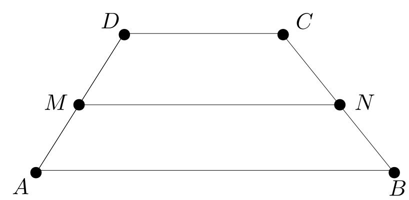
Esta lista tem como objetivo apresentar apenas alguns exercícios resolvidos que podem ajudar na compreensão da matéria. Esta lista não deve ser o seu único material de estudo!

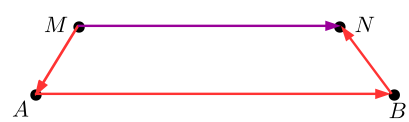
Exercício 1. Demonstre que o segmento que une os pontos médios dos lados não paralelos de um trapézio é paralelo às bases, e sua medida é a média aritmética das medidas das bases. Em outras palavras, queremos mostrar que

$$\overrightarrow{MN} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{2}\overrightarrow{DC}.$$



Observe que podemos escrever (veja figura abaixo)

$$\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BN}. \tag{1}$$



De maneira análoga, também podemos ver que $\overrightarrow{MN}$ pode ser escrito como

$$\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{MD} + \overrightarrow{DC} + \overrightarrow{CN}. \tag{2}$$

Somando então (1) com (2), obtemos

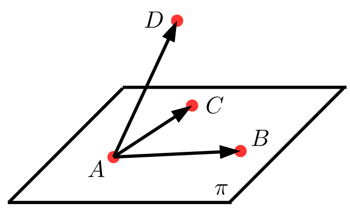
$$2\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BN} + \overrightarrow{MD} + \overrightarrow{DC} + \overrightarrow{CN}. \tag{3}$$

Agora, note que o vetor $\overrightarrow{MA}$ tem mesmo comprimento e direção que $\overrightarrow{MD}$, porém com sentido oposto. Assim, temos $\overrightarrow{MA} = -\overrightarrow{MD}$. Usando o mesmo raciocínio, vemos que $\overrightarrow{BN} = -\overrightarrow{CN}$. Portanto, usando estas igualdades em (3), temos

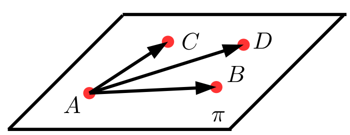
$$2\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{DC} \Rightarrow \overrightarrow{MN} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{2}\overrightarrow{DC}.$$

Exercício 2. Determine se os pontos $A = (1, 1, 1)$, $B = (1, 0, 1)$, $C = (0, 1, 0)$ e $D = (1, -2, 1)$ pertencem a um mesmo plano, isto é, verifique se os pontos são coplanares.

Aqui, duas coisas podem acontecer. Podemos ter, por exemplo, a situação da figura abaixo, onde



os pontos não são coplanares, ou podemos ter o caso da próxima figura, onde os pontos são, de



fato, coplanares. Observe que os pontos são coplanares, somente se os vetores $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$ e $\overrightarrow{AD}$ também são coplanares. Caso contrário, os pontos são não coplanares, somente se os vetores $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$ e $\overrightarrow{AD}$ também são não coplanares. Para verificar se 3 vetores são, ou não, coplanares, basta fazer o produto misto destes 3 vetores ("Corolário" apresentado em aula). Façamos isto! Notemos que

$$\overrightarrow{AB} = (0, -1, 0), \quad \overrightarrow{AC} = (-1, 0, -1) \quad \text{e} \quad \overrightarrow{AD} = (0, -3, 0).$$

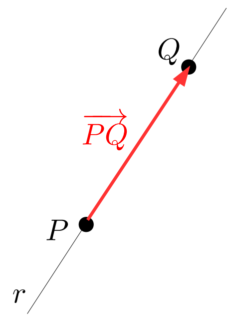
Assim, o produto misto pode ser calculado como o determinante da matriz que tem, nas linhas, as coordenadas dos vetores $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$ e $\overrightarrow{AD}$:

$$(\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}) \cdot \overrightarrow{AD} = \det \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & -1 \\ 0 & -3 & 0 \end{pmatrix} = 0.$$

Como o resultado deste produto misto é zero, temos que os vetores $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$ e $\overrightarrow{AD}$ são coplanares e, portanto, os pontos são coplanares.

Exercício 3. Encontre as equações paramétricas da reta r e s que satisfazem $r : \{x - 1 = \frac{y+1}{2}$ e $z = 1\}$ e $s : \{\frac{x}{2} = \frac{z}{4}$ e $y = 1\}$. Por fim, calcule a distância e a posição relativa entre elas.

Vamos encontrar primeiro a equação paramétrica da reta r. Para tanto, basta encontrarmos dois pontos P e Q em r. De fato, conhecendo estes dois pontos, podemos escolher $V_1 = \overrightarrow{PQ}$ como sendo um vetor diretor para a reta r (veja figura abaixo).



Notemos que todo ponto com coordenadas (x, y, z) da reta r deve satisfazer

$$x - 1 = \frac{y+1}{2} \text{ e } z = 1 \Rightarrow x = \frac{3}{2} + \frac{y}{2} \text{ e } z = 1.$$

Assim, devemos ter que todo ponto da reta r deve ter como coordenadas

$$(x, y, z) = \left(\frac{3}{2} + \frac{y}{2}, y, 1\right).$$

Como não temos nenhuma restrição sobre y, segue que y pode assumir qualquer valor real. Fazendo $y = 0$ e $y = 1$, obtemos $P = (3/2, 0, 1)$ e $Q = (2, 1, 1)$, respectivamente. Logo, fazemos

$$V_1 = \overrightarrow{PQ} = (1/2, 1, 0).$$

Assim, sabemos um ponto por onde r passa, por exemplo $P = (3/2, 0, 1)$, e temos um vetor diretor $V_1 = \overrightarrow{PQ} = (1/2, 1, 0)$. Portanto, segue que

$$r : \begin{cases} x = \frac{3}{2} + \frac{1}{2}t \\ y = 0 + 1t \\ z = 1 + 0t \end{cases}, \text{ para todo } t \in \mathbb{R}. \tag{4}$$

Vejamos agora como fica a equação paramétrica da reta s com um raciocínio muito parecido. Notemos que todo ponto (x, y, z) da reta s deve satisfazer

$$\frac{x}{2} = \frac{z}{4} \text{ e } y = 1 \Rightarrow x = \frac{z}{2} \text{ e } y = 1.$$

Assim, devemos ter que todo ponto da reta r deve ter como coordenadas

$$(x, y, z) = (z/2, 1, z).$$

Como não temos nenhuma restrição sobre z, segue que z pode assumir qualquer valor real. Fazendo $z = 0$ e $z = 1$, obtemos $R = (0, 1, 0)$ e $Z = (1/2, 1, 1)$, respectivamente. Logo, escolhemos o seguinte vetor diretor para a reta s:

$$V_2 = \overrightarrow{RZ} = (1/2, 0, 1).$$

Portanto, segue que

$$s : \begin{cases} x = 0 + \frac{1}{2}t \\ y = 1 + 0t \\ z = 0 + 1t \end{cases}, \text{ para todo } t \in \mathbb{R}. \tag{5}$$

Agora que fizemos a primeira parte deste exercício, vamos encontrar a posição relativa destas duas retas.

A primeira pergunta que fazemos para o estudo da posição relativa de duas retas é: V_1 (vetor diretor de r) e V_2 (vetor diretor de s) são paralelos? Vejamos:

$$V_1 \text{ é paralelo a } V_2 \iff \text{ existe } \alpha \in \mathbb{R} \text{ tal que } V_1 = \alpha V_2 \iff (1/2, 1, 0) = \alpha(1/2, 0, 1).$$

Note que não podemos encontrar nenhum α tal que a equação acima seja verdadeira. Logo, V_1 e V_2 não são paralelos.

Temos então duas possibilidades: as retas são reversas ou concorrentes. Fazemos então a seguinte pergunta: $\overrightarrow{P_1P_2} \cdot (V_1 \times V_2) = 0$? Neste caso P_1 é um ponto da reta r e P_2 um ponto da reta s. Escolhendo $P_1 = P$ e $P_2 = R$, vemos que $\overrightarrow{P_1P_2} = (-3/2, 1, -1)$. Ademais, temos

$$V_1 \times V_2 = (1/2, 1, 0) \times (1/2, 0, 1) = \det \begin{pmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1/2 & 1 & 0 \\ 1/2 & 0 & 1 \end{pmatrix} = (1, -1/2, -1/2).$$

Logo, segue que

$$\overrightarrow{P_1P_2} \cdot (V_1 \times V_2) = (-3/2, 1, -1) \cdot (1, -1/2, -1/2) = -3/2 \neq 0.$$

Portanto, as retas são reversas.

Só nos resta agora calcular a distância entre elas. Como

$$\|V_1 \times V_2\| = \sqrt{(1)^2 + (-1/2)^2 + (-1/2)^2} = \sqrt{3/2},$$

temos que a distância entre duas retas reversas é dada por

$$\text{dist}(r, s) = \frac{\left|\overrightarrow{P_1P_2} \cdot (V_1 \times V_2)\right|}{\|V_1 \times V_2\|} = \frac{|-3/2|}{\sqrt{3/2}} = \frac{3\sqrt{2}}{2\sqrt{3}}.$$

Exercício 4. Encontre a reta r que dista $\sqrt{20}/3$ do ponto $P = (1, 0, 1)$, está contida no plano $\pi : x - 4y + z = 0$ e é paralela à reta

$$s : \begin{cases} x = 1 + 2t \\ y = 1 + t \\ z = 2t \end{cases}, \text{ para todo } t \in \mathbb{R}.$$

Para conhecer a reta r, basta encontrarmos um vetor diretor para a reta e um ponto Q por onde ela passa. Como sabemos que r é paralela à reta s, podemos escolher $V = (2, 1, 2)$ como nosso vetor diretor para a reta r (observe que 2,1 e 2 são os múltiplos escalares de t nas equações paramétricas da reta s). Assim, só nos resta encontrar um ponto $Q = (x_0, y_0, z_0)$ por onde r passa.

Sabemos que r está em π. Logo, todo ponto de r deve satisfazer a equação do plano π. Em particular, o ponto Q deve estar em π. Logo,

$$x_0 - 4y_0 + z_0 = 0 \Rightarrow x_0 = 4y_0 - z_0 \Rightarrow Q = (4y_0 - z_0, y_0, z_0).$$

Ademais, sabemos pela fórmula da distância entre ponto e reta que

$$\text{dist}(P, r) = \frac{\|\overrightarrow{QP} \times V\|}{\|V\|}.$$

Assim, vamos calcular $\overrightarrow{QP} \times V$:

$$\overrightarrow{QP} \times V = (1 - 4y_0 + z_0, -y_0, 1 - z_0) \times (2, 1, 2) = \det \begin{pmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 - 4y_0 + z_0 & -y_0 & 1 - z_0 \\ 2 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Logo, temos

$$\overrightarrow{QP} \times V = (-2y_0 + z_0 - 1, 8y_0 - 4z_0, -2y_0 + z_0 + 1).$$

Desta forma,

$$\|\overrightarrow{QP} \times V\| = \sqrt{(-2y_0 + z_0 - 1)^2 + (8y_0 - 4z_0)^2 + (-2y_0 + z_0 + 1)^2}$$

e

$$\|V\| = \sqrt{2^2 + 1^2 + 2^2} = 3.$$

Como o exercício exige que a distância da reta r ao ponto P seja $\sqrt{20}/3$, devemos ter

$$\frac{\sqrt{20}}{3} = \text{dist}(P, r) = \frac{\|\overrightarrow{QP} \times V\|}{\|V\|} = \frac{\sqrt{(-2y_0 + z_0 - 1)^2 + (8y_0 - 4z_0)^2 + (-2y_0 + z_0 + 1)^2}}{3}.$$

Portanto,

$$(-2y_0 + z_0 - 1)^2 + (8y_0 - 4z_0)^2 + (-2y_0 + z_0 + 1)^2 = 20,$$

implicando

$$72y_0^2 - 72y_0z_0 + 18z_0^2 + 2 = 20. \tag{6}$$

Assim, qualquer ponto $Q = (4y_0 - z_0, y_0, z_0)$ satisfazendo (6) garante o que queremos. Se, por exemplo, $y_0 = 0$, temos, pela equação (6), que

$$18z_0^2 + 2 = 20 \Rightarrow z_0 = \pm 1.$$

Logo, um ponto que satisfaz as nossas exigências é $Q = (4y_0 - z_0, y_0, z_0) = (-1, 0, 1)$. Assim, a reta r fica descrita como

$$r : \begin{cases} x = -1 + 2t \\ y = t \\ z = 1 + 2t \end{cases}, \text{ para todo } t \in \mathbb{R}.$$

Exercício 5. Determinar a equação da reta definida pela interseção entre os planos

$$\pi_1 : x + y + z - 1 = 0 \quad \text{e} \quad \pi_2 : x + y - 2 = 0,$$

ou seja,

$$r := \begin{cases} x + y + z - 1 = 0 \\ x + y - 2 = 0 \end{cases}.$$

Encontre também o ângulo formado entre π_1 e π_2.

Determinar a reta r é o mesmo que determinar todos os pontos $P = (x, y, z)$ que satisfazem, simultaneamente, as equações dos planos π_1 e π_2. Assim, devemos encontrar x,y e z tais que

$$\begin{cases} x + y + z = 1 \\ x + y = 2 \end{cases}.$$

Da segunda equação, temos $x = 2 - y$. Substituindo este resultado na primeira equação, segue que $z = -1$. Logo, segue que todo ponto $P = (x, y, z) = (2-y, y, -1)$ está na interseção dos dois planos, ou seja, os pontos de coordenadas $(2-y, y, -1)$ definem a nossa reta r. Como não existe nenhuma restrição sobre y, temos que y pode assumir qualquer valor em $\mathbb{R}$. Assim, podemos fazer $y = t$ para todo $t \in \mathbb{R}$. Portanto, $(x, y, z) = (2 - y, y, -1) = (2 - t, t, -1)$, e assim,

$$r : \begin{cases} x = 2 - t \\ y = t \\ z = -1 \end{cases}, \text{ para todo } t \in \mathbb{R}.$$

Só nos resta agora calcular o ângulo entre π_1 e π_2. Recordemos que

$$\cos(\pi_1, \pi_2) = \frac{|N_1 \cdot N_2|}{\|N_1\|\|N_2\|},$$

sendo N_1 e N_2 vetores normais associados aos planos π_1 e π_2, respectivamente. No nosso exercício, temos $N_1 = (1,1,1)$ e $N_2 = (1,1,0)$. Logo,

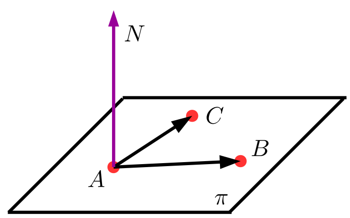
$$N_1 \cdot N_2 = 1 \cdot 1 + 1 \cdot 1 + 1 \cdot 0 = 2, \; \|N_1\| = \sqrt{3} \text{ e } \|N_2\| = \sqrt{2}.$$

Assim, $\cos(\pi_1, \pi_2) = \frac{2}{\sqrt{6}}$, e portanto, o ângulo θ formado por π_1 e π_2 é $\theta = \arccos\left(\frac{2}{\sqrt{6}}\right)$.

Exercício 6. Estude a posição relativa de r e π, sendo

$$r : \begin{cases} x = 1 + 3t \\ y = 1 + 2t \\ z = 1 + t \end{cases}, \text{ para todo } t \in \mathbb{R},$$

e π o plano que contém os pontos $A = (1,1,3)$, $B = (2,0,4)$ e $C = (1,2,6)$.



A primeira pergunta que fazemos para o estudo da posição relativa entre uma reta e um plano é: V (vetor diretor da reta) e N (vetor normal do plano) são ortogonais (ou seja, $V \cdot N = 0$)? Para responder esta pergunta, precisamos identificar V e N no nosso problema.

Um vetor diretor para a reta r é $V = (3,2,1)$. Entretanto, o vetor N não pode ser encontrado de forma imediata, uma vez que não temos a equação do plano π. Observe que N deve ser um vetor ortogonal aos vetores $\overrightarrow{AB}$ e $\overrightarrow{AC}$ (ver figura acima). Sabemos que o vetor resultante do produto vetorial $\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}$ é ortogonal a $\overrightarrow{AB}$ e $\overrightarrow{AC}$. Vamos então calcular este produto vetorial:

$$\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC} = (1,-1,1) \times (0,1,3) = \det \begin{pmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 3 \end{pmatrix} = (-4,-3,1).$$

Assim, fazemos $N = (-4,-3,1)$. Calculemos então o produto escalar entre V e N:

$$V \cdot N = -17 \neq 0.$$

Logo, temos que V e N não são ortogonais, implicando que r e π são concorrentes.

Exercício 7. Estude a posição relativa das retas r e s, sendo que r passa pelos pontos $A = (1,2,3)$ e $B = (1,3,6)$, e s é a reta dada por $x = y - 1 = z$.

A primeira pergunta que fazemos para o estudo da posição relativa de duas retas é: V_1 (vetor diretor de r) e V_2 (vetor diretor de s) são paralelos? Para responder esta pergunta, precisamos identificar V_1 e V_2 no nosso exercício. Façamos isto!

Note que um vetor diretor para a reta r é $V_1 = \overrightarrow{AB} = (0,1,3)$. Para encontrarmos um vetor diretor para a reta s, podemos enxergar $x = y - 1 = z$ na forma simétrica:

$$\frac{x-0}{1} = \frac{y-1}{1} = \frac{z-0}{1}.$$

Recordemos que os números circulados acima podem ser escolhidos como coordenadas de um vetor diretor para a reta s. Logo, $V_2 = (1,1,1)$. Agora, será que V_1 e V_2 são paralelos? Vejamos:

$$V_1 \text{ é paralelo a } V_2 \iff \text{ existe } \alpha \in \mathbb{R} \text{ tal que } V_1 = \alpha V_2 \iff (0,1,3) = \alpha(1,1,1).$$

Note que não podemos encontrar nenhum α tal que a equação acima seja verdadeira. Logo, V_1 e V_2 não são paralelos.

Temos então duas possibilidades: as retas são reversas ou concorrentes. Fazemos então a seguinte pergunta: $\overrightarrow{P_1P_2} \cdot (V_1 \times V_2) = 0$? Neste caso P_1 é um ponto da reta r e P_2 um ponto da reta s. Sabemos que r passa por A, logo podemos fazer $P_1 = A = (1,2,3)$. Ademais, olhando novamente para a forma simétrica de s

$$\frac{x-0}{1} = \frac{y-1}{1} = \frac{z-0}{1},$$

vemos que os números circulados acima apresentam as coordenadas de um ponto por onde a reta s passa. Assim, fazemos $P_2 = (0,1,0)$, e portanto, $\overrightarrow{P_1P_2} = (-1,-1,-3)$. Calculemos então $V_1 \times V_2$:

$$V_1 \times V_2 = \det \begin{pmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 0 & 1 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} = (-2,3,-1).$$

Portanto, temos

$$\overrightarrow{P_1P_2} \cdot (V_1 \times V_2) = (-1,-1,-3) \cdot (-2,3,-1) = 2 \neq 0$$

. Logo, temos que as retas r e s são reversas.

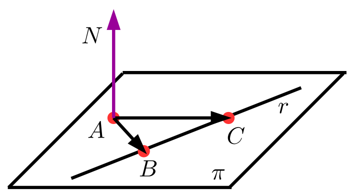
Exercício 8. Seja

$$r : \begin{cases} x = 1 + 2t \\ y = -1 + 2t \\ z = 1 + t \end{cases}, \text{ para todo } t \in \mathbb{R}. \tag{7}$$

Encontre a equação do plano π que passa pelo ponto $A = (1,0,1)$ e que contém a reta r.

Para definir a equação do plano π, precisamos de um ponto por onde o plano passa e de um vetor normal N. Já sabemos que o plano passa por $A = (1, 0, 1)$. Agora só nos resta encontrar um vetor normal N. Para tanto, vamos nos recordar do Exercício 6 que fizemos. Observe que, neste exercício, pudemos encontrar o vetor N conhecendo 3 pontos distintos por onde o plano passa. Assim, se encontrarmos 3 pontos não colineares por onde π passa, então saberemos definir nosso vetor N. Façamos isto!

Observando a figura abaixo, percebemos que basta encontrarmos dois pontos B e C em r para termos os 3 pontos desejados, e assim, definirmos $N = \overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}$. Fazendo $t = 0$ em (7), obtemos



o ponto $B = (1, -1, 1)$ em r. Similarmente, fazendo $t = 1$, obtemos $C = (3, 1, 2)$ em r. Logo, temos

$$\overrightarrow{AB} = (0, -1, 0) \quad \text{e} \quad \overrightarrow{AC} = (2, 1, 1).$$

Portanto,

$$N = \overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC} = (0, -1, 0) \times (2, 1, 1) = \det \begin{pmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 0 & -1 & 0 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix} = (-1, 0, 2).$$

Assim, já sabemos que a equação do plano será

$$\pi : -1 \cdot x + 0 \cdot y + 2 \cdot z + d = 0 \Rightarrow \pi : -x + 2z + d = 0, \text{ para algum } d \in \mathbb{R}.$$

Para descobrir quem é d, basta substituirmos as coordenadas do ponto $A = (1, 0, 1)$, por onde o plano passa, na equação do plano acima

$$-1 + 2 \cdot 1 + d = 0 \Rightarrow -1 + 2 + d = 0 \Rightarrow d = -1.$$

Portanto, a equação do plano π fica:

$$\pi : -x + 2z - 1 = 0.$$