# Gabarito da Lista Avaliativa 6

MC358 — Fundamentos Matemáticos da Computação

Prof. Pedro J. de Rezende

PED: Lucas Peres Oliveira

2º Semestre de 2021

## Soluções das Questões

Para cada uma das questões, disponibilizamos um exemplo de solução correta produzida por algum dos alunos da turma.

1. Prove **por indução** em $n$ que o número de relações que são simultaneamente anti-simétricas e reflexivas sobre um conjunto não vazio $X$ de $n$ elementos é $3^{\frac{n(n-1)}{2}}$.

1) Base : com um elemento temos apenas uma relação reflexiva e anti-simétrica

$R = \{(a,a)\}$ , sendo a o elemento do conjunto

$1 = 3^{\frac{1(1-1)}{2}} = 1$

Hip: Para $n \geq 1$ , tome conjunto A com n elementos e suponha que o número de relações reflexivas e antisimétricas é $3^{\frac{n(n-1)}{2}}$

Passo: tome conjunto A com $n+1$ elementos.

Construa o conjunto B, igual a A mas removendo um elemento $x \in A$ arbitrário. B tem $n$ elementos e pela hipótese $3^{\frac{n(n-1)}{2}}$ relações como queremos.

Acrescentamos a cada uma dessas relações o par $(x,x)$ para que se mantenham reflexivas em A

Agora, para cada par do tipo $(x,a)$, $a \in A$, $a \neq x$ Podemos acrescentar $(x,a)$, $(a,x)$ ou nenhum nas relações, para que se mantenham antisimétricas.

Temos $n$ pares do tipo $(x,a)$, portanto $3^n$ opções de relações. O total de relações antisimétricas e reflexivas sobre A é:

$$3^n \quad 3^{\frac{n(n-1)}{2}} = 3^{\frac{2n}{2} + \frac{n^2-n}{2}} = 3^{\frac{n^2+n}{2}}$$

$$= 3^{\frac{(n+1)n}{2}} \quad \text{c.q.d.}$$

2. Nesta questão, todas as funções têm como domínio e contra-domínio o conjunto dos naturais positivos.

   Sabemos que se $f_1 \in O(g_1)$ e $f_2 \in O(g_2)$, então $(f_1+f_2) \in O(\max\{g_1, g_2\})$.

   Prove ou disprove a seguinte afirmação:

   Se $n \geq 2$ e $f_i \in o(g_i)$ para $i = 1, 2, \ldots, n$, então $\left(\sum_{i=1}^{n} f_i\right) \in O(\max\{g_1, g_2, \ldots, g_n\})$.

Prova (por indução em $n$):

Caso base: para $n=2$, temos $f_1 \in o(g_1)$ e $f_2 \in o(g_2)$. Como $o(g_i) \subset O(g_i)$, $i=1,2$, então $f_i \in o(g_i) \rightarrow f_i \in O(g_i)$, $i=1,2$.

Logo $\sum_{i=1}^{n} f_i = f_1 + f_2 \in O(\max\{g_1, g_2\})$.

Hipótese de Indução: assumimos a veracidade da afirmação em $n$: se $n \geq 2$ e $f_i \in o(g_i)$ para $i=1,2,\ldots,n$, então $\left(\sum_{i=1}^{n} f_i\right) \in O(\max\{g_1, g_2, \ldots, g_n\})$.

Vamos provar a veracidade para o caso $n+1$.

Passo de indução: seja $n+1 \geq 3$ e $f_i \in o(g_i)$ para $i=1,2,\ldots,n,n+1$. Como $o(g_i) \subset O(g_i)$, então $f_i \in o(g_i) \rightarrow f_i \in O(g_i)$ para $i=1,2,\ldots,n+1$.

$\left(\sum_{i=1}^{n+1} f_i\right) = \left(\sum_{i=1}^{n} f_i\right) + f_{n+1}$. Pela hipótese de indução, $\left(\sum_{i=1}^{n} f_i\right) \in O(\max\{g_1, g_2, \ldots, g_n\})$.

Visto que $f_{n+1} \in O(g_{n+1})$, então $\left(\sum_{i=1}^{n+1} f_i\right) = \left(\sum_{i=1}^{n} f_i\right) + f_{n+1} \in O(\max\{g_1, g_2, \ldots, g_n, g_{n+1}\})$, provando o passo e concluindo a prova por indução.

3. Considere a relação de recorrência:

$$T(n) = 9T(n/3) + 9(n^2 + n \log n)$$

$$T(1) = c, \text{ onde } c \text{ é uma constante.}$$

Assuma que $n$ é uma potência de 3.

- Chitoró afirma que consegue uma forma de aplicar o Teorema Master abaixo para provar que $T(n) \in O(n^2 \log n)$.
- Xorãozinho afirma que consegue uma forma de aplicar o Teorema Master abaixo para provar que $T(n) \in \Omega(n^2 \log n)$.

**Teorema 2 (Teorema 3.4 [2])**

*Dada uma relação de recorrência da forma $T(n) = aT(n/b) + cn^k$, onde $a, b \in \mathbb{N}$, $a \geq 1$, $b > 1$ e $c, k$ são constantes, com $c > 0$ e $k \geq 0$,*

*então:* $$T(n) \in \begin{cases} \Theta(n^{\log_b a}), & \text{se } a > b^k \\ \Theta(n^k \log n), & \text{se } a = b^k \\ \Theta(n^k), & \text{se } a < b^k \end{cases}$$

(a) Prove que a afirmação de Chitoró é verdadeira.

(b) Prove que a afirmação de Xorãozinho é verdadeira.

③ a) Suponha $T'(n) = 9T'(\frac{n}{3}) + 9n^2 + 9n^2$; $T'(1) = T(1)$

Comparando as partes diferentes de $T'$ e $T$, vemos que $T'(n) > T(n)$ $\forall n \in \mathbb{R}; n > 1$, pois:

$$9n^2 - 9n\log n > 0 \iff 9n(n - \log n) > 0 \iff n > \log n$$

(verdade para todo $n > 0$)

Ou seja, a cada iteração, $T'$ somará mais que $T$.

- Pelo Teorema Master, sabemos que $T' \in \Theta(n^2 \log n)$, o que implica que $T' \in O(n^2 \log n)$, ou seja:

$T'(n) \leq n^2 \log n \cdot c_1$, onde $c_1$ é uma constante e $n$ é maior que algum $n_0$, a partir do qual a desigualdade é sempre verdadeira.

Daí, como sabemos que $T(n) < T'(n), n > 1$:

$$T(n) \leq n^2 \log n \cdot c_1 \iff T \in O(n^2 \log n)$$

b) Agora supondo $T''(n) = 9T''(\frac{n}{3}) + 9n^2$; $T''(1) = T(1)$, ou seja, tirando a parte logarítmica de $T$.

Podemos afirmar que $T$ será maior que $T''$ para $n \geq 3$ pois, a cada iteração, $T$ somará uma parte logarítmica que não existe em $T''$. (Demonstração do porque de $n \geq 3$ no final)

- Novamente, pelo Teorema Master, sabemos que $T''$ pertence a $\Theta(n^2 \log n)$, o que implica que $T'' \in \Omega(n^2 \log n)$

Ou seja:

$$T''(n) \geq n^2 \log n \cdot c_2, \quad n > n_0$$

Entretanto, como sabemos que $T > T''$; $n \geq 3$:

$$T(n) \geq n^2 \log n \cdot c_2, n > n_0 \iff T \in \Omega(n^2 \log n)$$

C.Q.D.