

② A FÓRMULA DE UM ELEMENTO x_i DA SOLUÇÃO DE UM SISTEMA $Ax = b$ USANDO MÉTODO DE JACOBI É

$$x_i^{k+1} = \frac{b_i - \sum_{j=1}^{i-1} a_{ij} x_j^k - \sum_{j=i+1}^n a_{ij} x_j^k}{a_{ii}}, \quad i=1,2,\dots,n$$

ONDE k É O NÚMERO DA ITERAÇÃO, NÃO UM EXPONENTE!

PARA CONTAR O NÚMERO DE FLOPS, VAIE A PENA VER ALGUNS EXEMPLOS

* $i=1, n=4$

$$\begin{aligned} x_1^{k+1} &= (b_1 - \sum_{j=1}^0 a_{1j} x_j^k - \sum_{j=2}^4 a_{1j} x_j^k) / a_{11} \\ &= (b_1 - (a_{12} x_2^k + a_{13} x_3^k + a_{14} x_4^k)) / a_{11} \end{aligned}$$

* $i=2, n=4$

$$\begin{aligned} x_2^{k+1} &= (b_2 - \sum_{j=1}^1 a_{2j} x_j^k - \sum_{j=3}^4 a_{2j} x_j^k) / a_{22} \\ &= (b_2 - (a_{21} x_1^k) - (a_{23} x_3^k + a_{24} x_4^k)) / a_{22} \\ &= (b_2 - (a_{21} x_1^k + a_{23} x_3^k + a_{24} x_4^k)) / a_{22} \end{aligned}$$

NOTE QUE, QUANDO i AUMENTA DE 1, TEMOS UM ELEMENTO A MAIS NO PRIMEIRO SOMATÓRIO (QUE É SUPERIORMENTE LIMITADO POR i) E UM ELEMENTO A MENOS NO SEGUNDO SOMATÓRIO (QUE É INFERIORMENTE LIMITADO POR i). ASSIM, A QUANTIDADE DE ELEMENTOS SOMADOS NA FÓRMULA INTEIRA NÃO DEPENDE DE i APENAS DE n .

NOS SOMATÓRIOS TEMOS $(n-1)$ MULTIPLICAÇÕES E $(n-2)$ ADIÇÕES. DEPOIS DISSO, TEMOS UMA SUBTRAÇÃO E UMA DIVISÃO.

COMO A FÓRMULA SÓ CALCULA UM ÚNICO ELEMENTO DO VETOR SOLUÇÃO x DE TAMANHO n , UMA ITERAÇÃO COMPLETA DO MÉTODO DE JACOBI TEM $((n-1) + (n-2) + 1 + 1)n$ FLOPS.

QUANDO $n \rightarrow \infty$, $n-1 \approx n-2 \approx n$ E OS TERMOS "+1" TORNAM-SE INSIGNIFICANTES. ASSIM TEMOS COMO RESULTADO FINAL $2n^2$ FLOPS.

- 3) a) PARA VERIFICAR SE O SISTEMA PODE SER FACILMENTE RESOLVIDO PELO MÉTODO DE JACOBI PRECISAMOS VERIFICAR SE A MATRIZ DE COEFICIENTES DO SISTEMA É DIAGONALMENTE DOMINANTE. PARA ISSO VERIFICAMOS SE A NORMA DA MATRIZ B ABAIXO É MENOR QUE 1:

$$B = -D^{-1}(L+U), \text{ QUE PARA O SISTEMA DADO EQUIVALE A}$$

$$B = \begin{bmatrix} 1/4 & 0 & 0 \\ 0 & 1/5 & 0 \\ 0 & 0 & 1/3 \end{bmatrix} \left(\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \right) = \begin{bmatrix} 1/4 & 3 & 2 \\ 1 & 1/5 & 0 \\ 1 & 1 & 1/3 \end{bmatrix}$$

MATRIZES DIAGONAIS SÃO INVERTIDAS COM O INVERSO MULTIPLICATIVO DE SEUS ELEMENTOS

$$\|B\|_{\infty} = 3$$

COMO PODEMOS VER, $\|B\|_{\infty} > 1$, ENTÃO NÃO PODEMOS GARANTIR FACILMENTE A CONVERGÊNCIA DE JACOBI.

- b) A FIM DE FACILITAR A NOTACÃO VAMOS CHAMAR OS ELEMENTOS DE X DE x_1, x_2 , E x_3 . A 1ª EQUAÇÃO VAI RESOLVER PARA x_1 , A 2ª PARA x_2 , E A 3ª PARA x_3 . ASSIM TEMOS:

$$\begin{cases} 4x_1 + 3x_2 + 2x_3 = 4 \\ 1x_1 + 5x_2 + 0x_3 = 9 \\ 1x_1 + 1x_2 + 3x_3 = 4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1^{k+1} = (4 - 3x_2^k - 2x_3^k)/4 \\ x_2^{k+1} = (9 - x_1^k)/5 \\ x_3^{k+1} = (4 - x_1^k - x_2^k)/3 \end{cases}$$

ITERAÇÃO 1

$$\begin{cases} x_1^1 = (4 - 3x_2^0 - 2x_3^0)/4 = (4 - 3 - 2)/4 = -1/4 \\ x_2^1 = (9 - x_1^0)/5 = (9 - 1)/5 = 8/5 \\ x_3^1 = (4 - x_1^1 - x_2^1)/3 = (4 - 1 - 17/5)/3 = 2/3 \end{cases}$$

$$\text{RESÍDUO: } \|Ax^1 - b\|_{\infty} = \left\| \begin{bmatrix} 77/15 \\ 31/4 \\ 67/20 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 4 \\ 9 \\ 4 \end{bmatrix} \right\|_{\infty} = \frac{17}{15}$$

ITERAÇÃO 2

$$\begin{cases} x_1^2 = (4 - 3x_2^1 - 2x_3^1) / 4 = -160 / 300 \\ x_2^2 = (9 - x_1^1) / 5 = 1,85 \\ x_3^2 = (4 - x_1^1 - x_2^1) / 3 = 265 / 300 \end{cases}$$

RESÍDUO: $\|Ax + b\| \cong 1,217$

ITERAÇÃO 3

$$\begin{cases} x_1^3 = (4 - 3x_2^2 - 2x_3^2) / 4 = -0,8291\bar{6} \\ x_2^3 = (9 - x_1^2) / 5 = 1,90\bar{6} \\ x_3^3 = (4 - x_1^2 - x_2^2) / 3 = 0,89\bar{4} \end{cases}$$

RESÍDUO: $\|Ax - b\| \cong 0,426$

NOTE QUE O RESÍDUO ESTÁ DIMINUINDO CONFORME ITERAMOS O ALGORITMO.

NO ENTANTO, ISSO NÃO CONTRADIZ O RESULTADO DO ITEM ANTERIOR, POIS

$\|B\| < 1$ É UMA CONDIÇÃO SUFICIENTE MAS NÃO NECESSÁRIA PARA A CONVERGÊNCIA DO MÉTODO.