1 Matrizes

1. Construa as seguintes matrizes:

   a) $A = (a_{ij})$ de tamanho 3×4 tal que $a_{ij} = i + j$. **Resposta:** $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & 4 & 5 & 6 \\ 4 & 5 & 6 & 7 \end{pmatrix}$

   b) $B = (b_{ij})$ de tamanho 3×3 tal que $b_{ij} = ij$. **Resposta:**$B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 6 \\ 3 & 6 & 9 \end{pmatrix}$

   c) $C = (c_{ij})$ de tamanho 4×3 tal que $c_{ij} = 2i - \frac{1}{2}j$.

   Resposta:$C = \begin{pmatrix} \frac{3}{2} & 1 & \frac{1}{2} \\ \frac{7}{2} & 3 & \frac{5}{2} \\ \frac{11}{2} & 5 & \frac{9}{2} \\ \frac{15}{2} & 7 & \frac{13}{2} \end{pmatrix}$

2. Considere as seguintes matrizes

$$A_1 = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 1 \\ -1 & 2 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 2 & -2 \\ 0 & 0 & -2 & 3 \end{pmatrix} \quad A_2 = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & -1 \\ -1 & 1 & 2 \end{pmatrix} \quad A_3 = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 4 & -1 \end{pmatrix} \quad A_4 = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 5 \\ -4 \end{pmatrix}$$

$$A_5 = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix} \quad A_6 = \begin{pmatrix} 3 \\ -4 \\ 3 \end{pmatrix} \quad A_7 = \begin{pmatrix} 3 & 1 & -2 & 1 \end{pmatrix} \quad A_8 = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 \end{pmatrix} \quad A_9 = \begin{pmatrix} -2 & 1 \end{pmatrix}$$

   - Determine para quais valores de $i,\ j$ podemos fazer os produtos A_iA_j e faça a conta para cada caso.
   - Ache a transposta de cada uma das matrizes acima.
   - Calcule
$$((2A_1)A_4)^T + 3A_7$$

   Resposta:

$$A_1 \cdot A_4 = \begin{pmatrix} 4 \\ 6 \\ 17 \\ -22 \end{pmatrix} \qquad A_2 \cdot A_6 = \begin{pmatrix} 13 \\ -8 \\ -1 \end{pmatrix} \qquad A_3 \cdot A_5 = \begin{pmatrix} 7 \\ 11 \end{pmatrix}$$

$$A_4 {\cdot} A_7 = \begin{pmatrix} 3 & 1 & -2 & 1 \\ -6 & -2 & 4 & -2 \\ 15 & 5 & -10 & 5 \\ -12 & -4 & 8 & -4 \end{pmatrix} \qquad A_4 {\cdot} A_8 = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 \\ -4 & -0 & 2 \\ 10 & 0 & -5 \\ -8 & 0 & 4 \end{pmatrix}$$

$$A_4{\cdot}A_9 = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 4 & -2 \\ -10 & 5 \\ 8 & -4 \end{pmatrix} \quad A_5{\cdot}A_7 = \begin{pmatrix} 9 & 3 & -6 & 3 \\ 3 & 1 & -2 & 1 \end{pmatrix} \quad A_5{\cdot}A_8 = \begin{pmatrix} 6 & 0 & -3 \\ 2 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

$$A_5{\cdot}A_9 = \begin{pmatrix} -6 & 3 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} \quad A_6{\cdot}A_7 = \begin{pmatrix} 9 & 3 & -6 & 3 \\ -12 & -4 & 8 & -4 \\ 9 & 3 & -6 & 3 \end{pmatrix} \quad A_6{\cdot}A_8 = \begin{pmatrix} 6 & 0 & -3 \\ -8 & 0 & 4 \\ 6 & 0 & -3 \end{pmatrix}$$

$$A_6{\cdot}A_9 = \begin{pmatrix} -6 & 3 \\ 8 & -4 \\ -6 & 3 \end{pmatrix} \quad A_5{\cdot}A_9 = \begin{pmatrix} -6 & 3 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} A_7{\cdot}A_1 = \begin{pmatrix} 0 & -3 & 0 & 11 \end{pmatrix} \quad A_8{\cdot}A_2 = \begin{pmatrix} 5 & -3 & 0 \end{pmatrix}$$

$$A_7 \cdot A_4 = (-13) \quad A_8 \cdot A_6 = 3 \quad A_9 \cdot A_3 = \begin{pmatrix} 2 & -9 \end{pmatrix} \quad A_9 \cdot A_5 = -5$$

$$A_1^t = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & 2 & -2 \\ 1 & 1 & -2 & 3 \end{pmatrix} \quad A_2^t = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ -1 & 2 & 1 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix} \quad A_3^t = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 4 & -1 \end{pmatrix}$$

$$A_4^t = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 5 & 4 \end{pmatrix} A_5^t = \begin{pmatrix} 3 & 1 \end{pmatrix} \quad A_6^t = \begin{pmatrix} 3 & -4 & 3 \end{pmatrix} \quad A_7^t = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$A_8^t = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad A_9^t = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix} \quad ((2A_1)A_4)^T + 3A_7 = \begin{pmatrix} 17 & 15 & 28 & -41 \end{pmatrix}$$

3. Sejam $A,\ B$ duas matrizes A de tamanho $m \times n$ e B de tamanho $n \times p$. Escreva

$$B = \begin{pmatrix} B_1 & B_2 & \dots & B_p \end{pmatrix}$$

onde cada B_j é a $j-$ésima coluna da matriz B. Mostrar que a $i-$ésima coluna da matriz AB é dada por AB_i, isto é

$$AB = \begin{pmatrix} AB_1 & AB_2 & \cdots & AB_p \end{pmatrix}$$

Exemplifique para o caso

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & 0 & -3 \\ -3 & 2 & 1 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 2 & -2 & 1 & 3 \\ -1 & 1 & -3 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

4. Considere as seguintes matrizes

$$A = \begin{pmatrix} a & b/2 \\ b/2 & c \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} d & f \end{pmatrix} \quad X = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \quad G = \begin{pmatrix} g \end{pmatrix}$$

- Mostre que a matriz de tamanho 1×1 obtida ao fazer

$$X^T AX + BX + G$$

tem como única entrada

$$ax^2 + bxy + cy^2 + dx + fy + g$$

- Exemplifique para o caso em que

$$A = \begin{pmatrix} 5 & -2 \\ -2 & 8 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} \frac{20}{\sqrt{5}} & -\frac{80}{\sqrt{5}} \end{pmatrix} \qquad X = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \qquad G = (4)$$

  e obtenha a entrada correspondente a $X^TAX + BX + G$.
- No item anterior substitua X por

$$Y = \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u+1 \\ v+2 \end{pmatrix}$$

  e mostre que ao fazer $Y^TAY + BY + G$ a entrada que obtemos é

$$4u^2 + 9v^2 - 36.$$

5. Sejam $A,\ B$ duas matrizes quadradas de tamanho $n \times n$.

   - Mostre que
   $$(A+B)^2 = A^2 + AB + BA + B^2$$
   - Observe que para ter $(A+B)^2 = A^2 + 2AB + B^2$ temos que garantir que $AB = BA$. É verdade que $AB = BA$ para qualquer matriz quadrada? Veja o que acontece no caso
   $$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

6. Seja A uma matriz de tamanho $m \times n$ e X a matriz

$$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n. \end{pmatrix}$$

   Mostrar que
   $$AX = x_1A_1 + x_2A_2 + \cdots + x_nA_n$$
   onde A_j é a $j-$ésima coluna da matriz A. Para entender as contas considere

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ -1 & 2 & -2 \end{pmatrix} \qquad X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

7. Mostre que as matrizes da forma $A = \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{y} \\ y & 1 \end{pmatrix}$ satisfazem a equação $X^2 - 2X = 0$ para todo $y \in \mathbb{R}$

8. Verifique se as afirmações abaixo são verdadeiras ou falsas e argumente sua resposta.

   - Se A é uma matriz de tamanho 2×2 tal que $A^2 = I$ então $A = I$ (aqui I =identidade)
   Resposta: (FALSO)

- Se A é uma matriz de tamanho $n \times n$ tais que $A^2 = I$, então $A = I$ ou $A = -I$

  Resposta: (FALSO)
- Se A e B são duas matrizes de tamanho $n \times n$, então $(A + B)^2 = A^2 + 2AB + B^2$.

  Resposta: (FALSO)
- Se A e B são duas matrizes que comutam com a matriz $M = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ então $AB = BA$.

  Resposta: (VERDADEIRO)
- Se A é uma matriz quadrada tal que $A^3 = A$ então $A = I$ ou $A = 0$.

  Resposta: (FALSO)