

# ***INTRODUÇÃO À AVALIAÇÃO E EXPRESSÃO DE INCERTEZA EM MEDIÇÕES***

**Prof. Luís Eduardo E. de Araujo**

Instituto de Física “Gleb Wataghin”  
Universidade Estadual de Campinas



## **Índice**

1. Introdução .....	3
2. Introdução à analise de incertezas .....	4
3. Vocabulário .....	5
4. Mensurando e incerteza .....	5
5. Fontes de incerteza .....	7
6. Exatidão e precisão.....	8
7. Incertezas do Tipo A e Tipo B .....	8
8. Funções de densidade de probabilidade e a incerteza-padrão .....	10
9. Avaliando a incerteza-padrão: Exemplos .....	13
10. Nível de confiança e incerteza expandida.....	16
11. Incerteza combinada.....	17
12. Planilhas de incerteza.....	18
13. A equação modelo e propagação de incertezas.....	19
14. Reportando um valor experimental.....	21
15. Comparando valores experimentais .....	22
16. Planejando um experimento.....	23
17. O processo de medição.....	24
18. Conclusões.....	24
19. Apêndice – exemplos adicionais .....	26

## 1. Introdução

Esta apostila procura introduzir conceitos básicos de metrologia, a ciência da medição, para estudantes de Graduação das ciências exatas, tecnológicas e engenharias. Ela é inspirada no excelente manual “Introduction to Measurement in the Physics Laboratory – A Probabilistic Approach”<sup>1</sup>, um documento de mais de 140 páginas que visa ensinar técnicas de medição eficazes para estudantes de Graduação. Esse manual, por sua vez, é baseado nas recomendações do “Guia para Expressão de Incerteza de Medição”<sup>2</sup> (ou GUM, do inglês “Guide to the Expression of Uncertainty in Measurement”). O GUM é adotado, dentre outros, por:

- Todos os principais institutos de metrologia do mundo, incluindo o Instituto Nacional de Metrologia, Qualidade e Tecnologia (Inmetro) no Brasil.
- ISO 17025, a qual é uma norma internacional para sistema de gestão em laboratórios requerida para acreditação.
- Pela maioria dos laboratórios de pesquisa industriais e governamentais ao redor do mundo.
- Laboratórios de teste e de calibração nas ciências físicas e engenharias e em trabalhos analíticos químicos e bioquímicos, além de laboratórios em áreas especializadas de testes médicos.

Devido ao papel importante que uma medição tem na ciência, nas engenharias e na tecnologia, é importante que toda medição científica seja analisada e registrada de maneiras que façam sentido para todos os cientistas e engenheiros. Isso passa pela adoção de um padrão para a expressão e análise de incertezas.

A presente apostila procura incorporar as recomendações do GUM e foi elaborada com a intenção de que seja utilizada como referência para quando o estudante for realizar um trabalho prático no laboratório e posteriormente descrever o seu experimento no formato de um relatório. Com isso em mente, não houve uma preocupação em se demonstrar ou provar formulas e resultados, mas procurou-se ilustrar os vários conceitos discutidos com exemplos práticos. A apostila não cobre tudo sobre a análise de incertezas, mas procura abordar os aspectos mais importantes que o aluno precisa entender antes de dominar o assunto.

---

<sup>1</sup> “Introduction to Measurement in the Physics Laboratory. A Probabilistic Approach,” Ed. 3.5, A. Buffler, S. Allie, F. Lubben, and B. Campbell, (Department of Physics, University of Cape Town, 2009).

<sup>2</sup> “Avaliação de Dados de Medição – Guia para Expressão de Incerteza de Medição – GUM 2008”, Duque de Caxias, RJ: INMETRO/CICMA/SEPIN (2008).

## 2. Introdução à análise de incertezas

### *O que é análise de incertezas?*

Você pode achar que uma régua, relógio ou termômetro bem construídos são confiáveis e dão a resposta correta. Porém, para toda medição – até mesmo as mais cuidadosas – sempre haverá uma margem de dúvida associada à seus resultados. Não importa a técnica ou a ferramenta que use, é impossível se determinar experimentalmente de maneira perfeita o valor de qualquer grandeza.

A incerteza de uma medição é a dúvida que existe a respeito da validade do resultado de qualquer medição e ela nos diz algo a respeito da qualidade da medição. Tal incerteza não pode ser eliminada tomando mais cuidado ao realizar a medição ou usando equipamentos mais sofisticados. O melhor que se pode fazer é se certificar de que as fontes de incertezas foram adequadamente identificadas, que as incertezas são as menores possíveis e que seus prováveis efeitos no resultado da medição foram estimados de uma maneira quantitativa confiável. A análise de incertezas é o processo para se obter uma estimativa numérica da qualidade da medição.

### *Por que fazer a análise de incertezas?*

Medições são uma componente essencial da ciência e sem medições, modelos e teorias científicas não podem ser implementados. A análise de incertezas é extremamente importante na interpretação dos resultados de experimentos. De fato, medições cuidadosas, com incertezas apropriadamente identificadas e analisadas, podem levar a novas descobertas científicas. A análise de incertezas é feita sistematicamente em quase todos os campos de pesquisa das chamadas ciências “duras” e cada vez mais em numerosas áreas das engenharias. Em laboratórios analíticos, cujos serviços devem ser acreditados (no Brasil, pelo Inmetro), métodos consistentes de estabelecer e expressar incertezas são necessários. A análise de incertezas é fundamental em diversas situações tais como<sup>3</sup>:

- na calibração de instrumentos e padrões, para verificar se os mesmos encontram-se dentro das tolerâncias definidas;
- na área legal, para verificar a conformidade de resultados de medições com limites de tolerâncias legais;
- na área de ensaios, para verificar se o resultado do ensaio pode ser aprovado ou não;
- no controle de riscos associados à tomada de decisão de aprovar ou rejeitar uma amostra.

---

<sup>3</sup> “RM 68 – Incerteza de Medição: Guia Prático do Avaliador de Laboratórios”, Rede Metrológica RS, Revisão 05 (2013).

### 3. Vocabulário

*Um vocabulário relativo a incertezas, identificando alguns termos importantes*

- **Medição:** O ato de medir. Consiste de todo o processo para obter informação a respeito do mensurando.
- **Medida:** O resultado da medição.
- **Mensurando:** A grandeza específica submetida a medição. No formalismo para avaliação de incerteza, o valor do mensurando é uma quantidade desconhecida e desconhecível (que não pode ser conhecida). Em geral, o resultado de uma medição é somente uma aproximação ou estimativa do valor do mensurando e, assim, só é completo quando acompanhado pela declaração da incerteza dessa estimativa.
- **Incerteza:** parâmetro, associado ao resultado de uma medição, que caracteriza a dispersão de valores que podem ser fundamentadamente atribuídos ao mensurando.
- **Incerteza-padrão:** incerteza do resultado de uma medição expressa como um desvio-padrão.
- **Incerteza tipo A:** é a incerteza avaliada a partir da análise estatística de uma série de observações.
- **Incerteza tipo B:** é a incerteza avaliada por quaisquer outros meios que não a análise estatística de séries de observações.
- **Incerteza-padrão combinada:** é a incerteza-padrão do resultado de uma medição oriunda da combinação em quadratura de incertezas tipo A e tipo B. Ou seja, a incerteza-padrão combinada corresponde à raiz quadrada positiva de uma soma de termos quadráticos de incertezas:  $u_c = \sqrt{u_A^2 + u_B^2}$ .
- **Repetibilidade:** grau de concordância entre os resultados de medições sucessivas de um mesmo mensurando efetuadas sob as mesmas condições de medição.

### 4. Mensurando e incerteza

*O valor do mensurando*

O objetivo geral de se realizar medições em ciência é aumentar o nosso conhecimento a respeito de uma grandeza física, a qual nós chamamos de mensurando. Por exemplo, o mensurando pode ser o comprimento de uma mesa, a temperatura de uma amostra ou a diferença de potencial entre os terminais de um resistor.

Não devemos pensar no mensurando como possuindo um “valor verdadeiro” a ser descoberto. O valor do mensurando é, de fato, uma quantidade

desconhecida e desconhecível na grande maioria das situações experimentais e podemos apenas estimar o seu valor baseados na quantidade de informação disponível a seu respeito. O que inferimos a respeito do mensurando é sempre necessariamente incompleto dado que o nosso conhecimento a seu respeito baseia-se em um conjunto finito de dados. A informação que obtivermos a respeito do mensurando nunca será 100% completa.

Em algumas situações particulares pode-se atribuir um “valor verdadeiro” ao mensurando. Por exemplo, quando o mensurando corresponde a uma grandeza de valor definido (tal qual a velocidade da luz no vácuo,  $c = 299.792.458 \text{ m/s}$ ) ou quando a medição trata da calibração de um instrumento. Às vezes, adota-se o valor “verdadeiro” do mensurando como sendo o resultado de experimentos prévios realizados com melhores equipamentos, técnicas, etc. Por exemplo, o valor aceito atualmente para a constante universal dos gases é  $R = (8,3144598 \pm 0,0000048) \text{ J/mol K}$ ; este não é um “valor verdadeiro”, mas pode ser considerado como tal dado que esta é a medida mais precisa da constante  $R$  obtida até os dias de hoje.

### *Introdução ao conceito de incerteza*

Dado que as conclusões tiradas a respeito do mensurando serão sempre incompletas, o resultado final de uma medição será sempre um intervalo de valores, que nunca poderá ser reduzido a um ponto. Chamamos este intervalo de incerteza. A incerteza caracteriza o grau de (in)completeza da informação a respeito do mensurando e visa proporcionar à pessoa que utiliza o resultado da medição um determinado grau de confiança no mesmo. Portanto, quanto maior a incerteza, menos sabemos a respeito do mensurando e quanto mais soubermos, menor será a incerteza. Ao planejarmos um experimento, devemos ter sempre como meta tornar a incerteza a menor possível, porém sem nos esquecermos que o intervalo de incerteza não poderá jamais ser reduzido a zero.

Em geral, o resultado de uma medição é somente uma aproximação ou estimativa do valor do mensurando. Sendo assim, o resultado de uma medição técnica/científica não tem sentido sem uma declaração quantitativa da incerteza.

### *Incerteza vs. erro*

É muito comum se encontrar em livros, apostilas, internet e textos diversos, referência ao termo “erro” ou “análise de erro” ao descrever experimentos. Incerteza e erro não são sinônimos e representam conceitos completamente diferentes. O erro é um conceito idealizado que corresponde à diferença entre o valor medido e o valor “verdadeiro” do mensurando. Como o valor “verdadeiro” é desconhecido e desconhecível na grande maioria das situações, assim também será o erro. Teria pouco utilidade dizer, por exemplo: a temperatura da amostra é  $26,7^\circ\text{C}$  com erro desconhecido! Já a incerteza de uma medição pode ser estimada de maneira significativa.

## 5. Fontes de incerteza

Um aspecto crucial de qualquer experimento é a identificação de todas as fontes de incerteza e a avaliação numérica de seus efeitos sobre o resultado da medição. Na prática, existem muitas fontes possíveis de incerteza em uma medição, incluindo:

- a) os efeitos das condições ambientais na medição;
- b) viés pessoal na leitura de instrumentos analógicos;
- c) a resolução do seu instrumento (i.e., a escala digital);
- d) calibração do instrumento;
- e) aproximações e hipóteses assumidas durante a realização do experimento a respeito dos fenômenos envolvidos e/ou condições de realização da medição;
- f) variações nas observações repetidas feitas sob condições aparentemente idênticas devidas à influência de grandezas que não estão sendo controladas.

Todos estes fatores, além de muitos outros não mencionados acima, podem conspirar contra a realização de uma medição “perfeita” e contribuir para que se tenha dúvida em relação aos resultados da medição. E atenção: “Erro humano” não é uma fonte válida de incerteza. Este é um termo vago que não descreve clara e objetivamente a fonte da incerteza. A incerteza da medição não deve ser uma indicação de equívocos (erros) cometidos durante a realização do experimento. Se você está ciente de ter cometido um equívoco ou deslize durante a execução do experimento, refaça-o!

### *Efeitos sistemáticos e casuais (ou aleatórios)*

As fontes de incertezas têm origem em efeitos frequentemente classificados como sistemáticos ou casuais. Efeitos casuais afetam as medições de maneira aleatória, alterando as medidas para mais ou para menos com igual probabilidade, causando diferenças entre resultados de medições repetidas. Ao estimar as contribuições para a incerteza devido a efeitos casuais, é importante que as medições sejam repetidas várias vezes. Se o número de repetições for alta o suficiente, o valor médio das medidas carregará pouca influência dos efeitos casuais. Portanto, a influência de efeitos casuais na incerteza de uma medição pode ser reduzida aumentando-se o número de repetições.

Efeitos sistemáticos afetam as medições sempre da mesma maneira, alterando o valor medido sempre para mais ou para menos e com a mesma magnitude. Aumentar o número de repetições não diminui a sua influência no resultado da medição. Como frequentemente é muito difícil de se determinar a magnitude e direção da influência de um efeito sistemático, e portanto corrigí-la, em muitos casos, procuramos estimar a sua influência e levá-la em conta como uma fonte de incerteza.

Porém, deve-se tomar cuidado quanto ao uso generalizado dessa classificação, pois uma fonte casual de incerteza em uma medição pode se tornar uma fonte sistemática em outra, e vice-versa. Pode-se ter inclusive situações nas

quais efeitos que são aleatórios no curto prazo podem se tornar sistemáticos no longo prazo.

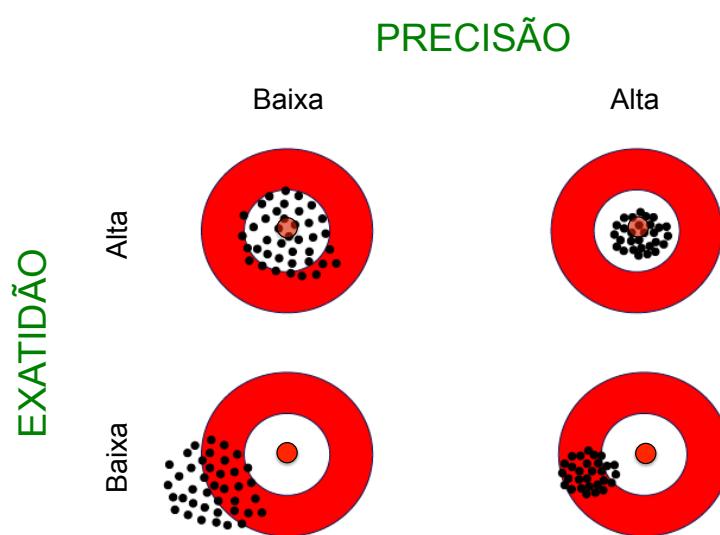
## 6. Exatidão e precisão

*Entendendo a diferença entre exatidão e precisão*

Exatidão (ou acurácia) é a proximidade de concordância entre uma medida e o “valor verdadeiro” da grandeza sendo medida. Um resultado é exato se é relativamente desprovido de efeito sistemático. Precisão é uma medida do grau de consistência e concordância entre medições independentes da mesma grandeza e, portanto, refere-se a flutuações aleatórias nas medidas. O número de divisões na escala de um instrumento de medição geralmente afeta a consistência de medições repetidas e, portanto, a precisão. Uma medição pode ser precisa sem ser exata e vice-versa.

*Uma analogia útil*

A figura abaixo ajuda a entender a diferença entre exatidão e precisão. Na figura, o centro do alvo representa o valor verdadeiro do mensurando, enquanto que os círculos pretos (“tiros ao alvo”) representam os resultados de medições repetidas.



Embora útil, esta analogia tem uma grande falha: na grande maioria das situações, não conhecemos onde o centro do alvo está localizado! Um cientista considera que o seu resultado é exato quando ele concorda com os resultados de vários outros experimentos conduzidos por outros cientistas.

## **7. Incertezas do Tipo A e Tipo B**

O GUM classifica as incertezas associadas a uma medição em dois tipos de acordo com os métodos de avaliação:

- Avaliação do “Tipo A” – avaliação da incerteza via análise estatística de uma série de observações repetidas.
- Avaliação do “Tipo B” – avaliação da incerteza por outros meios.

### *Avaliação do Tipo A*

Avaliações do Tipo A são realizadas quando uma medição é realizada repetidas vezes sob as mesmas condições e valores dispersos são observados. As avaliações do Tipo A podem ser baseadas em qualquer método estatístico válido para tratamento de dados. Exemplos são:

- Cálculo do desvio-padrão da média de uma série de observações experimentais independentes.
- Uso do método dos mínimos quadrados para ajustar uma curva aos dados de modo a estimar os parâmetros da curva e seus desvios-padrões.

Avaliações do Tipo A só são possíveis quando existe dispersão em medições repetidas. Algumas vezes medições repetidas são idênticas devido à baixa sensibilidade do instrumento de medição. Quando medições repetidas são idênticas, então os dados devem ser tratados como uma única medição e uma avaliação do Tipo B da incerteza deve ser realizada.

### *Avaliação do Tipo B*

São realizadas quando não é possível se fazer uma avaliação estatística da incerteza, mas se tem em mãos dados metrológicos significativos. Avaliações do Tipo B são geralmente baseadas em um julgamento científico por parte do operador utilizando todas as informações relevantes disponíveis, que podem incluir:

- Dados de uma única leitura analógica ou digital.
- Experiência ou conhecimento prévio do comportamento ou propriedades relevantes do material e instrumentos.
- Especificações do fabricante.
- Calibração dos equipamentos.

A classificação das incertezas em Tipo A e Tipo B tem como propósito indicar as duas maneiras diferentes de se avaliar as incertezas. Essa classificação não é indicativa de qualquer diferença de natureza das incertezas. Ambos os tipos de avaliação são baseados em funções de densidade de probabilidade e as incertezas resultantes são quantificadas por desvios-padrões. Por fim, nem sempre há uma correspondência direta entre a classificação nas categorias A ou B e a classificação em incerteza “casual” e incerteza “sistêmática”.

## 8. Funções de densidade de probabilidade e a incerteza-padrão

### *Função de densidade de probabilidade*

Em algumas situações experimentais, você terá um conjunto de medidas repetidas e dispersas e, em outras, você terá apenas uma única medida. Em ambos os casos, você deve se perguntar: “A partir dos meus dados, o que eu posso concluir a respeito do mensurando?” O procedimento que nos permite ir dos dados coletados a fazer uma afirmação (uma inferência) a respeito do mensurando é baseado na teoria de probabilidade. As funções matemáticas que nós usamos neste processo são funções de densidade de probabilidade (f.d.p.), as quais descrevem a probabilidade de uma variável aleatória assumir um dado valor dentro de um dado intervalo. Estas funções são usadas para modelar toda a informação que temos a respeito de um mensurando em particular.

No contexto de metrologia, as três funções de densidade de probabilidade mais úteis estão mostradas na tabela abaixo:

Tipo de Avaliação	Tipo de f.d.p.	Geralmente usada quando se possui	
A	gaussiana		um conjunto de medidas repetidas e dispersas.
B	retangular		uma única medida digital.
B	triangular		uma única medida analógica.

A tabela acima não representa regras firmes, mas apenas um guia para uso das funções de densidade de probabilidade. A escolha da f.d.p. mais adequada é relativamente arbitrária e deve ser feita pela pessoa responsável pelo processo de medição levando-se em conta as informações relevantes à determinação da qualidade dos resultados da medição. Por exemplo, régulas de madeira são menos confiáveis que régulas de metal. De fato, em uma régua de madeira, geralmente a largura das marcações da escala da régua é comparável à separação das mesmas e é muito difícil de se identificar claramente um valor mais provável para o mensurando. Neste caso, a f.d.p. retangular é mais adequada para descrever uma medida obtida com a régua de madeira, apesar do instrumento de medição ser analógico. Já no caso das régulas metálicas, cujas marcações da escala são bastante estreitas, o resultado da medição é melhor modelado por uma f.d.p. triangular, como sugerido na tabela acima.

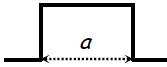
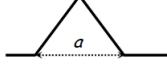
Havendo pouca informação disponível a respeito da grandeza sendo medida e/ou do instrumento utilizado que permita escolher uma f.d.p. apropriada, deve-se adotar uma f.d.p. retangular.

### *A incerteza-padrão*

Após coletar todos os dados de um experimento, seja em uma medição única ou medições repetidas do mesmo mensurando, todo o seu conhecimento a respeito do mensurando é completamente descrito pela f.d.p. A posição do centro da f.d.p.

corresponde à melhor estimativa para o valor do mensurando<sup>4</sup>. A área da f.d.p. é 1 (um), pois o valor do mensurando deve estar contido dentro da f.d.p. Já a largura da f.d.p. está associada ao grau de conhecimento a respeito do mensurando. Quanto mais estreita a f.d.p., maior o conhecimento que você tem sobre o mensurando. A “largura média” da f.d.p. fornece uma medida quantitativa da qualidade desse conhecimento e é chamada de incerteza-padrão (símbolo:  $u$ ). Matematicamente, essa largura média corresponde à raiz quadrada positiva da variância da f.d.p., ou seja, ao desvio-padrão da f.d.p.<sup>5</sup>.

A tabela abaixo mostra o valor da incerteza-padrão para as 3 funções de densidade de probabilidade apresentadas anteriormente:

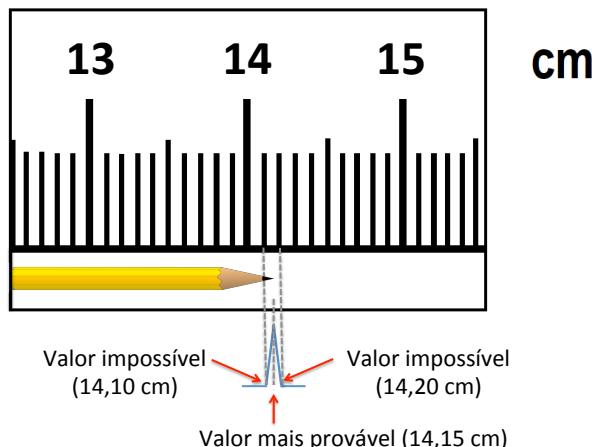
Função de densidade de probabilidade	Incerteza-padrão $u$	Quando usar
retangular	 $u = \frac{a}{2\sqrt{3}}$	Quando se conhece apenas os valores máximos e mínimos de variação. Exemplo: efeito causado pela resolução finita do equipamento
triangular	 $u = \frac{a}{2\sqrt{6}}$	Quando se conhece os valores máximo e mínimo de variação e o valor mais provável. Exemplo: posicionamento de um instrumento em uma marca de escala.
gaussiana	 $u = \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$	Desvio-padrão da média de um conjunto de $n$ medições repetidas.

A escolha do valor da largura da base  $a$  da f.d.p. triangular é subjetiva e dependente de uma escolha pessoal do operador do instrumento, o qual deve decidir quais são os limites inferior (à esquerda) e superior (à direita) do intervalo de incerteza. Tais limites correspondem aos valores mais próximos da melhor estimativa que ele (o operador) acredita que a partir dos quais existe probabilidade nula de corresponder ao valor do mensurando. Frequentemente, o intervalo de incerteza é simétrico em torno do valor mais provável para o mensurando. O procedimento está ilustrado na figura abaixo para o caso simples em que pretende-se determinar o comprimento de um lápis.

---

<sup>4</sup> Se  $p(x)$  for a f.d.p., então a posição  $\mu$  do seu centro é dada pelo chamado primeiro momento da f.d.p.:  $\mu = \int_{-\infty}^{+\infty} x p(x) dx$ .

<sup>5</sup> A variância  $\sigma^2$  da f.d.p.  $p(x)$  corresponde ao segundo momento da distribuição:  $\sigma^2 = \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 p(x) dx$  e a raiz quadrada positiva da variância é o desvio-padrão  $\sigma$ .



No exemplo acima, os limites superior e inferior do intervalo de incerteza foram escolhidos simplesmente tomando-se as marcas da escala mais próximas em cada caso. Porém, em muitas situações, esta estimativa é conservadora e é possível se fazer melhor do que isso. Deve-se sempre tentar escolher como limites valores que sejam mais próximos possíveis do valor mais provável, mas para os quais ainda acreditamos que sejam valores impossíveis de corresponder ao valor do mensurando. Por exemplo, 14,12 cm e 14,18 cm seriam escolhas menos conservadoras e aceitáveis para o exemplo acima. No caso de réguas milimétricas metálicas de boa qualidade é possível se estimar os limites até 0,1 mm, principalmente com o auxílio de magnificação (lupa, câmera do telefone celular, etc.).

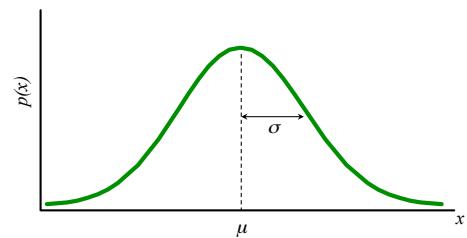
No caso da leitura de um instrumento digital, não há viés pessoal por parte do operador. A melhor estimativa para o valor do mensurando é o valor mostrado no painel do instrumento e a largura da f.d.p. retangular associada à medição é a própria resolução do instrumento.

Já os resultados de medições repetidas são modeladas por uma f.d.p. gaussiana, cuja equação geral é:

$$p(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \exp\left[-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}\right].$$

Essa f.d.p. é descrita por dois parâmetros: o valor esperado  $\mu$  e o desvio-padrão  $\sigma$ . O valor esperado corresponde ao valor para o qual a gaussiana é máxima e o desvio-padrão à largura da gaussiana. Se você está usando uma f.d.p. gaussiana para descrever o seu conhecimento a respeito de um mensurando  $x$  baseado em  $n$  observações independentes de  $x$  que foram obtidas aparentemente sob as mesmas condições de medição, então a melhor estimativa do valor esperado  $\mu$  do mensurando é a média aritmética  $\bar{x}$  dos dados:

$$\bar{x} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i ,$$



onde  $x_i$  são os valores observados no experimento. A variância experimental das observações é dada por:

$$s^2(x_i) = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (\bar{x} - x_i)^2.$$

Esta estimativa da variância e a sua raiz quadrada positiva  $s(x_i)$ , denominada de desvio-padrão experimental, caracterizam a dispersão dos valores observados  $x_i$  em torno da sua média  $\bar{x}$ . A melhor estimativa para o desvio-padrão  $\sigma$  da f.d.p. gaussiana corresponde à raiz quadrada da variância. Já o desvio-padrão experimental da média

$$s(\bar{x}) = \frac{s(x_i)}{\sqrt{n}}$$

pode ser usado como uma medida da incerteza-padrão de  $\bar{x}$ . Portanto, vemos que quanto maior for o número de repetições  $n$ , menor será a incerteza-padrão e melhor será a sua estimativa para o valor do mensurando. Porém, realizar um número muito grande de medições requer um esforço grande e um retorno cada vez menor. Então, quantas medições se deve realizar? Não há um número "mágico". Dez é uma escolha popular porque torna as contas mais simples. Vinte medições daria uma estimativa um pouco melhor do que 10, enquanto que 50 seria só um pouco melhor do que 20.

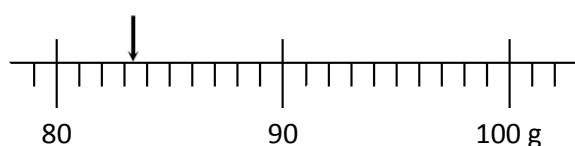
Resumindo, no caso de medições repetidas, estimativas para o valor esperado  $\mu$  do mensurando e da incerteza-padrão da medição  $u$  são obtidas a partir dos dados experimentais coletados no experimento:

Parâmetros	Melhor estimativa
Valor esperado do mensurando ( $\mu$ )	Média aritmética dos dados $\bar{x}$
Desvio-padrão da f.d.p. gaussiana ( $\sigma$ )	Desvio-padrão experimental $s(x_i)$
Incerteza-padrão da medição ( $u$ )	Desvio-padrão experimental da média $s(\bar{x})$

## 9. Avaliando a incerteza-padrão: Exemplos

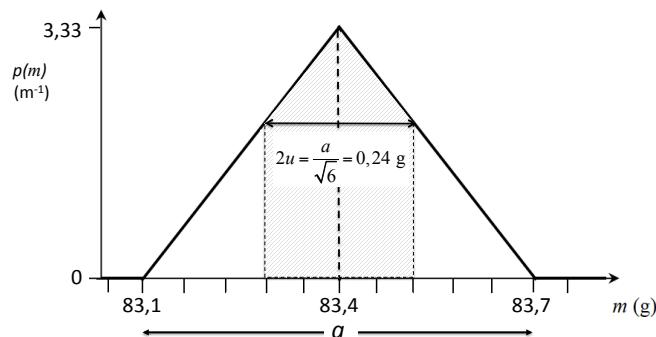
*Medição única com instrumento analógico*

Considere o painel de uma balança analógica, usada para determinar a massa  $m$  de um objeto, mostrado abaixo.



Ao realizar a leitura, o operador do instrumento decide que o valor mais provável para a massa do objeto é 83,4 g; o operador está confiante de que, baseado na sua leitura do instrumento, é impossível que o valor da massa seja menor do que 83,1 g e maior do que 83,7 g.

A f.d.p. a seguir [ $p(m)$ ] descreve o conhecimento a respeito da massa obtido através da medição realizada com a balança analógica:



A posição do centro da f.d.p. triangular corresponde à melhor aproximação para o valor do mensurando (massa do objeto). Os limites inferior  $a_- = 83,1$  g e superior  $a_+ = 83,7$  g, além dos quais o operador do instrumento acredita existir probabilidade nula de corresponder ao valor do mensurando, definem o intervalo de incerteza  $a = a_+ - a_- = 0,6$  g. A área sob o triângulo deve ser igual a 1, já que o valor do mensurando deve estar contido dentro do intervalo  $a$ . A incerteza-padrão da medição é então:  $u = a / 2\sqrt{6} = 0,12$  g.

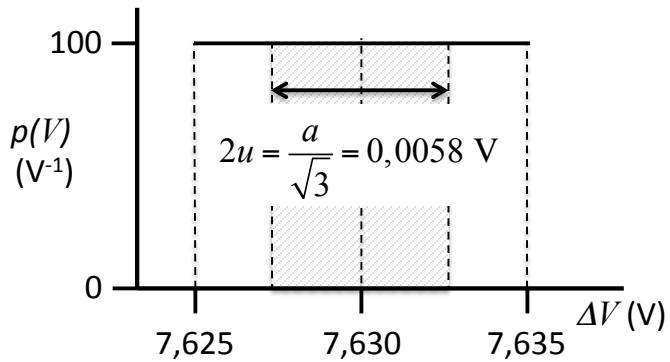
Neste exemplo, podemos comunicar o nosso conhecimento a respeito do mensurando da seguinte maneira: "A melhor aproximação para  $m$  é 83,4 g, com uma incerteza-padrão de 0,12 g, usando uma função de densidade de probabilidade triangular." (Obs.: discutiremos mais adiante com quantos algarismos expressar a incerteza-padrão.)

#### *Medição única com instrumento digital*

A diferença de potencial  $\Delta V$  entre os terminais de um resistor foi medida com um voltímetro digital. A figura ao lado ilustra o valor registrado no painel do instrumento.



A leitura do instrumento é 7,63 volts. O último dígito (3) resulta de um arredondamento realizado pelo instrumento. Não é possível se determinar, com este instrumento, qual seria a terceira casa decimal do valor do mensurando. Esta pode ser, com igual probabilidade, qualquer número entre 0 e 9. Desta forma, podemos apenas concluir que o valor do mensurando está contido dentro do intervalo de 7,625000 ... V a 7,634999 ... V. A f.d.p. que nos dá probabilidades iguais por unidade de tensão (volts) é uma função retangular com limites 7,625000 ... V e 7,634999 ... V e está ilustrada abaixo.



A largura da distribuição retangular é  $a = 7,634999 \dots - 7,625000 \dots = 0,01 \text{ V}$  e a incerteza-padrão da medição é:  $u = a/2\sqrt{3} = 0,0029 \text{ V}$ .

Aqui, comunicamos o nosso conhecimento a respeito do mensurando da seguinte maneira: "A melhor aproximação para  $\Delta V$  é 7,630 V, com uma incerteza-padrão de 0,0029 V, usando uma função de densidade de probabilidade retangular." (Obs.: discutiremos mais adiante com quantos algarismos expressar a incerteza-padrão.)

Os dois exemplos simples acima (medição única com instrumento analógico e com instrumento digital) ilustram o fato importante de que mesmo na ausência de outros fatores que possam afetar o processo de medição, a própria escala do instrumento limitará a medição e o resultado final será sempre um intervalo de valores que não poderá ser reduzido a um ponto.

### *Medições repetidas*

Um estudante lançou horizontalmente uma esfera de aço a partir de uma mesa e mediu o alcance  $x$  da esfera ao atingir o chão com uma régua milimetrada metálica. O experimento foi repetido cinco vezes e os seguintes valores (em mm) foram registrados:

315,0	321,1	313,8	314,3	319,2
-------	-------	-------	-------	-------

O valor médio das medidas é:

$$\mu = (315,0 + 321,1 + 313,8 + 314,3 + 319,2) / 5 = 316,68 \text{ mm.}$$

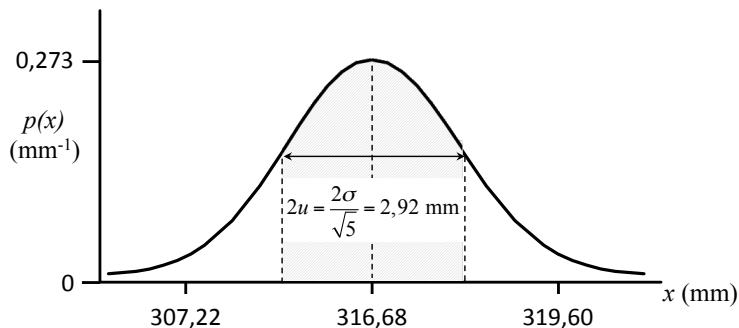
Os valores estão aproximadamente igualmente distribuídos acima e abaixo do valor médio, logo uma f.d.p. gaussiana deve representar razoavelmente bem os dados coletados. O desvio-padrão da f.d.p gaussiana é estimado pelo desvio-padrão experimental:

$$\begin{aligned}\sigma &= \sqrt{\frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (\mu - x_i)^2} \\ &= \sqrt{\frac{(316,88 - 315,0)^2 + (316,88 - 321,1)^2 + \dots + (316,88 - 319,2)^2}{5-1}} \\ &= 3,27 \text{ mm.}\end{aligned}$$

Assim temos que a incerteza-padrão da medição, estimada pelo desvio-padrão experimental da média, é:

$$u = \sigma / \sqrt{n} = 3,27 / \sqrt{5} = 1,46 \text{ mm.}$$

A figura a seguir mostra a f.d.p gaussiana associada às medições repetidas. A localização do pico da gaussiana corresponde ao valor esperado do mensurando ( $\mu = 316,68 \text{ mm}$ ) e sua largura é dada pelo desvio-padrão da média ( $u = 1,46 \text{ mm}$ ).



O resultado do experimento seria então relatado da seguinte maneira: “A melhor aproximação para o alcance é 316,68 mm, com uma incerteza-padrão de 1,46 mm, usando uma função de densidade de probabilidade gaussiana.” (Obs.: discutiremos mais adiante com quantos algarismos expressar a incerteza-padrão.)

## 10. Nível de confiança e incerteza expandida

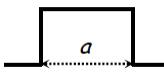
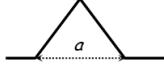
### *Nível de confiança*

Ao relatar o resultado de uma medição é preciso também informar o quanto certos estamos a respeito do valor do mensurando se encontrar dentro do intervalo de valores dado pela incerteza-padrão. O nível de confiança é uma medida da probabilidade de que um valor do mensurando se encontre entre  $y-u$  e  $y+u$ , onde  $y$  é a melhor aproximação e  $u$  é a incerteza-padrão. Note que você tem 100% de certeza que o valor do mensurando está contido em algum lugar dentro do intervalo coberto pela f.d.p., pois a área sob a f.d.p. é sempre unitária. Por sua vez, o nível de confiança corresponde à área da f.d.p. dentro do intervalo dado pela incerteza-padrão  $u$ . Para uma f.d.p. triangular, o nível de confiança é 65%, para uma f.d.p. gaussiana, o nível de confiança é 68% e para uma f.d.p. retangular é 58%.

Logo, no exemplo da seção anterior, ao enunciar o resultado de um experimento como sendo “a melhor aproximação para  $\Delta V$  é 7,630 V com uma incerteza-padrão de 0,003 V”, entende-se que há uma probabilidade de 58% de que o valor da diferença de potencial exista no intervalo que vai de 7,627 V a 7,633 V, com o valor mais provável (melhor aproximação para o mensurando) sendo 7,630 V.

## *Incerteza expandida*

De modo a satisfazer as necessidades de algumas aplicações industriais e comerciais, assim como para atender a requisitos nas áreas de saúde e segurança, pode ser necessário aumentar o nível de confiança no resultado da medição. Isso é feito através da incerteza expandida  $U$ , obtida através da multiplicação da incerteza-padrão  $u$  por uma constante, chamada de fator de abrangência  $k$ . Em outras palavras,  $U = k u$ , onde  $k > 1$ . Tipicamente,  $k$  está na faixa de 2 a 3, mas seu valor exato dependerá do nível de confiança requerido do intervalo. A tabela abaixo resume o nível de confiança e a incerteza expandida para as três f.d.p. mais usadas em metrologia:

Função de densidade de probabilidade	Incerteza expandida e nível de confiança
retangular	
	$1 u = 58\%$
	$1,65 u = 95\%$
triangular	
	$1 u = 65\%$
	$1,81 u = 95\%$
gaussiana	
	$1 u = 68\%$
	$2 u = 95\%$
	$3 u = 99\%$

Deve-se destacar que ao introduzir uma incerteza expandida e um fator de abrangência, o resultado da medição não é afetado. O que está sendo feito é apenas uma alteração na maneira que este resultado é apresentado. Deste modo, o fator de abrangência  $k$  deve ser sempre declarado de forma que a incerteza-padrão da grandeza medida possa ser recuperada para uso no cálculo da incerteza-padrão combinada de outros resultados de medição que possam depender dessa grandeza.

## **11. Incerteza combinada**

Quando uma medição tem mais de uma fonte de incerteza identificável, a contribuição de todas as fontes deve ser considerada para que a incerteza seja realmente significativa. Nesses casos, a incerteza-padrão combinada deve ser calculada. A incerteza-padrão combinada  $u_c$  é dada pela raiz quadrada da soma em quadratura de todas as incertezas da medição:

$$u_c(y) = \sqrt{u_1^2(y) + u_2^2(y) + u_3^2(y) + \dots},$$

onde cada  $u_i(y)$  é uma incerteza-padrão que pode resultar tanto de uma avaliação de incerteza do Tipo A quanto do Tipo B. Contribuições do Tipo A e Tipo B podem ser combinadas contanto que sejam expressas de maneira similar antes de serem combinadas. Ou seja, todas as incertezas devem ser expressas como uma incerteza-padrão e na mesma unidade. Deve-se ter em mente, porém,

que quando mais de um tipo de f.d.p. são combinadas, é difícil se determinar a f.d.p. resultante.

### *Exemplo*

Um aluno deseja medir, utilizando um cronômetro digital manual, o tempo  $t$  que leva para uma esfera de aço cair de uma certa altura até o chão. Ele repete o seu experimento quinze vezes. A melhor estimativa para o tempo de queda é a média aritmética das quinze medidas. As principais componentes de incerteza desta medição são: (i) desvio-padrão experimental da média das repetições ( $u_{esfera}$ ), (ii) calibração do cronômetro ( $u_{cal}$ ), especificada pelo fabricante e (iii) resolução finita do cronômetro ( $u_{res}$ ).

A incerteza de calibração do cronômetro e a incerteza advinda da sua resolução finita são tipicamente componentes de incerteza com distribuição de probabilidade retangular (avaliações do tipo B). Já o desvio-padrão experimental da média está associado a uma variável com distribuição gaussiana (avaliação do Tipo A).

Suponha que o cronômetro utilizado tivesse uma resolução de 0,01 s. Logo,  $u_{res}(t) = 0,01 / \sqrt{3} = 0,0029$  s. Adicionalmente, considere que o fabricante informa que a leitura do cronômetro pode estar errada no máximo por  $\pm 0,02$  s (para mais ou para menos). Portanto, a incerteza de calibração do cronômetro é  $u_{calib}(t) = 0,02 / \sqrt{3} = 0,0115$  s. A partir dados coletados, calculou-se a média das quinze medições como sendo 0,306 s e o desvio-padrão experimental 0,05 s. De modo que a incerteza-padrão das 15 medições é  $u_{esfera}(t) = 0,05 / \sqrt{15} = 0,0129$  s.

Portanto, a incerteza-padrão combinada da medição é

$$\begin{aligned} u_c(t) &= \sqrt{u_{res}^2(t) + u_{cal}^2(t) + u_{esfera}^2(t)} \\ &= \sqrt{0,0029^2 + 0,0115^2 + 0,0129^2} \\ &= 0,018 \text{ s.} \end{aligned}$$

## 12. Planilhas de incerteza

Uma planilha de incertezas é uma avaliação, geralmente apresentada no formato de uma tabela, de todas as contribuições de incerteza de uma medição em particular. Uma planilha de incerteza é uma maneira eficaz de mostrar como você lidou com todas as incertezas da medição. Ela fornece subsídios aos usuários para identificar aqueles fatores que mais influenciaram os resultados da medição. Um planilha de incertezas deve conter, no mínimo, a descrição das componentes de incerteza, o valor numérico das incertezas-padrões, o método de avaliação e a incerteza-padrão combinada.

### *Exemplo*

A planilha de incertezas para o exemplo da seção anterior seria:

Fonte da incerteza	Incerteza-padrão (s)	Tipo de avaliação
Resolução do instrumento	0,0029	B
Incerteza de calibração	0,0115	B
Incerteza-padrão da média (15 repetições)	0,0129	A
Incerteza-padrão combinada: $u_c(t) = \sqrt{0,0029^2 + 0,0115^2 + 0,0129^2} = 0,018 \text{ s}$		

### 13. A equação modelo e propagação de incertezas

O que é a equação modelo?

Na maioria dos casos, o mensurando  $y$  não é medido diretamente, mas é determinado a partir de  $N$  outras grandezas  $x_1, x_2, \dots, x_N$ , chamadas de grandezas de entrada, as quais são medidas diretamente. A equação modelo

$$y = f(x_1, x_2, \dots, x_N)$$

relaciona a grandeza de saída (valor do mensurando) com as grandezas de entrada. A equação modelo deve permitir contabilizar todas as fontes de incertezas importantes da medição.

Por exemplo, se uma diferença de potencial  $V$  é aplicada aos terminais de um resistor dependente da temperatura e que tem uma resistência  $R_0$ , a uma temperatura definida  $t_0$  e um coeficiente de temperatura linear da resistência  $\alpha$ , então a potência  $P$  (o mensurando) dissipada pelo resistor, à temperatura  $t$ , depende de  $V, R_0, \alpha$  e  $t$ , de acordo com a equação modelo:

$$P = V^2 / \left\{ R_0 [1 + \alpha(t - t_0)] \right\}.$$

Neste exemplo, os parâmetros  $V, R_0, \alpha$  e  $t$  da equação contabilizam as grandezas de entrada diretamente medidas. A grandeza de saída é a potência dissipada  $P$ .

*Propagação de incertezas*

Como muitas grandezas físicas são calculadas combinando-se duas ou mais medições diferentes, é importante saber como as incertezas de medições se propagam quando operações matemáticas são realizadas em grandezas de entrada. Ou seja, saber como calcular a incerteza combinada final para a grandeza de saída. Quando todas as grandezas de entrada  $x_i$  são independentes, a incerteza-padrão combinada  $u_c(y)$  da grandeza de saída  $y$  é dada pela lei de propagação de incertezas:

$$u_c(y) = \sqrt{\left(\frac{\partial f}{\partial x_1}\right)^2 u^2(x_1) + \left(\frac{\partial f}{\partial x_2}\right)^2 u^2(x_2) + \left(\frac{\partial f}{\partial x_3}\right)^2 u^2(x_3) + \dots},$$

onde cada  $u(x_i)$  é uma incerteza-padrão que pode ter sido estimada por uma avaliação do Tipo A ou Tipo B.

### *Exemplo*

Vamos assumir que estamos tentando medir  $g$ , a aceleração da gravidade, observando o período  $T$  de um pêndulo de comprimento  $l$ . Digamos que nós determinamos:  $T = 0,76$  s com uma incerteza-padrão  $u(T) = 0,02$  s (resultante de uma avaliação do Tipo A); e  $l = 0,143$  m, com  $u(l) = 0,003$  m (resultante de uma avaliação do Tipo B). Para determinar  $g$ , usamos a fórmula:  $T = 2\pi\sqrt{l/g}$ . Logo,

$$g = \frac{4\pi^2 l}{T^2}.$$

Neste exemplo, as grandezas de entrada são  $T$  e  $l$  enquanto que  $g$  é a grandeza de saída. Usando as melhores estimativas para  $T$  e  $l$  dadas acima, obtemos  $g = 9,774$  m/s<sup>2</sup>. Para determinar a incerteza  $u(g)$ , calculamos:

$$\begin{aligned}\partial g / \partial l &= 4\pi^2 / T^2 \\ \partial g / \partial T &= -8\pi^2 l / T^3.\end{aligned}$$

Para simplicidade de notação, usamos acima o mesmo símbolo tanto para a grandeza quanto a sua estimativa. Com isso,

$$\begin{aligned}u^2(g) &= \left(\frac{\partial g}{\partial T}\right)^2 u^2(T) + \left(\frac{\partial g}{\partial l}\right)^2 u^2(l) \\ &= \left(\frac{-8\pi^2 l}{T^3}\right)^2 u^2(T) + \left(\frac{4\pi^2}{T^2}\right)^2 u^2(l) \\ &= \left(\frac{-8\pi^2 \times 0,143}{0,76^3}\right)^2 0,02^2 + \left(\frac{4\pi^2}{0,76^2}\right)^2 0,003^2 \\ &= 0,3066 \text{ m}^2 / \text{s}^2\end{aligned}$$

Logo,  $u(g) = 0,55$  m/s<sup>2</sup>.

## 14. Reportando um valor experimental

*Melhor estimativa ± incerteza*

Nunca saberemos o valor “verdadeiro” do mensurando e só podemos fazer afirmações a respeito do nosso conhecimento sobre o intervalo de valores dentro do qual o mensurando se encontra. Portanto, quando queremos comunicar o resultado final de um experimento, devemos fornecer:

- A melhor estimativa para o valor do mensurando (dada pela localização do centro da f.d.p.);
- A incerteza-padrão  $u$  (dada pela largura da f.d.p.);
- O formato da f.d.p. que foi usada.
- O nível de confiança

Caso a incerteza relatada seja uma incerteza expandida, deve-se também indicar o fator de abrangência. Juntos, os itens listados acima formam o resultado da medição. Por exemplo, o resultado de uma medição pode ser reportado da seguinte maneira: “a melhor aproximação para o valor do comprimento é 56,7 cm com uma incerteza-padrão de 0,3 cm (com um nível de confiança de 68%, usando uma f.d.p. gaussiana).” Ou de maneira mais compacta:

$$l = (56,7 \pm 0,3) \text{ cm, (nível de confiança de 68%; f.d.p. gaussiana)}.$$

Essa é a maneira na qual você deve sempre reportar o resultado de um experimento, pois assim ele fará sentido para qualquer cientista que vier a ler o seu resultado.

*Quantos dígitos utilizar?*

O GUM recomenda que incertezas experimentais sejam relatadas com no máximo dois algarismos significativos, porém elas são mais comumente relatadas com apenas um algarismo significativo. Adotando essa última como sendo a prática “correta”, temos como exemplo:

**“Errado”:**  $(52,1 \pm 2,2) \text{ cm}$

**Correto:**  $(52 \pm 2) \text{ cm}$

Sempre arredonde o valor experimental para a mesma casa decimal da incerteza. Causaria confusão sugerir que você conhece o dígito na casa dos centésimos quando admite que tem dúvidas na casa dos décimos.

**Errado:**  $(1,341 \pm 0,2) \text{ s}$

**Correto:**  $(1,3 \pm 0,2) \text{ s}$

Às vezes, pode ser necessário reter algarismos adicionais para evitar erros de arredondamento em cálculos subsequentes. Em algumas situações, pode ser

necessário arredondar a incerteza para cima, em vez de arredondar até o algarismo mais próximo, produzindo um intervalo maior e mais conservador.

## 15. Comparando valores experimentais

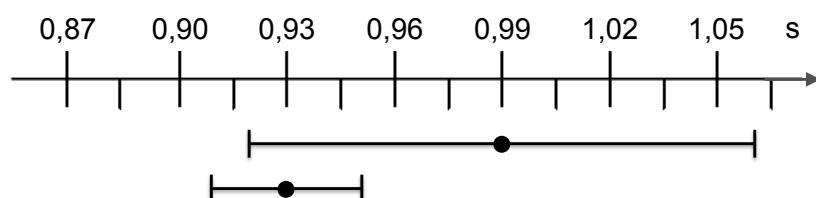
*Comparando valores determinados experimentalmente*

Estimativas de incertezas são cruciais para comparar valores experimentais. Por exemplo, as medidas  $0,93\text{ s}$  e  $0,99\text{ s}$  são iguais ou diferentes? Medições só podem ser comparadas de maneira que faça sentido se a incerteza associada a cada medição for conhecida. Se as incertezas não forem conhecidas, não é possível compará-las, não importa o quão perto ou longe as melhores estimativas pareçam estar uma da outra. Por isso é importante estimar incertezas!

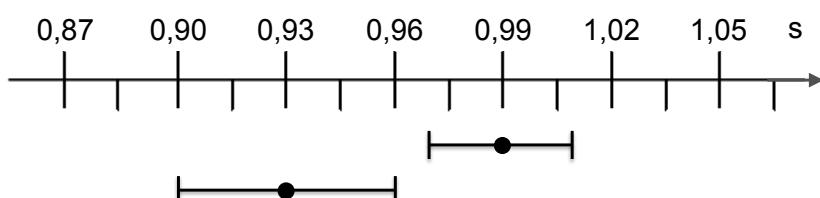
Para determinar se dois resultados experimentais estão em concordância ou não, basta procurar observar se há superposição dos intervalos definidos pelos dois resultados. Se os intervalos não se sobreponem, as medidas são discrepantes (não há concordância entre os dois resultados). Se os intervalos se superpõem, dizemos que as medidas são concordantes.

Medidas não estão em concordância	$(0,93 \pm 0,03)\text{ s}$ e $(0,99 \pm 0,02)\text{ s}$
Medidas estão em concordância	$(0,93 \pm 0,04)\text{ s}$ e $(0,99 \pm 0,07)\text{ s}$

Isso é mais fácil de se entender utilizando-se de uma representação gráfica dos resultados:



Dizemos que no caso acima, os dois resultados concordam entre si dentro das incertezas declaradas. Note porém, que quando as incertezas forem muito grandes é impossível dizer se a concordância é real ou é devido apenas a medições desleixadas. Já no caso abaixo, não há concordância entre os dois resultados.



## **16. Planejando um experimento**

A incerteza em qualquer processo de medição não pode ser eliminada simplesmente tomando-se mais cuidado ao realizar a medição ou usando equipamentos mais caros e sofisticados. Mesmo assim, deve-se sempre procurar minimizar a incerteza da medição, pois quanto menor a incerteza, maior o conhecimento a respeito do mensurando.

Minimizar a incerteza de uma medição o máximo que realisticamente seja possível passa por um bom planejamento do experimento. Não se deve nunca se apressar a coletar dados sem um planejamento cuidadoso prévio. É uma boa idéia se familiarizar com o aparato antes de começar, mas antes de fazer qualquer medição séria, planeje cuidadosamente o que irá fazer. Um roteiro simples de planejamento de um experimento inclui:

### **I. Defina o problema experimental a ser estudado:**

“Neste experimento nós iremos investigar \_\_\_\_\_. Iremos alterar o \_\_\_\_\_ e mediremos o \_\_\_\_\_, enquanto mantemos o \_\_\_\_\_ constante.”

Obs.: Em qualquer medição é imprescindível que apenas UMA variável seja alterada por vez, enquanto todas as demais são mantidas CONSTANTES (sem sofrer alteração).

### **II. Previsão**

“Nós prevemos que \_\_\_\_\_.”

Obs.: a sua previsão não precisa estar correta, mas ela deve ser testável experimentalmente.

### **III. Materiais**

Elabore uma lista do material que irá utilizar e inclua uma figura ilustrando o aparato.

### **IV. Procedimento**

Descreva um roteiro passo-a-passo do procedimento para montar e executar o experimento. Certifique-se que todo o material listado acima seja incluído no seu procedimento. Nesta descrição, considere o seguinte:

- Quais os cuidados que precisará tomar?
- Quantas medições irá fazer e qual a faixa de valores que irá explorar?
- Quais as principais fontes de incerteza do experimento?

## 17. O processo de medição

O processo inteiro descrito no fluxograma<sup>6</sup> da próxima página é “a medição”. A primeira coisa ao se planejar um experimento é definir claramente o que se pretende medir. O próximo passo é pensar a respeito do que se já conhece a respeito do mensurando e escolher um procedimento de medição e aparatos apropriados para se realizar a medição. O GUM fornece um método consistente para estimar as incertezas da medição em 6 passos:

1. Descreva o valor do mensurando em termos do seu processo de medição, ou seja, estabeleça a equação modelo.
2. Liste as grandezas de entrada.
3. Determine a incerteza para cada grandeza de entrada.
4. Calcule o valor da grandeza de saída.
5. Combine corretamente as componentes de incerteza.
6. Relate o resultado no formato apropriado.

## 18. Conclusões

Toda medição é imperfeita e está sujeita a incertezas, as quais advêm de diversos fatores, tais como a resolução finita do instrumento de medição, a calibração do instrumento, variações nas condições ambientais, e o próprio operador do instrumento. O resultado de uma medição só está completo quando acompanhado de uma declaração da incerteza na medição. Essas incertezas podem ser estimadas usando análise estatística de um conjunto de medições repetidas e outros tipos de informação a respeito do processo de medição. A estimativa da incerteza da medição resulta em um intervalo de valores dentro do qual se acredita que o valor do mensurando exista, com uma dada probabilidade. A comparação de dois resultados experimentais só é possível considerando-se as incertezas destes resultados. As incertezas de uma medição ajudam a identificar as limitações do método experimental e oferecem oportunidades para melhorias.

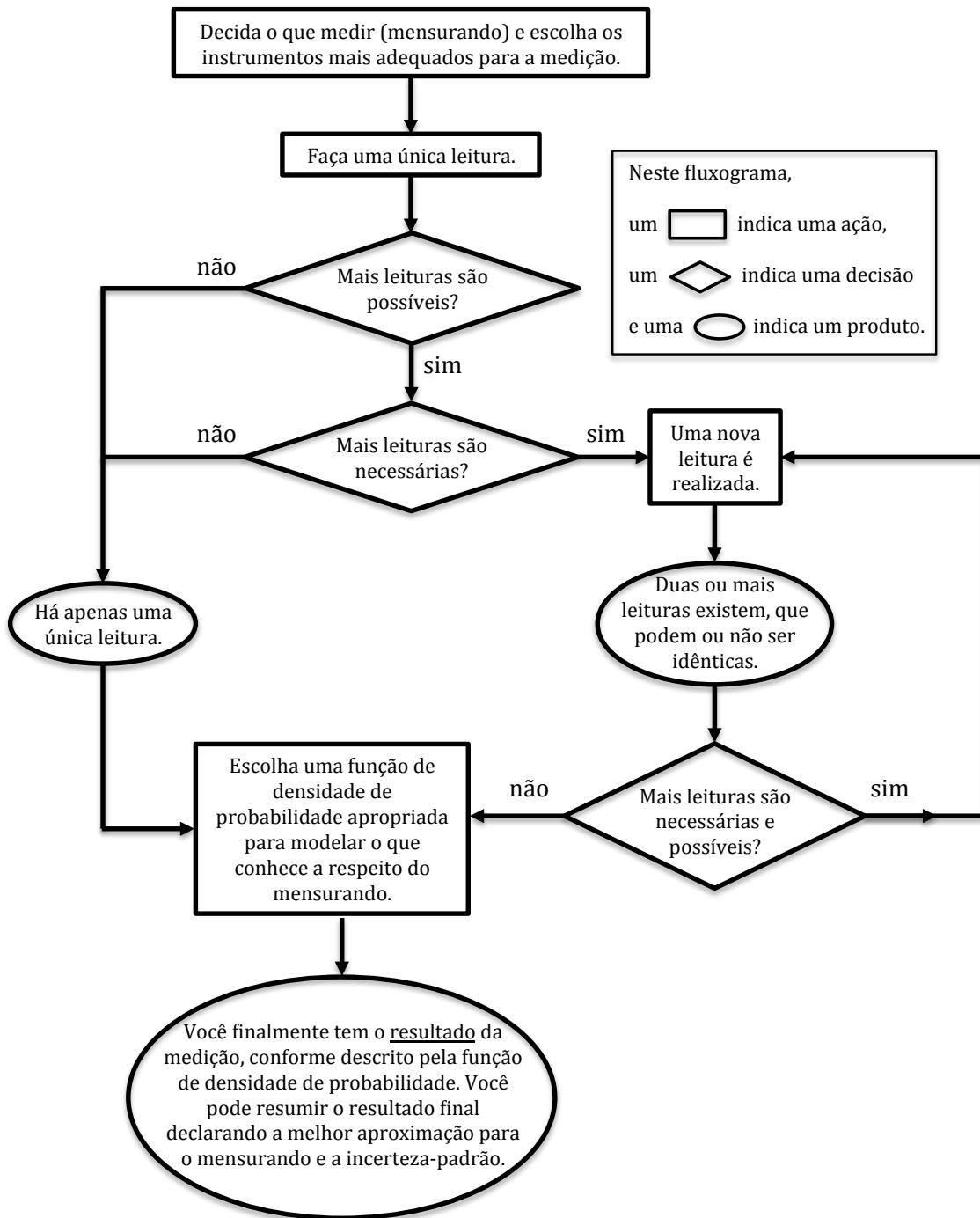
O GUM fornece um método consistente para estimar incertezas de medições. Porém, o GUM não é um método “mágico”. A sua aplicação não irá produzir estimativas precisas das incertezas a partir de procedimentos desleixados. Nas palavras do GUM:

“Embora este Guia proporcione uma metodologia para avaliar incertezas, ele não pode substituir o raciocínio crítico, a honestidade intelectual e a habilidade profissional. A avaliação de incerteza não é uma tarefa de rotina nem uma tarefa puramente matemática; ela depende de conhecimento detalhado da natureza do mensurando e da medição. A qualidade e utilidade da incerteza indicada para o resultado de uma medição dependem, portanto, em suma, da compreensão,

---

<sup>6</sup> Traduzido de: “Introduction to Measurement in the Physics Laboratory. A Probabilistic Approach,” Ed. 3.5, A. Buffler, S. Allie, F. Lubben, and B. Campbell, (Department of Physics, University of Cape Town, 2009).

análise crítica e integridade de todos aqueles que contribuem para o estabelecimento de seu valor." (GUM 3.4.8)



## 19. Apêndice – exemplos adicionais

*Medição do comprimento de uma mesa com uma régua de madeira.*

Uma régua de madeira milimetrada foi utilizada para se medir o comprimento  $l$  de uma mesa. A extremidade esquerda da mesa foi alinhada com o zero da régua. Foram realizadas 5 medições independentes da posição da extremidade direita e os valores encontrados foram:

$i$	1	2	3	4	5	média
Posição (cm)	56,2	56,7	56,3	56,9	56,5	56,52

Para este exemplo, duas possíveis fontes de incerteza serão consideradas: a resolução da régua utilizada e a repetibilidade da medição.

A régua tem resolução de 0,1 cm e, devido à sua má qualidade, uma distribuição retangular será utilizada para determinar a incerteza-padrão associada à resolução da régua para as medições individuais dos dois lados da mesa (direito e esquerdo). A largura do intervalo de incerteza é adotado como sendo 0,2 cm. A incerteza-padrão associada à resolução da régua de madeira é  $u_{dir,esq} = 0,2 / 2\sqrt{3} = 0,0577$  cm. Sendo este um resultado intermediário, ele não será arredondado.

A incerteza devido à repetibilidade da medição é o desvio-padrão experimental da média das medições repetidas. O desvio-padrão experimental da posição da extremidade direita da mesa é:

$$\sigma = \sqrt{\frac{(56,52 - 56,2)^2 + (56,52 - 56,7)^2 + \dots}{5-1}} = 0,286 \text{ cm.}$$

Dividindo esse valor pela raiz quadrada do número de repetições, obtemos que a incerteza-padrão das medições repetidas é  $u_l = \sigma / \sqrt{5} = 0,128$  cm. Novamente, por esse ser também um resultado intermediário, não será feito nenhum arredondamento neste valor.

Logo, a incerteza-padrão combinada da medição é

$$u = \sqrt{u_l^2 + u_{dir}^2 + u_{esq}^2} = \sqrt{0,128^2 + 0,0577^2 + 0,0577^2} = 0,151 \text{ cm.}$$

Como esse é um valor final, ele deve ser ajustado para um algarismo significativo. Dado que a componente de incerteza devido a repetibilidade da medição é muito maior do que as demais, a f.d.p. resultante é aproximadamente gaussiana. Assim, o resultado da medição é relatado da seguinte forma:

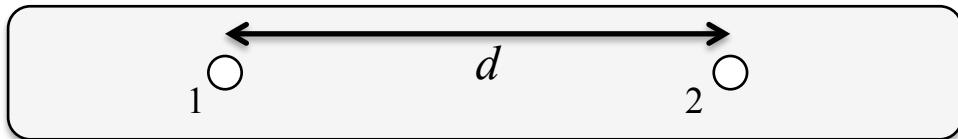
$$l = (56,5 \pm 0,2) \text{ cm, usando uma f.d.p. gaussiana e nível de confiança de 68%}.$$

A planilha de incertezas associada a esta medição é:

Fonte de incerteza	Incerteza-padrão (cm)	Tipo de avaliação	f.d.p.
Resolução da régua (lado esquerdo)	0,0289	B	retangular
Resolução da régua (lado direito)	0,0289	B	retangular
Incerteza-padrão da média (5 repetições)	0,128	A	gaussiana
Incerteza-padrão combinada: $u = \sqrt{0,128^2 + 0,0577^2 + 0,0577^2} = 0,15 \text{ cm.}$			gaussiana

### Medição da distância entre dois furos com uma trena

Deseja-se determinar a distância  $d$  entre os centros de dois furos em uma barra de alumínio utilizando-se uma trena de fita metálica. Os furos são circulares, com diâmetro de aproximadamente 1 cm. A medição é realizada posicionando-se a trena paralela à borda da barra, alinhada com o topo dos furos.



As duas fontes de incerteza que iremos considerar neste exemplo são: a resolução da trena e a localização do centro dos furos no espaço. Digamos que, visualmente, o operador alinhou o centro dos furos com as marcações 10,05 cm e 20,08 cm da trena. A melhor estimativa para a distância entre os furos é então  $d = 10,03 \text{ cm}$ .

A trena tem resolução de 1 mm. Realizando uma avaliação do Tipo B com uma f.d.p. triangular, temos que a incerteza-padrão devido à resolução da trena é  $u_{res1,res2} = 1 / 2\sqrt{6} = 0,204 \text{ mm}$ , onde  $u_1$  ( $u_2$ ) é a incerteza-padrão associada à medição do furo 1 (2).

Baseado em sua experiência, o operador estima que consegue definir a localização do centro dos furos com uma incerteza da ordem de 2 mm. Atribuindo a esta avaliação do Tipo B uma f.d.p. triangular, encontramos que a incerteza-padrão para a localização dos furos é estimada em  $u_{local1,local2} = 2 / 2\sqrt{6} = 0,408 \text{ mm}$ .

A incerteza-padrão combinada para esta medição é dada por:

$$\begin{aligned} u &= \sqrt{u_{res1}^2 + u_{res2}^2 + u_{local1}^2 + u_{local2}^2} \\ &= \sqrt{0,204^2 + 0,204^2 + 0,408^2 + 0,408^2} \\ &= 0,645 \text{ mm.} \end{aligned}$$

Ajustando o resultado acima para um algarismo significativo, expressamos o resultado final como sendo:

$$d = (10,0 \pm 0,6) \text{ mm, usando uma f.d.p. triangular e nível de confiança de } 65\%.$$

Abaixo resumimos as componentes de incerteza da medição na planilha de incertezas.

Fonte de incerteza	Incerteza-padrão (mm)	Tipo de avaliação	f.d.p.
Resolução da trena (furo 1)	0,204	B	triangular
Resolução da trena (furo 2)	0,204	B	triangular
Localização do centro do furo 1	0,408	B	triangular
Localização do centro do furo 2	0,408	B	triangular
Incerteza-padrão combinada: $u = \sqrt{0,204^2 + 0,204^2 + 0,408^2 + 0,408^2} = 0,65 \text{ mm.}$			triangular

### *Medição de corrente elétrica com um multímetro digital*

Um multímetro digital é utilizado para medir a corrente em um circuito elétrico. Iremos considerar duas fontes de incertezas: a incerteza devido à resolução do instrumento e a incerteza associada à sua calibração. Em ambos os casos, a avaliação da incerteza é do Tipo B.

Suponha que o usuário meça uma corrente de 100,0 mA na escala de 600 mA do instrumento. A resolução do multímetro, ou seja, a menor medida nesta escala é 0,1 mA. Sendo o multímetro digital, associaremos uma f.d.p. retangular à resolução do instrumento. Neste caso, a incerteza-padrão associada à leitura do instrumento, devido à resolução finita do mesmo, é  $u_{res} = 0,1 \text{ mA} / 2\sqrt{3} = 0,0289 \text{ mA}$ . Por este ser um resultado intermediário, não será feito arredondamento do valor.



Segundo o manual do instrumento, a incerteza de calibração é  $0,8\% + 3d$  na escala de 600 mA. Assim, a incerteza de calibração será:  $(100,0 \times 0,008 + 3 \times 0,1) \text{ mA} = (0,8 + 0,3) \text{ mA} = 1,1 \text{ mA}$ . Ainda segundo o manual, a f.d.p. da calibração é gaussiana com nível de confiança de 95% e um fator de abrangência igual a 2. Para que a incerteza de calibração corresponda a um intervalo de um desvio-padrão (e, portanto, 68% de nível de confiança), dividimos a incerteza por 2. Assim, a incerteza-padrão da calibração é  $u_{calib} = 1,1 \text{ mA} / 2 = 0,55 \text{ mA}^7$ .

---

<sup>7</sup> Caso o fabricante não especifique a f.d.p., deve-se assumir uma f.d.p. retangular, de modo que teríamos  $u_{calib} = 1,1 \text{ mA} / \sqrt{3} = 0,635 \text{ mA}$ .

Deste modo, obtemos a incerteza-padrão combinada:

$$u = \sqrt{u_{res}^2 + u_{calib}^2} = \sqrt{0,0289^2 + 0,55^2} = 0,551 \text{ mA.}$$

Ajustando o resultado acima para um algarismo significativo, o resultado da medição é expresso como sendo:

$$I = (100,0 \pm 0,6) \text{ mA, usando uma f.d.p. gaussiana e nível de confiança de 68%.$$

As contribuições de incertezas da medição estão resumidas na planilha de incertezas abaixo.

Fonte de incerteza	Incerteza-padrão (mA)	Tipo de avaliação	f.d.p.
Resolução do instrumento	0,0289	B	retangular
Calibração do instrumento	0,55	B	gaussiana
Incerteza-padrão combinada: $u = \sqrt{0,0289^2 + 0,55^2} = 0,55 \text{ mA}$			gaussiana

*Comparação de resultados obtidos com instrumento digital (f.d.p. retangular) vs. analógico (f.d.p. triangular)*

A temperatura de uma amostra líquida é medida simultaneamente com um termômetro analógico e um outro digital. A termômetro analógico tem resolução de  $1^\circ\text{C}$  e o digital de  $0,1^\circ\text{C}$ .

O usuário registra, usando o termômetro analógico, a melhor estimativa para a temperatura da amostra como sendo igual a  $22,3^\circ\text{C}$ . O usuário estima os limites para o intervalo de incerteza dos valores possíveis como sendo  $22,1^\circ\text{C}$  e  $22,4^\circ\text{C}$ . Logo, considerando-se uma f.d.p. triangular, a incerteza-padrão da medição é  $u_{\text{analógico}} = 0,3^\circ\text{C} / 2\sqrt{6} = 0,0612^\circ\text{C}$  e o nível de confiança é 65%.

Por outro lado, o termômetro digital indica  $21,9^\circ\text{C}$ . Associando-se à medição uma f.d.p. retangular, a incerteza-padrão é  $u_{\text{digital}} = 0,1^\circ\text{C} / 2\sqrt{3} = 0,029^\circ\text{C}$ . Aqui, o nível de confiança é 58%.

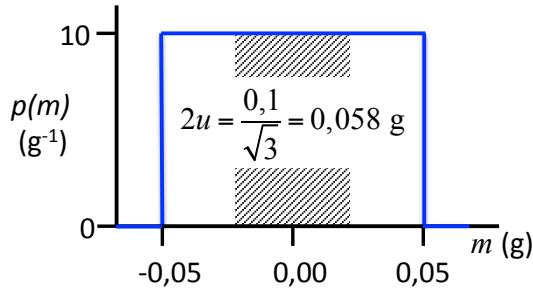
A fim de podermos comparar os dois resultados, as incertezas devem ser relatadas em termos de uma incerteza expandida a um mesmo nível de confiança (por exemplo, 95%). No caso da medição com termômetro analógico, multiplicamos a incerteza-padrão por um fator de abrangência igual a 1,81, de modo que a incerteza expandida é:  $U_{\text{analógico}} = 1,81 \times 0,0612^\circ\text{C} = 0,111^\circ\text{C}$ . Portanto, o resultado da medição é:  $T_{\text{analógico}} = (22,3 \pm 0,1)^\circ\text{C}$ . Para a medição com termômetro digital, usamos um fator de abrangência igual 1,65:  $U_{\text{digital}} = 1,65 \times 0,029^\circ\text{C} = 0,0479^\circ\text{C}$ . O resultado da medição é:  $T_{\text{digital}} = (21,90 \pm 0,05)^\circ\text{C}$ .

Pode-se agora afirmar que, dentro das incertezas declaradas, não há concordância entre os dois valores.

## Intervalos de confiança próximos a limites físicos

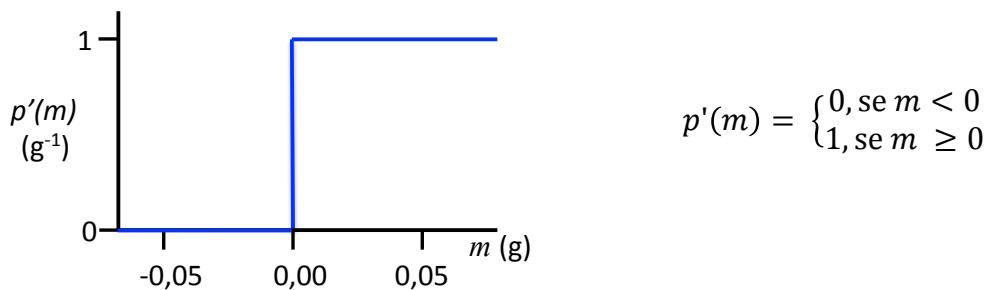
Suponha que você deseja determinar a massa de um objeto e ao colocá-lo sobre uma balança digital ela indique 0,0 g<sup>8</sup>. A f.d.p. retangular  $p(m)$  abaixo descreve o conhecimento a respeito do mensurando (massa do objeto) obtido através da medição.

0,0 g



O resultado da medição é então escrito como  $m = (0,00 \pm 0,03)$  g. Obviamente que um valor negativo para a massa, implícito no intervalo de confiança, não faz sentido fisicamente. Entretanto, como uma descrição da medição, aquele é o intervalo apropriado para se relatar. É irrelevante que o operador do instrumento saiba que parte dele não inclui o valor do mensurando. Ao combinar esse resultado com futuras medições, o novo resultado combinado pode ser físico (e mais preciso). Resultados não-físicos em intervalos de confiança são corretos, mas de maneira geral, as pessoas se sentem “desconfortáveis” em relatar tais resultados.

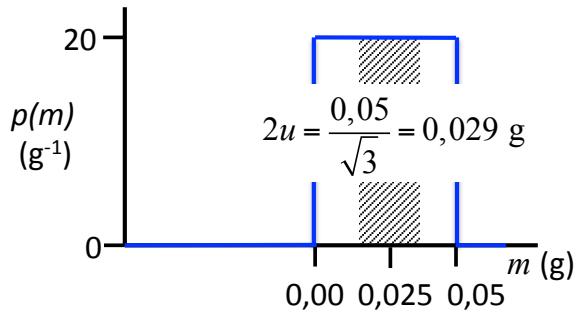
Como poderíamos então relatar um resultado restrito apenas à região física? A solução é evitar a região não-física introduzindo à medição uma condição de contorno física. Para isso, utiliza-se uma função de densidade de probabilidade *a priori* a fim de excluir a região não-física. Uma *a priori*  $p'(m)$  adequada para o exemplo de medição da massa seria a mostrada abaixo:



A f.d.p.  $p'(m)$  resume o nosso conhecimento prévio à medição de que a massa do objeto não deve ser negativa. A f.d.p. *a priori*  $p'(m)$  pode ser combinada com a f.d.p.  $p(m)$  (chamada de f.d.p. de verossimilhança) multiplicando-se as duas<sup>9</sup>:

<sup>8</sup> Uma balança com mais casas decimais forneceria uma leitura diferente de 0,0.

<sup>9</sup> Ver “Teorema de Bayes”: [https://pt.wikipedia.org/wiki/Teorema\\_de\\_Bayes](https://pt.wikipedia.org/wiki/Teorema_de_Bayes).



Esta nova distribuição, chamada de f.d.p. *posterior*, é a combinação da priori (o que sabíamos antes<sup>10</sup>) com a verossimilhança (o que o experimento nos disse). A função posterior fornece a probabilidade dos diferentes valores possíveis da massa depois de considerar os dados experimentais. Ela representa o estado do conhecimento posterior aos dados.

A partir da f.d.p. posterior obtemos uma nova estimativa para o valor da massa: 0,025 g e incerteza-padrão: 0,014 g. Assim, o resultado final para a massa se torna:  $m = (0,03 \pm 0,01)$  g. Ou seja, há uma probabilidade de 58% de que o valor da massa exista no intervalo que vai de 0,02 g a 0,04 g, com o valor mais provável (melhor aproximação para o mensurando) sendo 0,03 g.

---

<sup>10</sup> Em todos os outros exemplos discutidos nesta apostila, assumiu-se implicitamente uma f.d.p. a priori uniforme, ou seja, de valor constante em toda a região de interesse.