ALUNO	RA	Turma

Q1	
Q2	
Q3	
Q4	
Q5	
$\sum$	

1a. Prova – MA-211 – Quinta-feira (TARDE), 14/09/2017

INSTRUÇÕES

NÃO É PERMITIDO DESTACAR AS FOLHAS DA PROVA
É PROIBIDO O USO DE CALCULADORAS
SERÃO CONSIDERADAS SOMENTE AS QUESTÕES ESCRITAS DE FORMA CLARA E DEVIDAMENTE JUSTIFICADAS

Boa Prova!

Questão 1. A temperatura T em uma esfera de metal é inversamente proporcional à distância ao centro da esfera, que tomamos como origem. A temperatura no ponto $(1, 2, 2)$ é de 150 graus.

(a) [1.0] Determine a derivada de T na direção do ponto $(1, 2, 2)$ para o ponto $(1, 0, 3)$.

(b) [1.0] Mostre que em qualquer ponto da esfera a direção de maior crescimento da temperatura é dada por um vetor que parte da origem.

Questão 2. [2.0] Seja $z = f(x, y)$ com $x = r\cos\theta$ e $y = r\sin\theta$. Mostre que

$$z_{xx} + z_{yy} = z_{rr} + \frac{1}{r^2} z_{\theta\theta} + \frac{1}{r} z_r.$$

Questão 3. [2.0] Obtenha o ângulo formado entre a reta paralela ao eixo z passando por (a, b, c) e o plano tangente em (a, b, c) ao paraboloide

$$4z = x^2 + y^2.$$

Questão 4. Dada a função $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definida como

$$f(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2 - 6x + 9}.$$

(a) [1.5] Determine, se existirem, os mínimos e máximos (locais e absolutos) de f na região de fronteira

$$\frac{(x-3)^2}{9} + y^2 = 1.$$

(b) [0.5] Verifique quais pontos de extremo absoluto nesta fronteira são também pontos de extremo absoluto de f no interior da região, ou seja, no conjunto

$$E = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : \frac{(x-3)^2}{9} + y^2 \leqslant 1\}.$$

Questão 5. [2.0] Decomponha o número positivo a na soma de três números positivos tais que o produto entre eles seja máximo.

GABARITO
MA211 – PROVA 1
Quinta-feira (tarde), 14/09/2017.

*Para correção, cada símbolo "✓**x**" o item que o antecede vale **x** pontos.*

Resolução da Questão 1. (a) Se a temperatura é inversamente proporcional à distância temos

$$T(x,y,z) = \frac{k}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$$

Como no ponto $(1,2,2)$ a temperatura é 150:

$$\frac{k}{\sqrt{1^2+2^2+2^2}} = \frac{k}{3} = 150 \Rightarrow k = 450. \checkmark \mathbf{0.2}$$

A variação em questão é a derivada direcional que pode ser obtida pelo produto escalar do vetor unitário de direção com o gradiente.

O vetor de direção é

$$< 1,0,3 > - < 1,2,2 >=< 0,-2,1 >$$

Normalizando:

$$\mathbf{u} = \frac{1}{\sqrt{5}} < 0,-2,1 >= \left\langle 0, -\frac{2}{\sqrt{5}}, \frac{1}{\sqrt{5}} \right\rangle \checkmark \mathbf{0.2}$$

Gradiente:

$$\nabla f =< f_x, f_y, f_z >= 450 \left\langle -\frac{x}{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}}, -\frac{y}{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}}, -\frac{z}{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}} \right\rangle \checkmark \mathbf{0.2}$$

Substituindo para o ponto $(x,y,z) = (1,2,2)$ e o vetor $\mathbf{u}$ temos a derivada direcional:

$$\nabla f \cdot \mathbf{u} = 450 \left\langle -\frac{1}{(1^2+2^2+2^2)^{3/2}}, -\frac{2}{(1^2+2^2+2^2)^{3/2}}, -\frac{2}{(1^2+2^2+2^2)^{3/2}} \right\rangle \cdot \left\langle 0, -\frac{2}{\sqrt{5}}, \frac{1}{\sqrt{5}} \right\rangle$$

$$= \frac{1800}{3\sqrt{15}} - \frac{900}{3\sqrt{15}} = 20\sqrt{15}. \checkmark \mathbf{0.4}$$

(b) Para que a derivada direcional seja maximizada o vetor unitário deve ter a mesma direção do gradiente, ou seja, ele deve ser o gradiente normalizado. ✓**0.2**

Para normalizar o gradiente calculamos sua magnitude:

$$|\nabla f| = \sqrt{\frac{450^2x^2}{(x^2+y^2+z^2)^3} + \frac{450^2y^2}{(x^2+y^2+z^2)^3} + \frac{450^2z^2}{(x^2+y^2+z^2)^3}} = 450\frac{1}{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}}(x^2+y^2+z^2)^{1/2}$$

$$= \frac{450}{x^2+y^2+z^2} \checkmark \mathbf{0.4}$$

Finalmente o gradiente normalizado é dado então por

$$\left\langle -\frac{x}{(x^2+y^2+z^2)^{1/2}}, -\frac{y}{(x^2+y^2+z^2)^{1/2}}, -\frac{z}{(x^2+y^2+z^2)^{1/2}} \right\rangle \checkmark \mathbf{0.4}$$

e este é o vetor unitário que parte da origem $(0,0,0)$ e aponta para (x,y,z).

Resolução da Questão 2. Pela regra da cadeia (caso 2):

$$\frac{\partial z}{\partial r} = \frac{\partial z}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial r} + \frac{\partial z}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial r} = \frac{\partial z}{\partial x}\cos\theta + \frac{\partial z}{\partial y}\sin\theta$$

Temos portanto:

$$\boxed{z_r = \frac{\partial z}{\partial x}\cos\theta + \frac{\partial z}{\partial y}\sin\theta} \checkmark \mathbf{0.2}$$

Derivando novamente em r devemos considerar que $\partial z/\partial x$ e $\partial z/\partial y$ também dependem de x e y. Por isso aplicamos a regra da cadeia novamente:

$$z_{rr} = \frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)\cos\theta + \frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)\sin\theta$$

$$= \cos\theta\left(\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}\frac{\partial x}{\partial r} + \frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}\frac{\partial y}{\partial r}\right) + \sin\theta\left(\frac{\partial^2 z}{\partial y\partial x}\frac{\partial x}{\partial r} + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}\frac{\partial y}{\partial r}\right)$$

Isso implica que

$$\boxed{z_{rr} = \cos^2\theta\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + 2\cos\theta\sin\theta\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y} + \sin^2\theta\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}} \checkmark \mathbf{0.6}$$

Regra da cadeia para derivada em θ:

$$\frac{\partial z}{\partial \theta} = \frac{\partial z}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial \theta} + \frac{\partial z}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial \theta} = -\frac{\partial z}{\partial x}r\sin\theta + \frac{\partial z}{\partial y}r\cos\theta$$

Para a 2ª derivada em θ usamos a regra do produto:

$$z_{\theta\theta} = -\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)r\sin\theta - \frac{\partial z}{\partial x}r\cos\theta + \frac{\partial}{\partial\theta}\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)r\cos\theta - \frac{\partial z}{\partial y}r\sin\theta$$

Novamente, $\partial z/\partial x$ e $\partial z/\partial y$ dependem de x e y e para derivar em θ devemos usar a regra da cadeia novamente:

$$z_{\theta\theta} = -r\sin\theta\left(\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}\frac{\partial x}{\partial\theta} + \frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}\frac{\partial y}{\partial\theta}\right) - r\cos\theta\frac{\partial z}{\partial x} + r\cos\theta\left(\frac{\partial^2 z}{\partial y\partial x}\frac{\partial x}{\partial\theta} + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}\frac{\partial y}{\partial\theta}\right) - r\sin\theta\frac{\partial z}{\partial y}$$

$$= -r\sin\theta\left(-r\sin\theta\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + r\cos\theta\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}\right) - r\cos\theta\frac{\partial z}{\partial x} + r\cos\theta\left(-r\sin\theta\frac{\partial^2 z}{\partial y\partial x} + r\cos\theta\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}\right) - r\sin\theta\frac{\partial z}{\partial y}$$

e finalmente:

$$\boxed{z_{\theta\theta} = -r\left(\cos\theta\frac{\partial z}{\partial x} + \sin\theta\frac{\partial z}{\partial y}\right) + r^2\left(\sin^2\theta\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} - 2\cos\theta\sin\theta\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y} + \cos^2\theta\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}\right)} \checkmark \mathbf{0.8}$$

Temos portanto

$$z_{rr} + \frac{1}{r^2}z_{\theta\theta} + \frac{1}{r}z_r =$$

$$\cos^2\theta\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + \cancel{2\cos\theta\sin\theta\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}} + \sin^2\theta\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} -$$

$$-\frac{1}{r}\left(\cancel{\cos\theta\frac{\partial z}{\partial x}} + \cancel{\sin\theta\frac{\partial z}{\partial y}}\right) + \left(\sin^2\theta\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} - \cancel{2\cos\theta\sin\theta\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}} + \cos^2\theta\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}\right) +$$

$$+\cancel{\frac{1}{r}\frac{\partial z}{\partial x}\cos\theta} + \cancel{\frac{1}{r}\frac{\partial z}{\partial y}\sin\theta}$$

Reagrupando:

$$(\cos^2\theta + \sin^2\theta)\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + (\cos^2\theta + \sin^2\theta)\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} \qquad \square \checkmark \mathbf{0.4}$$

Resolução da Questão 3. Equação da superfície:

$$z = f(x, y) = \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{4}$$

Equação do plano tangente:

$$z - c = \frac{a}{2}(x - a) + \frac{b}{2}(y - b) \checkmark \mathbf{0.4}$$

com vetor normal

$$\langle \frac{a}{2}, \frac{b}{2}, -1 \rangle$$

A reta paralela ao eixo z corresponde ao vetor

$$\langle 0, 0, 1 \rangle \checkmark \mathbf{0.4}$$

O ângulo θ entre a reta e o plano é complementar do ângulo θ_2 entre a reta e a normal do plano. Este é obtido do produto escalar:

$$\cos \theta_2 = \frac{1}{\sqrt{\frac{a^2+b^2+4}{4}} \cdot 1} = \frac{2}{\sqrt{a^2 + b^2 + 4}} \checkmark \mathbf{0.4}$$

O complementar que queremos é obtido do seno:

$$\sin \theta = \frac{2}{\sqrt{a^2 + b^2 + 4}} \checkmark \mathbf{0.4}$$

Como (a, b, c) está sobre a superfície temos $a^2 + b^2 = 4c$ e logo

$$\sin \theta = \frac{2}{\sqrt{4c + 4}}$$

Finalmente

$$\theta = \arcsin \left(\frac{1}{\sqrt{c + 1}} \right) . \checkmark \mathbf{0.4}$$

Resolução da Questão 4. (a) Temos um problema de extremos com restrição. Como os extremos de uma raiz são também extremos de seu quadrado, podemos simplificar:

$$\begin{cases} f(x,y) = x^2 + y^2 - 6x + 9 \\ g(x,y) = \frac{(x-3)^2}{9} + y^2 = 1 \end{cases} \quad \checkmark \mathbf{0.3}$$

Podemos resolver por Lagrange:

$$\begin{cases} 2x - 6 = \lambda \frac{2}{9}(x-3) \\ 2y = \lambda 2y \\ \frac{(x-3)^2}{9} + y^2 = 1 \end{cases} \quad \checkmark \mathbf{0.3}$$

A 2ª equação nos oferece duas possibilidades. A primeira é $\lambda = 1$. Neste caso, teríamos da 1ª:

$$2x - 6 = \frac{2}{9}(x-3) \Rightarrow \frac{16}{9}x - \frac{48}{9} = 0 \Rightarrow x = 3$$

Da 3ª equação teríamos $y = \pm 1$.

Outra opção seria $y = 0$, que implicaria pela 3ª equação $x = 6$ ou $x = 0$.

Os pontos de extremo são portanto

$$(3,1) \qquad (3,-1) \qquad (6,0) \qquad (0,0) \checkmark \mathbf{0.6}$$

Calculando os valores de f nestes pontos temos

$$f(3,1) = 1 \qquad f(3,-1) = 1 \qquad f(6,0) = 9 \qquad f(0,0) = 9 \checkmark \mathbf{0.3}$$

Assim, os dois primeiros são mínimos e os dois últimos são máximos.

(b) Os extremos desta função em geral devem satisfazer

$$f_x = f_y = 0 \Rightarrow 2x - 6 = 2y = 0$$

O único ponto crítico é portanto $(3,0)$, que está dentro da região interior, mas não na fronteira. $\checkmark \mathbf{0.5}$

Resolução da Questão 5. Problema com restrição:

$$\begin{cases} f(x,y,z) = xyz \\ g(x,y,z) = x+y+z = a \end{cases} \quad \checkmark\mathbf{0.5}$$

Lagrange:

$$\begin{cases} yz = \lambda \\ xz = \lambda \\ xy = \lambda \\ x+y+z = a \end{cases} \quad \checkmark\mathbf{0.7}$$

Da 1ª e 2ª equações temos que $x = y$ (já que z não pode ser 0 já que se exige que seja positivo).

Da 2ª e 3ª temos que pelo mesmo motivo $y = z$. Portanto temos

$$x = y = z$$

Da 4ª equação obtemos

$$x = y = z = \frac{a}{3}.\checkmark\mathbf{0.8}$$