Exercício. Encontre os valores de α para os quais (i) o sistema não tem solução, (ii) o sistema tem infinitas soluções (apresentar todas as soluções) e (iii) o sistema tem uma única solução (apresentar a única solução):

$$\begin{cases} x + 2y - 3z = 4 \\ 3x - y + 5z = 2 \\ 4x + y + (\alpha^2 - 14)z = \alpha + 2. \end{cases}$$

Solução. Note que as variáveis do problema são: x, y e z. O valor α é apenas um parâmetro. Assim, vamos olhar para a matriz aumentada do respectivo sistema:

$$[A|B] = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -3 & 4 \\ 3 & -1 & 5 & 2 \\ 4 & 1 & \alpha^2 - 14 & \alpha + 2 \end{array}\right).$$

Prosseguimos aplicando o Método de Gauss-Jordan para resolver o sistema linear:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -3 & 4 \\ 3 & -1 & 5 & 2 \\ 4 & 1 & \alpha^2 - 14 & \alpha + 2 \end{array}\right) \underset{L_2 \leftarrow L_2 - 3L_1}{\sim} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -3 & 4 \\ 0 & -7 & 14 & -10 \\ 4 & 1 & \alpha^2 - 14 & \alpha + 2 \end{array}\right)$$

$$\underset{L_3 \leftarrow L_3 - 4L_1}{\sim} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -3 & 4 \\ 0 & -7 & 14 & -10 \\ 0 & -7 & \alpha^2 - 2 & \alpha - 14 \end{array}\right)$$

$$\underset{L_2 \leftarrow -(1/7)L_2}{\sim} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -3 & 4 \\ 0 & 1 & -2 & 10/7 \\ 0 & -7 & \alpha^2 - 2 & \alpha - 14 \end{array}\right)$$

$$\underset{L_3 \leftarrow L_3 + 7L_2}{\sim} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -3 & 4 \\ 0 & 1 & -2 & 10/7 \\ 0 & 0 & \alpha^2 - 16 & \alpha - 4 \end{array}\right)$$

$$\underset{L_1 \leftarrow L_1 - 2L_2}{\sim} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 8/7 \\ 0 & 1 & -2 & 10/7 \\ 0 & 0 & \alpha^2 - 16 & \alpha - 4 \end{array}\right) (*).$$

Neste momento, percebemos que precisamos dividir a última linha da matriz pelo valor $(\alpha^2 - 16)$ para conquistar o valor 1 no lugar de $(\alpha^2 - 16)$. Entretanto, só podemos fazer uma divisão quando este número é diferente de zero. Em outras palavras, **não existe divisão por zero**! Logo, se quisermos que a matriz identidade I_3 apareça no lado esquerdo da matriz aumentada, devemos ter $\alpha^2 - 16 \neq 0$. Portanto, $\alpha \neq 4$ e $\alpha \neq -4$. Analisemos então este caso.

Solução Única ($\alpha \neq 4$ e $\alpha \neq -4$)

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 8/7 \\ 0 & 1 & -2 & 10/7 \\ 0 & 0 & \alpha^2-16 & \alpha-4 \end{array}\right) \underset{L_3 \leftarrow \frac{1}{\alpha^2-16}L_3}{\sim} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 8/7 \\ 0 & 1 & -2 & 10/7 \\ 0 & 0 & 1 & 1/(\alpha+4) \end{array}\right)$$
$$\underset{L_2 \leftarrow L_2+2L_3}{\sim} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 8/7 \\ 0 & 1 & 0 & 2/(\alpha+4)+10/7 \\ 0 & 0 & 1 & 1/(\alpha+4) \end{array}\right)$$
$$\underset{L_1 \leftarrow L_1-L_3}{\sim} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & -1/(\alpha+4)+8/7 \\ 0 & 1 & 0 & 2/(\alpha+4)+10/7 \\ 0 & 0 & 1 & 1/(\alpha+4) \end{array}\right).$$

Portanto, a única solução é dada por:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1/(\alpha+4)+8/7 \\ 2/(\alpha+4)+10/7 \\ 1/(\alpha+4) \end{pmatrix}.$$

Observe que α não é uma variável, assim, α não é uma variável livre. Logo, a solução é única e se escreve em função de α.

Sem Solução ($\alpha = -4$)

Observe que neste caso a matriz em (*) fica

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 8/7 \\ 0 & 1 & -2 & 10/7 \\ 0 & 0 & 0 & -8 \end{array}\right).$$

Logo, a última linha nos dá o absurdo $0 = -8$. Portanto, o sistema não tem solução no caso em que $\alpha = -4$.

Infinitas Soluções ($\alpha = 4$)

Observe que neste caso a matriz em (*) fica

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 8/7 \\ 0 & 1 & -2 & 10/7 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right).$$

Assim, o sistema linear associado à matriz aumentada acima é:

$$\left\{\begin{array}{ccccccc} x & + & 0y & + & z & = & 8/7 \\ 0x & + & y & - & 2z & = & 10/7. \end{array}\right.$$

Da primeira equação linear, temos $z = 8/7 - x$. Substituindo na segunda equação, segue que $y = 26/7 - 2x$. Logo, o conjunto solução deste sistema é dado por

$$\left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} : y = 26/7 - 2x \text{ e } z = 8/7 - x \right\}.$$

Assim, o sistema tem infinitas soluções.

Exercício Complementar. Determinar os valores de α e β para os quais o sistema tem (i) nenhuma solução, (ii) infinitas soluções (apresentar todas as soluções) e (iii) única solução (apresentar a única solução):

$$\left\{ \begin{array}{rcrcrcl} x_1 & + & 4x_2 & + & 3x_3 & = & 10 \\ 2x_1 & + & 7x_2 & - & 2x_3 & = & 10 \\ x_1 & + & 5x_2 & + & \alpha x_3 & = & \beta. \end{array} \right.$$