PEDRO SADER AZEVEDO RA. 243245

(1) PARA VERIFICAR A CONVERGÊNCIA DA SÉRIE

$$S = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n)!}{(n!)^2 5^n}$$

DEVEMOS UTILIZAR O TESTE DA RAZÃO:

$$\lim_{n\to\infty} \left| \frac{S_{n+1}}{S_n} \right| = \lim_{n\to\infty} \left| \frac{(2(n+1))!}{((n+1)!)^2 5^{n+1}} \Big/ \frac{(2n)!}{(n!)^2 5^n} \right|$$

$$= \lim_{n\to\infty} \left| \frac{(2(n+1))!}{((n+1)!)^2 5^{n+1}} \cdot \frac{(n!)^2 5^n}{(2n)!} \right|$$

$$= \lim_{n\to\infty} \left| \frac{(2n+2)(2n+1)\cancel{(2n)!}}{(n+1)^2 \cancel{(n!)^2} \cdot 5 \cdot \cancel{5^n}} \cdot \frac{\cancel{(n!)^2} \cancel{5^n}}{\cancel{(2n)!}} \right|$$

$$= \lim_{n\to\infty} \left| \frac{4n^2 + 6n + 2}{5n^2 + 10n + 5} \right| = \lim_{n\to\infty} \left| \frac{4 + \cancel{\frac{6}{n}}^{0} + \cancel{\frac{2}{n^2}}^{0}}{5 + \cancel{\frac{10}{n}}_{0} + \cancel{\frac{5}{n^2}}_{0}} \right| = \frac{4}{5}$$

$\boxed{\frac{4}{5} < 1, \text{ ENTÃO A SÉRIE CONVERGE}}$

(2) A SÉRIE DE MC LAURIN PARA UMA FUNÇÃO $f$ QUALQUER É DADA PELA FÓRMULA

$$S = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)\, x^n}{n!}$$

PARA CHEGAR A UMA EXPRESSÃO DE $S$ VAMOS VER AS PRIMEIRAS DERIVADAS DE $f(x) = (1+x)\ln(1+x)$

DERIVADA PRIMEIRA: $\frac{\partial}{\partial x} f(x) = \frac{\partial}{\partial x} (1+x) \ln(1+x) = \frac{\partial}{\partial x} \ln(x+1) + \frac{\partial}{\partial x} x \ln(x+1)$

$$= \frac{1}{x+1} + \underbrace{\frac{x}{x+1} + \ln(x+1)}_{\text{REGRA DO PRODUTO}} = 1 + \ln(x+1)$$

DERIVADA SEGUNDA: $\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial}{\partial x} f(x)\right) = \frac{\partial}{\partial x}(1 + \ln(x+1)) = \frac{1}{x+1} = (x+1)^{-1} 0! (-1)^2$

DERIVADA TERCEIRA: $\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} f(x)\right) = \frac{-1}{(x+1)^2} = (x+1)^{-2} 1! (-1)^3$

DERIVADA QUARTA: $\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial^3}{\partial x^3} f(x)\right) = \frac{2}{(x+1)^3} = (x+1)^{-3} 2! (-1)^4$

DERIVADA QUINTA: $\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial^4}{\partial x^4} f(x)\right) = \frac{-6}{(x+1)^4} = (x+1)^{-4} 3! (-1)^5$

A PARTIR DA DERIVADA SEGUNDA TEMOS UM PADRÃO ENTÃO

$$S = (1+0)\cancel{\ln(1+0)}^{0} + x + \sum_{n=2}^{\infty} \frac{(n-2)!(-1)^n x^n}{n!}$$

UTILIZANDO O TESTE DA RAZÃO NO SOMATÓRIO ACIMA, TEMOS

$$\lim_{K\to\infty} \left| \frac{\sum_{n=2}^{K+1}}{\sum_{n=2}^{K}} \right| = \lim_{K\to\infty} \left| \frac{(K-1)!(-1)^{K+1} x^{K+1}}{(K+1)!} \Big/ \frac{(K-2)!(-1)^K x^K}{K!} \right|$$

$$= \lim_{K\to\infty} \left| \frac{(1-K)x}{-(1-K)} \right| \underbrace{< 1}_{\text{CONDIÇÃO DE CONVERGÊNCIA}} \Rightarrow \lim_{K\to\infty} |-x| < 1$$

ENTÃO A SÉRIE CONVERGE PARA $x \in (-1, 1)$