Departamento de Matemática - IMECC - Unicamp

MA211- Segundo Semestre de 2019

Prova 1 - 19/09/2019 (5^a - Tarde)

Nome: ______________________________

RA: ______________________________ Turma

Questões	Notas
Q1	
Q2	
Q3	
Q4	
Q5	
Total	

- Desligue o celular.
- A prova contém cinco questões. Resolva cada questão em sua respectiva folha.
- Não retire o grampo da prova nem destaque páginas da prova.
- Não é permitido o uso de calculadoras.
- Respostas sem justificativas não serão consideradas.

Justifique suas respostas!

Questão 1. (2.0 pontos) Considere a função de duas variáveis definida por

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^3+y^3}{x^2+y^2}, & \text{se } (x,y) \neq (0,0), \\ 0, & \text{se } (x,y) = (0,0). \end{cases}$$

(a) f é contínua em $(0,0)$? Justifique.
(b) Calcule $f_x(0,0)$ e $f_y(0,0)$.

Questão 2. (2.0 pontos) Considere a função

$$f(x,y) = \frac{y^2}{x}.$$

a) Determine a taxa de variação máxima de f no ponto $(2,4)$. Em que direção isso ocorre ?

b) No ponto $(2,2)$ determine, se possível, um vetor unitário u tal que $D_u f(2,2) = 2\sqrt{5}$. Justifique sua resposta.

Questão 3. (2.0 pontos) Determine e classifique os pontos críticos da função

$$f(x, y) = \exp(4y - x^2 - y^2).$$

Obs: $\exp(t) = e^t$.

Questão 4. (2.0 pontos) Use o método dos multiplicadores de Lagrange para determinar os valores de máximo e mínimo de $f(x, y) = x^2y$ restrita à curva dada por $x^2 + y^2 = 3$. Em que pontos tais valores são atingidos?

Questão 5. (2.0 pontos) Considere a superfície S definida pela equação

$$\operatorname{sen}(x) + \operatorname{sen}(y) + \operatorname{sen}(z) = 1,$$

onde a variável z é dada implicitamente em função de x e de y.

a) Calcule a equação do plano tangente à S no ponto $\left(\frac{\pi}{2}, 0, 0\right)$.

b) Calcule $\frac{\partial z}{\partial x}\left(0, \frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{6}\right)$, e $\frac{\partial z}{\partial y}\left(0, \frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{6}\right)$.

1

Departamento de Matemática - IMECC - Unicamp
MA211- Segundo Semestre de 2019
Prova 1 - 19/09/2019 (5^a - Tarde)

Nome: GABARITO

RA: ______________________ Turma

Questões	Notas
Q1	
Q2	
Q3	
Q4	
Q5	
Total	

- Desligue o celular.
- A prova contém cinco questões. Resolva cada questão em sua respectiva folha.
- Não retire o grampo da prova nem destaque páginas da prova.
- Não é permitido o uso de calculadoras.
- Respostas sem justificativas não serão consideradas.

Justifique suas respostas!

L2

Questão 1. (2.0 pontos) Considere a função de duas variáveis definida por

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^3+y^3}{x^2+y^2}, & \text{se } (x,y) \neq (0,0), \\ 0, & \text{se } (x,y) = (0,0). \end{cases}$$

(1,0) (a) f é contínua em $(0,0)$? Justifique.
(1,0) (b) Calcule $f_x(0,0)$ e $f_y(0,0)$.

a) f é contínua em $(0,0)$ se $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = f(0) = 0$.

0,3 0,3

Temos que $\dfrac{x^3+y^3}{x^2+y^2} = \dfrac{x^2}{x^2+y^2}\cdot x + \dfrac{y^2}{x^2+y^2}\cdot y$

$$0 \leq \left|\frac{x^3+y^3}{x^2+y^2}\right| = \left|\frac{x^2}{x^2+y^2}\cdot x + \frac{y^2}{x^2+y^2}\cdot y\right|$$

$$\leq \left|\frac{x^2}{x^2+y^2}\right| |x| + \left|\frac{y^2}{x^2+y^2}\right| |y|$$

$$\leq |x| + |y|$$

0,5

$\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} (|x|+|y|) = 0 \Rightarrow \lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \left|\dfrac{x^3+y^3}{x^2+y^2}\right| = 0$

pelo teorema do sanduíche

0,5 0,5

$\Rightarrow \lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = 0 = f(0) \Rightarrow f$ é contínua em $(0,0)$.

0,2

b) Não podemos diferenciar simplesmente a expressão de f para $(x,y) \neq (0,0)$ e tirar o limite. Isso não garante que f_x e f_y sejam contínuas em $(0,0)$.

Isso porque o denominador dessa expressão $\frac{x^3+y^3}{x^2+y^2}$ é nulo em $(0,0)$.

Precisamos então utilizar a definição das derivadas parciais:

0,2

$$f_x(x_0,y_0) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0+h,y_0) - f(x_0,y_0)}{h},$$

$$f_y(x_0,y_0) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0,y_0+h) - f(x_0,y_0)}{h}.$$

0,2

Assim, $f_x(0,0) = \lim_{h \to 0} \frac{f(0+h,0) - f(0,0)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{h^3/h^2 - 0}{h}$

$= \lim_{h \to 0} (1) = 1.$ 0,4

0,4

$$f_y(0,0) = \lim_{h \to 0} \frac{f(0,0+h) - f(0,0)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{h^3/h^2}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{h}{h} = 1.$$ 0,4

0,4

4

Questão 2. (2.0 pontos) Considere a função

$$f(x,y) = \frac{y^2}{x}.$$

(1,0) a) Determine a taxa de variação máxima de f no ponto $(2,4)$. Em que direção isso ocorre ?

(1,0) b) No ponto $(2,2)$ determine, se possível, um vetor unitário u tal que $D_u f(2,2) = 2\sqrt{5}$. Justifique sua resposta.

a) A taxa de variação máxima de f em (x_0, y_0) é dada por $|\nabla f(x_0,y_0)|$ e ocorre na direção de ∇f, isto é, na direção $\hat{u} = \dfrac{\nabla f(x_0,y_0)}{|\nabla f(x_0,y_0)|}$.

Temos $\nabla f(x,y) = \left(-\dfrac{y^2}{x^2}, \dfrac{2y}{x}\right)$. No ponto $(2,4)$,

$$\nabla f(2,4) = \left(-\frac{4^2}{2^2}, \frac{2\cdot 4}{2}\right) = (-4,4).$$

0,3

A taxa de variação máxima de f em $(2,4)$ é então $|\nabla f(2,4)| = \sqrt{(-4)^2+4^2} = \sqrt{16+16} = 4\sqrt{2}$.

0,4

Ela ocorre na direção

$$\hat{u} = \frac{\nabla f(2,4)}{|\nabla f(2,4)|} = \frac{1}{\sqrt{2}}(-1,1) = \frac{1}{\sqrt{2}}(-\hat{\imath}+\hat{\jmath}).$$

0,3

b) Seja $\hat{u}$ um vetor unitário.

Então $D_{\hat{u}} f(x_0, y_0) = \nabla f(x_0, y_0) \cdot \hat{u}$.

0,2

Para $(x_0, y_0) = (2,2)$, temos do item anterior

$\nabla f(x,y) = \left(-\frac{y^2}{x^2}, \frac{2y}{x} \right) \Rightarrow \nabla f(2,2) = (-1, 2)$.

Então, para qualquer $\hat{u}$,

$|D_{\hat{u}} f(2,2)| \leq |\nabla f(2,2)| = \sqrt{5}$, já que

$|\nabla f|$ é a taxa de variação máxima da função em um dado ponto. Em particular, para qualquer $\hat{u}$,

$|D_{\hat{u}} f(2,2)| < 2\sqrt{5}$, de modo que não existe vetor unitário $\hat{u}$ tal que $D_{\hat{u}} f(2,2) = 2\sqrt{5}$.

0,8

16

Questão 3. (2.0 pontos) Determine e classifique os pontos críticos da função

$$f(x, y) = \exp(4y - x^2 - y^2).$$

Obs: $\exp(t) = e^t$.

Os pontos críticos de f são os pontos (x_0, y_0) tais que $\nabla f(x_0, y_0) = 0$. Temos

0,2 0,2

$\nabla f(x,y) = (f_x(x,y), f_y(x,y))$, onde

$$f_x(x,y) = -2x \exp[4y - x^2 - y^2]$$

$$f_y(x,y) = (4-2y) \exp[4y - x^2 - y^2].$$

0,2

Assim, se $\nabla f(x_0, y_0) = 0$, devemos ter

$$\begin{cases} f_x(x_0, y_0) = 0 \Rightarrow x_0 = 0 \\ f_y(x_0, y_0) = 0 \Rightarrow 4 - 2y_0 = 0 \Rightarrow y_0 = 2. \end{cases}$$

Logo, $(0,2)$ é o único ponto crítico de f.

0,2

Para classificarmos esse ponto crítico, devemos calcular $f_{xx}(0,2)$, $f_{yy}(0,2)$ e $f_{xy}(0,2)$, assim como o determinante

$$D = \left[f_{xx} f_{yy} - (f_{xy})^2 \right] \Big|_{(0,2)}.$$

- $$f_{xx}(x,y) = \frac{\partial}{\partial x}\left[-2x \exp(4y - x^2 - y^2) \right]$$

$$= -2x(-2x)\exp[4y - x^2 - y^2] - 2\exp[4y - x^2 - y^2]$$

$$= 2(2x^2 - 1)\exp[4y - x^2 - y^2]$$

$$\Rightarrow f_{xx}(0,2) = -2e^4$$ 0,3

- $$f_{yy}(x,y) = \frac{\partial}{\partial y}\left[(4-2y)\exp(4y - x^2 - y^2) \right]$$

$$= -2\exp[4y - x^2 - y^2] + (4-2y)^2 \exp[4y - x^2 - y^2]$$

$$= \{(4-2y)^2 - 2\}\exp[4y - x^2 - y^2]$$

$$\Rightarrow f_{yy}(0,2) = -2e^4$$ 0,3

- $f_{xy}(x,y) = \frac{\partial}{\partial y}(f_x)(x,y)$

$$= \frac{\partial}{\partial y}\left[-2x \exp(4y-x^2-y^2)\right]$$

$$= -2x(4-2y)\exp[4y-x^2-y^2]$$

$$\Rightarrow f_{xy}(0,2) = 0.$$

0,3

Assim, $D = (-2e^4)\cdot(-2e^4) - 0 = 4e^8 > 0.$

Além disso, $f_x(0,2) < 0.$

Segue então dessas duas desigualdades que $(0,2)$ é máximo local de f.

0,5

9

Questão 4. (2.0 pontos) Use o método dos multiplicadores de Lagrange para determinar os valores de máximo e mínimo de $f(x, y) = x^2y$ restrita à curva dada por $x^2 + y^2 = 3$. Em que pontos tais valores são atingidos?

Seja $g(x,y) = x^2+y^2 = 3$ a equação para a curva $\mathcal{C}$ sobre a qual queremos calcular os extremos de f. Pelo método dos multiplicadores de Lagrange, os pontos críticos (x_0, y_0) de f sobre $\mathcal{C}$ satisfazem

$$\nabla f(x_0,y_0) = \lambda \nabla g(x_0,y_0).$$ Temos

$$\nabla f(x,y) = (2xy, x^2)$$

$$\nabla g(x,y) = (2x, 2y)$$

0,4

$$\Rightarrow \begin{cases} 2xy = \lambda . 2x \\ x^2 = \lambda . 2y \end{cases}$$

0,4

Se $x \neq 0$, então segue da primeira equação

que $y = \lambda$. Da segunda equação, $x^2 = 2\lambda^2 \Rightarrow x^2 = 2y^2$

$\Rightarrow x = \pm\sqrt{2}\, y$

Aplicando a restrição $g(x,y) = x^2 + y^2 = 3$, temos

$3y^2 = 3 \Rightarrow y^2 = 1 \Rightarrow y = \pm 1 \Rightarrow x = \pm\sqrt{2}$

Temos então quatro pontos:

$(-\sqrt{2}, -1)$, $(-\sqrt{2}, 1)$, $(\sqrt{2}, -1)$, $(\sqrt{2}, 1)$.

0,4

Além disso,

$f(-\sqrt{2}, -1) = f(\sqrt{2}, -1) = -2$

$f(-\sqrt{2}, 1) = f(\sqrt{2}, 1) = +2$

0,2

O outro caso é $x = 0$. Pela restrição $x^2 + y^2 = 3$, temos $y = \pm\sqrt{3}$

0,2

$f(0, -\sqrt{3}) = f(0, \sqrt{3}) = 0.$

- f atinge valor mínimo -2 em $(-\sqrt{2}, -1)$ e $(\sqrt{2}, -1)$
- f atinge valor máximo $+2$ em $(-\sqrt{2}, 1)$ e $(\sqrt{2}, 1)$

0,4

Questão 5. (2.0 pontos) Considere a superfície S definida pela equação

$$\operatorname{sen}(x) + \operatorname{sen}(y) + \operatorname{sen}(z) = 1,$$

onde a variável z é dada implicitamente em função de x e de y.

(1,0) a) Calcule a equação do plano tangente à S no ponto $\left(\frac{\pi}{2}, 0, 0\right)$.

(1,0) b) Calcule $\frac{\partial z}{\partial x}\left(0, \frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{6}\right)$, e $\frac{\partial z}{\partial y}\left(0, \frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{6}\right)$.

a) Vamos definir $F(x,y,z) = \operatorname{sen}(x) + \operatorname{sen}(y) + \operatorname{sen}(z)$.

Então S é a superfície de nível de F dada por $F(x,y,z) = 1$.

O plano tangente a S em (x_0, y_0, z_0) é então

$$F_x(x_0,y_0,z_0)(x-x_0) + F_y(x_0,y_0,z_0)(y-y_0) + F_z(x_0,y_0,z_0)(z-z_0) = 0.$$

0,3

$$\Rightarrow \cos(x_0)\cdot(x-x_0) + \cos(y_0)\cdot(y-y_0) + \cos(z_0)\cdot(z-z_0) = 0.$$

0,2

No ponto $(x_0, y_0, z_0) = (\pi/2, 0, 0)$, temos

$\cos(x_0) = \cos(\pi/2) = 0$, $\cos(y_0) = \cos(z_0) = \cos(0) = 1$.

A equação do plano tangente a S em $(\pi/2, 0, 0)$ é então

$$y + z = 0.$$

0,5 0,5

b) Pelo teorema da função implícita,

$$\frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{F_x}{F_z} \quad e \quad \frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{F_y}{F_z}, \text{ se } F_z \neq 0.$$

0,3

Temos então

$$\frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{\cos(x)}{\cos(z)} \quad e \quad \frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{\cos(y)}{\cos(z)}.$$

0,3

No ponto $(0, \pi/6, \pi/6)$, $\cos(\pi/6) = \sqrt{3}/2$ e $\cos(0) = 1$

$$\Rightarrow \frac{\partial z}{\partial x}(0, \pi/6, \pi/6) = -\frac{1}{\sqrt{3}/2} = -\frac{2}{\sqrt{3}}$$

0,2

$$\frac{\partial z}{\partial y}(0, \pi/6, \pi/6) = -\frac{\sqrt{3}/2}{\sqrt{3}/2} = -1.$$

0,2