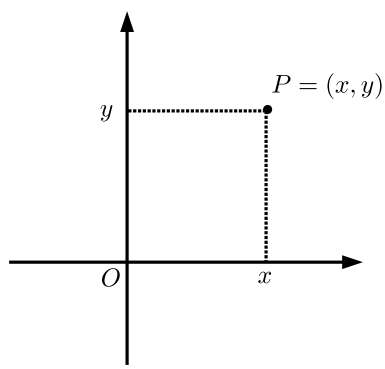
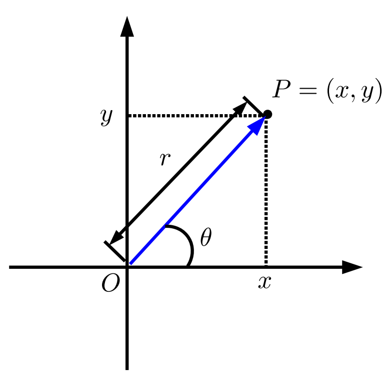
Este é um material auxiliar. Não entendeu alguma coisa? Precisa de ajuda? Vá no atendimento: toda terça às 14h na sala 227/228 no IMECC.

Coordenadas Polares

Sabemos que podemos representar um ponto P no plano por suas coordenadas cartesianas no eixo horizonal e eixo vertical. Desta forma, fazemos $P = (x, y)$ (ver figura abaixo). Entretanto, esta

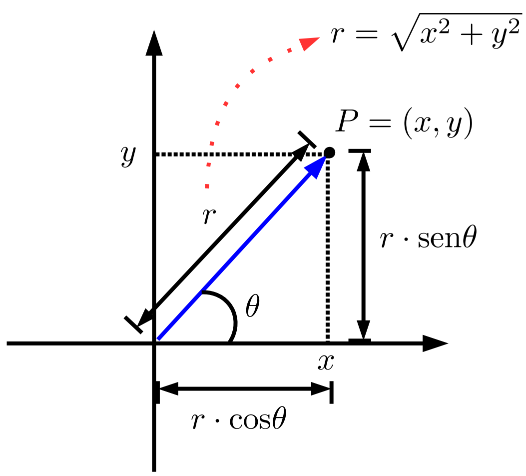


não é a única forma de representarmos o lugar no plano onde P está. Por exemplo, o ponto P fica igualmente bem determinado se estabelecermos a distância r do ponto P à origem O do plano cartesiano e, além disso, dizer qual é o ângulo θ formado entre o vetor $\overrightarrow{OP}$ e um vetor diretor da reta horizontal do sistema de coordenadas (veja a figura abaixo). Desta forma, podemos



representar o ponto P nas seguintes coordenadas $P = (r, \theta)$, uma vez que, como dito antes, estas duas informações definem de forma precisa o ponto P. Tais coordenadas são chamadas de **coordenadas polares**.

A pergunta que fica é: existe uma relação entre as coordenadas cartesianas e as coordenadas polares? A respota é sim! Veja que usando o Teorema de Pitágoras e as definições de cosseno e seno, temos as seguintes relações da figura abaixo. Portanto, observe que as relações entre as



coordenadas cartesianas e polares podem ser dadas por

$$x = r \cdot \cos\theta \quad \text{e} \quad y = r \cdot \text{sen}\,\theta,$$

sendo $r = \sqrt{x^2 + y^2}$.

Exemplo 1. Determine as coordenadas polares do ponto $P = (1, 3)$.

Sabemos que $r = \sqrt{x^2 + y^2}$. Logo, temos que $r = \sqrt{1^2 + 3^2} = \sqrt{10}$. Ademais, temos que

$$x = r \cdot \cos\theta \Rightarrow 1 = \sqrt{10}\cos\theta \Rightarrow \cos\theta = \frac{1}{\sqrt{10}} \Rightarrow \theta = \text{arccos}\left(\frac{1}{\sqrt{10}}\right).$$

Assim, as coordenadas polares do ponto são $P = (r, \theta) = (\sqrt{10}, \text{arccos}(1/\sqrt{10}))$.

Exemplo 2. Determine a equação em coordenadas cartesianas da seguinte equação dada em coordenadas polares:

$$r = \frac{1}{1 - \cos\theta}.$$

Sabemos que $r = \sqrt{x^2+y^2}$ e $x = r \cdot \cos\theta$. Logo, temos que

$$x = \sqrt{x^2+y^2}\cos\theta \Rightarrow \cos\theta = \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}.$$

Desta forma,

$$\begin{aligned} r = \frac{1}{1-\cos\theta} &\Rightarrow \sqrt{x^2+y^2} = \frac{1}{1-\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}} \\ &\Rightarrow \sqrt{x^2+y^2} - x = 1 \\ &\Rightarrow \sqrt{x^2+y^2} = 1+x \\ &\Rightarrow x^2+y^2 = (1+x)^2 \\ &\Rightarrow y^2 = 1+2x. \end{aligned}$$

Portanto, a equação descreve uma parábola.

Exemplo 3. Determine a equação em coordenadas polares da circunferência

$$(x-1)^2 + (y-1)^2 = 2.$$

Sabemos que $x = r \cdot \cos\theta$ e $y = r \cdot \operatorname{sen}\theta$. Logo,

$$\begin{aligned} (x-1)^2+(y-1)^2 = 2 &\Rightarrow (r\cdot\cos\theta - 1)^2 + (r\cdot\operatorname{sen}\theta - 1)^2 = 2 \\ &\Rightarrow r^2\cos^2\theta - 2r\cos\theta + 1 + r^2\operatorname{sen}^2\theta - 2r\operatorname{sen}\theta + 1 = 2 \\ &\Rightarrow r^2\underbrace{(\cos^2\theta + \operatorname{sen}^2\theta)}_{1} - 2r\cos\theta - 2r\operatorname{sen}\theta = 0 \\ &\Rightarrow r^2 - 2r\cos\theta - 2r\operatorname{sen}\theta = 0. \end{aligned}$$

Dividindo a última equação por r, obtemos

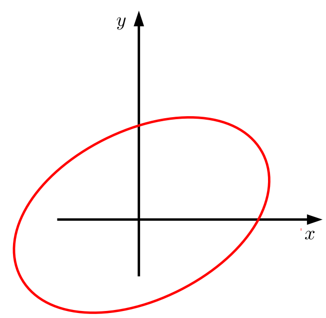
$$r - 2\cos\theta - 2\operatorname{sen}\theta = 0.$$

Rotação

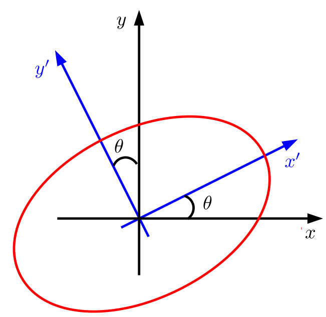
Nesta seção, veremos como as coordenadas polares podem nos ajudar a rotacionar os nossos eixos de coordenadas. Por exemplo, vamos supor que temos a seguinte elipse abaixo.

Perceba que temos uma elipse rotacionada, e não uma figura geométrica obtida das equações canônicas

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \quad \text{ou} \quad \frac{x^2}{b^2} + \frac{y^2}{a^2} = 1.$$



Assim, o nosso desejo seria rotacionar os nossos eixos de coordenadas para "compensar" esta rotação que temos na nossa elipse. Em outras palavras, queremos obter um sistema de coordenadas $x'y'$ obtido da rotação do sistema de coordenadas original por um determinado ângulo θ (ver figura abaixo).



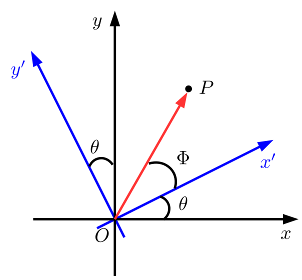
Para tanto, precisamos saber descrever um ponto qualquer P do plano tanto no sistema de coordenadas xy quanto no novo sistema de coordenadas $x'y'$. Vejamos como isto pode ser feito. Seja P um ponto qualquer no plano como dado na figura abaixo.

Assumindo que $\|\overrightarrow{OP}\| = r$, e olhando para as coordenadas polares do ponto P tomando como referência o sistema de coordenadas original, temos a seguinte relação:

$$x = r \cdot \cos(\theta + \Phi) \quad \text{e} \quad y = r \cdot \operatorname{sen}(\theta + \Phi). \tag{1}$$

Por outro lado, olhando para as coordenadas polares de P partindo do sistema de coordenadas $x'y'$, temos

$$x' = r \cdot \cos \Phi \quad \text{e} \quad y' = r \cdot \operatorname{sen} \Phi. \tag{2}$$



Isolando $\cos\Phi$ e $\operatorname{sen}\Phi$ em (2), obtemos

$$\cos\Phi = \frac{x'}{r} \quad \text{e} \quad \operatorname{sen}\Phi = \frac{y'}{r}. \tag{3}$$

Agora, usando (3) em (1), segue que

$$\begin{aligned} x = r\cdot\cos(\theta+\Phi) &= r(\cos\theta\cos\Phi - \operatorname{sen}\theta\operatorname{sen}\Phi) \\ &= r\left(\cos\theta\frac{x'}{r} - \operatorname{sen}\theta\frac{y'}{r}\right) \\ &= x'\cos\theta - y'\operatorname{sen}\theta, \end{aligned}$$

e também

$$\begin{aligned} y = r\cdot\operatorname{sen}(\theta+\Phi) &= r(\operatorname{sen}\theta\cos\Phi + \operatorname{sen}\Phi\cos\theta) \\ &= r\left(\operatorname{sen}\theta\frac{x'}{r} + \frac{y'}{r}\cos\theta\right) \\ &= x'\operatorname{sen}\theta + y'\cos\theta. \end{aligned}$$

Assim, conseguimos extrair uma relação entre o sistema de coordenadas xy e o sistema rotacionado $x'y'$ dependendo somente do ângulo de rotação θ:

$$\left\{\begin{array}{rcl} x &=& x'\cos\theta - y'\operatorname{sen}\theta \\ y &=& x'\operatorname{sen}\theta + y'\cos\theta. \end{array}\right.$$

Esta relação também pode ser escrita da forma matricial

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} \cos\theta & -\operatorname{sen}\theta \\ \operatorname{sen}\theta & \cos\theta \end{pmatrix}}_{R_\theta} \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}.$$

A matriz R_θ é chamada de **matriz de rotação**.

Uma vez apresentada a relação acima, estamos prontos para entender como uma rotação pode nos ajudar a eliminar o termo misto de uma equação geral da cônica.

Identificando Cônicas

Vamos nos recordar que a equação geral de uma cônica é dada por

$$ax^2 + bxy + cy^2 + dx + ey + f = 0.$$

Já aprendemos a identificar a cônica quando o termo misto bxy não aparece na equação (neste caso, fazemos uma translação). Vamos agora ver como eliminamos este termo misto indesejado. Para tanto, vamos fazer uso do seguinte resultado.

Resultado 1. *Dada a cônica*

$$ax^2 + bxy + cy^2 + dx + ey + f = 0,$$

podemos fazer uma mudança de coordenadas, a qual satisfaz a relação

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} \cos\theta & -\operatorname{sen}\theta \\ \operatorname{sen}\theta & \cos\theta \end{pmatrix}}_{R_\theta} \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix},$$

e obter a seguinte equação sem o termo misto:

$$a'x'^2 + c'y'^2 + d'x' + e'y' + f = 0.$$

Os valores a' e c' são raízes do seguinte polinômio

$$p(\lambda) = \det \begin{pmatrix} a - \lambda & b/2 \\ b/2 & c - \lambda \end{pmatrix}.$$

Além disso, o cosseno e seno do ângulo de rotação θ devem satisfazer $\cos^2\theta + \operatorname{sen}^2\theta = 1$ e

$$\begin{pmatrix} a - a' & b/2 \\ b/2 & c - a' \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos\theta \\ \operatorname{sen}\theta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Por fim, os valores d' e e' podem ser encontrados pela equação matricial

$$\begin{pmatrix} d' & e' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} d & e \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos\theta & -\operatorname{sen}\theta \\ \operatorname{sen}\theta & \cos\theta \end{pmatrix}.$$

Neste momento, este resultado pode parecer confuso para você, mas, na realidade, ele aponta todos os caminhos para conseguirmos obter uma equação mais simples da cônica.

Para facilitar, apresentamos abaixo um passo-a-passo de como proceder quando temos uma equação geral da cônica.

Passo 1. Identificar os termos a, b, c, d, e e f na equação geral da cônica.

Passo 2. Encontrar os valores de λ para os quais

$$\det\begin{pmatrix} a-\lambda & b/2 \\ b/2 & c-\lambda \end{pmatrix} = 0,$$

e definir um destes valores como sendo a' e o outro como c'.

Passo 3. Encontrar os valores $\cos\theta$ e $\operatorname{sen}\theta$ sabendo que estes satisfazem

$$\cos^2\theta + \operatorname{sen}^2\theta = 1 \quad \text{e} \quad \begin{pmatrix} a-a' & b/2 \\ b/2 & c-a' \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \cos\theta \\ \operatorname{sen}\theta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Passo 4. Munidos dos valores de $\cos\theta$ e $\operatorname{sen}\theta$, encontrar os valores de d' e e' fazendo

$$\begin{pmatrix} d' & e' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} d & e \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \cos\theta & -\operatorname{sen}\theta \\ \operatorname{sen}\theta & \cos\theta \end{pmatrix}.$$

Passo 5. Montar a equação da cônica nas variáveis x' e y', isto é,

$$a'x'^2 + c'y'^2 + d'x' + e'y' + f = 0,$$

e fazer uma translação (já aprendemos como fazer isto) para chegar em uma equação canônica de uma cônica.

Com o objetivo de facilitar o entendimento deste processo, apresentamos dois exercícios abaixo sobre cônicas.

Exercício Resolvido 1. Identifique e esboce a cônica

$$5x^2 - 4xy + 8y^2 + \frac{20}{\sqrt{5}}x - \frac{80}{\sqrt{5}}y + 4 = 0.$$

Queremos encontrar um novo sistema de coordenadas $x'y'$ de tal modo que

$$\begin{cases} x = x'\cos\theta - y'\operatorname{sen}\theta \\ y = x'\operatorname{sen}\theta + y'\cos\theta. \end{cases} \tag{4}$$

Para tanto, vamos seguir os passos apresentados neste texto.

Passo 1

$$\underbrace{5}_{a}x^2 \underbrace{-4}_{b}xy + \underbrace{8}_{c}y^2 + \underbrace{\frac{20}{\sqrt{5}}}_{d}x \underbrace{-\frac{80}{\sqrt{5}}}_{e}y + \underbrace{4}_{f} = 0.$$

Passo 2

$$\det\begin{pmatrix} a-\lambda & b/2 \\ b/2 & c-\lambda \end{pmatrix} = \det\begin{pmatrix} 5-\lambda & -4/2 \\ -4/2 & 8-\lambda \end{pmatrix} = \lambda^2 - 13\lambda + 36.$$

Portanto,

$$\lambda^2 - 13\lambda + 36 = 0 \Leftrightarrow \lambda = 4 \text{ ou } \lambda = 9.$$

Escolhemos então $a' = 4$ e $c' = 9$.

Passo 3

Sabemos que os valores $\cos\theta$ e $\operatorname{sen}\theta$ satisfazem

$$\begin{pmatrix} a-a' & b/2 \\ b/2 & c-a' \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \cos\theta \\ \operatorname{sen}\theta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -2 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \cos\theta \\ \operatorname{sen}\theta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Assim, temos $\cos\theta = 2\operatorname{sen}\theta$. Como também devemos ter $\cos^2\theta + \operatorname{sen}^2\theta = 1$, segue que

$$\cos^2\theta + \operatorname{sen}^2\theta = 1 \Rightarrow (2\operatorname{sen}\theta)^2 + \operatorname{sen}^2\theta = 1 \Rightarrow \operatorname{sen}\theta = 1/\sqrt{5}.$$

Como $\cos\theta = 2\operatorname{sen}\theta$, segue que $\cos\theta = 2/\sqrt{5}$. Assim, temos a matriz de rotação

$$R_\theta = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\operatorname{sen}\theta \\ \operatorname{sen}\theta & \cos\theta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2/\sqrt{5} & -1/\sqrt{5} \\ 1/\sqrt{5} & 2/\sqrt{5} \end{pmatrix},$$

e o ângulo de rotação sendo $\theta = \arccos(2/\sqrt{5})$.

Passo 4

$$(d' \quad e') = (d \quad e)R_\theta \Rightarrow (d' \quad e') = (20/\sqrt{5} \quad -80/\sqrt{5})\begin{pmatrix} 2/\sqrt{5} & -1/\sqrt{5} \\ 1/\sqrt{5} & 2/\sqrt{5} \end{pmatrix} = (-8 \quad -36).$$

Logo, $d' = -8$ e $e' = -36$.

Passo 5

Assim, rotacionando o sistema de coordenadas original em $\theta = \arccos(2/\sqrt{5})$, obtemos a seguinte expressão:

$$4x'^2 + 9y'^2 - 8x' - 36y' + 4 = 0.$$

Agora, podemos proceder fazendo uma translação para eliminar os termos lineares desta expressão:

$$\begin{aligned} 4x'^2 + 9y'^2 - 8x' - 36y' + 4 = 0 &\Rightarrow 4x'^2 - 8x' + 9y'^2 - 36y' + 4 = 0 \\ &\Rightarrow 4(x'^2 - 2x') + 9(y'^2 - 4y') + 4 = 0 \\ &\Rightarrow 4[(x'-1)^2 - 1] + 9[(y'-2)^2 - 4] + 4 = 0 \\ &\Rightarrow 4(x'-1)^2 + 9(y'-2)^2 - 36 = 0. \end{aligned}$$

Fazendo mais uma mudança de coordenadas

$$\begin{cases} x'' &= x' - 1 \\ y'' &= y' - 2, \end{cases} \tag{5}$$

obtemos

$$4x''^2 + 9y''^2 - 36 = 0 \Rightarrow \frac{x''^2}{9} + \frac{y''^2}{4} = 1.$$

Portanto, temos uma elipse.

Quando $x'' = 0$, temos $\frac{y''^2}{4} = 1$, e portanto, $y'' = \pm 2$. De forma análoga, quando $y'' = 0$, temos $\frac{x''^2}{9} = 1$, e portanto, $x'' = \pm 3$. Logo, no sistema de coordenadas $x''y''$, temos os seguintes vértices:

$$(0, -2), \quad (0, 2), \quad (-3, 0) \quad \text{e} \quad (3, 0).$$

Entretanto, estas não são as coordenadas dos vértices no sistema de coordenadas original. Vamos então obter tais coordenadas no sistema xy. Para tanto, iremos isolar x e y em função de x'' e y''.

Por (5), temos que

$$\begin{cases} x' &= x'' + 1 \\ y' &= y'' + 2. \end{cases}$$

Substituindo estes valores em (4), temos

$$\begin{cases} x &= (x'' + 1)\cos\theta - (y'' + 2)\,\mathrm{sen}\,\theta \\ y &= (x'' + 1)\,\mathrm{sen}\,\theta + (y'' + 2)\cos\theta \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x &= (x'' + 1)2/\sqrt{5} - (y'' + 2)1/\sqrt{5} \\ y &= (x'' + 1)1/\sqrt{5} + (y'' + 2)2/\sqrt{5}. \end{cases}$$

Assim, com as equações acima, basta sabermos as coordenadas dos pontos no sistema $x''y''$ que conseguimos descobrir as coordenadas no sistema xy.

Por exemplo, vamos agora descobrir as coordenadas do vértice $(0, -2)$ no sistema original xy. Basta fazermos

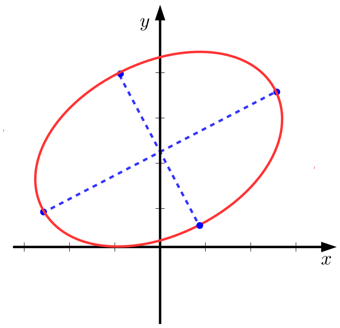
$$\begin{cases} x &= (0 + 1)2/\sqrt{5} - (-2 + 2)1/\sqrt{5} \\ y &= (0 + 1)1/\sqrt{5} + (-2 + 2)2/\sqrt{5}. \end{cases}$$

Assim, segue que $x = 2/\sqrt{5}$ e $y = 1/\sqrt{5}$. Logo, o vértice de coordenadas $(0, -2)$ no sistema $x''y''$ é dado por $(2/\sqrt{5}, 1/\sqrt{5})$ no sistema original xy. Fazendo o mesmo para os demais vértices, temos que as coordenadas dos quatro vértices no sistema de coordenadas xy são:

$$(2/\sqrt{5}, 1/\sqrt{5}), \quad (-2/\sqrt{5}, 9/\sqrt{5}), \quad (-6/\sqrt{5}, 2/\sqrt{5}) \quad \text{e} \quad (6/\sqrt{5}, 8/\sqrt{5}).$$

Sugestão: Encontre os focos desta elipse no sistema de coordenadas xy.

Por fim, precisamos fazer o esboço desta elipse. Quando a elipse precisa de uma rotação para ser identificada, creio que a forma mais prática de fazer o seu esboço é marcar os vértices da elipse



primeiro, para então traçar a elipse. Usando o fato que $1/\sqrt{5} \approx 0,45$, podemos aproximar as coordenadas encontradas acima para marcar os vértices da elipse (veja a figura acima).

Exercício Resolvido 2. Identifique e esboce a cônica

$$3x^2 - 10xy + 3y^2 + 4x + 4y + 4 = 0.$$

Queremos encontrar um novo sistema de coordenadas $x'y'$ de tal modo que

$$\begin{cases} x &= x' \cos\theta - y' \operatorname{sen}\theta \\ y &= x' \operatorname{sen}\theta + y' \cos\theta. \end{cases} \tag{6}$$

Para tanto, vamos seguir os passos apresentados neste texto.

Passo 1

$$\underbrace{3}_{a} x^2 \underbrace{-10}_{b} xy + \underbrace{3}_{c} y^2 + \underbrace{4}_{d} x + \underbrace{4}_{e} y + \underbrace{4}_{f} = 0.$$

Passo 2

$$\det \begin{pmatrix} a-\lambda & b/2 \\ b/2 & c-\lambda \end{pmatrix} = \det \begin{pmatrix} 3-\lambda & -10/2 \\ -10/2 & 3-\lambda \end{pmatrix} = \lambda^2 - 6\lambda - 16.$$

Portanto,

$$\lambda^2 - 6\lambda - 16 = 0 \Leftrightarrow \lambda = -2 \text{ ou } \lambda = 8.$$

Escolhemos então $a' = -2$ e $c' = 8$.

Passo 3

Sabemos que os valores $\cos\theta$ e $\operatorname{sen}\theta$ satisfazem

$$\begin{pmatrix} a-a' & b/2 \\ b/2 & c-a' \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \cos\theta \\ \operatorname{sen}\theta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} 5 & -5 \\ -5 & 5 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \cos\theta \\ \operatorname{sen}\theta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Assim, temos $\cos\theta = \operatorname{sen}\theta$. Como também devemos ter $\cos^2\theta + \operatorname{sen}^2\theta = 1$, segue que

$$\cos^2\theta + \operatorname{sen}^2\theta = 1 \Rightarrow \operatorname{sen}^2\theta + \operatorname{sen}^2\theta = 1 \Rightarrow \operatorname{sen}\theta = 1/\sqrt{2} = \sqrt{2}/2.$$

Como $\cos\theta = \operatorname{sen}\theta$, segue que $\cos\theta = \sqrt{2}/2$. Assim, temos a matriz de rotação

$$R_\theta = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\operatorname{sen}\theta \\ \operatorname{sen}\theta & \cos\theta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sqrt{2}/2 & -\sqrt{2}/2 \\ \sqrt{2}/2 & \sqrt{2}/2 \end{pmatrix},$$

e o ângulo de rotação sendo $\theta = \arccos(\sqrt{2}/2) = \pi/4$.

Passo 4

$$(d' \quad e') = (d \quad e)R_\theta \Rightarrow (d' \quad e') = (4 \quad 4)\begin{pmatrix} \sqrt{2}/2 & -\sqrt{2}/2 \\ \sqrt{2}/2 & \sqrt{2}/2 \end{pmatrix} = (4\sqrt{2} \quad 0).$$

Logo, $d' = 4\sqrt{2}$ e $e' = 0$.

Passo 5

Assim, rotacionando o sistema de coordenadas original em $\theta = \pi/4$, obtemos a seguinte expressão:

$$-2x'^2 + 8y'^2 + 4\sqrt{2}x' + 4 = 0.$$

Agora, podemos proceder fazendo uma translação para eliminar os termos lineares desta expressão:

$$\begin{aligned} -2x'^2 + 8y'^2 + 4\sqrt{2}x' + 4 = 0 &\Rightarrow -2x'^2 + 4\sqrt{2}x' + 8y'^2 + 4 = 0 \\ &\Rightarrow -2(x'^2 - 2\sqrt{2}x') + 8y'^2 + 4 = 0 \\ &\Rightarrow -2[(x' - \sqrt{2})^2 - 2] + 8y'^2 + 4 = 0 \\ &\Rightarrow -2(x' - \sqrt{2})^2 + 8y'^2 + 8 = 0. \end{aligned}$$

Fazendo mais uma mudança de coordenadas

$$\left\{ \begin{array}{rcl} x'' & = & x' - \sqrt{2} \\ y'' & = & y', \end{array} \right. \tag{7}$$

obtemos

$$-2x''^2 + 8y''^2 + 8 = 0 \Rightarrow \frac{x''^2}{4} - \frac{y''^2}{1} = 1.$$

Portanto, temos uma hipérbole.

Quando $y'' = 0$, temos $\frac{x''^2}{4} = 1$, e portanto, $x'' = \pm 2$. Logo, no sistema de coordenadas $x''y''$, temos os seguintes vértices:

$$(-2, 0) \quad \text{e} \quad (2, 0).$$

Ademais, as assíntotas no sistema de coordenadas $x''y''$ são as retas:

$$y'' = -\frac{1}{2}x'' \quad \text{e} \quad y'' = \frac{1}{2}x''.$$

Vamos então obter todos estes elementos da hipérbole no sistema xy. Para tanto, iremos isolar x e y em função de x'' e y''.

Por (7), temos que

$$\begin{cases} x' &= x'' + \sqrt{2} \\ y' &= y''. \end{cases}$$

Substituindo estes valores em (6), temos

$$\begin{cases} x &= (x'' + \sqrt{2})\cos\theta - y''\operatorname{sen}\theta \\ y &= (x'' + \sqrt{2})\operatorname{sen}\theta + y''\cos\theta \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x &= (x'' + \sqrt{2})\sqrt{2}/2 - y''\sqrt{2}/2 \\ y &= (x'' + \sqrt{2})\sqrt{2}/2 + y''\sqrt{2}/2. \end{cases} \tag{8}$$

Procedendo da mesma forma que fizemos no Exercício Resolvido anterior, vemos que os vértices no sistema de coordenadas xy são:

$$(1 - \sqrt{2}, 1 - \sqrt{2}) \quad \text{e} \quad (1 + \sqrt{2}, 1 + \sqrt{2}).$$

Vamos então obter as assíntotas no sistema de coordenadas xy. Olhando para a reta $y'' = -(1/2)x''$, e substituindo na primeira equação de (8), temos

$$\begin{aligned} x = (x'' + \sqrt{2})\sqrt{2}/2 - y''\sqrt{2}/2 &\Rightarrow x = (x'' + \sqrt{2})\sqrt{2}/2 - (-1/2)x''\sqrt{2}/2 \\ &\Rightarrow (2/\sqrt{2})x = x'' + \sqrt{2} + (1/2)x'' \\ &\Rightarrow (2/\sqrt{2})x = (3/2)x'' + \sqrt{2} \\ &\Rightarrow x'' = \frac{4}{3\sqrt{2}}x - \frac{2\sqrt{2}}{3}. \end{aligned}$$

Agora, olhando para a segunda equação em (8), e usando o fato de que $y'' = -(1/2)x'' \Rightarrow x'' = -2y''$, temos

$$\begin{aligned} y = (x'' + \sqrt{2})\sqrt{2}/2 + y''\sqrt{2}/2 &\Rightarrow y = (-2y'' + \sqrt{2})\sqrt{2}/2 + y''\sqrt{2}/2 \\ &\Rightarrow (2/\sqrt{2})y = -2y'' + \sqrt{2} + y'' \\ &\Rightarrow (2/\sqrt{2})y = -y'' + \sqrt{2} \\ &\Rightarrow y'' = -\frac{2}{\sqrt{2}}y + \sqrt{2}. \end{aligned}$$

Usando então as duas relações acima que aparecem em vermelho na equação da reta $y'' = -(1/2)x''$, temos

$$y'' = -\frac{1}{2}x'' \Rightarrow -\frac{2}{\sqrt{2}}y + \sqrt{2} = -\frac{1}{2}\left(\frac{4}{3\sqrt{2}}x - \frac{2\sqrt{2}}{3}\right) \Rightarrow y = \frac{1}{3}x + \frac{2}{3}.$$

Portanto, a assíntota $y'' = -(1/2)x''$ no sistema de coordenadas xy é dada por

$$y = \frac{1}{3}x + \frac{2}{3}.$$

Fazendo o mesmo procedimento para a reta $y'' = (1/2)x''$, chegamos na assíntota

$$y = 3x - 2 \quad (\textbf{Sugestão:}\text{ faça as contas!}).$$

Sugestão: Encontre os focos desta hipérbole no sistema de coordenadas xy.

Por fim, precisamos fazer o esboço desta hipérbole. Quando a hipérbole precisa de uma rotação para ser identificada, creio que a forma mais prática de fazer o seu esboço é marcar os seus vértices, depois traçar as assíntotas, para então traçar a hipérbole (veja a figura abaixo).