

5) a) Como 2 pontos definem uma reta, nosso polinômio p terá grau 1.
 O sistema que temos que resolver para achar a equação de p é:

$$\begin{cases} p\left(\frac{-2}{3}\right) = f\left(\frac{-2}{3}\right) \\ p\left(\frac{2}{3}\right) = f\left(\frac{2}{3}\right) \end{cases} \neq \begin{cases} \frac{-2}{3}a + b = f\left(\frac{-2}{3}\right) \\ \frac{2}{3}a + b = f\left(\frac{2}{3}\right) \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} a = \frac{3}{4} \left(f\left(\frac{2}{3}\right) - f\left(\frac{-2}{3}\right) \right) \\ b = \frac{f\left(\frac{-2}{3}\right) + f\left(\frac{2}{3}\right)}{2} \end{cases}$$

$$\Rightarrow p(x) = \frac{3}{4} \left(f\left(\frac{2}{3}\right) - f\left(\frac{-2}{3}\right) \right) x + \frac{1}{2} \left(f\left(\frac{-2}{3}\right) + f\left(\frac{2}{3}\right) \right)$$

$$\begin{aligned} \text{b) } \int_{-1}^1 f(x) dx &\approx \int_{-1}^1 p(x) dx \\ &= \int_{-1}^1 \left[\underbrace{\frac{3}{4} \left(f\left(\frac{2}{3}\right) - f\left(\frac{-2}{3}\right) \right)}_{\text{NÚMERO REAL}} x + \underbrace{\frac{1}{2} \left(f\left(\frac{-2}{3}\right) + f\left(\frac{2}{3}\right) \right)}_{\text{NÚMERO REAL}} \right] dx \\ &= \frac{3}{4} \left(f\left(\frac{2}{3}\right) - f\left(\frac{-2}{3}\right) \right) \int_{-1}^1 x dx + \frac{1}{2} \left(f\left(\frac{-2}{3}\right) + f\left(\frac{2}{3}\right) \right) \int_{-1}^1 dx \\ &= \frac{3}{4} \left(f\left(\frac{2}{3}\right) - f\left(\frac{-2}{3}\right) \right) \frac{x^2}{2} \Big|_{-1}^1 + \frac{1}{2} \left(f\left(\frac{-2}{3}\right) + f\left(\frac{2}{3}\right) \right) x \Big|_{-1}^1 \\ &= f\left(\frac{-2}{3}\right) + f\left(\frac{2}{3}\right) \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \boxed{\int_{-1}^1 f(x) dx \approx f\left(\frac{-2}{3}\right) + f\left(\frac{2}{3}\right)}$$

c) Como o logaritmo é difícil de calcular "na mão", usei Julia para avaliar a fórmula do item b):

$$\log((2/3) + 2) + \log((-2/3) + 2)$$

OUTPUT: 1.268511...

Agora vamos à integral!

$$\int_{-1}^1 \log(x+2) dx = \int_1^3 \log(u) du = \left. u \ln(u) - u \right|_1^3 = 1.2958$$

$$u(x) = x+2 \Rightarrow du = dx$$

$$u(1) = 3, \quad u(-1) = 1$$

$$\text{ERRO RELATIVO} = 0.02105 \dots$$

$$(\text{calculado em Julia}) \approx 2,1\%$$