Departamento de Matemática - IMECC - Unicamp

MA211 - Segundo Semestre de 2020

PROVA 1 - 06/11/2020 (6^a Manhã)

Questão 1. (2,5 pontos) Determine e classifique os pontos críticos da função

$$f(x,y) = xy - x^2y - xy^2.$$

Solução: Primeiramente, observe que

$$f_x(x,y) = y - 2xy - y^2 \quad \text{e} \quad f_y(x,y) = x - x^2 - 2xy.$$

Os pontos críticos devem ocorrer quando

$$\begin{cases} y - 2xy - y^2 = 0 \\ x - x^2 - 2xy = 0. \quad \textbf{(0.5)} \end{cases}$$

Da primeira equação, segue que

$$y - 2xy - y^2 = 0 \Leftrightarrow y(1 - 2x - y) = 0 \Leftrightarrow y = 0 \text{ ou } y = 1 - 2x.$$

Substituindo $y = 0$ na segunda equação,

$$x - x^2 = 0 \Leftrightarrow x(1 - x) = 0 \Leftrightarrow x = 0 \text{ ou } x = 1$$

e, substituindo $y = 1 - 2x$ encontramos

$$x - x^2 - 2x(1 - 2x) = 0 \Leftrightarrow 3x^2 - x = 0 \Leftrightarrow x(3x - 1) = 0 \Leftrightarrow x = 0 \text{ ou } x = \frac{1}{3},$$

e logo, neste caso, $y = 1$ e $y = 1/3$. Assim, os pontos críticos são: $(0,0), (1,0), (0,1)$ e $(1/3, 1/3)$. **(0.5)**

Temos que

$$f_{xx}(x,y) = -2y\,;\; f_{xy}(x,y) = 1 - 2x - 2y = f_{yx}(x,y) \text{ e } f_{yy}(x,y) = -2x.$$

Então,

- $D(0,0) = f_{xx}(0,0)f_{yy}(0,0) - [f_{xy}(0,0)]^2 = -1 < 0 \Rightarrow (0,0)$ é ponto de sela. **(0.3)**
- $D(1,0) = f_{xx}(1,0)f_{yy}(1,0) - [f_{xy}(1,0)]^2 = -1 < 0 \Rightarrow (1,0)$ é ponto de sela. **(0.3)**
- $D(0,1) = f_{xx}(0,1)f_{yy}(0,1) - [f_{xy}(0,1)]^2 = -1 < 0 \Rightarrow (0,1)$ é ponto de sela. **(0.3)**
- $D(1/3,1/3) = f_{xx}(1/3,1/3)f_{yy}(1/3,1/3) - [f_{xy}(1/3,1/3)]^2 = \frac{4}{9} - \frac{1}{9} = \frac{1}{3} > 0$ e $f_{xx}(1/3,1/3) = -\frac{2}{3} < 0 \Rightarrow (1/3,1/3)$ é ponto de máximo. **(0.6)**

Questão 2. (2,5 pontos) Encontre os valores máximo e mínimo de

$$f(x,y) = 4x + 4y - x^2 - y^2$$

sujeitos à condição

$$0 \leq x^2 + y^2 \leq 2.$$

Solução: Seja D a região

$$D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2; 0 \leq x^2 + y^2 \leq 2\}.$$

Primeiramente, chequemos possíveis pontos críticos interiores a região D. Temos

$$\nabla f(x,y) = (4-2x, 4-2y)$$

implicando que o único ponto crítico de f é $(2,2)$, o qual não é um ponto interior a D. Portanto, o máximo (resp. mínimo) ocorrerão na fronteira $x^2 + y^2 = 2$. **(0.8)**

Agora, usaremos o Método dos Multiiplicadores de Lagrange com $g(x,y) = x^2 + y^2$ (e nível $k = 2$) para encontrar tais pontos críticos na fronteira. Assim, $\nabla g(x,y) = (2x, 2y)$ e note que $\nabla g(x,y) = (0,0)$ somente em $(x,y) = (0,0)$ o qual não se encontra na fronteira. Portanto, a analise se reduzirá a estudar o seguinte sistema (para algum $\lambda \in \mathbb{R}$)

$$\begin{cases} \nabla f(x,y) = \lambda \nabla g(x,y), \\ x^2 + y^2 = 2 \end{cases}$$

o qual se traduz em

$$\begin{cases} 4 - 2x = 2x\lambda, \\ 4 - 2y = 2y\lambda, \\ x^2 + y^2 = 2. \quad (\mathbf{0.6}) \end{cases}$$

Portanto, ao multiplicarmos a primeira equação por x e a segunda por y obtemos

$$(4-2x)y = 2xy\lambda = (4-2y)x.$$

Assim,

$$4y = 4x \quad \Rightarrow \quad x = y$$

Ao substituirmos $y = x$ em $x^2 + y^2 = 2$ obtemos $2x^2 = 2$ ou seja, $x = \pm 1$. Portanto, os pontos críticos restritos a fronteira são $(1,1)$ e $(-1,-1)$. **(0.6)**

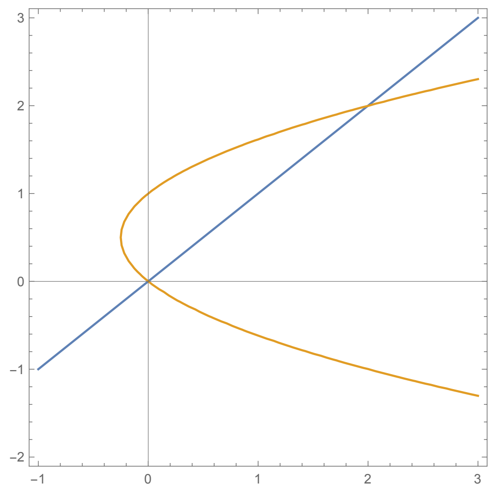
Finalmente, ao avaliarmos f em cada um desses pontos obtemos $f(1,1) = 6$ (o qual será o valor máximo) e $f(-1,-1) = -10$ (o qual será o valor mínimo). **(0.5)**

Questão 3. (2,5 pontos) Determine o volume do sólido abaixo do paraboloide $z = 3x^2 + y^2$ e acima da região no plano xy delimitada pelas curvas $y = x$ e $x = y^2 - y$.

Solução: Observe que

$$y = y^2 - y \Leftrightarrow y = 0 \text{ ou } y = 2.$$

Assim, os pontos de intersecção das curvas $y = x$ e $x = y^2 - y$ são $(0, 0)$ e $(2, 2)$. **(0.5)** Um esboço das duas curvas é dado na figura abaixo.



Note também que entre os pontos $(0, 0)$ e $(2, 2)$ temos que $y < y^2 - y$ e logo, a curva $y = x$ está abaixo da curva $x = y^2 - y$. Portanto, queremos calcular o volume abaixo do paraboloide e acima da *região do tipo II* dada por

$$D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2; 0 \leq y \leq 2,\ \ y^2 - y < x < y\}. \quad \mathbf{(0.8)}$$

Logo, o volume do sólido em questão é

$$\begin{aligned}
V &= \int_0^2 \int_{y^2-y}^{y} (3x^2 + y^2) dx dy \quad \mathbf{(0.4)} \\
&= \int_0^2 \left(x^3 + y^2 x\right) \Big|_{x=y^2-y}^{x=y} dy \\
&= \int_0^2 [y^3 + y^3 - (y^2 - y)^3 - y^2(y^2 - y)] dy \\
&= \int_0^2 [2y^3 - y^6 + 3y^5 - 3y^4 + y^3 - y^4 + y^3] dy \\
&= \int_0^2 [-y^6 + 3y^5 - 4y^4 + 4y^3] dy \\
&= \left[-\frac{y^7}{7} + \frac{3y^6}{6} - \frac{4y^5}{5} + y^4\right]_0^2 \\
&= -\frac{128}{7} + 32 - \frac{128}{5} + 16 \\
&= \frac{144}{35}. \quad \mathbf{(0.8)}
\end{aligned}$$

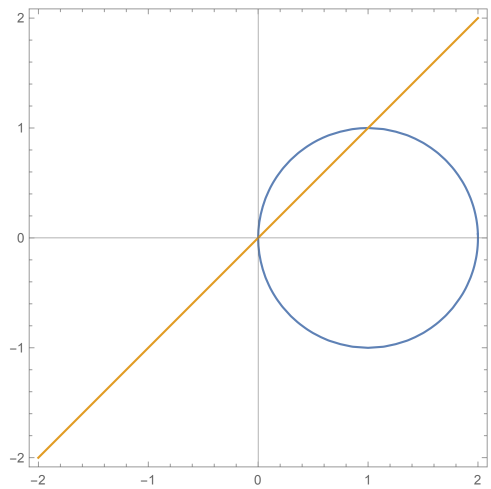
Questão 4. (2,5 pontos) Use coordenadas polares para calcular a integral

$$\iint_D xy\,dA$$

onde

$$D = \left\{(x,y) : x^2 + y^2 \leq 2x \text{ e } x \geq y\right\}.$$

Solução: Observe que a desigualdade $x^2+y^2 \leq 2x$ pode ser reescrita na forma $(x-1)^2+y^2 \leq 1$, ou seja, representa a região do círculo de centro $(1,0)$ e raio 1. Veja figura abaixo.



Em coordenadas polares,

$$x^2 + y^2 \leq 2x \;\Leftrightarrow\; r^2 \leq 2r\cos\theta \;\Leftrightarrow\; r \leq 2\cos\theta \;\text{ e }\; \cos\theta \geq 0.$$

Além disso,

$$x \geq y \;\Leftrightarrow\; r\cos\theta \geq r\sin\theta \;\Leftrightarrow\; \cos\theta \geq \sin\theta. \quad \textbf{(0.7)}$$

Usando que $\cos\theta \geq 0$ esta última desigualdade é válida se $\theta \in [0,\pi/4] \cup [3\pi/2, 2\pi]$ ou, equivalentemente, $\theta \in [-\pi/2, \pi/4]$. Portanto, em coordenadas polares temos

$$D = \left\{(r,\theta);\; -\frac{\pi}{2} \leq \theta \leq \frac{\pi}{4},\;\; 0 \leq r \leq 2\cos\theta\right\}. \quad \textbf{(0.8)}$$

Com isso,

$$\begin{aligned}
\iint_D xy\,dA &= \int_{-\pi/2}^{\pi/4}\int_0^{2\cos\theta} r\cos\theta\, r\sin\theta\, r dr d\theta \quad \textbf{(0.5)}\\
&= \int_{-\pi/2}^{\pi/4}\int_0^{2\cos\theta} r^3\cos\theta\sin\theta dr d\theta\\
&= \int_{-\pi/2}^{\pi/4} \cos\theta\sin\theta\left(\frac{r^4}{4}\right)\Big|_{r=0}^{r=2\cos\theta} d\theta\\
&= 4\int_{-\pi/2}^{\pi/4}\cos^5\theta\sin\theta\,d\theta \qquad (\text{mudança de variável: } u = \cos\theta)\\
&= -4\int_0^{\sqrt{2}/2} u^5\,du\\
&= -\frac{1}{12}. \quad \textbf{(0.5)}
\end{aligned}$$