1. a) PARA CALCULAR O VOLUME DA REGIÃO, USAMOS A SEGUINTE INTEGRAL TRIPLA:

$$V = \iiint_E dV = \int_0^2 \int_0^1 \int_0^{4-x-y} dz\, dy\, dx$$
$$= \int_0^2 \int_0^1 (4-x-y)\, dy\, dx$$
$$= \int_0^2 \left(4 - x - \left(\frac{y^2}{2}\right)\Big|_{y=0}^{y=1}\right) dx$$
$$= \int_0^2 \left(4 - x - \frac{1}{2}\right) dx$$
$$= \int_0^2 \left(\frac{7}{2} - x\right) dx = \left(\frac{7x}{2} - \frac{x^2}{2}\right)\Big|_0^2 = 7 - 2 = 5$$

$\Rightarrow \boxed{V = 5 \text{ (UNIDADES DE VOLUME)}}$

b) $I = \int_C F\, dr$ PARA $F = (z, xy, -y^2)$ E

C DADA POR $r(t) = (t^2, t, \sqrt{t})$ E $0 \leq t \leq 1$

PELA DEFINIÇÃO DE INTEGRAL DE LINHA, TEMOS:

$$\int_C F\, dr = \int_a^b F(r(t)) \cdot r'(t)\, dt$$
$$= \int_0^1 F(t^2, t, \sqrt{t}) \cdot \left(2t, 1, \frac{1}{2\sqrt{t}}\right)$$
$$= \int_0^1 (\sqrt{t}, t^3, -t^2) \cdot \left(2t, 1, \frac{1}{2\sqrt{t}}\right) dt$$
$$= \int_0^1 \left(2t\sqrt{t} + t^3 + \frac{(-t^2)}{2\sqrt{t}}\right) dt$$
$$= \int_0^1 \left(2t^{\frac{3}{2}} + t^3 - \frac{1}{2} t^{\frac{3}{2}}\right) dt$$
$$= 1,5 \left(\frac{2t^{\frac{5}{2}}}{5}\right)\Big|_{t=0}^{t=1} + \left(\frac{t^4}{4}\right)\Big|_{t=0}^{t=1}$$
$$= 1,5 \cdot \frac{2}{5} + \frac{1}{4} = \frac{3}{5} + \frac{1}{4} = \frac{12}{20} + \frac{5}{20} = \frac{17}{20}$$

$\Rightarrow \cancel{\boxed{I = \frac{5}{4}}}$

$\Rightarrow \boxed{I = \frac{17}{20}}$

PARTE 1: PROVAR QUE F É CONSERVATIVO

2. $F = (e^x \cos(y) + yz \,,\quad xz - e^x \operatorname{sen}(y) \,,\quad xy + z)$

OBSERVE QUE AS COMPONENTES DE F TÊM DERIVADAS PARCIAIS CONTÍNUAS (OU SEJA, PERTENCEM A CLASSE C1), POIS SÃO COMBINAÇÕES LINEARES DE FUNÇÕES POLINOMIAIS, EXPONENCIAIS E TRIGONOMÉTRICAS.

ENTÃO: $\boxed{\operatorname{rot}(F) = 0 \rightarrow F \text{ é conservativo}}$

$$\operatorname{rot}(F) = \begin{vmatrix} i & j & k \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ e^x \cos(y) + yz & xz - e^x \operatorname{sen}(y) & xy + z \end{vmatrix}$$

$$= (x - x)\,i - (y - y)\,j + (z - z)\,k$$

$$= (0, 0, 0) = 0$$

PORTANTO, O CAMPO F É CONSERVATIVO

PARTE 2: ACHAR A FUNÇÃO POTENCIAL h DE F

F É CONSERVATIVO PELA PARTE 1, ENTÃO PELO TEOREMA FUNDAMENTAL DAS INTEGRAIS DE LINHA: $\exists\, h$ TAL QUE $\nabla h = F$

$$\frac{\partial h}{\partial x} = e^x \cos(y) + yz \Rightarrow \int \partial h = \int (e^x \cos(y) + yz)\,\partial x \Rightarrow h = e^x \cos(y) + xyz + K_1(y,z)$$

$$\frac{\partial h}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y}\left(e^x \cos(y) + xyz + K_1(y,z)\right) = xz - e^x \operatorname{sen}(y) + \frac{\partial}{\partial y} K_1(y,z) = xz - \operatorname{sen}(y) e^x$$

$$\Rightarrow K_1(y,z) = K_2(z)$$

$$\frac{\partial h}{\partial z} = \frac{\partial}{\partial z}\left(e^x \cos(y) + xyz + K_2(z)\right) = xy + \frac{\partial}{\partial z} K_2(z) = xy + z \Rightarrow$$

$$\Rightarrow K_2(z) = \frac{z^2}{2} + K, \quad K \in \mathbb{R}$$

A FUNÇÃO POTENCIAL DE F É $\boxed{h(x,y,z) = e^x \cos(y) + xyz + \frac{z^2}{2} + K \quad \text{para } K \in \mathbb{R}}$

3. $I = \iint_S F\, dS$ PARA $F = (xy, yz, xz)$

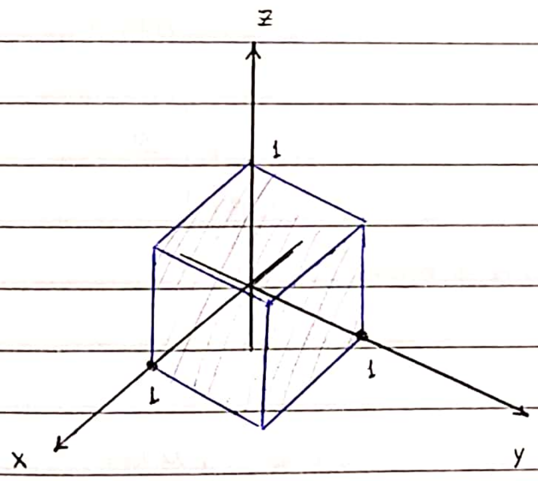
E S É A SUPERFÍCIE FRONTEIRA DO CUBO DE ARESTA 1 NO 1º OCTANTE

NOTE QUE:

- AS COMPONENTES DO CAMPO F TÊM DERIVADAS PARCIAIS CONTÍNUAS, POIS SÃO POLINOMIAIS
- A SUPERFÍCIE S É DELIMITADA POR UM SÓLIDO FECHADO E PODE SER ORIENTADA POSITIVAMENTE

ENTÃO, PELO TEOREMA DO DIVERGENTE:

$$I = \iint_S F\, dS = \iiint_E \operatorname{div}(F)\, dV = \iiint_E \left(\frac{\partial xy}{\partial x} + \frac{\partial yz}{\partial y} + \frac{\partial xz}{\partial z} \right) dV$$
$$= \iiint (y + z + x)\, dV$$



PELO DIAGRAMA AO LADO, ESTÁ EVIDENTE QUE

$$\left\{\begin{array}{l} 0 \leq x \leq 1 \\ 0 \leq y \leq 1 \\ 0 \leq z \leq 1 \end{array}\right.$$

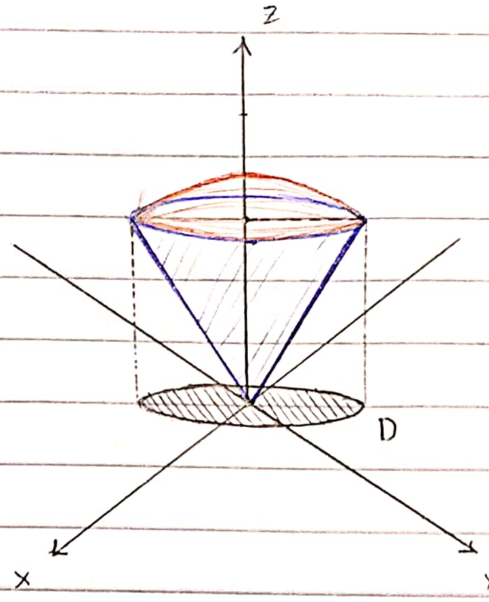
LIMITE DO OCTANTE — LIMITE DOS PLANOS

ENTÃO: $I = \int_0^1 \int_0^1 \int_0^1 (x + y + z)\, dz\, dy\, dx$

$$= \int_0^1 x\, dx + \int_0^1 y\, dy + \int_0^1 z\, dz$$
$$= 3 \left(\frac{t^2}{2} \right) \Big|_{t=0}^{t=1} = \frac{3}{2}$$

$$\boxed{I = \iint_S F\, dS = \frac{3}{2}}$$

4.



ESFERA : $x^2 + y^2 + z^2 = 2^2$

CONE : $z = \sqrt{x^2 + y^2}$

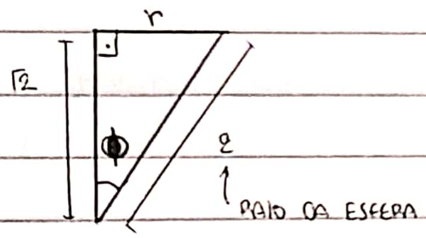
PARA DETERMINAR O DOMÍNIO D BASTA VERIFICAR A INTERSECÇÃO ENTRE O CONE E A ESFERA:

$$\begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 = 2^2 \\ z = \sqrt{x^2+y^2} \end{cases} \Rightarrow 2z^2 = 2^2$$

z É POSITIVO POIS $\mathrm{Im}(\sqrt{x}) = \mathbb{R}^+$

$$\Rightarrow z^2 = 2 \Rightarrow z = \sqrt{2}$$

AGORA É FÁCIL OBTER O RAIO DE D USANDO O TEOREMA DE PITÁGORAS



$$r^2 + (\sqrt{2})^2 = 2^2 \Rightarrow r = \sqrt{4-2} = \sqrt{2}$$

COM ISSO, FICA CLARO QUE $\cos(\phi) = \frac{\sqrt{2}}{2}$

$$\Rightarrow \phi = 45° = \frac{\pi}{4}$$

ENFIM, USANDO COORDENADAS ESFÉRICAS, TEMOS A SEGUINTE PARAMETRIZAÇÃO

$$\boxed{\begin{aligned} r(\rho, \theta, \phi) = (\ & \rho \operatorname{sen}(\phi)\cos(\theta), \\ & \rho \operatorname{sen}(\phi)\operatorname{sen}(\theta), \\ & \rho \cos(\phi)) \\ \text{PARA} \quad & 0 \leqslant \rho \leqslant 2,\ 0 \leqslant \theta \leqslant 2\pi,\ 0 \leqslant \phi \leqslant \tfrac{\pi}{4} \end{aligned}}$$

5. $I = \oint_C F\, dr$ PARA $F = (y^3, -x^3)$

E C É A CIRCUNFERÊNCIA $x^2 + y^2 = 2^2$, NO SENTIDO ANTI-HORÁRIO

NOTE QUE:

- AS COMPONENTES DE F TÊM DERIVADAS PARCIAIS CONTÍNUAS (PERTENCEM A CLASSE C1), POIS SÃO POLINOMIAIS.
- O CAMINHO C É FECHADO, SIMPLES, CONTÍNUO E ORIENTADO POSITIVAMENTE

ENTÃO, PELO TEOREMA DE GREEN:

$$I = \oint_C F\, dr = \iint_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) dA = \iint_D \left(\frac{\partial(-x^3)}{\partial x} - \frac{\partial(y^3)}{\partial y}\right) dA$$
$$= \iint_D (-3x^2 - 3y^2)\, dA = -3 \iint_D (x^2 + y^2)\, dA$$

USANDO COORDENADAS POLARES:

$$I = -3 \iint_D (x^2 + y^2)\, dA = -3 \int_0^{2\pi} \int_0^2 r^2 \cdot \underset{\substack{\uparrow \\ \text{JACOBIANO}}}{r}\, dr\, d\theta$$

$$\Rightarrow I = -3 \left(\int_0^{2\pi} d\theta\right) \left(\int_0^2 r^3\, dr\right)$$
$$\Rightarrow I = -6\pi \cdot \frac{1}{4} \cdot (r^4)\Big|_{r=0}^{r=2} = -6\pi \cdot \frac{1}{4} \cdot 16 = -24\pi$$

$$\boxed{I = \oint_C F\, dr = -24\pi}$$