Q1	
Q2	
Q3	
Q4	
Q5	
$\sum$	

ALUNO	RA	Turma

1a. Prova – MA-211 – Sexta-feira (NOITE), 15/09/2017

INSTRUÇÕES

NÃO É PERMITIDO DESTACAR AS FOLHAS DA PROVA
É PROIBIDO O USO DE CALCULADORAS
SERÃO CONSIDERADAS SOMENTE AS QUESTÕES ESCRITAS DE FORMA CLARA E DEVIDAMENTE JUSTIFICADAS

Boa Prova!

Questão 1. [2.0] Encontre o comprimento de arco da curva

$$\mathbf{r}(t) = (\sqrt{t^3}, 2t, 5),$$

quando $t \in [0, 1]$.

Questão 2. Considere a seguinte função:

$$f(x, y) = x\mathrm{e}^y$$

(a) [1.0] Calcule a derivada direcional de $f(x, y)$ no ponto $P(2, 1)$ na direção de P a $Q(1, 2)$.

(b) [1.0] Determine o(s) valor(es) de α de modo que se $\mathbf{v} = (\cos\alpha, \sin\alpha)$, então $D_{\mathbf{v}}f(2, 1) = \mathrm{e}$.

Questão 3. Considere a superfície:

$$z^2 = x^2 + y^2$$

(a) [1.0] Determine a equação do plano tangente no ponto (a, b, c).

(b) [1.0] Mostre que este plano intersecciona o plano xy na reta $ax + by = 0$.

Questão 4. [2.0] Determine e classifique os pontos críticos de

$$f(x, y) = 2x^3 + 6xy^2 - 3y^3 - 150x.$$

Questão 5. [2.0] O plano $x + y + z = 1$ corta o cilindro $x^2 + y^2 = 1$ ($z \in \mathbb{R}$). Determine o ponto desta intersecção que está mais próximo e o que está mais distante da origem.

GABARITO
MA211 – PROVA 1
Sexta-feira (noite), 15/09/2017.

*Para correção, cada símbolo "$\checkmark$**x**" o item que o antecede vale **x** pontos.*

Resolução da Questão 1. Assim temos

$$L = \int_0^1 \sqrt{\left(\frac{3}{2}\sqrt{t}\right)^2 + 2^2} dt \checkmark \mathbf{0.8} = \int_0^1 \sqrt{\frac{9}{4}t + 4} dt = \frac{1}{2}\int_0^1 \sqrt{9t+16} dt$$

Fazendo a substituição

$$9t + 16 = u$$

temos

$$t = \frac{u-16}{9} \Rightarrow dt = \frac{1}{9}du$$

Aplicando na integral:

$$L = \frac{1}{18}\int_{16}^{25} \sqrt{u} du = \frac{1}{27}\left[u^{3/2}\right]_{16}^{25} = \frac{1}{27}(125-64) = \frac{61}{27} \checkmark \mathbf{1.2}$$

Resolução da Questão 2. (a) Gradiente:

$$\nabla f =< e^y, xe^y > \checkmark \mathbf{0.2}$$

Vetor de direção normalizado:

$$\mathbf{u} = \left\langle \frac{-1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}} \right\rangle \checkmark \mathbf{0.2}$$

Da relação com entre derivada direcional e produto escalar temos que no caso

$$D_{\mathbf{u}} f(2,1) =< e, 2e > \cdot \left\langle \frac{-1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}} \right\rangle = \frac{\sqrt{2}}{2} e. \checkmark \mathbf{0.6}$$

(b)

$$D_{\mathbf{v}} f(2,1) =< e, 2e > \cdot < \cos\alpha, \sin\alpha >= e \checkmark \mathbf{0.3}$$

Logo:

$$e\cos\alpha + 2e\sin\alpha = e \Rightarrow \cos\alpha + 2\sin\alpha = 1$$

Temos então

$$\cos\alpha = 1 - 2\sin\alpha$$

Elevando ao quadrado:

$$\cos^2\alpha = 1 - 4\sin\alpha + 4\sin^2\alpha \Rightarrow \cancel{1} - \sin^2\alpha = \cancel{1} - 4\sin\alpha + 4\sin^2\alpha \Rightarrow 5\sin^2\alpha - 4\sin\alpha = 0$$

$$\Rightarrow \sin\alpha(5\sin\alpha - 4) = 0$$

Temos então como solução possível

$$\arcsin(0) \text{ ou } \arcsin(0.8) \checkmark \mathbf{0.7}$$

Resolução da Questão 3. (a) Podemos tratar esta superfície como uma curva de nível de 3 variáveis:

$$F(x, y, z) = x^2 + y^2 - z^2 = 0 \checkmark \mathbf{0.3}$$

Neste caso a equação do plano tangente em (a, b, c) é dada por

$$2a(x - a) + 2b(y - b) - 2c(z - c) = 0 \checkmark \mathbf{0.7}$$

(b) Na intersecção com o plano xy temos $z = 0$. Substituindo na equação do plano:

$$2a(x - a) + 2b(y - b) + 2c^2 = 0 \checkmark \mathbf{0.3}$$

Desenvolvendo:

$$2ax + 2by - 2a^2 - 2b^2 + 2c^2 = 2ax + 2by - 2(a^2 + b^2 - c^2) = 0$$

Como (a, b, c) é um ponto da superfície, temos $(a^2 + b^2 - c^2 = 0)$ e assim:

$$2ax + 2by = 0 \Rightarrow ax + by = 0. \checkmark \mathbf{0.7}$$

Resolução da Questão 4. Nos pontos críticos devemos ter $f_x = 0$ e $f_y = 0$. Logo:

$$\begin{cases} 6x^2 + 6y^2 - 150 = 0 \\ 12xy - 9y^2 = 0 \end{cases} \quad \checkmark \mathbf{0.2}$$

A 2ª equação pode ser escrita como

$$y(4x - 3y) = 0,$$

A qual pode ser satisfeita se $y = 0$ ou $4x = 3y$.

Se $y = 0$, temos da 1ª equação $x^2 = 25$ e portanto $x = \pm 5$. Isso nos leva aos pontos críticos

$$(5, 0) \qquad (-5, 0)$$

Já para o caso em que $4x = 3y$ teríamos $x = \frac{4}{3}y$ e substituindo na 2ª equação do sistema temos

$$\frac{9}{16}y^2 + y^2 = 25,$$

cuja solução é $y = \pm 4$. Temos assim mais dois pontos críticos:

$$(3, 4) \qquad (-3, -4).$$

Juntando as parte, os pontos críticos portanto são

$$(5, 0) \quad (-5, 0) \quad (3, 4) \quad (-3, -4) \checkmark \mathbf{0.8}$$

Para classificar, aplicamos o teste da 2ª derivada:

$$D = f_{xx} f_{yy} - [f_{xy}]^2$$

$$= 12x \cdot (12x - 18y) - [12y]^2 = 144x^2 - 216xy - 144y^2 \checkmark \mathbf{0.4}$$

Aplicando sobre os pontos críticos em questão:

$$D(5, 0) = 3600 > 0 \quad f_{xx}(5, 0) = 60 > 0 \text{ mínimo local}$$

$$D(5, 0) = 3600 < 0 \quad f_{xx}(-5, 0) = -60 < 0 \text{ máximo local}$$

$$D(3, 4) = -3600 < 0 \text{ ponto de sela}$$

$$D(-3, -4) = -3600 < 0 \text{ ponto de sela} \checkmark \mathbf{0.6}$$

Resolução da Questão 5. Problema de extremos com duas restrições e podemos usar a função quadrado da distância para facilitar:

$$\begin{cases} f(x,y,z) = x^2+y^2+z^2 \\ g(x,y,z) = x+y+z = 1 \quad \checkmark\mathbf{0.4} \\ h(x,y,z) = x^2+y^2 = 1 \end{cases}$$

Lagrange:

$$\begin{cases} 2x = \lambda + \mu 2x \\ 2y = \lambda + \mu 2y \\ 2z = \lambda \qquad\qquad \checkmark\mathbf{0.4} \\ x+y+z = 1 \\ x^2+y^2 = 1 \end{cases}$$

A 3ª equação permite eliminar λ:

$$\begin{cases} 2x = 2z + \mu 2x \\ 2y = 2z + \mu 2y \\ x+y+z = 1 \\ x^2+y^2 = 1 \end{cases}$$

Subtraindo a 2ª da 1ª equação temos

$$(x-y) = \mu(x-y),$$

a qual se satisfaz para $x = y$. Assim, da 4ª equação temos

$$2x^2 = 1 \Rightarrow x = y = \pm\frac{\sqrt{2}}{2}$$

A introdução da 3ª equação nos dá os seguintes extremos:

$$\left(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}, 1-\sqrt{2}\right) \qquad \left(-\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2}, 1+\sqrt{2}\right)$$

Isso corresponde respectivamente aos seguintes valores de f:

$$f\left(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}, 1-\sqrt{2}\right) = 4-2\sqrt{2} \qquad f\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2}, 1+\sqrt{2}\right) = 4+2\sqrt{2}\checkmark\mathbf{0.6}$$

Outra possibilidade é $\mu = 1$, que resulta em

$$z = 0$$

e x e y obtidos do sistema

$$\begin{cases} x+y = 1 \\ x^2+y^2 = 1 \end{cases}$$

Substituindo $y = 1-x$ na 2ª equação:

$$x^2 + (1-x)^2 = 1 \Rightarrow 2x^2 - 2x = 0 \Rightarrow x(2x-2) = 0 \Rightarrow x = 0 \text{ ou } x = 1$$

Temos assim os pontos

$$(0,1,0) \qquad (1,0,0)$$

e os valores correspondentes de f:

$$f(0,1,0) = 1 \qquad f(1,0,0) = 1$$

Os pontos $(0,1,0)$ e $(1,0,0)$ são portanto os mais próximos da origem e o ponto $\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2}, 1+\sqrt{2}\right)$ é o mais distante. $\checkmark\mathbf{0.6}$