Lista 1 - MS211

Pedro Sader Azevedo (RA: 243245)

Resolucões

Questão 1

(a) O maior número estritamente positivo representável é 0.9999×10^{99}.

(b) Para a questão do menor número, vamos assumir que o expoente pode assumir valores negativos. Vale dizer que isso não é inteiramente óbvio, visto que representações com base 2 (ou "binárias") precisam de um bit a mais para representar o sinal dos números. Enfim, o menor numero estritamente positivo representável é 0.0001×10^{-99}.

(c) O épsilon da máquina tem a seguinte fórmula, onde α é o número "seguido" ao 1 na representação:

$$\epsilon_{mac} = \frac{\alpha - 1}{2}$$

Assim, temos que o ϵ_{mac} nesse caso é:

$$\epsilon_{mac} = \frac{0,1001 \times 10^1 - 0,1000 \times 10^1}{2} = 5 \times 10^{-4}$$

(d) A vantagem do sistema de representação por ponto flutuante é que o erro relativo é constante e equivalente ao ϵ_{mac}, isto é, 5×10^{-4}. Como o erro relativo é constante, os maiores erros absolutos ocorrerão em representações de números grandes. Assim, usando nossa resposta ao item (a), temos:

$$E_{abs} = 0,9999 \times 10^{99} - 0,9998 \times 10^{99} = 1 \times 10^{94}$$

Questão 2

(a) Situação de erro: $x \to 0$, pois

$$\lim_{x \to 0}(\sqrt{1-x} - 1) = \lim_{t \to 1}(\sqrt{t} - 1) = \lim_{t \to 1}(t - 1)$$

Expressão para evitar o erro:

$$\sqrt{1-x} - 1 = \sqrt{1-x} - 1 \times \frac{\sqrt{1-x}+1}{\sqrt{1-x}+1} = \frac{1+x-1}{\sqrt{1-x}+1} = \frac{x}{\sqrt{1-x}+1} = 1 - 1 = 0$$

(b) Situação de erro: $x \to y$, pois

$$\lim_{x \to y}(\log x - \log y) = \log x - \log x = 0$$

Expressão para evitar o erro:

$$\log x - \log y = \log \frac{x}{y}$$

(c) Situação de erro: $x \to 0$, pois

$$\lim_{x\to 0}(1-\cos x) = \lim_{t\to 1}(1-t) = 1-1 = 0$$

Expressão para evitar o erro:

$$\frac{1-\cos x}{\sin x} = \frac{1-\cos x}{\sin x} \times \frac{1+\cos x}{1+\cos x} = \frac{1-\cos^2 x}{\sin x\ (1+\cos x)} = \frac{\sin^2 x}{\sin x\ (1+\cos x)}$$
$$= \frac{\sin x}{(1+\cos x)}$$

Questão 3

Para comparar os resultados das funções equivalentes $f(x)$ e $g(x)$ usando 6 dígitos decimais significativos, vamos utilizar a função `setprecision` da linguagem Julia. Essa função recebe um número de bytes como parâmetro, então precisei experimentar algumas opções de argumento usando `log2 e floor` para chegar a um que consistentemente oferece 6 dígitos de precisão.[1]

In [1]:
```
setprecision(Int(floor(log2(10) * 5)))
```

Out[1]:
```
16
```

In [20]:
```
# alguns exemplos de numeros irracionais conhecidos, para mostrar as 6 casas de precisao

println("√2 = ", sqrt(BigFloat(2)))
println("e = ", BigFloat(e))
```

```
√2 = 1.41422
e = 2.71826
```

In [7]:
```
function f(x)
    return BigFloat(x*(BigFloat(sqrt(BigFloat(x + 1))) - BigFloat(sqrt(x))))
end

function g(x)
    return BigFloat(x/(sqrt(BigFloat(x + 1)) + BigFloat(sqrt(x))))
end

# vamos definir tambem uma função p(x) que so "arredonda" os resultados no final
# essa funcao tera o valor mais proximo do valor real de f(500) ou g(500) e servirá
# de parametro de comparacao

function p(x)
    return BigFloat(x*(sqrt(x + 1) - sqrt(x)))
end

println("f(500) = ", f(500))
println("g(500) = ", g(500))
println("p(500) = ", p(500))
```

```
f(500) = 10.9863
g(500) = 11.1746
p(500) = 11.1748
```

Como esperado, a função $f(x)$ foi muito menos exata que a função $g(x)$ (a primeira teve apenas 1 dígito correto, enquanto a segunda teve 5). Isto pois, ocorrem erros de cancelamento em $f(x)$ quando $x \to \infty$

$$\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to\infty}(\sqrt{x+1}-\sqrt{x})=\lim_{t\to\infty}(\sqrt{t}-\sqrt{t})=0$$

A função $g(x)$ não tem esse problema, pois não envolve diferença de raizes.

Questão 4

(a) $f(x)=1/(1-x)$, $x_0=0$

$$f(0)\approx\frac{\frac{1}{(1-0)^1}}{0!}x^0+\frac{\frac{1}{(1-0)^2}}{1!}x^1+\frac{\frac{2}{(1-0)^3}}{2!}x^2+\frac{\frac{6}{(1-0)^4}}{3!}x^3+\ \dots$$

$$\approx\frac{1}{0!}x^0+\frac{1}{1!}x^1+\frac{2}{2!}x^2+\frac{6}{3!}x^3+\ \dots\ \approx x^0+x^1+x^2+x^3+\ \dots$$

$$\approx\sum_{n=0}^{\infty}x^n$$

(b) $f(x)=\sin(x)$, $x_0=0$

$$f(0)\approx\frac{\sin 0}{0!}x^0+\frac{\cos 0}{1!}x^1-\frac{\sin 0}{2!}x^2-\frac{\cos 0}{3!}x^3+\frac{\sin 0}{4!}x^4+\frac{\cos 0}{5!}x^5-\frac{\sin 0}{6!}x^6-\frac{\cos 0}{7!}x^7+\ \dots$$

$$\approx\frac{0}{0!}x^0+\frac{1}{1!}x^1-\frac{0}{2!}x^2-\frac{1}{3!}x^3+\frac{0}{4!}x^4+\frac{1}{5!}x^5-\frac{0}{6!}x^6-\frac{1}{7!}x^7+\ \dots\ \approx\frac{x^1}{1!}-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}-\frac{x^7}{7!}+\ \dots$$

$$\approx\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}$$

(c) $f(x)=\sqrt{x}$, $x_0=1$

$$f(1)\approx=\frac{\frac{1}{2^0}1^{\frac{1}{2}}}{0!}(x-1)^0+\frac{\frac{1}{2^1}1^{\frac{-1}{2}}}{1!}(x-1)^1-\frac{\frac{1}{2^2}1^{\frac{-3}{2}}}{2!}(x-1)^2+\frac{\frac{3}{2^3}1^{\frac{-5}{2}}}{3!}(x-1)^3-\frac{\frac{15}{2^4}1^{\frac{-7}{2}}}{4!}(x-1)^4+\ \dots$$

$$\approx\frac{1}{0!\,2^0}(x-1)^0+\frac{1}{1!\,2^1}(x-1)^1-\frac{1}{2!\,2^2}(x-1)^2+\frac{3}{3!\,2^3}(x-1)^3-\frac{15}{4!\,2^4}(x-1)^4+\ \dots$$

Note que, a partir do terceiro termo, o numerador da fração é dado pelo produtório dos n primeiros números ímpares. Isso acontece devido às repetidas aplicações da "regra do tombo" ao expoente $\frac{1}{2}$. Podemos nos aproveitar desse fato para escrever os termos desde o terceiro em notação de somatório, assim resultando na seguinte expressão para o polinômio de Taylor.

$$f(1) \approx 1 + \frac{x}{2} + \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{\prod_{i=0}^{n} \text{ímpares}}{(n+2)!\ 2^{n+2}} (x-1)^{n+2}$$

Pesquisei na internet uma fórmula para o produtório mencionado[2], assim pude simplificar a expressão acima da seguinte maneira:

$$f(1) \approx 1 + \frac{x}{2} + \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{\frac{(2n+1)!}{2!\ 2^n}}{(n+2)!\ 2^{n+2}} (x-1)^{n+2}$$

Claro que isso ainda não é uma fórmula para um termo geral, visto que os dois primeiros termos estão separados do somatório principal. Uma maneira menos elegante de se chegar ao termo geral é definindo-o por partes, com expressões diferentes para os dois primeiros termos.

(d) $f(x) = e^x$

$$f(1) \approx \frac{e^1}{0!}(x-1)^0 + \frac{e^1}{1!}(x-1)^1 + \frac{e^1}{2!}(x-1)^2 + \frac{e^1}{3!}(x-1)^3 + \frac{e^1}{4!}(x-1)^4 + \frac{e^1}{5!}(x-1)^5 + \ \ldots$$

$$\approx e\left(\frac{1}{0!}(x-1)^0 + \frac{1}{1!}(x-1)^1 + \frac{1}{2!}(x-1)^2 + \frac{1}{3!}(x-1)^3 + \frac{1}{4!}(x-1)^4 + \frac{1}{5!}(x-1)^5 + \ \ldots\right)$$

$$\approx \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}(x-1)^n$$

Questão 5

Usando a fórmula de derivada com diferença centrada, temos a seguinte expressão para a derivada segunda:

$$f''(x) = \lim_{h\to 0} \frac{f'(x+h) - f'(x-h)}{2h}$$

Agora, usamos a fórmula de derivada com diferença centrada para calcular $f'(x+h)$ e $f'(x-h)$:

$$f'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h) - f(x-h)}{2h} \Rightarrow f'(x+h) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h+h) - f(x-h+h)}{2h} = \lim_{h\to 0} \frac{f(x+2h) - f(x)}{2h}$$

$$f'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h) - f(x-h)}{2h} \Rightarrow f'(x-h) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h-h) - f(x-h-h)}{2h} = \lim_{h\to 0} \frac{f(x) - f(x-2h)}{2h}$$

Então a expressão que temos para $f''(x)$ é:

$$f''(x) = \lim_{h \to 0} \frac{(\frac{f(x+2h)-f(x)}{2h}) - (\frac{f(x)-f(x-2h)}{2h})}{2h}) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+2h) - 2f(x) + f(x-2h)}{(2h)^2}$$

Usando as propriedades lineares da operação de limites, temos que:

$$L = \lim_{h \to 0} 2h = 2 \lim_{h \to 0} h = 2 \cdot 0 = 0$$

$$\therefore h \to 0 \Leftrightarrow 2h \to 0$$

Portanto, podemos fazer a substituição $H = 2h$ para chegar na expressão final:

$$f''(x) = \lim_{H \to 0} \frac{f(x+H) - 2f(x) + f(x-H)}{H^2}$$

■

Como vimos em aula, derivadas com diferença centrada tem erro matemático proporcional a h^2. Isso é vantajoso, pois podemos chegar a boas aproximações numéricas de derivada usando valores maiores h, assim mitigando os erros computacionais que ocorrem que quando h é muito pequeno.

Questão 6

O erro total da derivada numérica com diferença centrada é a soma do erro de aproximação (que diminui quando $h \to 0$) ao erro de computação (que aumenta quando $h \to 0$). Assim, temos a seguinte expressão [3][4] para o erro total:

$$E(h) = E_{\text{aprox}}(h) + E_{\text{comp}}(h) = \frac{Lf'''\ h^2}{6} + \frac{\epsilon_{mac}}{h}$$

Onde Lf''' é o valor máximo que f''' atinge em um intervalo arbitrário. Para achar o valor de h que minimiza essa função de erro, encontramos o ponto onde a derivada de $E(h)$ com relação a h é nula:

$$\frac{dE(h)}{dh} = \frac{Lf'''\ h}{3} - \frac{\epsilon_{mac}}{h^2} = 0$$

$$\Rightarrow \frac{Lf'''\ h}{3} = \frac{\epsilon_{mac}}{h^2} \Rightarrow h^3 = \frac{3\ \epsilon_{mac}}{Lf'''} \Rightarrow h = (\frac{3\ \epsilon_{mac}}{Lf'''})^{\frac{1}{3}}$$

Agora basta calcular a derivada terceira de $f(x)$ e encontrar o seu maior valor no intervalo $[24, 26]$:

$$\frac{d^3}{dx^3} \ln x = \frac{d^2}{dx^2} x^{-1} = \frac{d}{dx} - x^{-2} = 2x^{-3}$$

Como x está sendo elevado a um número negativo, o maior valor da função ocorrerá no menor número do intervalo, ou seja $Lf''' = 2 \times 24^{-3}$. Agora, podemos usar Julia para encontrar o valor de h.

In [37]:

```
Lf = 2 * 24^(-3)
eps_mac = eps(1.0)
h_otimo = ((3*eps_mac)/Lf)^(1/3)

println("h ótimo = ", h_otimo)
```

```
h ótimo = 0.0001663623589629035
```

In [39]:
```
import Base
using Plots
pyplot()
using Polynomials
using LaTeXStrings
```

In [40]:
```
F(x) = log(x)
dF(x) = 1/x

# funcao de diferença centrada
function dif_centrada(f, x, h=eps(1.0)^(1/3))
    return (f(x + h) - f(x - h)) / (2*h)
end

# funcao de erro relativo
function erro_rel(aprox, exato)
    return abs(aprox - exato) / abs(exato)
end
```

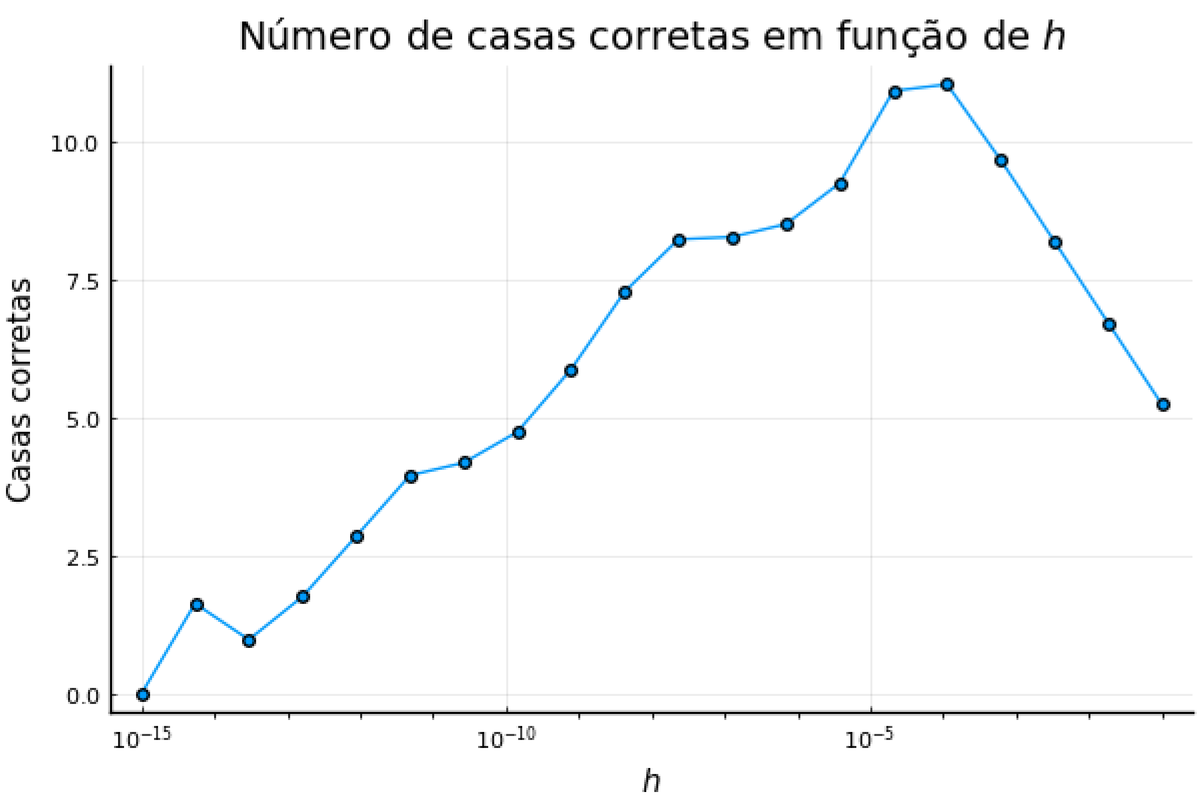
Out[40]:
```
erro_rel (generic function with 1 method)
```

In [45]:
```
ponto = 24
expoentes =  LinRange(-1, -15, 20)
h = 10.0.^expoentes
aproxs = dif_centrada.(F, ponto, h)

plot(h, -log10.(erro_rel.(aproxs, dF(ponto))),
     xaxis=:log10, label="", marker=:c,
     xlabel=L"h", ylabel="Casas corretas")

title!(L"Número de casas corretas em função de $h$")
```

Out[45]:



Como esperado, o maior número de dígitos corretos ocorre quando $h \to h_{\text{ótimo}}$ que nesse caso é em torno de 1.6×10^{-4}

Referências

[1] Configuração do número de algarismos decimais significativos em Julia

[2] Fórmula para o produtório dos n primeiros números ímpares

[3][4] Determinação do h ótimo para diferença centrada