ALUNO	RA	Turma

Q1	
Q2	
Q3	
Q4	
Q5	
$\sum$	

1a. Prova – MA-211 – Sexta-feira (MANHÃ), 15/09/2017

INSTRUÇÕES

NÃO É PERMITIDO DESTACAR AS FOLHAS DA PROVA
É PROIBIDO O USO DE CALCULADORAS
SERÃO CONSIDERADAS SOMENTE AS QUESTÕES ESCRITAS DE FORMA CLARA E DEVIDAMENTE JUSTIFICADAS

Boa Prova!

Questão 1. Considere o vetor unitário $\mathbf{u} = (\sqrt{5}/3, 2/3)$ e a função

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{xy^2}{x^2 - y^4} & \text{se } (x,y) \neq (0,0), \\ 0 & \text{se } (x,y) = (0,0). \end{cases}$$

(a) [1.0] Determine a derivada direcional $D_{\mathbf{u}} f(0,0)$.

(b) [1.0] Explique porque o produto escalar $\nabla f(0,0) \cdot \mathbf{u}$ não fornece a derivada direcional de f em $(0,0)$ na direção $\mathbf{u}$.

Questão 2. [2.0] Seja a equação:

$$x^2z + z^2y - 2xyz - 7 = 0.$$

Calcule $\frac{\partial z}{\partial x}$ e $\frac{\partial z}{\partial y}$ no ponto $(x, y, z) = (2, -1, 1)$.

Questão 3. [2.0] Mostre que todo plano tangente a

$$z = x^2 - y^2$$

intersecciona esta superfície em duas retas perpendiculares.

Questão 4. [2.0] Determine e classifique os pontos críticos de

$$f(x,y) = xy^2 + 3x^3 - x + 5.$$

Questão 5.

(a) [1.5] Mostre que a função $f(x, y, z) = z^2$ possui apenas um ponto crítico sobre a superfície $x^2 + y^2 - z = 0$.

(b) [0.5] Classifique este ponto crítico. Justifique sua resposta.

GABARITO

MA211 – PROVA 1
Sexta-feira (manhã), 15/09/2017.

*Para correção, cada símbolo "✓**x** " o item que o antecede vale* **x** *pontos.*

Resolução da Questão 1. (a) Pela definição de derivada direcional:

$$D_{\mathbf{u}}f(0,0) = \lim_{h\to 0} \frac{f(h\frac{\sqrt{5}}{3}, h\frac{2}{3}) - f(0,0)}{h} \checkmark \mathbf{0.3}$$

$$\lim_{h\to 0} \frac{\frac{h\cdot(\sqrt{5}/3)\cdot h^2\cdot(4/9)}{h^2\cdot(5/9)-h^4\cdot(16/81)} - 0}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{\frac{(4\sqrt{5}/27)h^3}{(45-h^2)(h^2/81)}}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{(12\sqrt{5})h^3}{(45-h^2)(h^3)} = \lim_{h\to 0}(12\sqrt{5}/45) = 4\sqrt{5}/15. \checkmark \mathbf{0.7}$$

(b) Esta expressão só pode ser usada se o critério de diferenciabilidade for satisfeito e, consequentemente, se $f(x,y)$ for contínua em $(0,0)$. Para isso, devemos ter

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = f(0,0) = 0. \checkmark \mathbf{0.2}$$

Se tomarmos o caminho $C_1 = \{(x,y) : x = t, y = 0\}$:

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = \lim_{t\to 0} \frac{0}{t^2} = 0. \checkmark \mathbf{0.3}$$

Tomando agora $C_2 = \{(x,y) : x = 2t^2, y = t\}$:

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = \lim_{t\to 0} \frac{2t^4}{3t^4} = \frac{2}{3}. \checkmark \mathbf{0.3}$$

Como os limites direcionais são distintos não temos continuidade no ponto. ✓**0.2**

Resolução da Questão 2. Pelo teorema da função implícita:

$$F(x,y,z) = x^2z + z^2y - 2xyz - 7 = 0$$

Temos então:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{\frac{\partial F}{\partial x}}{\frac{\partial F}{\partial z}} = -\frac{2xz - 2yz}{x^2 + 2yz - 2xy} \checkmark \mathbf{0.6}$$

Substituindo no ponto $(x,y,z) = (2,-1,1)$:

$$\frac{\partial z}{\partial x}(2,-1,1) = -\frac{2 \cdot 2 \cdot 1 - 2 \cdot (-1) \cdot 1}{2^2 + 2 \cdot (-1) \cdot 1 - 2 \cdot 2 \cdot (-1)} = -1. \checkmark \mathbf{0.4}$$

Para a derivada em y:

$$\frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{\frac{\partial F}{\partial y}}{\frac{\partial F}{\partial z}} = -\frac{z^2 - 2xz}{x^2 + 2yz - 2xy} \checkmark \mathbf{0.6}$$

Substituindo no ponto $(x,y,z) = (2,-1,1)$:

$$\frac{\partial z}{\partial y}(2,-1,1) = -\frac{1^2 - 2 \cdot 2 \cdot 1}{2^2 + 2 \cdot (-1) \cdot 1 - 2 \cdot 2 \cdot (-1)} = \frac{1}{2}. \checkmark \mathbf{0.4}$$

Resolução da Questão 3. No ponto $P(x_0, y_0, z_0)$ temos a equação do plano tangente a $z = f(x, y)$:

$$z - z_0 = f_x(x_0, y_0)(x - x_0) + f_y(x_0, y_0)(y - y_0)$$

No nosso caso:

$$z - z_0 = 2x_0(x - x_0) - 2y_0(y - y_0) \checkmark \mathbf{0.6}$$

No ponto em que ocorre intersecção do plano tangente com a superfície teremos

$$z = x^2 - y^2$$

e então devemos satisfazer

$$x^2 - y^2 - z_0 = 2x_0(x - x_0) - 2y_0(y - y_0) \checkmark \mathbf{0.6}$$

e rearranjando:

$$x^2 - y^2 - 2x_0x + 2y_0y + 2x_0^2 - 2y_0^2 - z_0 = 0$$

Completanto quadrado e recordando que $P(x_0, y_0, z_0)$ pertence à superfície:

$$(x - x_0)^2 - (y - y_0)^2 = -x_0^2 + y_0^2 + z_0 = 0$$

Temos assim

$$(x - x_0)^2 = (y - y_0)^2$$

que se satisfaz quando

$$y - y_0 = x - x_0 \text{ ou } y - y_0 = -x + x_0$$

Estas são retas com inclinação $+1$ e -1 passando pelo ponto (x_0, y_0) e portanto perpendiculares. $\checkmark \mathbf{0.8}$

Resolução da Questão 4. (a) No ponto crítico as derivadas parciais se anulam:

$$\begin{cases} y^2 + 9x^2 - 1 = 0 \\ 2xy = 0 \end{cases} \quad \checkmark \mathbf{0.4}$$

Da 2ª equação temos que $x = 0$ ou $y = 0$. Se $x = 0$, na 1ª teremos

$$y = \pm 1$$

Se $y = 0$, temos na 1ª:

$$x = \pm \frac{1}{3}$$

Os pontos críticos portanto são

$$(0, -1) \quad (0, 1) \quad (1/3, 0) \quad (-1/3, 0) \checkmark \mathbf{0.6}$$

Para classificar, aplicamos o teste da 2ª derivada:

$$D = f_{xx} f_{yy} - [f_{xy}]^2$$

$$= 18x \cdot 2x - [2y]^2 = 36x^2 - 4y^2 \checkmark \mathbf{0.4}$$

Aplicando sobre os pontos críticos em questão:

$$D(0, -1) = -4 < 0 \text{ (ponto de sela)}$$

$$D(0, 1) = -4 < 0 \text{ (ponto de sela)}$$

$$D(1/3, 0) = 4 > 0 \quad f_{xx}(1/3, 0) = 6 > 0 \text{ (mínimo local)}$$

$$D(-1/3, 0) = 4 > 0 \quad f_{xx}(-1/3, 0) = -6 < 0 \text{ (máximo local)} \checkmark \mathbf{0.6}$$

Resolução da Questão 5. (a) Temos um problema com restrição:

$$\begin{cases} f(x,y,z) = z^2 \\ g(x,y,z) = x^2 + y^2 - z = 0 \end{cases} \quad \checkmark\mathbf{0.4}$$

Multiplicadores de Lagrange:

$$\begin{cases} 0 = \lambda 2x \\ 0 = \lambda 2y \\ 2z = \lambda(-1) \\ x^2 + y^2 - z = 0 \end{cases} \quad \checkmark\mathbf{0.5}$$

Se $\lambda = 0$, da 3ª equação temos $z = 0$ e da 4ª temos $x^2 + y^2 = 0$, que só pode ser satisfeito para $x = 0$ e $y = 0$

Se $x = 0$ (1ª equação) e $y = 0$ (2ª equação), então da 4ª temos $z = 0$.

De todos os modos concluímos então que a única solução é $(x, y, z) = (0, 0, 0)$. $\checkmark\mathbf{0.6}$

(b) Observando a expressão que fornece valores de $f(x, y, z)$, ou seja, z^2, notamos que esta função assume sempre valores ≥ 0. Portanto o ponto crítico em questão é um mínimo. $\checkmark\mathbf{0.5}$