Aula-2
Gravitação

Física Geral II - F 228

1º semestre, 2021

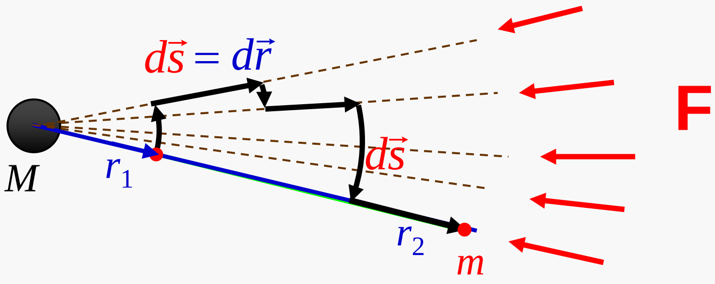
Energia Potencial Gravitacional

(Supondo um sistema conservativo: $\Delta E_{mec} = 0$; $E_{mec} = K + U$)

$$\vec{F} = -\frac{GMm}{r^2}\hat{r} \qquad ; \qquad \Delta U = -W$$

(A variação da energia potencial é igual ao negativo do trabalho)

$$dU = -\vec{F}\cdot d\vec{s} = -F_r\,dr = -\left(-\frac{GMm}{r^2}\right)dr$$



Integrando:

$$U = \int G\frac{Mm}{r^2}dr = -G\frac{Mm}{r} + C$$

$$U(\infty) \equiv 0 \quad \rightarrow \quad C = 0$$

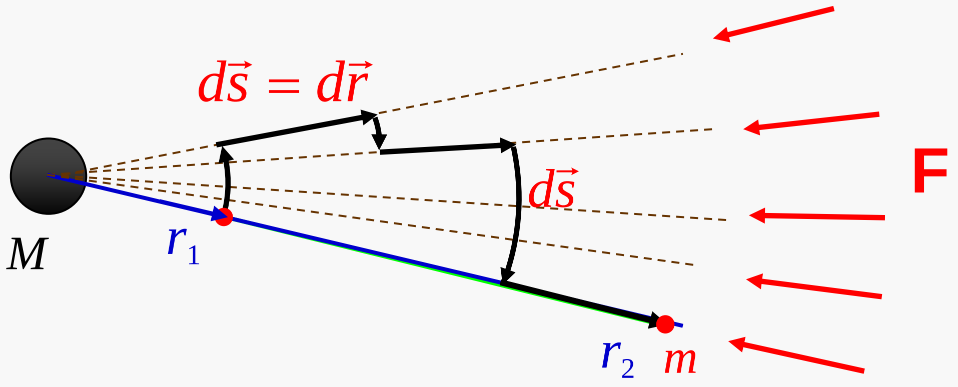
Daí: $$\boxed{U(r) = -\frac{GMm}{r}}$$

Energia Potencial Gravitacional

Força Conservativa $\rightarrow \Delta U$ independe da trajetória

$$\Delta U_{\substack{gravit.\\ r_1\to r_2}} = -\int_{r1}^{r2} \vec{F}\cdot d\vec{s} = \int_{r1}^{r2} \frac{GMm}{r^2}\hat{r}\cdot d\vec{s} = \int_{r1}^{r2} \frac{GMm}{r^2}dr$$

$$\Delta U_{\substack{gravit.\\ r_1\to r_2}} = U_{r_2} - U_{r_1} = GMm\left[-\frac{1}{r}\right]_{r_1}^{r_2} = GMm\left(\frac{1}{r_1}-\frac{1}{r_2}\right)$$

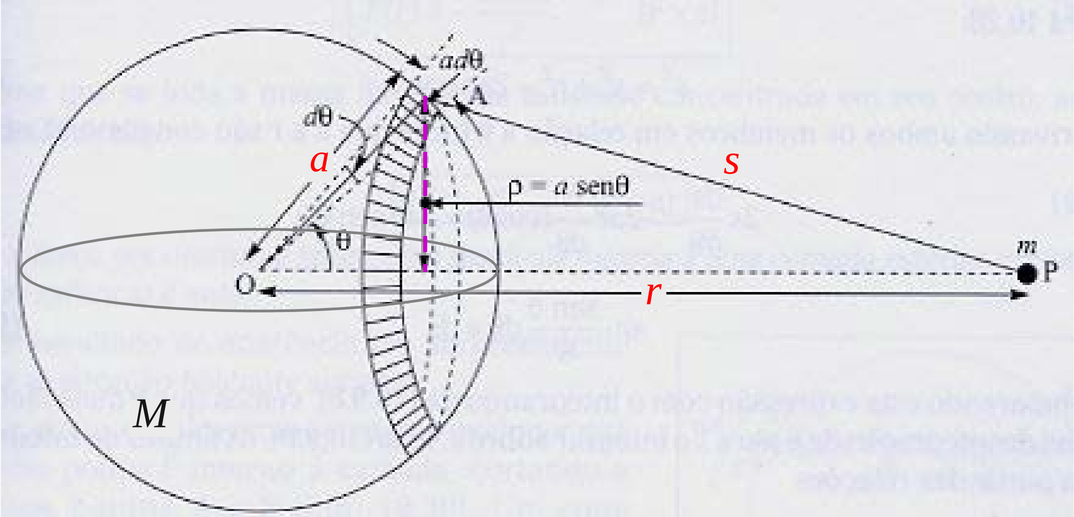


$$\boxed{U(r) = -\frac{GMm}{r}}$$

Esfera maciça (*Newton* - 1687)

• Consideramos uma distribuição uniforme de massa em camadas esféricas, como se fosse uma cebola:

$$dU_{anel} = -G\frac{m}{s}dM$$



Sendo M a massa da camada esférica:

$$\frac{dM}{M} = \frac{\text{área do anel}}{4\pi a^2}$$

O raio do anel é: $\rho = a\,\text{sen}\theta$

e sua largura é: $a\,d\theta$

Então: $\text{área do anel} = (2\pi\rho)(ad\theta) = 2\pi a^2 \text{sen}\theta\, d\theta$

$$\frac{dM}{M} = \frac{2\cancel{\pi}\cancel{a}^2 \text{sen}\theta\, d\theta}{4\cancel{\pi}\cancel{a}^2} = \frac{\text{sen}\theta\, d\theta}{2} \rightarrow dM = \frac{M\,\text{sen}\theta\, d\theta}{2}$$

Esfera maciça (Newton - 1687)

• Portanto, a energia potencial do anel fica:

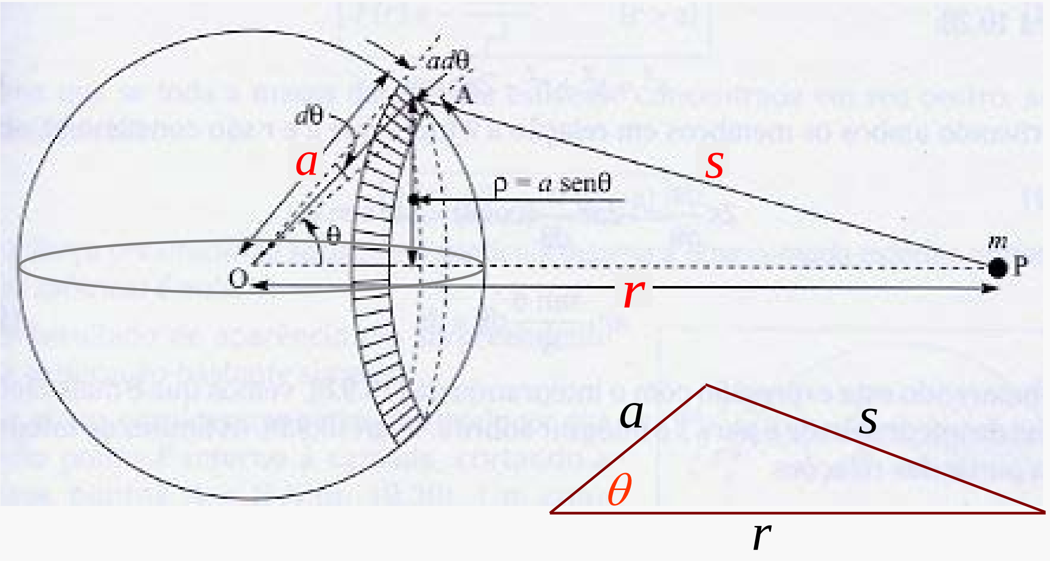
$$dU_{anel} = -G\frac{m}{s}dM$$

$$dM = \frac{M\,sen\,\theta\,d\theta}{2}$$

$$dU_{anel} = -G\frac{m}{s}\frac{M\,sen\theta}{2}d\theta$$

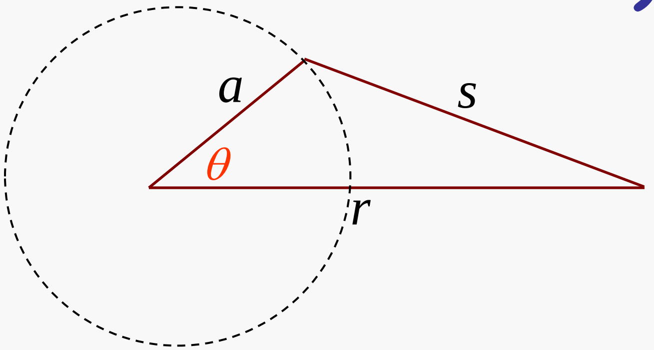
• A energia potencial total de uma casca esférica é obtida pela soma sobre todos os anéis, o que equivale a integrar sobre θ, de 0 até π :

$$U = -G\frac{M\,m}{2}\int_0^{\pi}\frac{sen\theta}{s}d\theta$$



Esfera maciça (*Newton* - 1687)

Mas, s varia com θ. Usando a lei dos cosenos temos:



(*) $$s^2 = a^2 + r^2 - 2ar\cos\theta$$

Derivando em θ: $$ar\frac{sen\theta}{s}d\theta = ds \;\rightarrow\; \frac{sen\theta}{s}d\theta = \frac{ds}{ar}$$

Mudando a variável para s, fica:

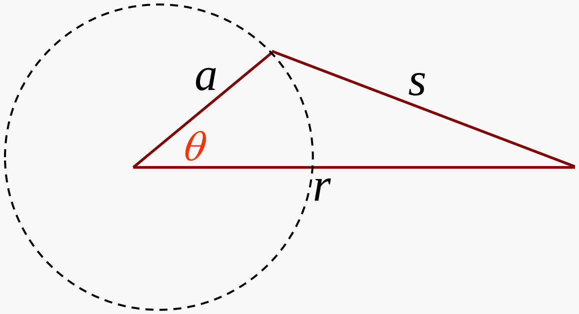
$$\boxed{U = -G\frac{Mm}{2}\int_0^{\pi}\frac{sen\theta}{s}d\theta}$$

$$U = -G\frac{Mm}{2ar}\int_{s_{min}}^{s_{max}} ds = -G\frac{Mm}{2ar}\left(s_{max} - s_{min}\right)$$

onde:

(*) $$\begin{cases} \theta = 0 \rightarrow s^2 = s_{min}^2 = \left(r-a\right)^2 & \rightarrow \quad s_{min} = r - a \\ \theta = \pi \rightarrow s^2 = s_{max}^2 = \left(r+a\right)^2 & \rightarrow \quad s_{max} = r + a \end{cases}$$

Esfera maciça (*Newton* - 1687)

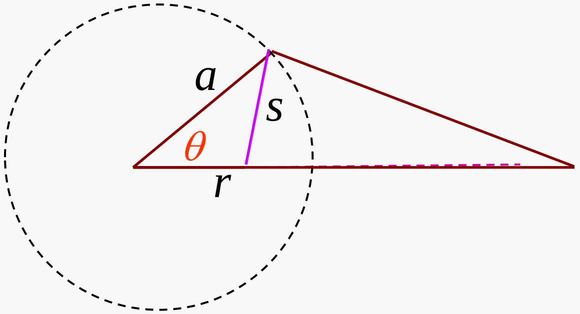


Análise da energia potencial

$$U = -G\frac{Mm}{2ar}\int_{s_{\min}}^{s_{\max}} ds = -G\frac{Mm}{2ar}\left(s_{\max} - s_{\min}\right)$$

- Como $s \geq 0$ (distância) :
  - Temos sempre: $s_{\max} = r + a$
  - Se $r > a \rightarrow$ $s_{\min} = r - a$

Esfera maciça (*Newton* - 1687)



Análise da energia potencial

$$U = -G\frac{Mm}{2ar}\int_{s_{min}}^{s_{max}} ds = -G\frac{Mm}{2ar}\left(s_{max} - s_{min}\right)$$

• Como $s \geq 0$ (distância) :

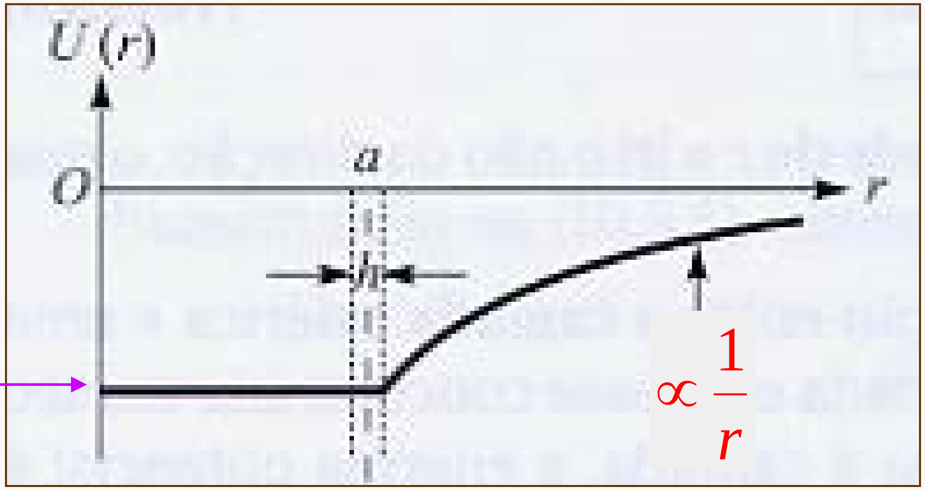
• Temos sempre: $s_{max} = r + a$

• Se $r > a \rightarrow s_{min} = r - a$; Se $r < a \rightarrow s_{min} = a - r$

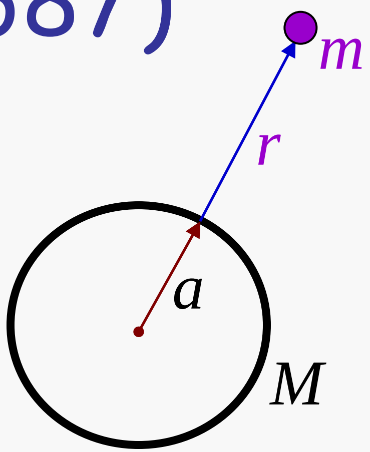
Então:

$$U = -G\frac{Mm}{r} \qquad (r > a)$$

$$U = -G\frac{Mm}{a} \qquad (r < a)$$



Esfera maciça (*Newton* - 1687)



- A partícula m, num ponto externo à casca, comporta-se como se toda a massa da casca estivesse no seu centro!

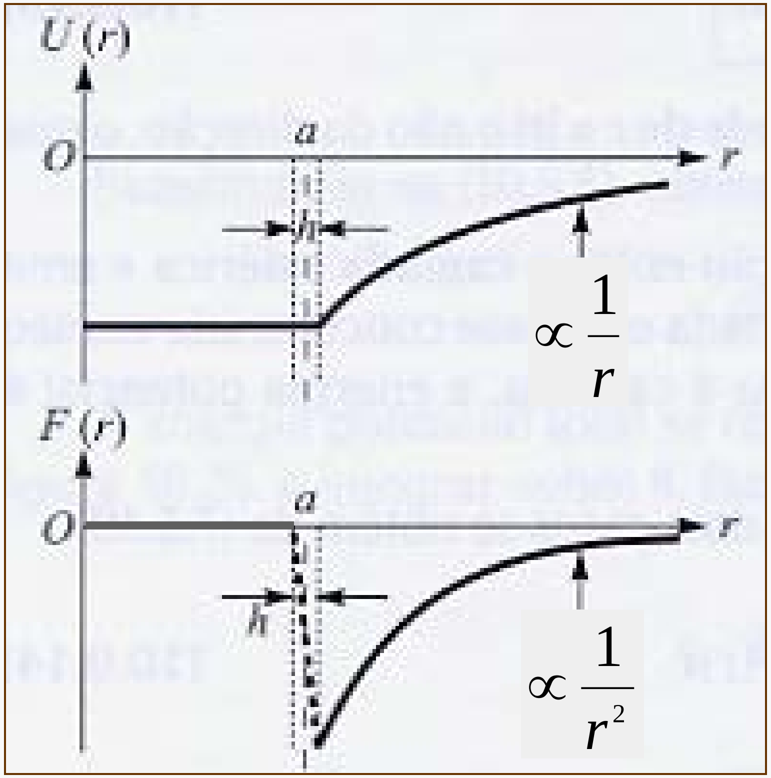
$$U = -G\frac{M\,m}{r} \qquad (r > a)$$

$$\vec{F}(r) = -\frac{dU}{dr}\hat{r} = -G\frac{M\,m}{r^2}\hat{r} \;;\quad (r > a)$$

➢ Num ponto interno à casca o potencial é constante e independente do ponto:

$$U = -G\frac{M\,m}{a} \qquad (r < a)$$

$$\vec{F}(r) = -\frac{dU}{dr}\hat{r} = 0 \;;\quad (r < a)$$



Esfera maciça (*Newton* - 1687)

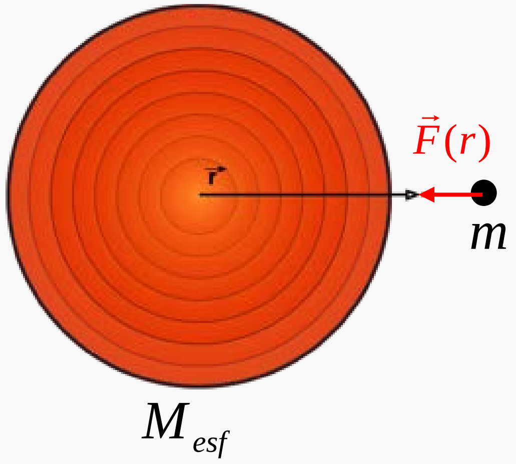
• Para uma distribuição de massa esfericamente simétrica a densidade só depende do raio r :

$$\rho = \rho(r)$$

• Para uma esfera maciça de raio R, se o ponto é externo à esfera, o resultado anterior (casca esférica) pode ser usado. Considerando a esfera como um conjunto de cascas, cada uma podendo ser substituída pela sua massa no centro, obtém-se:

$$U(r) = -G\frac{M_{esf}\, m}{r} \qquad (r > R)$$

$$\vec{F}(r) = -\frac{dU}{dr}\hat{r} = -G\frac{M_{esf}\, m}{r^2}\hat{r} \qquad (r > R)$$



Esfera maciça (*Newton* - 1687)

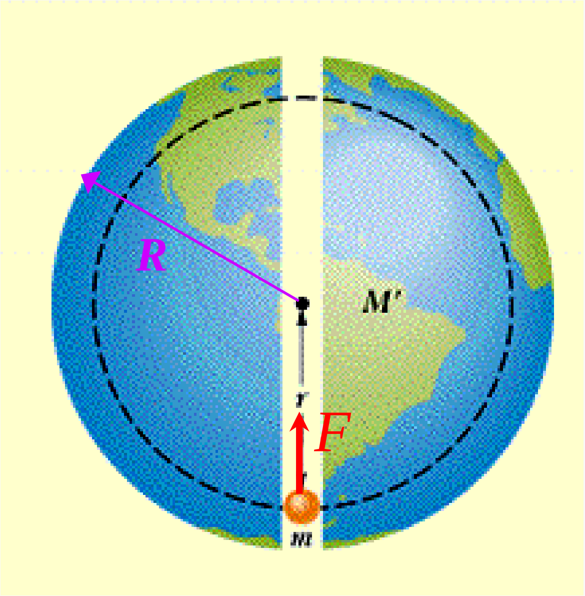
- Massa m num ponto interno à esfera ($r < R$):

Neste caso as camadas de massa com raio maior que r não exercem força sobre m. A força é dada por:

$$\boxed{\vec{F}(r) = -Gm\frac{M'(r)}{r^2}\hat{r} \qquad (r < R)}$$

onde M' está contida na esfera de raio r. Supondo que a densidade é constante, $\rho(r) = \rho_0$, teremos:

$$M'(r) = \frac{4}{3}\pi r^3 \rho_0 = \left(\frac{4}{3}\pi (R^3)\rho_0\right)\frac{r^3}{(R^3)} = M\frac{r^3}{R^3}$$



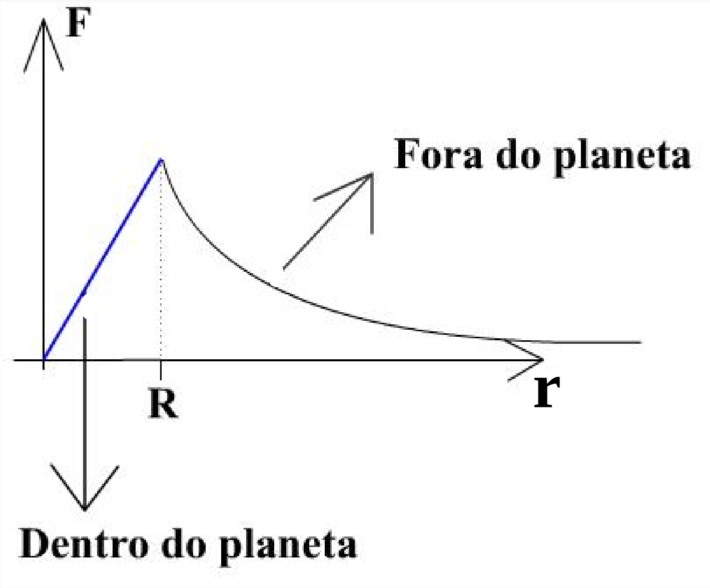
Então:

$$\vec{F}(r) = -\left(G\frac{mM}{R^3}r\right)\hat{r} \quad ; \quad (r < R); \quad \rho = \rho_0$$

ou: $\vec{F}(r) = -K\vec{r} \;\; ; \quad \text{onde}: \quad K = \dfrac{GmM}{R^3}$

Esfera maciça (*Newton* - 1687)

Portanto, o módulo da força gravitacional será:

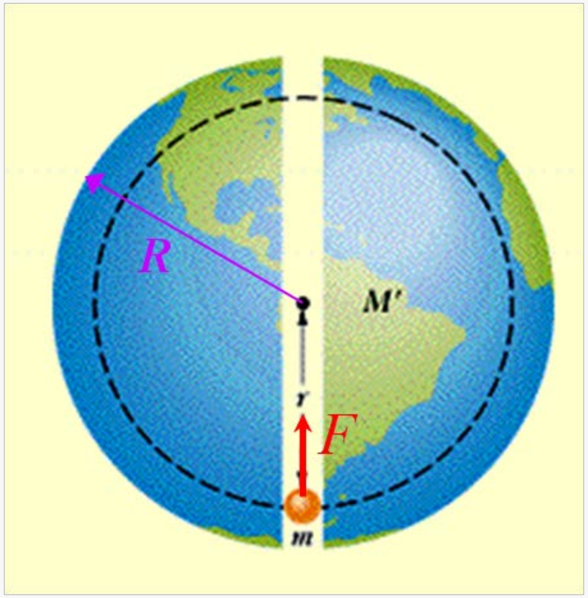


- $r > R$: $F(r) = G\dfrac{Mm}{r^2}$

- $r < R$: $\begin{cases} F(r) = G\dfrac{mM}{R^3}\,r \\ F(r) = Kr \;\; ; \quad K = \dfrac{GmM}{R^3} \end{cases}$

Como: $\vec{F}(r) = -K\vec{r}$

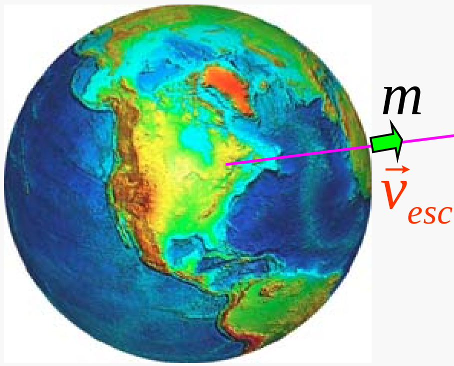
Um corpo no túnel que passa pelo centro do planeta ficará oscilando!



Exemplo: Velocidade de escape

(Supondo um sistema conservativo: $E_T = K+U$ = Cte.)

∞



É a velocidade mínima tal que, no infinito:

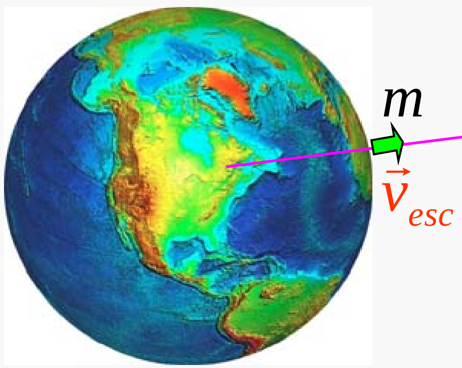
$$E_T = K + U = 0$$

Mas, na superfície : $\quad K + U = \frac{1}{2}\cancel{m}v_{esc}^2 + \left(-\frac{GM\cancel{m}}{R}\right) = 0$

Daí : $\quad v_{esc}^2 = 2\frac{GM}{R}$

Exemplo: Velocidade de escape

(Supondo um sistema conservativo: $E_T = K+U$ = Cte.)



É a velocidade mínima tal que, no infinito:

$$E_T = K + U = 0$$

$$\text{Mas, na superfície}: \quad K + U = \frac{1}{2} m v_{esc}^2 + \left(-\frac{GMm}{R}\right) = 0$$

$$\text{Daí}: \quad v_{esc}^2 = 2\frac{GM}{R} \times \frac{R}{R} = 2gR \quad \rightarrow \quad v_{esc} = \sqrt{2gR} \qquad \boxed{g = \frac{GM}{R^2}}$$

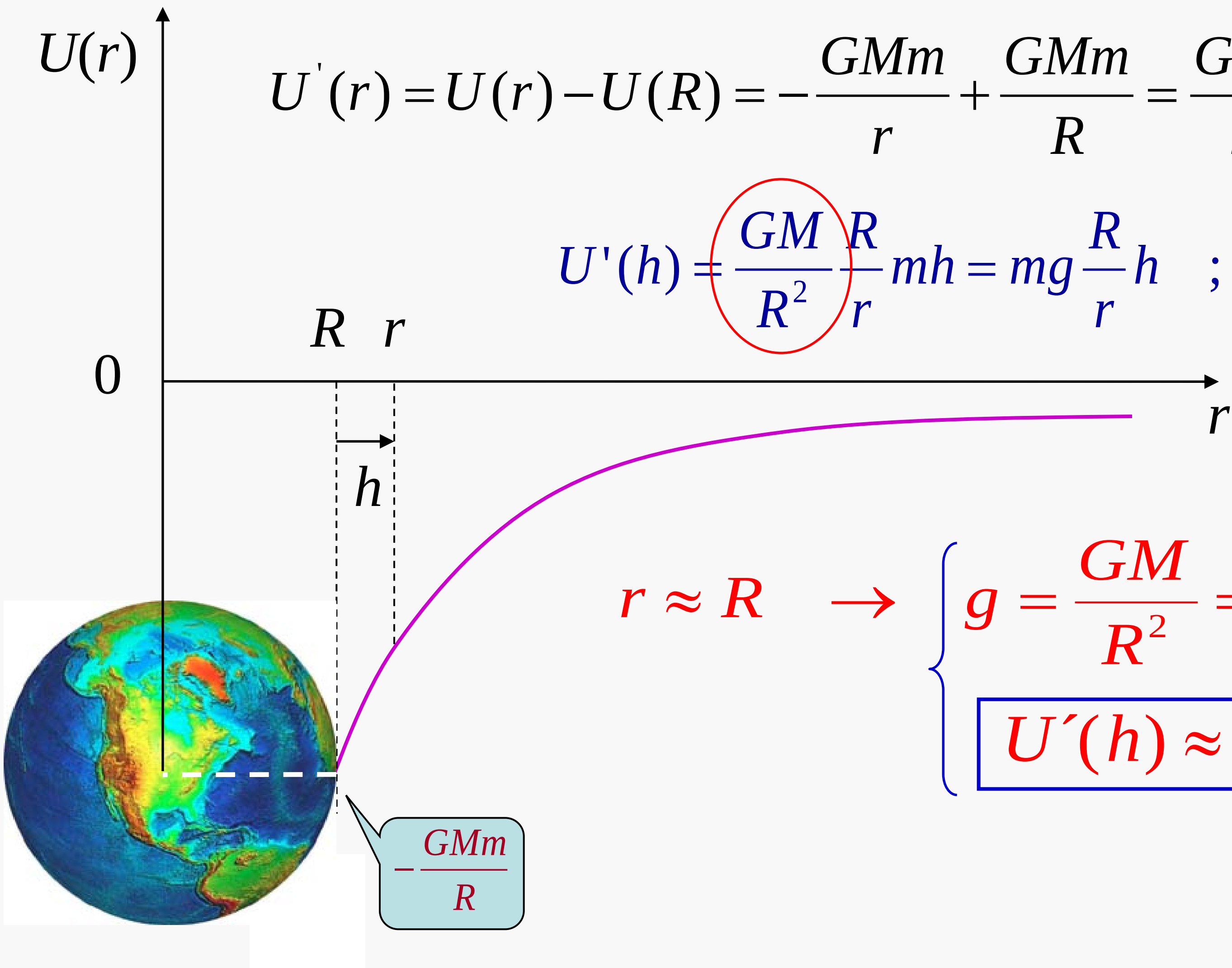
$$\text{Então}: \quad v_{esc} = \sqrt{2gR} \approx \sqrt{2 \times 9{,}83 \times 6{,}37 \times 10^6} \approx 11{,}2\ \frac{\text{km}}{s}$$

Exemplo: Na vizinhança da Terra...

Seja U' a energia potencial, tal que: $U' = 0$, quando $r = R$:

$$U'(r) = U(r) - U(R) = -\frac{GMm}{r} + \frac{GMm}{R} = \frac{GMm}{rR}(r - R)$$

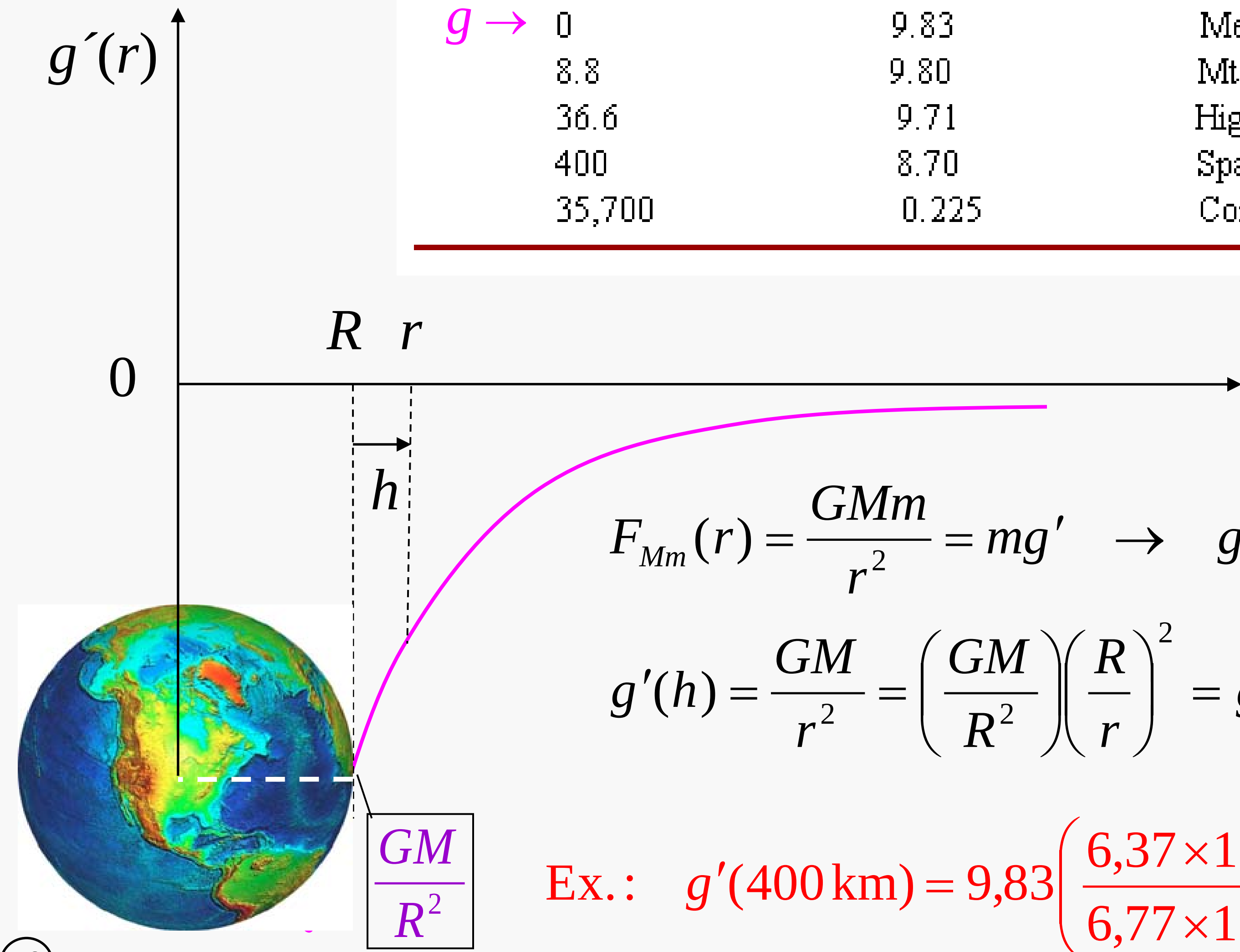
$$U'(h) = \frac{GM}{R^2}\frac{R}{r}mh = mg\frac{R}{r}h \quad ; \qquad h = r - R$$



$$r \approx R \quad \rightarrow \quad \begin{cases} g = \dfrac{GM}{R^2} = 9{,}83\ ms^{-2} \\ \boxed{U'(h) \approx mgh} \end{cases}$$

Exemplo: g na vizinhança da Terra

h: ALTITUDE (km)	a_g (m/s^2)	ALTITUDE EXAMPLE
$g \rightarrow$ 0	9.83	Mean Earth surface
8.8	9.80	Mt. Everest
36.6	9.71	Highest manned balloon
400	8.70	Space shuttle orbit
35,700	0.225	Communications satellite

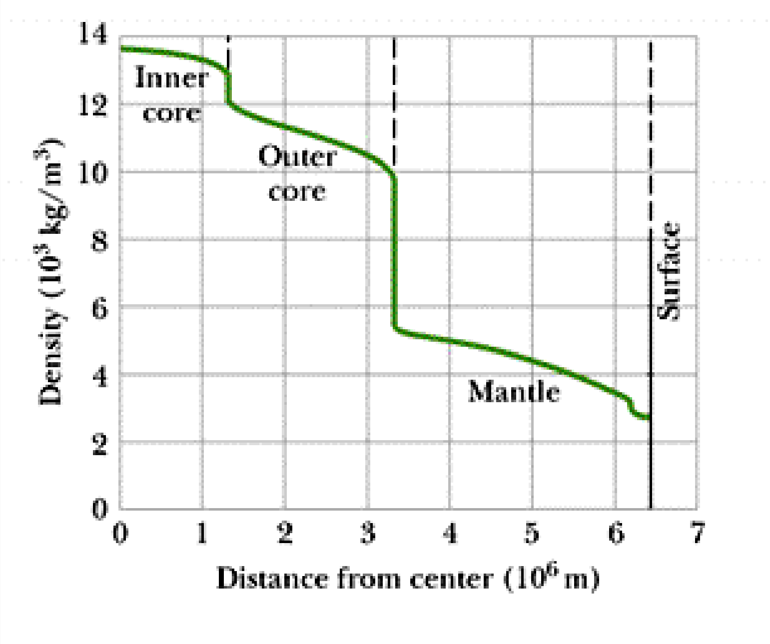


$$F_{Mm}(r) = \frac{GMm}{r^2} = mg' \quad \rightarrow \quad g'(r) = \frac{GM}{r^2}$$

$$g'(h) = \frac{GM}{r^2} = \left(\frac{GM}{R^2}\right)\left(\frac{R}{r}\right)^2 = g\left(\frac{R}{R+h}\right)^2 < g\,!$$

$$\text{Ex.:} \quad g'(400\,\text{km}) = 9{,}83\left(\frac{6{,}37\times10^6}{6{,}77\times10^6}\right)^2 \approx 8{,}70\ \text{m/s}^2$$

Fatores que podem afetar *g*



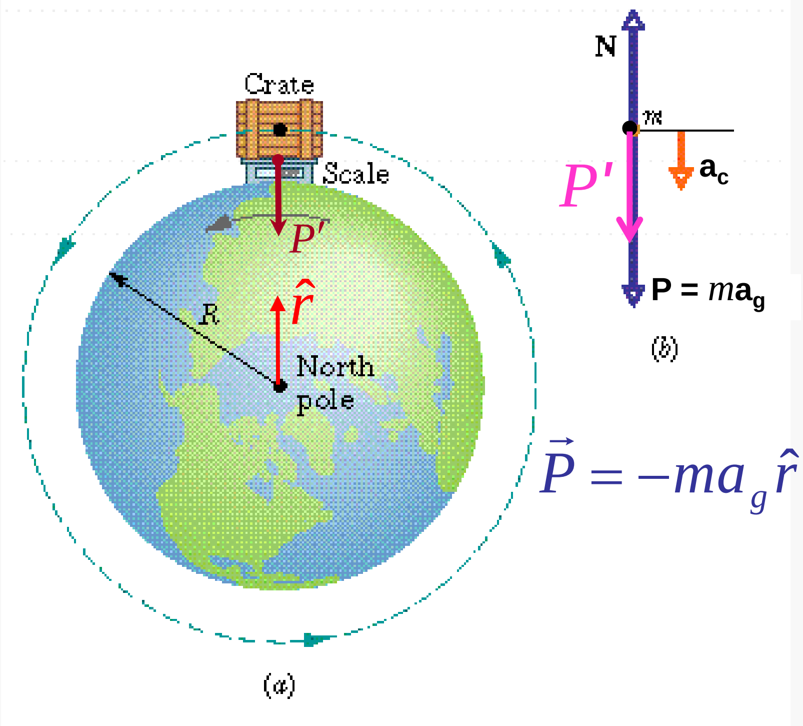
1) A Terra não é uniforme!

2) A Terra não é exatamente uma esfera – o raio Equatorial é 21 Km maior do que nos polos. Portanto, *g* é maior nos polos!

3) Movimento de rotação da Terra...

Fatores que podem afetar g

3) Movimento de rotação da Terra



$$\vec{N} + \vec{P} = m\vec{a}_c = -m\omega^2 R\,\hat{r}$$

$$\vec{N} = \left(ma_g - m\omega^2 R\right)\hat{r} = -\vec{P}'$$

Supondo: $N = P' = mg'$

$$\cancel{m}g' = \cancel{m}a_g - \cancel{m}\omega^2 R$$

$$\boxed{g' = a_g - \omega^2 R}$$

- Usando R = 6,37 X 10^6 m; e $\omega = 2\pi/T$, onde T = 24 h, teremos que g' é menor que a_g por apenas cerca de 0,034 m/s^2

Os limites da Lei da Gravitação de Newton

- A lei de Newton vale para planetas, para a queda de corpos e para distâncias interatômicas...

- Até onde ela ainda fica válida?

- Tentativas de verificar correções à lei de Newton já foram feitas em várias escalas ...

- Mas, a lei de Newton continua válida!

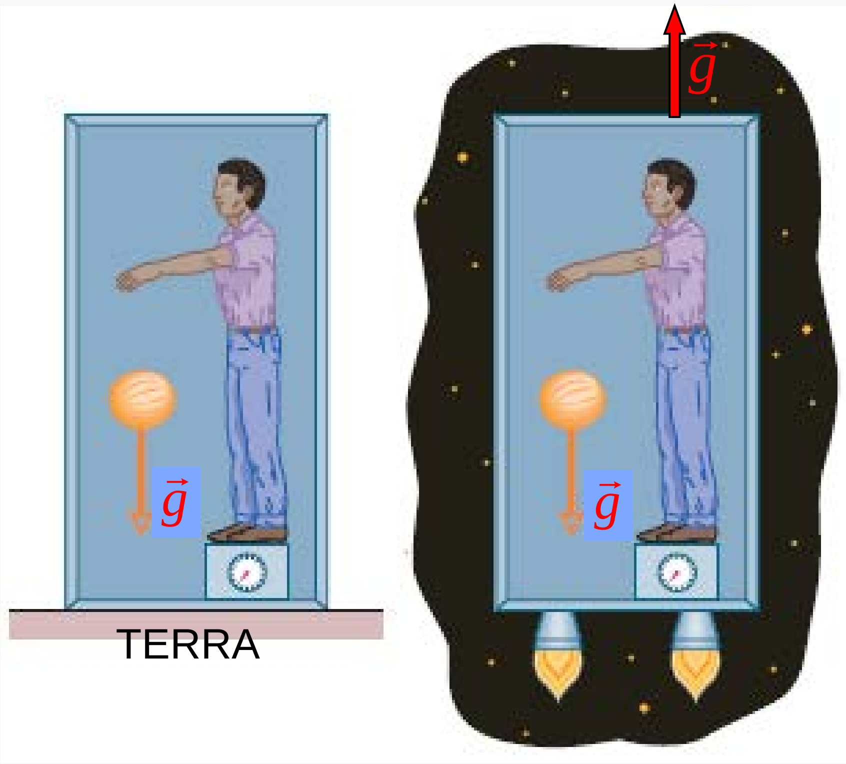
$$\boxed{\vec{F} = -\frac{G\,M\,m}{r^2}\hat{r}}$$

Relatividade Geral

• Movimento Retilíneo Uniforme em um referencial inercial parece acelerado, se visto de um referencial não-inercial.

• Einstein encarou a força gravitacional como uma força de inércia: *É impossível distinguir a física num campo gravitacional constante daquela num referencial uniformemente acelerado!*

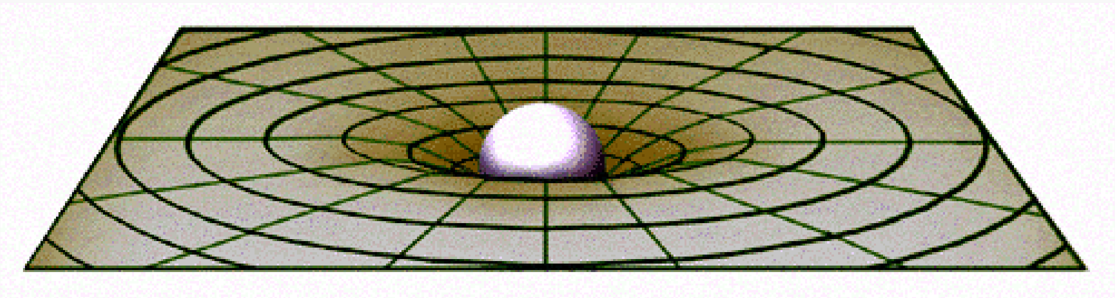
"O elevador de Einstein"

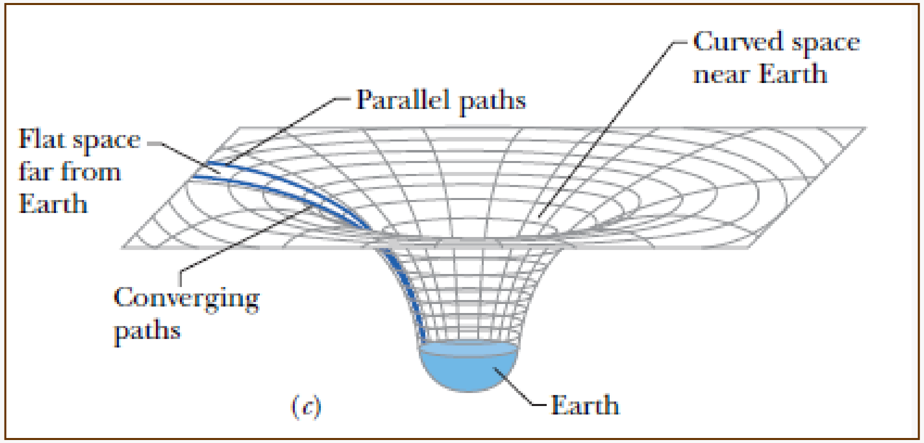


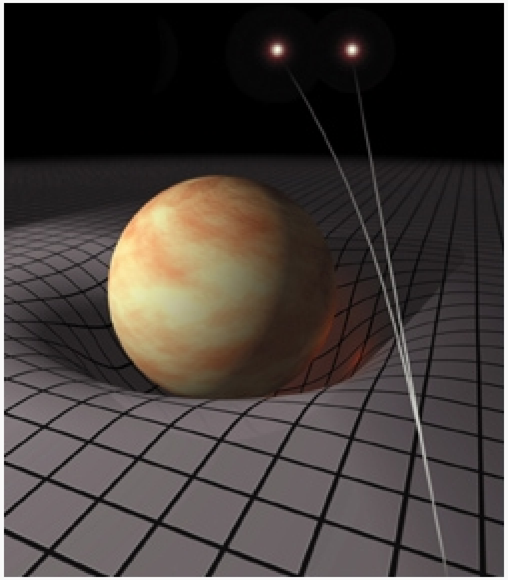
Relatividade Geral

• Só precisamos de geometria para descrever trajetórias dos corpos;

• Einstein encarou a força gravitacional como uma força de inércia → curvatura do espaço-tempo!







"Lente Gravitacional"

Buracos negros

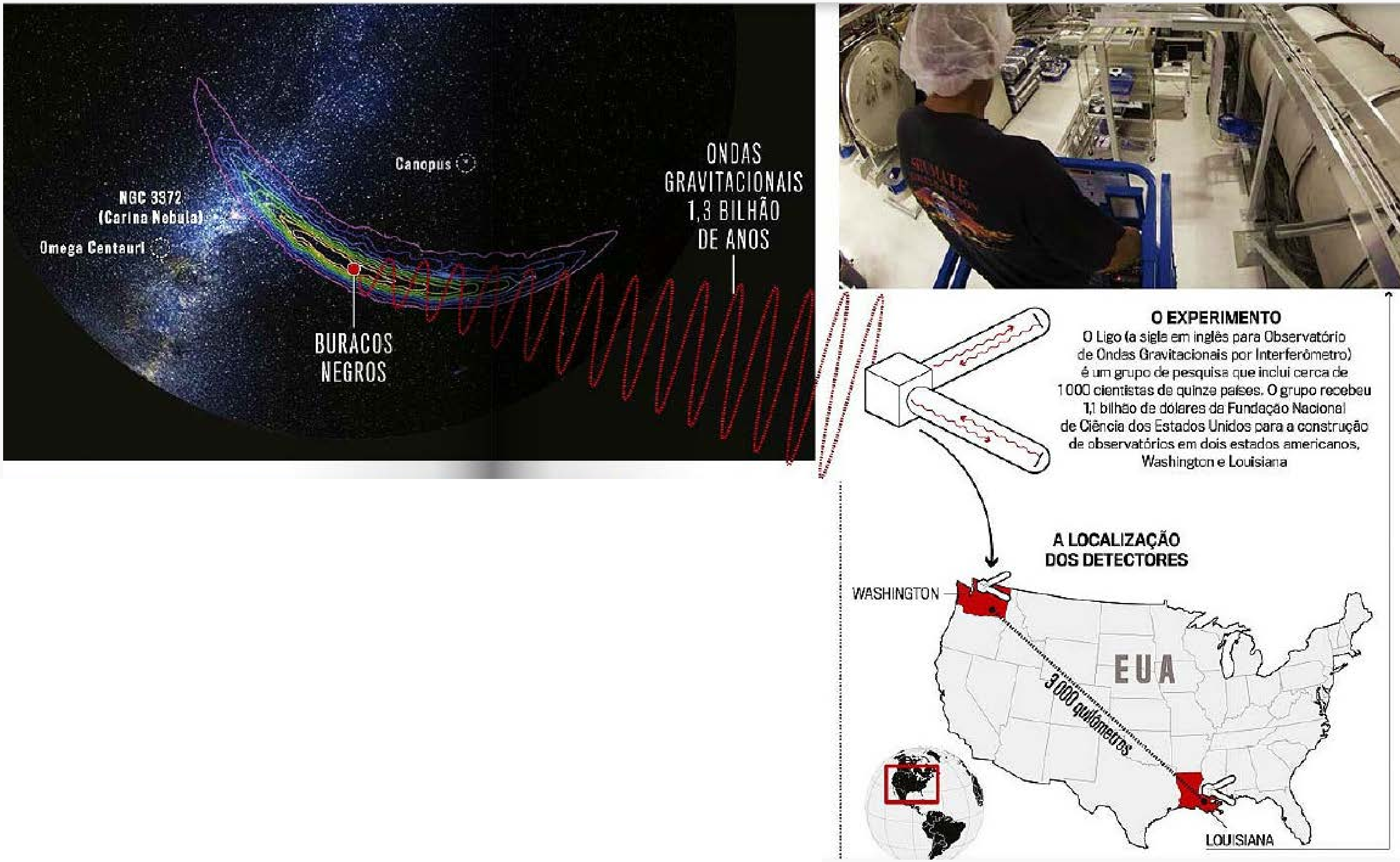
- Supernova: explosão de uma estrela de grande massa ($M_{Super} > 10\ M_{Sol}$):
  - ➢ $M < 1{,}4\ M_{Sol}$ ⇒ esfria e vira anã branca
  - ➢ $M > 1{,}4\ M_{Sol}$ ⇒ contrai e vira uma estrela de nêutrons ($r \sim 10$ km; densidade $\sim 10^{15}$ g/cm^3)

- Buraco Negro: surge quando $M > 3\ M_{Sol}$;

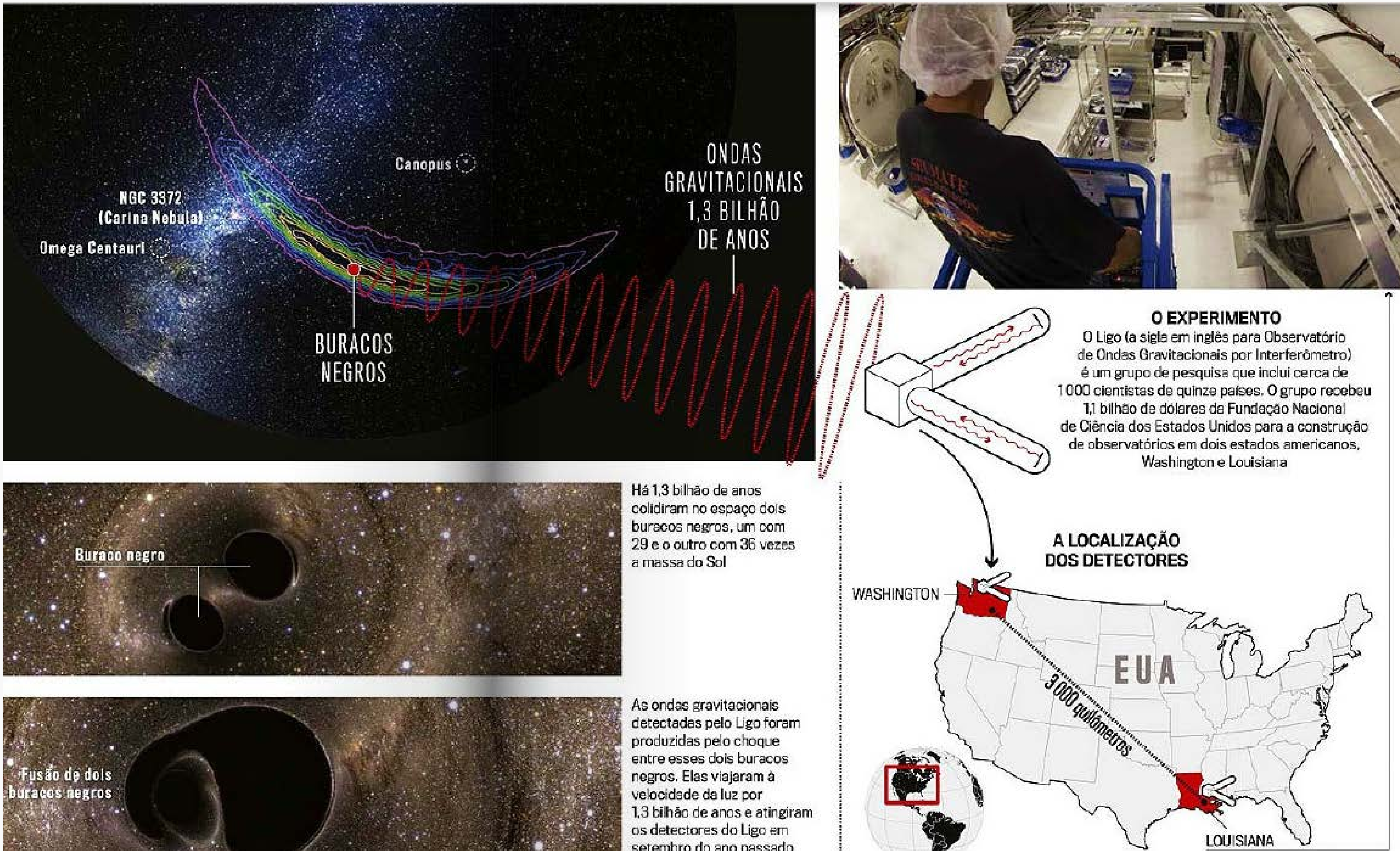
- Nada escapa de um Buraco Negro (radiação de Hawking?)...

- O raio de Schwarzschild R_s, onde a velocidade de escape é *c* (luz), é chamado ´horizonte de eventos´, <u>o limite em que algo pode se aproximar do buraco negro e ainda tem a possibilidade de escapar</u>.

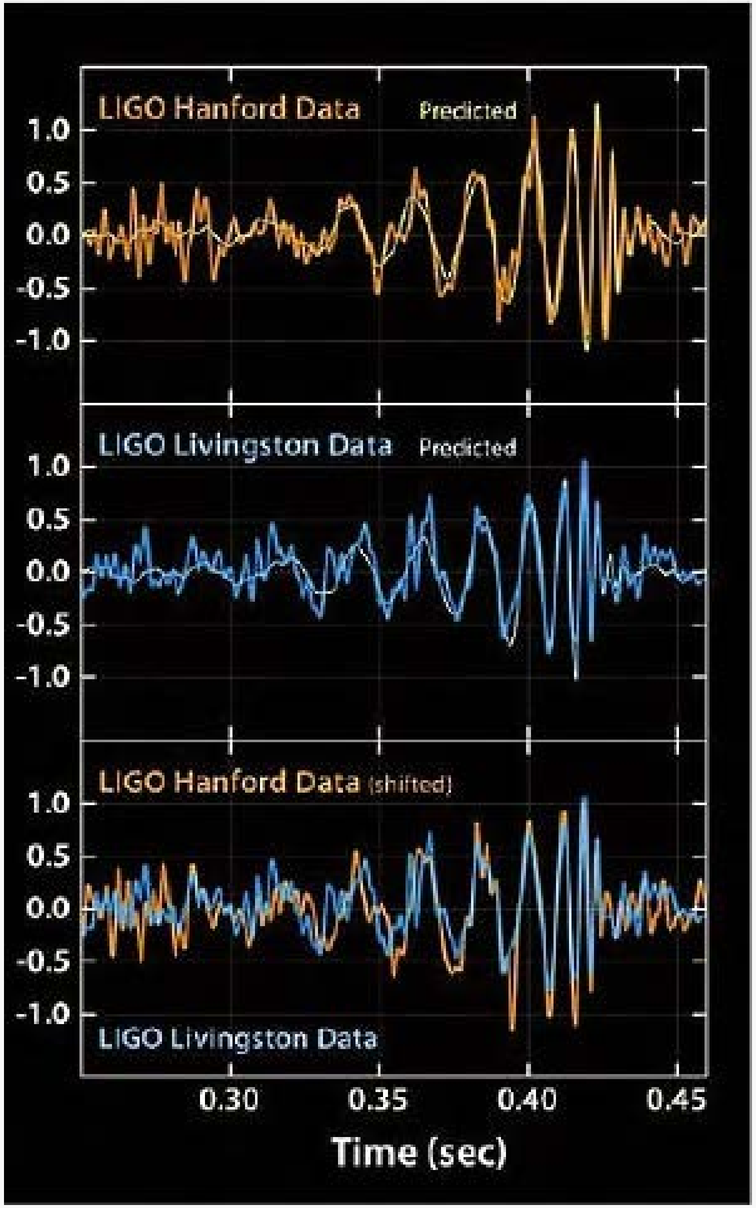
Detecção de Ondas Gravitacionais



Detecção de Ondas Gravitacionais



Detecção de Ondas Gravitacionais



Detecção de Ondas Gravitacionais