PEDRO SADER AZEVEDO RA: 243245

Pedro Sader Azevedo

CORRIGIR A QUESTÃO 1

---

1. SEJA $P(l)$ A PROPOSIÇÃO DE QUE $\forall l \in \mathbb{N}^{+}_{*}, \ l \mid S(l)$
PARA $S(l) = 3 + 5 + 7 + \cdots + (2l+1)$.

ANTES DE PROVAR $P(l)$ RIGOROSAMENTE, VEJAMOS ALGUNS EXEMPLOS DE $S(l)$:

$$S(1) = 3, \quad S(2) = 8, \quad S(3) = 15$$
$$S(4) = 24, \quad S(5) = 35, \quad S(6) = 48$$

NOTE QUE OS RESULTADOS DE $S(l)$ ATÉ AQUI PARECEM SER UM A MENOS QUE O QUADRADO DO NÚMERO SEGUINTE A l, ASSIM TEMOS A CONJECTURA ABAIXO:

$$S(l) = (l+1)^2 - 1 = l^2 + 2l + 1 - 1 = l(l+2)$$

CONSIDERANDO QUE A VERACIDADE DESSA CONJECTURA POSSIBILITARIA UMA PROVA BEM MAIS SIMPLES PARA $P(n)$ E QUE PODEMOS FORMULAR UMA HIPÓTESE DE INDUÇÃO MAIS FORTE QUE $P(k)$ USANDO ESSA CONJECTURA, PROVÁ-LA-EMOS POR INDUÇÃO EM l.

BASE: $l = 1$

$$S(1) = 2 \cdot 1 + 1 = 3$$

$l(l+2) = 1(1+2) = 3$, ENTÃO ESTÁ PROVADO O CASO BASE

HIPÓTESE DE INDUÇÃO: $S(k) = k(k+2)$ PARA $k \geq 1$

PASSO DE INDUÇÃO: QUEREMOS PROVAR QUE $S(k+1) = (k+1)((k+1)+2)$ E SABEMOS PELA RECURSIVIDADE DE S QUE:

$$S(k+1) = 2(k+1) + 1 + S(k)$$ PELA HIPÓTESE DE INDUÇÃO

$$S(k+1) = 2(k+1) + 1 + k(k+2)$$
$$= 2k + 2 + 1 + k^2 + 2k = k^2 + 4k + 3 = (k+1)(k+3) = (k+1)((k+1)+2)$$

AGORA QUE PROVAMOS QUE $S(l) = l(l+2)$ PODEMOS PROVAR $P(l)$ FACILMENTE.

RECORDE-SE QUE A PROPOSIÇÃO $l \mid S(l)$ É LOGICAMENTE EQUIVALENTE À:

$$\exists m \in \mathbb{Z},\ S(l) = ml \equiv \exists m \in \mathbb{Z},\ l(l+2) = ml$$

USANDO A TÉCNICA DE PROVA EXISTENCIAL CONSTRUTIVA, ESCOLHEMOS $m = l+2$ DE FORMA QUE $l(l+2) = l(l+2) \equiv T$. VALE OBSERVAR QUE TEMOS GARANTIDO QUE $(l+2) \in \mathbb{Z}$ POIS $l, 2 \in \mathbb{N}^+_*$ E $\mathbb{N}^+_* \subset \mathbb{Z}$. ■

(2.) SEJA $P(n)$ A PROPOSIÇÃO DE QUE PODEMOS OBTER UMA SEQUÊNCIA DE VALORES BOOLEANOS F APENAS APLICANDO AS OPERAÇÕES (a) E (b) DEFINIDAS NO ENUNCIADO A UMA SEQUÊNCIA ARBITRÁRIA DE VALORES BOOLEANOS S, DE TAMANHO $n \geq 1$

VAMOS PROVAR $P(n)$ COM UMA INDUÇÃO EM n:

BASE: $n = 1$

SE A SEQUÊNCIA TEM APENAS UM VALOR, HÁ DOIS CASOS POSSÍVEIS:

CASO 1: $S = \langle F \rangle$

NESSE CASO, TODOS OS ELEMENTOS DE S JÁ SÃO F

CASO 2: $S = \langle T \rangle$

NESSE CASO, BASTA APLICAR A OPERAÇÃO (b)

$$S = \langle T \rangle \xrightarrow{(b)} S' = \langle F \rangle$$

ASSIM, OBTIVEMOS UMA SEQUÊNCIA CUJOS ELEMENTOS SÃO TODOS F

HIPÓTESE DE INDUÇÃO: $P(k)$

PASSO DE INDUÇÃO: QUEREMOS PROVAR $P(k+1)$

PARA ISSO, CONSTRUÍMOS UMA SEQUÊNCIA S GENÉRICA COM $k+1$ ELEMENTOS:

$$S = \langle s_1, s_2, s_3, \dots s_k, s_{k+1} \rangle$$

RETIRAMOS DESSA SEQUÊNCIA UM ELEMENTO s_m QUALQUER, EM POSIÇÃO m, OBTENDO UMA SEQUÊNCIA S' DE TAMANHO $(k+1)-1 = k$. PELA HIPÓTESE DE INDUÇÃO, PODEMOS APLICAR AS OPERAÇÕES (a) E (b) ATÉ OBTER UMA SEQUÊNCIA S'' INTEIRAMENTE PREENCHIDA COM F

$$S'' = \langle F, F, F, F \dots F, F \rangle$$

AGORA, DEVOLVEMOS s_m A SUA POSIÇÃO ORIGINAL, OBTENDO S'''.

A PARTIR DISSO, TEMOS DOIS CASOS, DEPENDENDO DO VALOR DE s_m.

CASO 1: $s_m \equiv F$

NESSE CASO, TODOS OS ELEMENTOS DE S''' SÃO F

CASO 2: $s_m \equiv T$

NESSE CASO, PRECISAMOS DE UMA INDUÇÃO EM m (A POSIÇÃO DE s_m):

SEJA $Q(m)$ O PREDICADO DA PROPOSIÇÃO DE QUE PODEMOS OBTER UMA SEQUÊNCIA INTEIRAMENTE PREENCHIDA POR F A PARTIR DE UMA SEQUÊNCIA S''' DE VALORES BOOLEANOS CUJO ÚNICO ELEMENTO DIFERENTE DE F ESTÁ NA POSIÇÃO m.

BASE: $m = n$

BASTA APLICAR A OPERAÇÃO (b)

$$S''' = \langle FFF \cdots FT \rangle \xrightarrow{(b)} S'''' = \langle FFF \cdots FF \rangle$$

HIPÓTESE DE INDUÇÃO: $Q(K)$ PARA $K \leq n$

PASSO DE INDUÇÃO: QUEREMOS PROVAR $Q(K-1)$

BASTA APLICAR A OPERAÇÃO (a)

$$S''' = \langle FFF \cdots TF \rangle \xrightarrow{(a)} S'''' = \langle FFF \cdots FT \rangle$$

DEPOIS A OPERAÇÃO (b)

$$S'''' = \langle FFF \cdots FT \rangle \xrightarrow{(b)} S''''' = \langle FFFFF \rangle$$

E ASSIM OBTIVEMOS UMA SEQUÊNCIA DE F A PARTIR DE S''', ENTÃO ESTÁ PROVADA $Q(m)$

E ASSIM OBTIVEMOS UMA SEQUÊNCIA DE F A PARTIR DE UMA SEQUÊNCIA ARBITRÁRIA S, ENTÃO ESTÁ PROVADA $P(n)$

∎

3. SEJA $P(n)$ O PREDICADO DA PROPOSIÇÃO DE QUE PODEMOS COLORIR UMA PARTIÇÃO DE UM PLANO EM $n \geq 1$ PARÁBOLAS DE TAL MANEIRA QUE REGIÕES VIZINHAS TÊM CORES DIFERENTES E USANDO APENAS DUAS CORES.

VAMOS PROVAR $P(n)$ POR INDUÇÃO EM n.

OBSERVAÇÃO: OS DESENHOS TÊM PROPÓSITO MERAMENTE ILUSTRATIVO, OU SEJA, AMBICIONAM APENAS EXPLICAR VISUALMENTE O RACIOCÍNIO POR TRÁS DA PROVA.

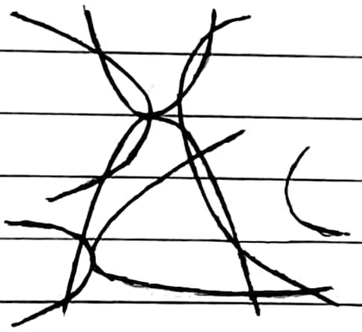
CASO BASE: $n = 1$

SE HÁ APENAS UMA PARÁBOLA NO PLANO, COLORIMOS SUA REGIÃO INTERNA COM UMA COR E SUA REGIÃO EXTERNA COM OUTRA COR. ASSIM, COLORIMOS O PLANO INTEIRO COM APENAS DUAS CORES.

HIPÓTESE DE INDUÇÃO: $P(k)$

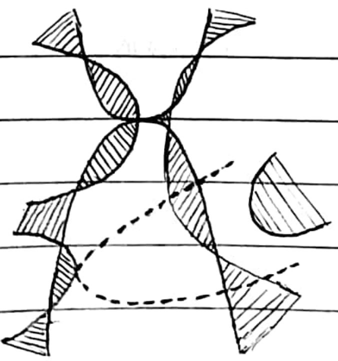
PASSO DE INDUÇÃO: QUEREMOS PROVAR $P(k+1)$.

π



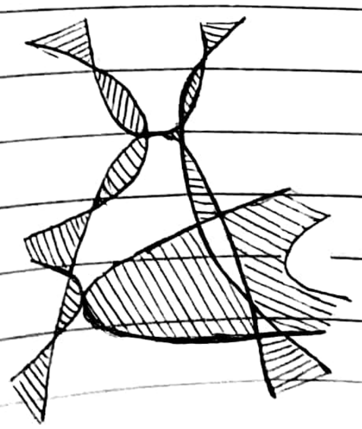
PARA ISSO, TOMAMOS UMA PARTIÇÃO π GENÉRICA DE UM PLANO EM $k+1$ PARÁBOLAS. VAMOS REMOVER UMA PARÁBOLA DE π, ASSIM OBTENDO UMA PARTIÇÃO π' COM k PARÁBOLAS.

π'



SABEMOS, PELA HIPÓTESE DE INDUÇÃO, QUE π' PODE SER COLORIDO SOB AS CONDIÇÕES ENUNCIADAS ANTERIORMENTE.

AGORA, COM π' DEVIDAMENTE COLORIDO, DEVOLVEMOS A PARÁBOLA QUE TÍNHAMOS REMOVIDO E INVERTEMOS AS CORES NO SEU INTERIOR E OBTEMOS TRÊS CASOS PARA ANALISAR.



CASO I: REGIÕES EXTERNAS (INCLUINDO TANGENTES) À PARÁBOLA NÃO MUDARAM DE COR ENTÃO AINDA ATENDEM A P

CASO II: REGIÕES INTERNAS (INCLUINDO TANGENTES) À PARÁBOLA INVERTERAM DE COR ENTÃO AINDA ATENDEM A P

CASO III: REGIÕES CRUZADAS PELA PARÁBOLA FORAM DIVIDIDAS EM CORES OPOSTAS ENTÃO AINDA ATENDEM A P