9x^2y^4 - y^6(x^2+y^2)^3$. Como f_{xy} não é contínua na origem, não há uma contradição com o Teorema de

Clairaut. Os gráficos de f_{xy} e f_{yx} são idênticos, exceto na origem:



21. **a)** $\dfrac{\partial f}{\partial x} = 20x^3y^2 + y^3$ e $\dfrac{\partial f}{\partial y} = 10x^4y + 3xy^2$.

b) $\dfrac{\partial z}{\partial x} = -y\,\text{sen}(xy)$ e $\dfrac{\partial z}{\partial y} = -x\,\text{sen}(xy)$.

c) $\dfrac{\partial z}{\partial x} = \dfrac{x^4 + 3x^2y^2 - 2xy^2}{(x^2+y^2)^2}$ e $\dfrac{\partial z}{\partial y} = \dfrac{2x^2y(1-x)}{(x^2+y^2)^2}$.

d) $\dfrac{\partial f}{\partial x} = -2xe^{-x^2-y^2}$ e $\dfrac{\partial f}{\partial y} = -2ye^{-x^2-y^2}$.

e) $\dfrac{\partial z}{\partial x} = 2x\ln(1+x^2+y^2) + \dfrac{2x^3}{1+x^2+y^2}$ e $\dfrac{\partial z}{\partial y} = \dfrac{2x^2y}{1+x^2+y^2}$.

f) $\dfrac{\partial z}{\partial x} = ye^{xy}(1+xy)$ e $\dfrac{\partial z}{\partial y} = xe^{xy}(1+xy)$.

g) $\dfrac{\partial f}{\partial x} = 12y(4xy-3y^3)^2 + 10xy$ e $\dfrac{\partial f}{\partial y} = 3(4xy-3y^2)^2(4x-9y^2) + 5x^2$.

h) $\dfrac{\partial z}{\partial x} = \dfrac{y}{x^2+y^2}$ e $\dfrac{\partial z}{\partial y} = \dfrac{-x}{x^2+y^2}$.

i) $\dfrac{\partial g}{\partial x} = yx^{y-1}$ e $\dfrac{\partial g}{\partial y} = x^y \ln x$.

j) $\dfrac{\partial z}{\partial x} = 2x(1+\ln(x^2+y^2))$ e $\dfrac{\partial z}{\partial y} = 2y(1+\ln(x^2+y^2))$.

l) $\dfrac{\partial f}{\partial x} = \dfrac{x^2}{\sqrt[3]{(x^3+y^3+3)^2}}$ e $\dfrac{\partial f}{\partial y} = \dfrac{2y}{3\sqrt[3]{(x^3+y^3+3)^2}}$.

m) $\dfrac{\partial z}{\partial x} = \dfrac{\text{sen}\,y(\cos(x^2+y^2) + 2x^2\sin(x^2+y^2))}{(\cos(x^2+y^2))^2}$ e

$\dfrac{\partial z}{\partial y} = \dfrac{x\cos y\cos(x^2+y^2) + 2xy\sin y\sin(x^2+y^2)}{(\cos(x^2+y^2))^2}$.

22. $\dfrac{\partial z}{\partial x} = \dfrac{y^4 - x^2y^2}{(x^2+y^2)^2}$ e $\dfrac{\partial z}{\partial y} = \dfrac{2x^3y}{(x^2+y^2)^2}$.

23. **a)** 4.

b) -4.

24. $\dfrac{\partial g}{\partial x} = \dfrac{1}{y}\phi'\left(\dfrac{x}{y}\right)$ e $\dfrac{\partial g}{\partial y} = -\dfrac{x}{y^2}\phi'\left(\dfrac{x}{y}\right)$.

25. $\dfrac{\partial p}{\partial V} = -\dfrac{nRT}{V^2}$ e $\dfrac{\partial p}{\partial T} = \dfrac{nR}{V}$.

26. $\dfrac{\partial z}{\partial x} = e^y\phi'(x-y)$ e $\dfrac{\partial z}{\partial y} = e^y\phi(x-y) - e^y\phi'(x-y)$.

27. $\dfrac{\partial f}{\partial x} = 2x\phi\left(\dfrac{x}{y}\right) + \dfrac{(x^2+y^2)}{y}\phi'\left(\dfrac{x}{y}\right)$ e $\dfrac{\partial f}{\partial y} = 2y\phi\left(\dfrac{x}{y}\right) - \dfrac{x(x^2+y^2)}{y^2}\phi'\left(\dfrac{x}{y}\right)$.

28. $\dfrac{\partial f}{\partial x} = \begin{cases} \dfrac{y^2-x^2-2xy^4}{(x^2+y^2)^2}, & \text{se } (x,y) \neq (0,0), \\ \text{não existe} & \text{se } (x,y) = (0,0) \end{cases}$ e

$$\dfrac{\partial f}{\partial y} = \begin{cases} \dfrac{4x^2y^3+2y^5-2xy}{x^2+y^2}, & \text{se } (x,y) \neq (0,0), \\ 0, & \text{se } (x,y) = (0,0). \end{cases}$$

29. **a)** $\dfrac{\partial f}{\partial x} = (1+x)e^{x-y-z}$, $\dfrac{\partial f}{\partial y} = -xe^{x-y-z}$ e $\dfrac{\partial f}{\partial z} = -xe^{x-y-z}$.

b) $\dfrac{\partial w}{\partial x} = 2x\arcsin\left(\dfrac{t}{z}\right)$, $\dfrac{\partial w}{\partial y} = \dfrac{x^2|z|}{z\sqrt{z^2-y^2}}$ e $\dfrac{\partial w}{\partial z} = -\dfrac{x^2y}{|z|\sqrt{z^2-y^2}}$.

c) $\dfrac{\partial w}{\partial x} = \dfrac{yz(y+z)}{(x+y+z)^2}$, $\dfrac{\partial w}{\partial y} = \dfrac{xz(x+z)}{(x+y+z)^2}$ e $\dfrac{\partial w}{\partial z} = \dfrac{xy(x+y)}{(x+y+z)^2}$.

d) $\dfrac{\partial f}{\partial x} = 2x\cos(x^2+y^2+z^2)$, $\dfrac{\partial f}{\partial y} = 2y\cos(x^2+y^2+z^2)$ e

$\dfrac{\partial f}{\partial z} = 2z\cos(x^2+y^2+z^2)$.

e) $\dfrac{\partial s}{\partial x} = w\left(\dfrac{2x^2}{x^2+y^2+z^2+w^2} + \ln(x^2+y^2+z^2+w^2)\right)$,

$\dfrac{\partial s}{\partial y} = \dfrac{2xyw}{x^2+y^2+z^2+w^2}$, $\dfrac{\partial s}{\partial z} = w\dfrac{2xzw}{x^2+y^2+z^2+w^2}$ e

$\dfrac{\partial s}{\partial w} = x\left(\dfrac{2w^2}{x^2+y^2+z^2+w^2} + \ln(x^2+y^2+z^2+w^2)\right)$.

30. $\dfrac{\partial f}{\partial x} = \dfrac{-x^2+y^2+z^2}{(x^2+y^2+z^2)^2}$, $\dfrac{\partial f}{\partial y} = \dfrac{-2xy}{(x^2+y^2+z^2)^2}$ e $\dfrac{\partial f}{\partial z} = \dfrac{-2xz}{(x^2+y^2+z^2)^2}$.

31. $\dfrac{\partial s}{\partial x} = \dfrac{1}{y}e^{\frac{x}{y}-\frac{z}{w}}$, $\dfrac{\partial s}{\partial y} = -\dfrac{x}{y^2}e^{\frac{x}{y}-\frac{z}{w}}$,

$\dfrac{\partial s}{\partial z} = -\dfrac{1}{w}e^{\frac{x}{y}-\frac{z}{w}}$ e $\dfrac{\partial s}{\partial w} = \dfrac{z}{w^2}e^{\frac{x}{y}-\frac{z}{w}}$.

32. **a)** $\dfrac{\partial f}{\partial x} = 2x(y+2)$ e $\dfrac{\partial f}{\partial y} = x^2-1$.

b) $\dfrac{\partial f}{\partial x} = 2y(xy-1)$ e $\dfrac{\partial f}{\partial y} = 2x(xy-1)$.

c) $\dfrac{\partial f}{\partial x} = \dfrac{\partial f}{\partial y} = -\dfrac{1}{(x^2+y^2)^2}$.

d) $\dfrac{\partial f}{\partial x} = -e^{-x}\sin(x+y) + e^{-x}\cos(x+y)$ e $\dfrac{\partial f}{\partial y} = e^{-x}\cos(x+y)$.

e) $\dfrac{\partial f}{\partial x} = ye^{xy}\ln y$ e $\dfrac{\partial f}{\partial y} = xe^{xy}\ln y + \dfrac{e^{xy}}{y}$.

f) $\dfrac{\partial f}{\partial x} = -6\cos(3x-y^2)\operatorname{sen}(3x-y^2)$ e $\dfrac{\partial f}{\partial y} = 4y\cos(3x-y^2)\operatorname{sen}(3x-y^2)$.

33. **a)** $f_x = 1+y^2$, $f_y = 2xy$ e $f_z = -4z$.

b) $f_x = 1$, $f_y = -\dfrac{y}{\sqrt{y^2+z^2}}$ e $f_z = -\dfrac{z}{\sqrt{y^2+z^2}}$.

c) $f_x = -x(x^2+y^2+z^2)^{-3/2}$, $f_y = -y(x^2+y^2+z^2)^{-3/2}$ e
$f_z = -z(x^2+y^2+z^2)^{-3/2}$.

d) $f_x = \dfrac{1}{x+2y+3z}$, $f_y = \dfrac{2}{x+2y+3z}$ e $f_z = \dfrac{3}{x+2y+3z}$.

e) $f_x = -2xe^{-(x^2+y^2+z^2)}$, $f_y = -2ye^{-(x^2+y^2+z^2)}$ e $f_z = -2ze^{-(x^2+y^2+z^2)}$.

f) $f_x = -yze^{-xyz}$, $f_y = -xze^{-xyz}$ e $f_z = -xye^{-xyz}$.

34. $\dfrac{\partial f}{\partial z}(1,2,3) = 12$.

35. $\dfrac{\partial z}{\partial x}(1,1,1) = -2$.

36. **a)** $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos(A)$, $\dfrac{\partial A}{\partial a} = \dfrac{a}{bc\operatorname{sen}(A)}$ e $\dfrac{\partial A}{\partial b} = \dfrac{c\cos(A) - b}{bc\operatorname{sen}(A)}$.

b) $\dfrac{a}{\operatorname{sen}(A)} = \dfrac{b}{\operatorname{sen}(B)}$, $\dfrac{\partial a}{\partial A} = \dfrac{a\cos(A)}{\operatorname{sen}(A)}$ e $\dfrac{\partial a}{\partial B} = -b\csc(B)\cot(B)\operatorname{sen}(A)$.

37. **a)** $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2} = 2xy^2$, $\dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 2x^3$ e $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \dfrac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = 6x^2y$.

b) $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2} = 2e^{x^2-y^2}(1+2x^2)$, $\dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 2e^{x^2-y^2}(2y^2-1)$ e
$\dfrac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \dfrac{\partial^2 z}{\partial y \partial x} = -4xye^{x^2-y^2}$.

c) $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2} = \dfrac{2+2y^2-2x^2}{(1+x^2+y^2)^2}$, $\dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2} = \dfrac{2+2x^2-2y^2}{(1+x^2+y^2)^2}$ e
$\dfrac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \dfrac{\partial^2 z}{\partial y \partial x} = \dfrac{-4xy}{(1+x^2+y^2)^2}$.

d) $\dfrac{\partial^2 g}{\partial x^2} = 24xy^2, \quad \dfrac{\partial^2 g}{\partial y^2} = 48x^3y^2 \quad \text{e} \quad \dfrac{\partial^2 g}{\partial x \partial y} = \dfrac{\partial^2 g}{\partial y \partial x} = 48x^2y^3.$

38. $\dfrac{\partial f}{\partial x} = -\dfrac{2x}{(x^2+y^2)^2}, \quad \dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2} = \dfrac{6x^2-2y^2}{(x^2+y^2)^3}, \quad \dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2} = \dfrac{6y^2-2x^2}{(x^2+y^2)^3}$ e $\dfrac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = \dfrac{8xy}{(x^2+y^2)^3}.$

39. $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2} = \dfrac{2y^2-2x^2}{(x^2+y^2)^2} \quad \text{e} \quad \dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2} = \dfrac{2x^2-2y^2}{(x^2+y^2)^2}.$

40. $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \dfrac{-3xy-x^2}{y^3} e^{\frac{x}{y}} \quad \text{e} \quad \dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2} = \dfrac{3x^2y+x^3}{y^4} e^{\frac{x}{y}}.$

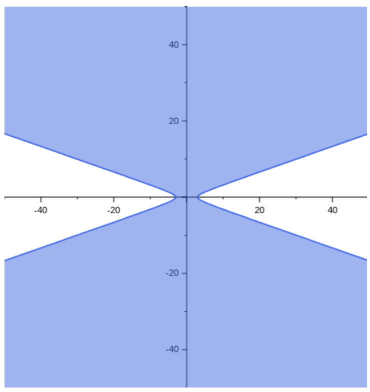
41. **a)** $\dfrac{\partial z}{\partial x} = -\dfrac{x+2yz}{2(z+xy)} \quad \text{e} \quad \dfrac{\partial z}{\partial y} = -\dfrac{y+xz}{z+xy}.$

b) $\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3;\ z = -xy\}.$

42. **a)** $\dfrac{\partial f}{\partial x} = \dfrac{2xy^4}{(x^2+y^2)^2} \quad \text{e} \quad \dfrac{\partial f}{\partial y} = \dfrac{2x^4y}{(x^2+y^2)^2}.$

b) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = 0.$

43. **a)** $D_f = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2;\ x^2 - 9y^2 < 9\}.$



b) $f_x = \dfrac{-2x}{9-x^2-9y^2} \quad \text{e} \quad f_y = \dfrac{-18y}{9-x^2-9y^2}.$

44. **a)** Não, pois $\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$ não existe.

b) $\dfrac{\partial f}{\partial x}(0,0) = \dfrac{\partial f}{\partial y}(0,0) = 0.$

c) $\dfrac{\partial f}{\partial x} = \dfrac{y^3-x^2y}{(x^2+y^2)^2} \quad \text{e} \quad \dfrac{\partial f}{\partial y} = \dfrac{x^3-xy^2}{(x^2+y^2)^2}.$

d) Não, pois f não é contínua em $(0,0)$ (ou: pois suas derivadas parciais não são contínuas em $(0,0)$).

45. $\dfrac{\partial f}{\partial x}(0,0) = \dfrac{\partial f}{\partial y}(0,0) = 1.$

46. **a)** Não, pois $\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$ não existe.

    b) $\dfrac{\partial f}{\partial x}(0,0) = \dfrac{\partial f}{\partial y}(0,0) = 0.$

47. $\dfrac{\partial z}{\partial x} = \cos(x + \operatorname{sen} y), \quad \dfrac{\partial z}{\partial y} = \cos(x + \operatorname{sen} y)\cos y,$

    $\dfrac{\partial z^2}{\partial x \partial y} = -\operatorname{sen}(x + \operatorname{sen} y)\cos y$ e $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2} = -\operatorname{sen}(x + \operatorname{sen} y).$

48. **a)** $z = -8x - 2y.$

    b) $z = 6x + 4y + 8.$

    c) $x + y - 2z = 0.$

    d) $z = y.$

49. As derivadas f_x e f_y de cada f existem e são contínuas nos pontos dados, logo diferenciáveis.

    a) $L(x,y) = 2x + \frac{1}{4}y - 1.$

    b) $L(x,y) = \frac{1}{9}x - \frac{2}{9}y + \frac{2}{3}.$

    c) $L(x,y) = 1 - \pi y.$

50. $L(x,y) = -\frac{2}{3}x - \frac{7}{3}y + \frac{20}{3}$ e $f(1,95; 1,08) \approx 2.847.$

51. **a)** $dz = 3x^2 \ln(y^2)dx + \frac{2x^3}{y}dy.$

    b) $dm = 5p^4q^3dp + 3p^5q^2dq.$

    c) $dR = \beta^2\cos(\gamma)d\alpha + 2\gamma\beta\cos(\gamma)d\beta - \alpha\beta^2\operatorname{sen}(\gamma)d\gamma.$

52. $\Delta z = 0.9225$ e $dz = 0.9.$

53. $\Delta z = -0.7189$ e $dz = -0.73.$

54. $\Delta A \approx 5.4$ cm^2.

55. Para $V = \pi r^2 h$ o volume da lata de raio r e altura h, temos $\Delta V \approx 16$ cm^3.

56. $\Delta R \approx 0.059\Omega.$

57. Se x, y, z, w são os quatro números e $p(x,y,z,w) = xyzw$, temos $\Delta p \leq 25000.$

58. $\epsilon_1 = \Delta y$ e $\epsilon_2 = -5\Delta y.$

59. $f_x(0,0) = f_y(0,0) = 0$, mas $\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$ não existe, logo f é descontínua em $(0,0)$ e portanto não é diferenciável neste ponto.

60. **a)** Não.

    b) Não.

    c) Sim.

61. As derivadas parciais $\frac{\partial f}{\partial x}$ e $\frac{\partial f}{\partial y}$ de cada função f existem e são contínuas em todos os pontos do domínio.

62. **a)** $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$.

    b) $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$.

    c) $\mathbb{R}^2$.

    d) $\mathbb{R}^2$.

63. **a)** Plano tangente: $z = 4x + 2y - 4$
    Reta normal: $(x, y, z) = (1, 1, 2) + \lambda\,(4, 2, -1)$.

    b) Plano tangente: $z = 2y - 1$
    Reta normal: $(x, y, z) = (0, 1, 1) + \lambda\,(0, 2, -1)$.

    c) Plano tangente: $z = -8x + 2y + 8$
    Reta normal: $(x, y, z) = (1, -1, -2) + \lambda\,(-8, 2, -1)$.

    d) Plano tangente: $z = 9x - 8y$
    Reta normal: $(x, y, z) = (2, 2, 2) + \lambda\,(9, -8, -1)$.

    e) Plano tangente: $4z = 2x - 4y + (\pi - 2)$
    Reta normal: $(x, y, z) = \left(2, \frac{1}{2}, \frac{\pi}{4}\right) + \lambda\left(\frac{1}{2}, -1, -1\right)$.

    f) Plano tangente: $4z = 2x + 2y - 1$
    Reta normal: $(x, y, z) = \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}\right) + \lambda\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, -1\right)$.

64. $x + 6y - 2z = 3$.

65. $2x + 2y + z = 9$ e $2x - 2y + z = 9$.

66. $z = 2x + y - \frac{5}{4}$.

67. $\dfrac{\partial f}{\partial x}(1,1) = 2$ e $\dfrac{\partial f}{\partial y}(1,1) = 1$.

68. **a)** $\dfrac{\partial f}{\partial x}(1,1) = -\dfrac{2}{3}$ e $\dfrac{\partial f}{\partial y}(1,1) = -\dfrac{1}{3}$.

    b) $(x, y, z) = (1, 1, 1) + \lambda(2, 1, 3)$.

69. Note que $x\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) + y\frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = f(x, y)$.

70. $4x - 3y - z = -\frac{11}{4}$.

71. $z = 0$ e $z = 6x + 6y - 18$.

72. $z = 2\sqrt{2}y$ e $z = -2\sqrt{2}y$.

73. Note que $a\frac{\partial f}{\partial x}(a,a) + a\frac{\partial f}{\partial y}(a,a) = f(a,a)$.

74. Note que o plano tangente no ponto $(1,2,5)$ é $z = 2x + 4y - 5$.

Referências

[1] J. Stewart. *Cálculo*, Volume 2, 6^a Edição, São Paulo, Pioneira/ Thomson Learning.

[2] H. L. Guidorizzi. *Um Curso de Cálculo*, Volume 2, 5^a Edição, 2002, Rio de Janeiro.

[3] G. B. Thomas. *Cálculo*, Volume 2, 10^a edição, São Paulo, Addison-Wesley/Pearson,2002.