Departamento de Matemática - IMECC - Unicamp

MA211- Segundo Semestre de 2019

Prova 1 - 20/09/2019 (6^a - Noite)

Nome: ______________________________

RA: ______________________________ Turma [ ]

Questões	Notas
Q1	
Q2	
Q3	
Q4	
Q5	
Total	

- Desligue o celular.
- A prova contém cinco questões. Resolva cada questão em sua respectiva folha.
- Não retire o grampo da prova nem destaque páginas da prova.
- Não é permitido o uso de calculadoras.
- Respostas sem justificativas não serão consideradas.

Justifique suas respostas!

Questão 1. (2.0 pontos) Considere a função de duas variáveis definida por

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^2y - xy^2}{x^3 - y^3}, & \text{se } y \neq x, \\ 0, & \text{se } y = x. \end{cases}$$

(a) f é contínua em $(0,0)$? Justifique.
(b) f é contínua em $(1,-1)$? Justifique.

Questão 2. (2.0 pontos) Determine as direções em que a derivada direcional de

$$f(x, y) = \operatorname{sen}(xy) - y\,\mathrm{e}^{x^2}$$

no ponto $P = (0, 1)$ assume:

a) o valor 1;

b) o valor 2.

Questão 3. (2.0 pontos) Determine e classifique os pontos críticos da função

$$f(x, y) = x^2 + 3xy + 4y^2 - 6x + 2y.$$

Questão 4. (2.0 pontos) Usando o método dos multiplicadores de Lagrange, estude em relação a máximos e mínimos a função $f(x, y) = x^2 + 2y^2$ de acordo com a restrição $3x + y = 1$.

Questão 5. (2.0 pontos) Considere a função $f(x, y) = x \exp(x/y)$. Mostre que os planos tangentes ao gráfico de f passam pela origem. Obs: $\exp(t) = e^t$.

Q1 |

a) A função é contínua em (a,b) se

$$\lim_{(x,y)\to(a,b)} f(x,y) = f(a,b) \quad 0,2$$

Considerando o caminho $C_1 = \{(x,y) \mid x=0,\ y=t\}$

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = \lim_{t\to 0} \frac{0}{t^3} = 0 \quad 0,5$$

Agora, tomando o caminho $C_2 = \{(x,y) \mid x=t,\ y=2t\}$

temos que $$\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = \lim_{t\to 0} \frac{(2t)t^2 - t(4t^2)}{t^3 - 8t^3} = \frac{2}{7} \quad 0,5$$

Como o limite sobre estes dois caminhos (distintos) são diferentes, então a função não é contínua em $(0,0)$ 0,2

b) Vamos estudar a continuidade de f em $(1,-1)$

Note que o ponto $(1,-1)$ não está na reta $y=x$ 0,2

e que fora desta reta f é uma função racional

Logo

$$\lim_{(x,y)\to(1,-1)} f(x,y) = \lim_{(x,y)\to(1,-1)} \frac{x^2y - xy^2}{x^3 - y^3} = -1 = f(1,-1) \quad 0,3$$

Logo, f é contínua em $(1,-1)$. 0,1

Q2 $f(x,y) = \text{sen}(xy) - ye^{x^2}$. Então

$$\begin{cases} f_x(x,y) = y\cos(xy) - 2xy\,e^{x^2} \\ f_y(x,y) = x\cos(xy) - e^{x^2} \end{cases}$$ 0,3

$P = (0,1)$ temos $f_x(P) = 1$ e $f_y(P) = -1$ 0,2

Como f é diferenciável temos que

$D_u f(x,y) = f_x(x,y)a + f_y(x,y)b$, onde 0,3

$u = (a,b)$ é um vetor unitário, $a, b \in \mathbb{R}$.

a) $D_u f(P) = 1$ então $\begin{cases} a - b = 1 \\ a^2 + b^2 = 1 \end{cases}$ 0,2 $\Rightarrow \begin{cases} a = 1 + b \\ a^2 + b^2 = 1 \end{cases}$

$\Rightarrow (b+1)^2 + b^2 = 1 \Rightarrow 2b^2 + 2b + 1 = 1 \Rightarrow 2b(b+1) = 0$ 0,2

$\Rightarrow b = 0$ ou $b = -1$ logo $u_1 = (1,0)$ $u_2 = (0,-1)$ 0,2

b) $D_u f(P) = 2 \Rightarrow \begin{cases} a - b = 2 \\ a^2 + b^2 = 1 \end{cases}$ 0,2 $\Rightarrow \begin{cases} a = b + 2 \\ a^2 + b^2 = 1 \end{cases}$

$\Rightarrow 1 = b^2 + (b+2)^2 = 2b^2 + 4b + 4 \Rightarrow 2b^2 + 4b + 3 = 0$ 0,2

que não tem solução real. 0,2

Q3 $f(x,y) = x^2 + 3xy + 4y^2 - 6x + 2y$

Calculando as derivadas parciais:

$f_x(x,y) = 2x + 3y - 6$ fazendo $\begin{cases} f_x(x,y) = 0 \\ f_y(x,y) = 0 \end{cases}$ 0,5

$f_y(x,y) = 3x + 8y + 2$

obtemos

$$\begin{cases} 2x + 3y - 6 = 0 \\ 3x + 8y + 2 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 6x + 9y - 18 = 0 \\ 6x + 16y + 4 = 0 \end{cases} \Rightarrow 7y = -22 \Rightarrow y = \frac{-22}{7}$$ 0,5

logo $x = \frac{-1}{3}(8y + 2) \Rightarrow x = \frac{54}{7}$ 0,5

Portanto $P = \left(\frac{54}{7}, \frac{-22}{7}\right)$ é ponto crítico

Como $f_{xx} = 2$, $f_{yy} = 8$ e $f_{xy} = 3$, a hessiana é:

$Df(x,y) = (2)(8) - (3)^2 = 16 - 9 > 0$ 0,5

Assim, P é ~~um~~ ponto de mínimo local.

Scanned by CamScanner

Q4) $f(x,y) = x^2 + 2y^2$ e a restrição é $g(x,y) = 3x + y - 1$

Utilizando multiplicador de Lagrange temos que:

$$\begin{cases} 2x = \lambda(3) \\ 4y = \lambda(1) \\ g(x,y) = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2x = 3\lambda & (1) \\ 4y = \lambda & (2) \\ 3x + y = 1 & (3) \end{cases}$$ 0,5

Substituindo (2) em (1) obtemos $2x = 3(4y) = 12y$

$\Rightarrow x = 6y$ e substituindo em (3) 0,5

$3(6y) + y = 1 \Rightarrow 19y = 1 \Rightarrow y = \frac{1}{19}$ logo $x = \frac{6}{19}$

Como $f_{xx} = 2$, $f_{yy} = 8$ e $f_{xy} = 0$ temos que 0,5

$Df(x,y) = (2)\cdot(8) - 0^2 = 16 > 0$

logo, $\left(\frac{6}{19}, \frac{1}{19}\right)$ é ponto de mínimo. 0,5

Q5) $f(x,y) = xe^{\frac{x}{y}}$

Note que o plano tangente ao gráfico de f num ponto $P=(x_0,y_0)$ tem equação

$$z - f(x_0,y_0) = f_x(P)(x-x_0) + f_y(P)(y-y_0) \quad (I)$$

0,4

Calculando as derivadas parciais, temos:

$f_x(x,y) = e^{\frac{x}{y}} + \frac{x}{y}e^{\frac{x}{y}}$ e $f_y(x,y) = -\frac{x^2}{y^2}e^{\frac{x}{y}}$

0,4

Então (0,0,0) satisfaz (I) $\iff$ $f(x_0,y_0) = x_0 f_x(P) + y_0 f_y(P)$

Como $x_0 f_x(P) + y_0 f_y(P) = x_0\left(e^{\frac{x_0}{y_0}} + \frac{x_0}{y_0}e^{\frac{x_0}{y_0}}\right) + y_0\left(-\frac{x_0^2}{y_0^2}e^{\frac{x_0}{y_0}}\right) = x_0 e^{\frac{x_0}{y_0}} = f(x_0,y_0)$, para todo ponto 0,8

(x_0,y_0) no domínio de f, então (0,0,0) pertence a todo plano tangente ao gráfico de f.

0,4