Aula 03 – Equações Diferenciais de Equilíbrio

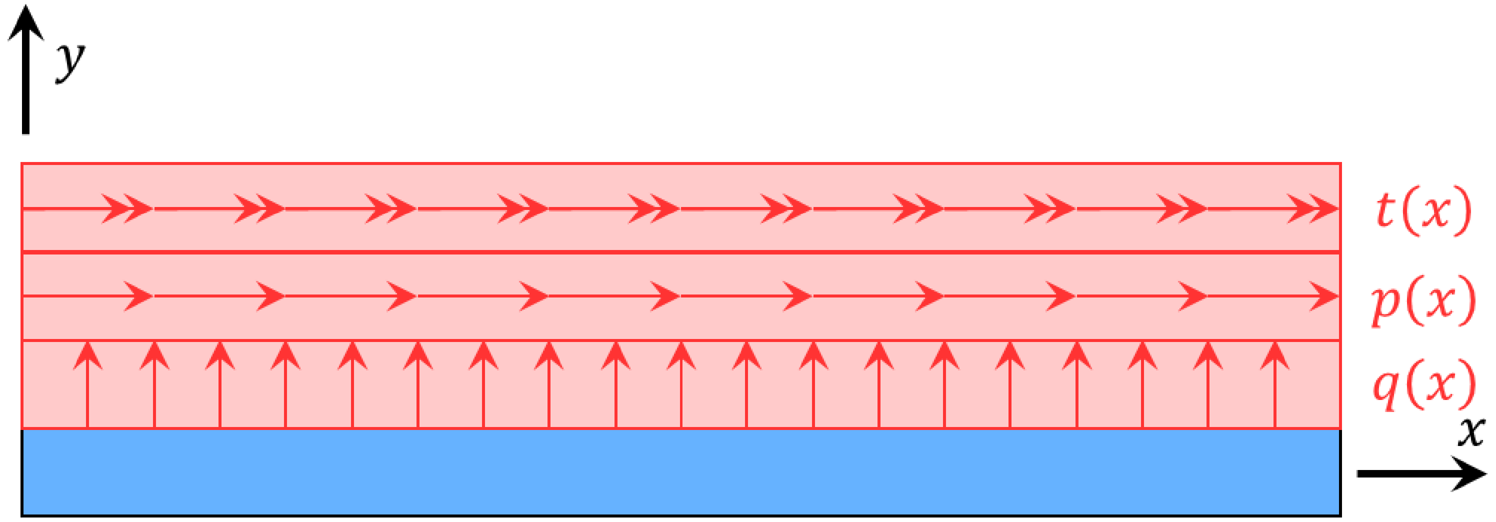
Thales Freitas Peixoto
thalesfp@fem.unicamp.br
Bloco FE2 – Laboratório de Máquinas Rotativas (LAMAR) – FEM

Objetivos da Aula

- Determinar as equações diferenciais de equilíbrio de um elemento estrutural.
- Obter expressões para carregamentos distribuídos.
- Determinar as condições de contorno para resolução da equação diferencial.
- Obter a solução geral da equação diferencial de equilíbrio.

Exercício 16

- O elemento estrutural retilíneo mostrado abaixo está sujeito aos carregamentos distribuídos axiais $p(x)$, torcionais $t(x)$ e transversais $q(x)$. Admitindo que o sistema inteiro encontra-se em equilíbrio, obtenha as equações diferenciais que estabelecem o equilíbrio de um elemento diferencial do sistema.



Equações diferenciais de equilíbrio

Direção	Equação Diferencial	Observações
Axial	$\frac{dN(x)}{dx} = -p(x)$	Variações da força normal são causadas por carregamentos axiais distribuídos
	$\frac{dT(x)}{dx} = -t(x)$	Variações dos torques são causados por carregamentos torcionais distribuídos
Transversal	$\frac{dV(x)}{dx} = q(x)$	Variações do esforço cortante são causadas por carregamentos transversais distribuídos
	$\frac{dM(x)}{dx} = V(x)$	Variações do momento fletor são causadas por esforços cortantes
	$\frac{d^2M(x)}{dx^2} = q(x)$	Existe relação entre momento fletor e carregamento transversal

Problemas acoplados e desacoplados

- Para as equações de equilíbrio na direção axial,

$$\begin{cases} N'(x) = -p(x) \\ T'(x) = -t(x) \end{cases}$$

- Não existe acoplamento entre as equações.
- Dependem apenas de si mesmas e do carregamento externo.

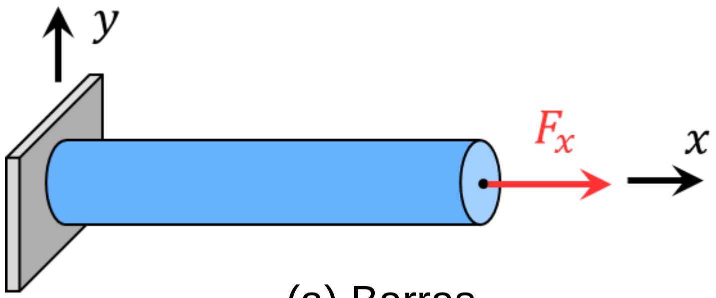
- Para as equações de equilíbrio na direção transversal,

$$\begin{cases} V'(x) = q(x) \\ M''(x) = q(x) \end{cases}$$

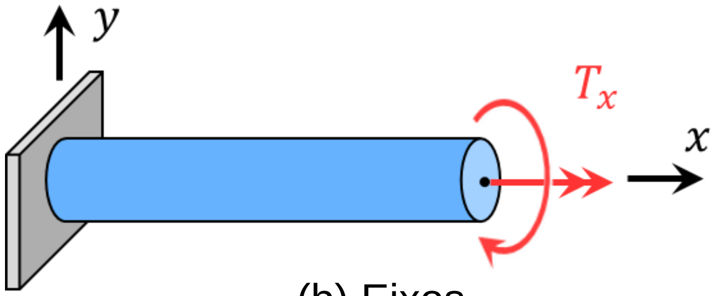
- Existe acoplamento entre as equações.
- Esforço cortante, momento fletor e carregamento transversal estão relacionados entre si.

Classificação dos sistemas quanto aos esforços

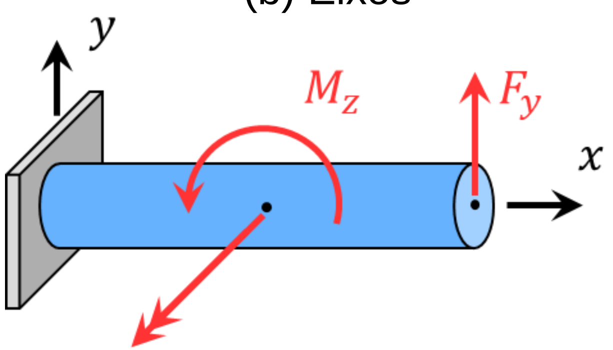
Direção	Equação Diferencial	Observações
Axial	$\frac{dN(x)}{dx} = -p(x)$	Barras
	$\frac{dT(x)}{dx} = -t(x)$	Eixos
Transversal	$\begin{cases} \frac{dV(x)}{dx} = q(x) \\ \frac{d^2M(x)}{dx^2} = q(x) \end{cases}$	Vigas



(a) Barras



(b) Eixos



(c) Vigas

Exercício 17

- A barra mostrada abaixo está engastada em sua extremidade esquerda e está sujeita a um carregamento uniformemente distribuído p_0. Determine:

a) As equações diferenciais de equilíbrio do sistema;

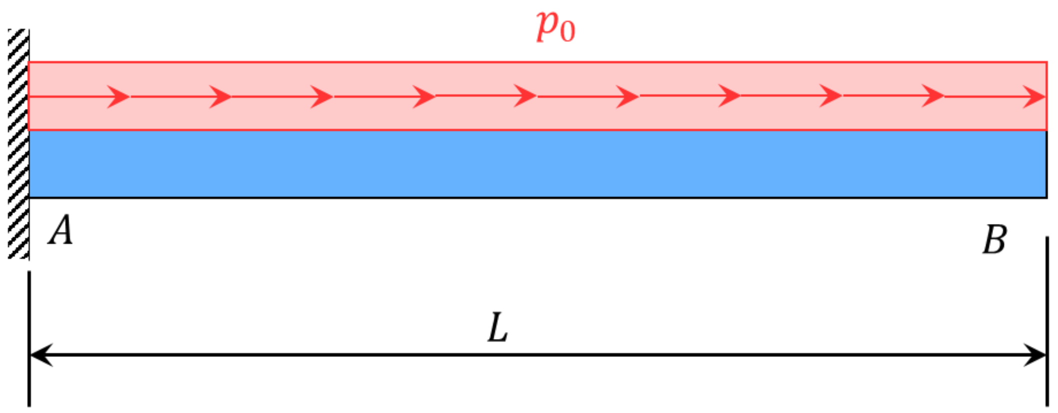
b) As equações de carregamento do sistema;

c) As condições de contorno do sistema;

d) Os esforços internos agindo no sistema;

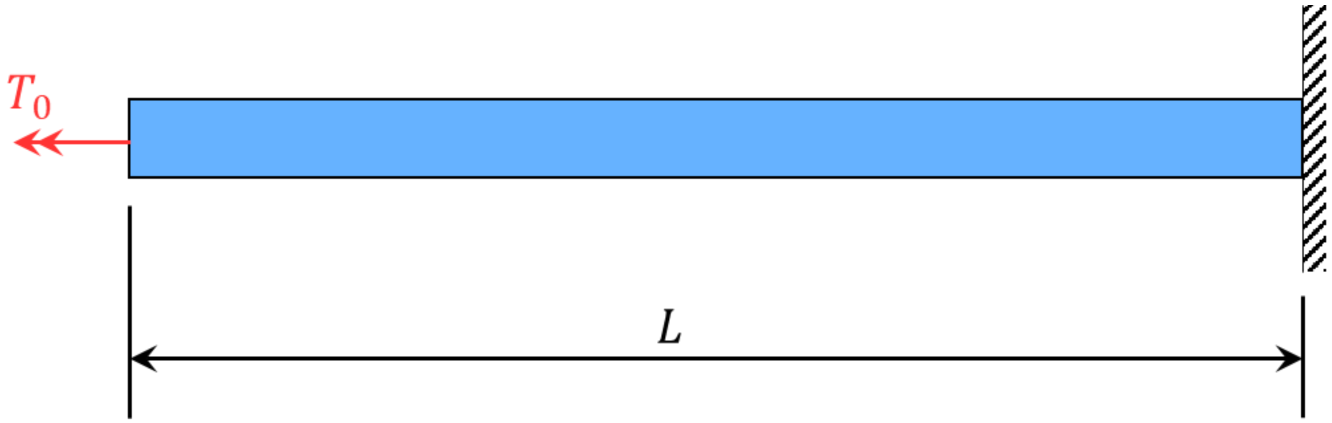
e) Os diagramas de esforços internos;

f) As forças de reação do suporte.



Exercício 18

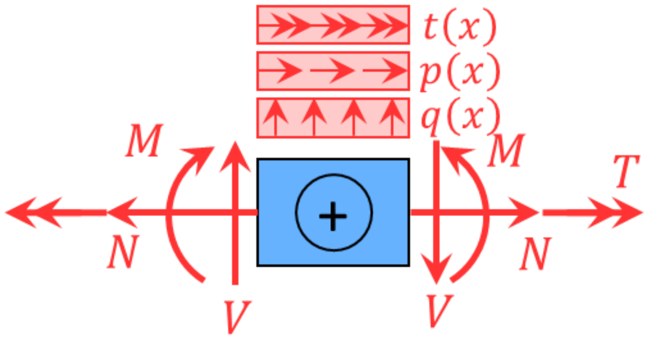
- Ao eixo mostrado na figura é aplicado um torque externo t_0 em sua extremidade esquerda. Determine os esforços internos agindo no sistema e as reações no suporte.

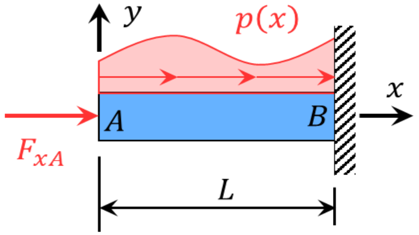
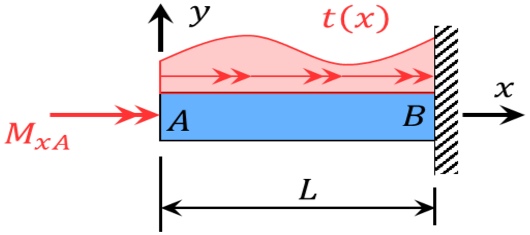
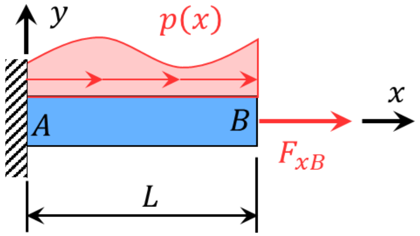
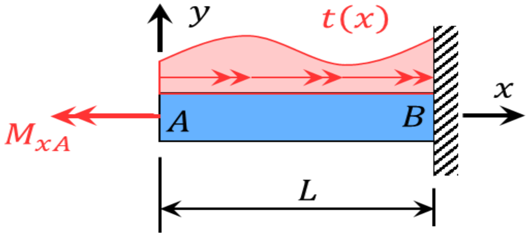
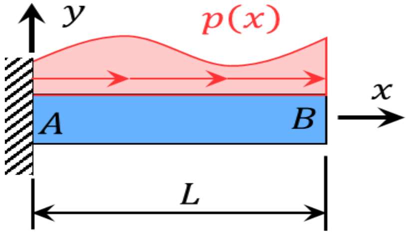
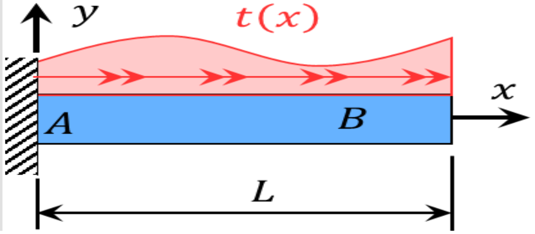


Condições de contorno

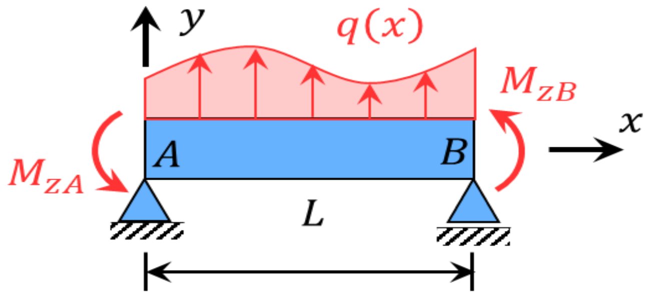
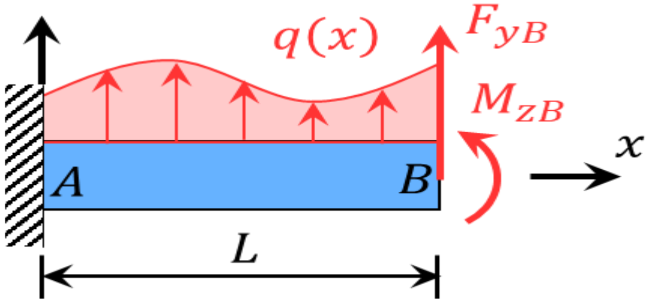
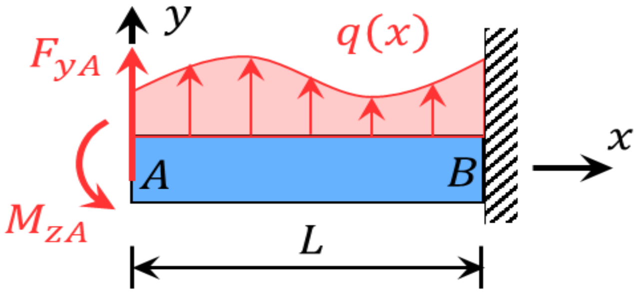
- Exercícios anteriores mostram que a equação diferencial de equilíbrio **independe** das condições nas extremidades ou das vinculações aplicadas.
- Exercícios anteriores mostram que o **número** de condições de contorno depende da **ordem** da equação diferencial.
- Condições de contorno são as condições conhecidas *a priori* (reações dos suportes não são conhecidas).
- **Localização** das condições de contorno são os limites do domínio ($0 < x < L$), as extremidades do corpo ($x = 0$ ou $x = L$).
- **Sinais** das condições de contorno devem respeitar **a convenção de sinais** da Resistência dos Materiais.
- Sinais dos carregamentos aplicados no domínio também devem respeitar a convenção de sinais.

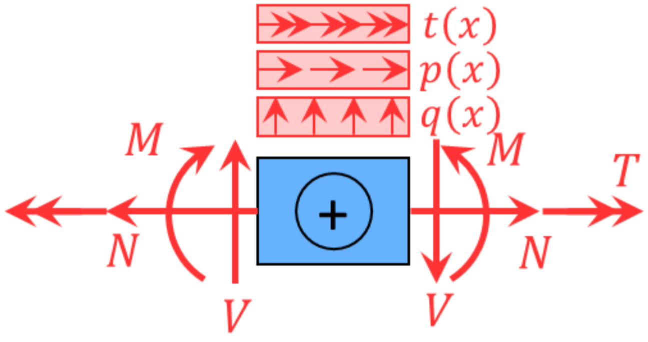
Sinal das condições de contorno



Elemento estrutural	Condições de contorno	Elemento estrutural	Condições de contorno
	$N_x(x=0) = -F_{xA}$		$T_x(x=0) = -M_{xA}$
	$N_x(x=L) = +F_{xB}$		$T_x(x=0) = +M_{xA}$
	$N_x(x=L) = 0$		$T_x(x=L) = 0$

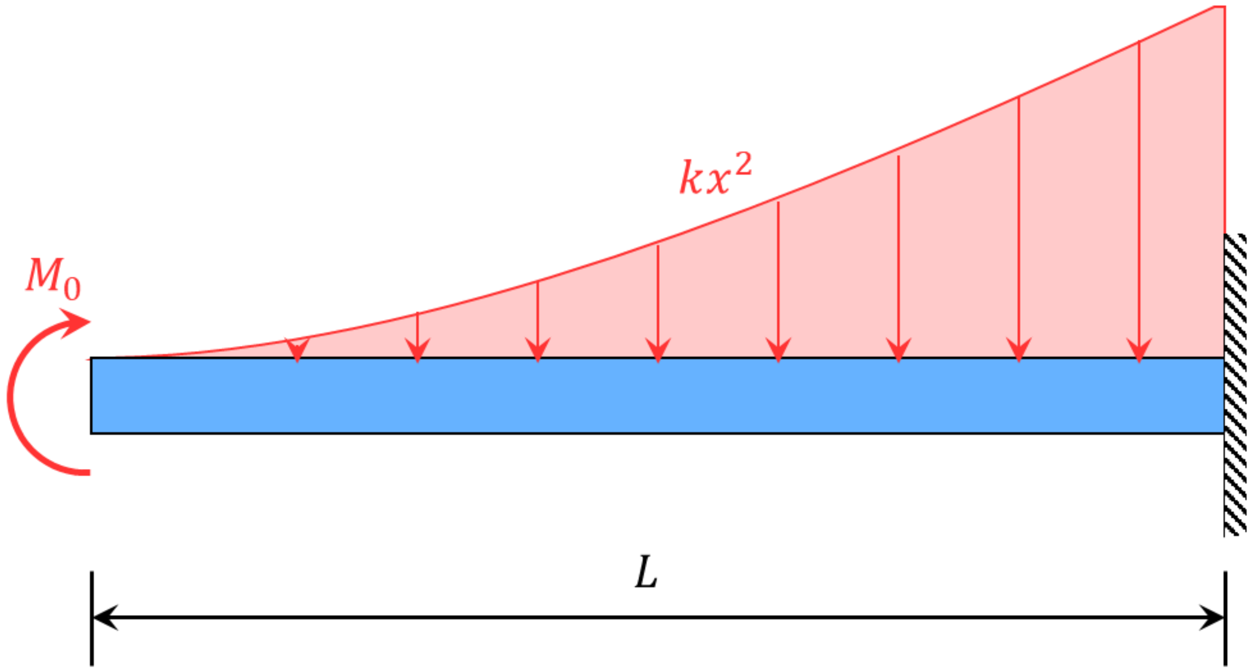
Sinal das condições de contorno

Elemento estrutural	Condições de contorno
	$M_z(x=0) = -M_{zA}$ $M_z(x=L) = +M_{zB}$
	$V_y(x=L) = -F_{yB}$ $M_z(x=L) = +M_{zB}$
	$V_y(x=0) = +F_{yA}$ $M_z(x=0) = -M_{zA}$



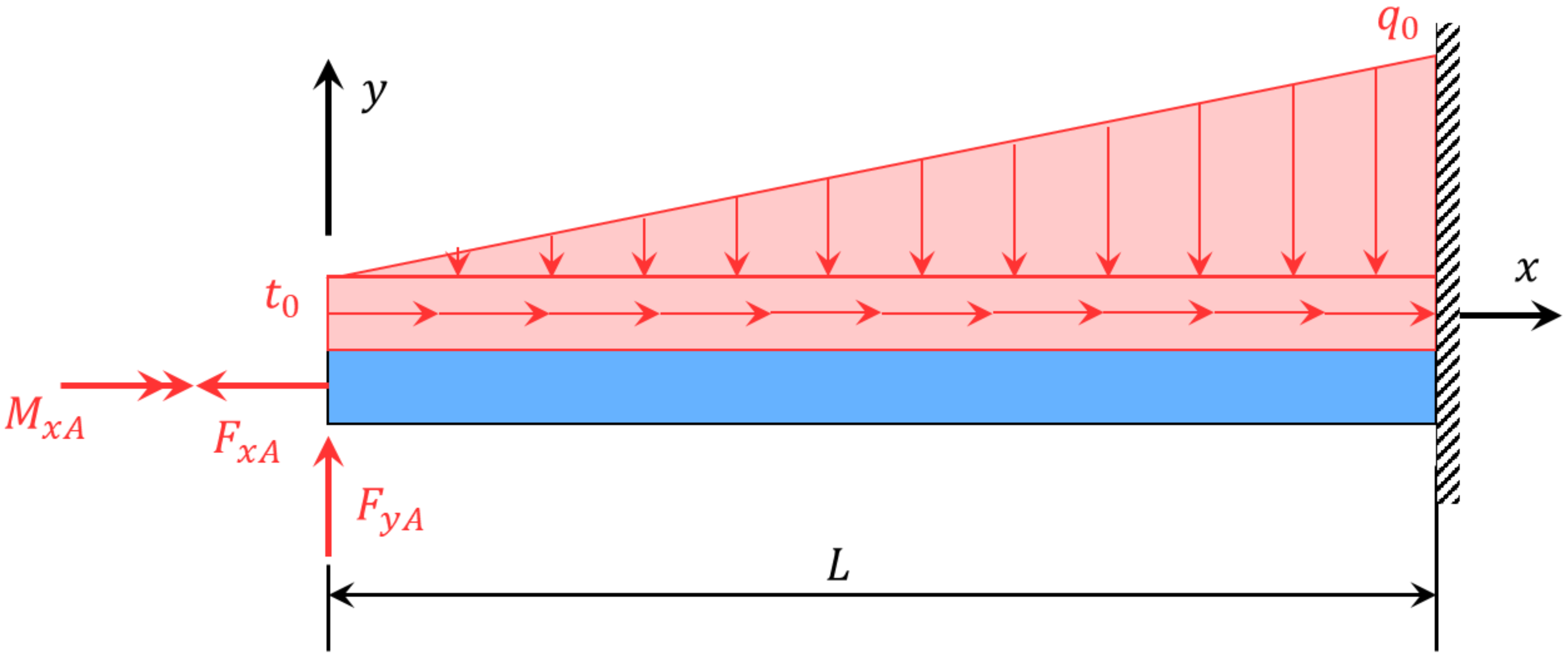
Exercício 19

- Determine os esforços internos agindo ao longo do comprimento da viga mostrada e determine as reações no engaste.



Exercício 20

- Determine os esforços internos agindo ao longo do comprimento da estrutura mostrada na figura e determine as reações nos suportes de apoio.



Resumo Aula 03

- As equações diferenciais de equilíbrio determinam os esforços internos para a estrutura unidimensional e valem independentemente do tipo de carregamento externo e condições de contorno.
- Para resolver as equações diferenciais, os carregamentos e condições de contorno devem ser considerados de acordo com a convenção de sinais da resistência dos materiais.
- A equação diferencial de equilíbrio é uma equação diferencial ordinária. A integração direta dos carregamentos fornece os esforços internos agindo na estrutura.
- As reações dos suportes são automaticamente recuperadas, uma vez que a equação diferencial tenha sido resolvida.

Seção dos Livros

- Hibbeler: 6.2 (Graphical Method for Constructing Shear and Moment Diagrams)
- Beer: 5.2 (Relationships Between Load, Shear, And Bending Moment)
- Gere: 4.4 (Relationships Between Loads, Shear Forces, And Bending Moments), 4.5 (Shear-force And Bending Moment Diagrams)
- Parnes: 8.3 (Differential relations for beams), 8.4 (Some further examples for resultant forces in beams), 8.5 (Integral relations for beams)
- Shames: 10.3 (Direct Formulations of Shear and Bending-Moment Equations), 10.4 (Differential Relations for Bending Moment, Shear Force, and Load)
- Popov: 5.11 (Differential Equations of Equilibrium for a Beam Element), 5.12 (Shear Diagrams by Integration of the Load), 5.13 (Moment Diagrams by Integration of the Shear)