

12 Parametrização de Cônicas

1. Considere a cônica de equação

$$(x+1)y = \frac{1}{2}$$

Determine

- a) se é elipse, hipérbole ou parábola,
- b) focos, vértices e assíntotas (se houver) no sistema de coordenadas \widehat{xy} ,
- c) excentricidade,
- d) uma parametrização da curva,

Resposta:

Transformamos isto para o sistema xy

$$F_1 : \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$F_2 : \begin{pmatrix} -2 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$$V_1 : \begin{pmatrix} -1 + \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}$$

$$V_2 : \begin{pmatrix} -1 - \frac{1}{\sqrt{2}} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}$$

As assíntotas

$$x+1=0 \quad y=0.$$

c) $e = \sqrt{2}$.

d)

$$\begin{cases} \tilde{h}_1^1(t) &= -1 + \frac{\cosh(t) - \sinh(t)}{\sqrt{2}} \\ \tilde{h}_2^1(t) &= \frac{\cosh(t) + \sinh(t)}{\sqrt{2}} \\ \tilde{h}_1^2(t) &= -1 + \frac{-\cosh(t) - \sinh(t)}{\sqrt{2}} \\ \tilde{h}_2^2(t) &= \frac{-\cosh(t) + \sinh(t)}{\sqrt{2}} \end{cases}$$

2. Seja ℓ a curva com equações paramétricas $x = a(1+t^2)/(1-t^2)$, $y = 2bt/(1-t^2)$. Determine ℓ .

Resposta: Hipérbole de equação:

$$\left(\frac{x}{a}\right)^2 - \left(\frac{y}{b}\right)^2 = 1.$$

3. A elipse ℓ tem focos $F_1(1, 2)$ e $F_2(2, 4)$ e vértices $A_1(0, 0)$ e $A_2(3, 6)$. Dê as equações paramétricas de ℓ .

Resposta:

$$x = \frac{3}{2} + \frac{3}{2} \cos(t) - 2\sqrt{2} \sin(t)$$

$$y = 3 + 3 \cos(t) + \sqrt{2} \sin(t),$$

para $t \in (0, 2\pi) \cup (-\pi, \pi)$.

4. A hipérbole ℓ tem focos F_1 e F_2 e vértices A_1 e A_2 . Encontrar equações paramétricas de ℓ se

a) $F_1(2, 0), F_2(8, 0), A_1(3, 0), A_2(7, 0);$

b) $F_1(0, 0), F_2(4, 8), A_1(1, 2), A_2(3, 6).$

Resposta:

a)

$$x = 5 \pm 2 \cosh(t) \quad y' = \sqrt{5} \sinh(t),$$

para $t \in \mathbb{R}$.

b) **Resposta:**

$$x = 2 + \pm b \cosh(t) + 2\sqrt{3} \sinh(t)$$

$$y = 4 - (\pm 2 \cosh(t) + \sqrt{3} \sinh(t)),$$

para $t \in \mathbb{R}$.