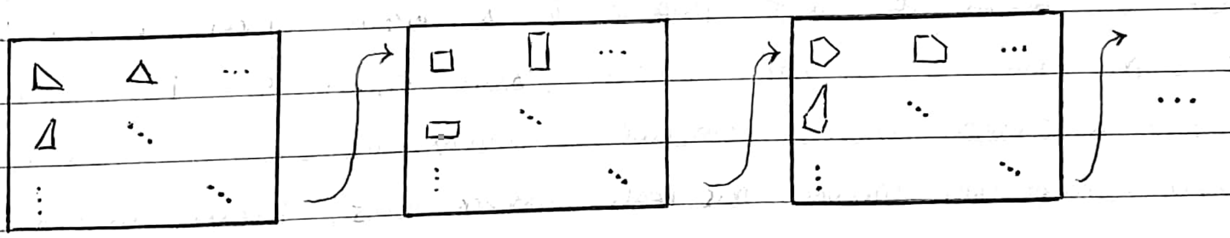
PEDRO SADER AZEVEDO RA: 243245

Pedro Sader Azevedo

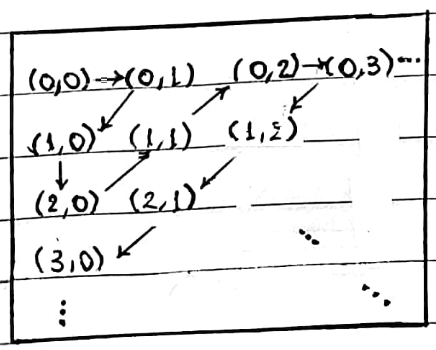
CORRIGIR A QUESTÃO 2

(1) SEJA P A PROPOSIÇÃO DE QUE O CONJUNTO DE POLÍGONOS DE GANZZAHL É ENUMERÁVEL.

PARA PROVAR P VAMOS USAR O COROLÁRIO 3 DA PROPOSIÇÃO 5 (AULA 16B), QUE AFIRMA QUE UM CONJUNTO É ENUMERÁVEL SE E SOMENTE EXISTE UMA SEQUÊNCIA COM TODOS OS SEUS ELEMENTOS. VAMOS, ENTÃO, DEFINIR UMA SEQUÊNCIA COM TODOS OS POLÍGONOS DE GANZZAHL. NESSA SEQUÊNCIA, OS POLÍGONOS COM MENOS LADOS VEM ANTES DOS QUE TEM MAIS LADOS:



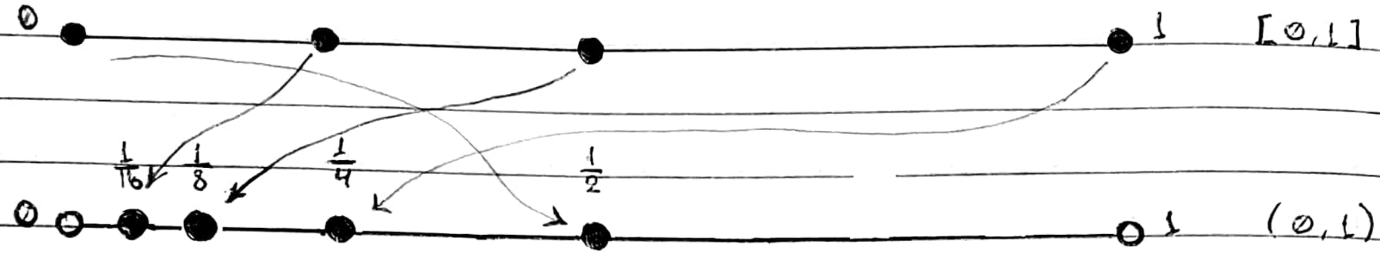
ENTRE OS POLÍGONOS QUE TÊM O MESMO NÚMERO DE LADOS, ESCOLHEMOS AS COORDENADAS DE SEUS VÉRTICES SEGUINDO A ORDEM DOS PARES ORDENADOS (x,y) NO PRODUTO CARTESIANO $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$, EVITANDO PONTOS REPETIDOS $(x=x' \wedge y=y')$ E PONTOS COLINEARES $(\exists c,d \in \mathbb{R},\ y' = cx + d)$. SE O POLÍGONO TEM n LADOS,



ESCOLHEMOS AS $(n-1)$ÉSIMAS PRIMEIRAS COORDENADAS, SEGUINDO O CRITÉRIO MENCIONADO ACIMA E, APENAS QUANDO TIVERMOS ESGOTADO AS POSSIBILIDADES PARA A n-ÉSIMA COORDENADA, INCREMENTAMOS A $(n-1)$ ÉSIMA COORDENADA. REPETIMOS ESSE PROCESSO ATÉ ESGOTAR TODAS AS n COORDENADAS E ENTÃO INCREMENTAMOS n (AUMENTAMOS O NÚMERO DE LADOS). ASSIM OBTEMOS A SEQUÊNCIA DESEJADA. ∎

(2) Existe uma função f bijetora tal que $f: [0,1] \to (0,1)$.
A prova existencial construtiva disso é

$$f = \begin{cases} \frac{1}{2} & \text{se } x = 0 & (\text{"primeira condição"}) \\ \frac{1}{2^{n+2}} & \text{se } x = \frac{1}{2^n} \text{ para } n \in \mathbb{N} & (\text{"segunda condição"}) \\ x & \text{se } x \neq 0 \wedge x \neq \frac{1}{2^n} & (\text{"terceira condição"}) \end{cases}$$



Usando essa função f, mapeamos 0 a $\frac{1}{2}$ (de acordo com a primeira condição) e mapeamos 1 a $\frac{1}{4}$, pois $1 = \frac{1}{2^0}$ então devemos mapeá-lo a $\frac{1}{2^{0+2}} = \frac{1}{2^2} = \frac{1}{4}$ (de acordo com a segunda condição)

Note que agora precisamos mapear $\frac{1}{2}$ a algum número do conjunto de saída, mas $\frac{1}{2}$ já está "ocupado", assim como $\frac{1}{4}$. No entanto, usando a segunda condição, obtemos o mapeamento $\frac{1}{2^1} \to \frac{1}{2^{1+2}}$ que é $\frac{1}{8}$.
Como ambos os intervalos são de números reais, podemos usar a segunda condição para mapear todos números da forma $\frac{1}{2^n}$, afinal a função $g(x) = \frac{x}{2^2}$ que o faz é bijetiva.

3. QUEREMOS PROVAR QUE O CONJUNTO $\mathcal{F}$ DE TODAS AS FUNÇÕES CARACTERÍSTICAS DE CONJUNTOS $X \subseteq U$, ONDE U É UM CONJUNTO ENUMERÁVEL, NÃO É ENUMERÁVEL. FUNÇÕES CARACTERÍSTICAS TÊM A FORMA

$$f_X : U \to \{0,1\} \quad \text{TAL QUE} \quad f_X^{-1}(\{1\}) = X \quad \text{E} \quad f_X^{-1}(0) \cap X = \emptyset$$

$$\text{OU SEJA} \quad f_X^{-1}(1) = X \quad \text{E} \quad f_X^{-1}(0) = \underbrace{\overline{X}}_{\text{CONJUNTO COMPLEMENTAR A } X}$$

PERCEBA QUE, PARA O MESMO CONJUNTO U, EXISTE APENAS UMA FUNÇÃO CARACTERÍSTICA PARA CADA CONJUNTO X E APENAS UM CONJUNTO X PARA CADA FUNÇÃO CARACTERÍSTICA (DAÍ O NOME DE "FUNÇÃO CARACTERÍSTICA"). COMO X É UM SUBCONJUNTO DE U, O CONJUNTO QUE CONTÉM TODOS OS X POSSÍVEIS É O CONJUNTO POTÊNCIA DE U, OU SEJA

$$|\mathcal{F}| = |\mathcal{P}(U)|$$

ENTÃO BASTA MOSTRAR QUE $\mathcal{P}(U)$ NÃO É ENUMERÁVEL. PARA ISSO, CONSIDERE UMA FUNÇÃO $g: U \to \mathcal{P}(U)$. VAMOS PROVAR QUE g É INJETIVA MAS NÃO SOBREJETIVA, PARA MOSTRAR QUE $|\mathcal{P}(U)| > |U|$ E, PORTANTO, QUE $\mathcal{P}(U)$ NÃO É ENUMERÁVEL.

PROVA DE QUE g NÃO É SOBREJETIVA (POR CONTRADIÇÃO)

SUPONHA PARA FINS DE CONTRADIÇÃO, QUE g É SOBREJETIVA E CONSIDERE O CONJUNTO $\mathbb{C} = \{ x \in U \mid x \notin f(x) \}$ ENTÃO EXISTE $t \in \mathbb{C}$ TAL QUE $g(t) = \mathbb{C}$. ISSO CONTRADIZ A DEFINIÇÃO DE $\mathbb{C}$

PROVA DE QUE g É INJETIVA (EXISTENCIAL CONSTRUTIVA)

O MAPEAMENTO $m(x): U \to \mathcal{P}(U)$ DEFINIDO POR $x \to \{x\}$ É INJETIVO. ∎