Notas de AULA- Capítulo I

ORIGENS e AXIOMÁTICA da ÁLGEBRA LINEAR

1-HISTÓRIA:

-Apresente biografias reduzidas dos seguintes personagens: Ahmés (O escriba egípcio, não o Faraó!), Liu Hui, Euclides, Arquimedes, Al-Hazen, Fibonacci, Euler, Gauss, Grassmann, Peano, Hilbert, Volterra, Banach, Dirac, von Neumann, relacionadas ao tema desta matéria (*Álgebra Linear*). (Uma biografia reduzida deve incluir pelo menos o nome completo, período e região em que viveu assim como a importância de seus trabalhos relacionados à matéria. Sugestão: Consulte a Wikipedia e etc.)

2-AXIOMATIZAÇÃO VETORIAL DA ÁLGEBRA LINEAR: *Grassmann & Peano*

-Mostre "experimentalmente/graficamente", mas com argumentos geométricos que a Geometria Euclideana baseada em deslocamentos orientados definidos no espaço bi/tridimensional por trajetórias luminosas em meio homogêneo satisfazem os Axiomas Básicos de Espaço Vetorial: **1**-Comutatividade da Soma,$u+v=v+u$ **2**-Associatividade da Soma,$(u+v)+w=u+(v+w)$ **3**-Distributividade da multiplicação por escalar (número real), $\lambda(u+v)=\lambda u+\lambda v$.

OBS 1-Sugestão: Os ***Vetores*** são os ***deslocamentos*** ao longo de raios luminosos,a ***Soma*** de dois deslocamentos é a ***composição*** *sucessiva* deles na ordem indicada, o Deslocamento *Zero* o óbvio, o Negativo de um deslocamento sendo o de sentido contrario, e a ***Multiplicação*** por numero real positivo como uma ***homotetia*** do comprimento do deslocamento. (A multiplicação por número negativo $-\lambda$ define-se como homotetia λ aplicada ao respectivo deslocamento negativo).

Assim o primeiro axioma resulta da construção de um ***paralelogramo*** cuja diagonal representa as duas somas, o segundo resulta do ***polígono*** obtido com a construção indicada e o terceiro resulta da aplicação de ***semelhança*** de triângulos.

OBS 2-Portanto, tudo o que for provado a partir do conjunto de axiomas que fundamentam a estrutura de Espaço Vetorial pode ser interpretado como resultados de Geometria Euclideana e, vice-versa tudo que é válido em Geometria Euclideana pode ser provado na Estrutura de Espaços Vetoriais. Inúmeros outros exemplos satisfazem os Axiomas da Álgebra Linear sem ter nada a ver com Geometria. Assim, utilizando a descrição abstrata comum como ponte, a interpretação geométrica pode ser transportada (traduzida) para a descrição destes outros exemplos embora, originalmente, nada tivessem de geométricos. As grandes vantagens do Método Axiomático: a ***Síntese*** do conhecimento em poucos axiomas, a sua múltipla ***Representatividade*** e suas múltiplas ***Interpretações***.

OBS 3-Como a Velocidade é uma homotetia do deslocamento, ela também é um vetor, o mesmo argumento valendo para a Aceleração, a Força, o Campo Elétrico e etc. Assim, a mesma Álgebra Linear serve para descrever todos estes conceitos.

3-Descreva como obter a representação binária $\lambda=\sum_{k=-\infty}^{N} d_k 2^k$, $d_k \in \{0,1\}$ para os números reais escritos na forma decimal como: $\lambda=17{,}35$.

4a-Mostre que, sendo possível definir geometricamente o *dobro* e a *metade* de um "vetor-deslocamento" $\boldsymbol{v}$, então, em princípio, será também possível definir a multiplicação de um vetor-deslocamento por qualquer número real positivo $\lambda>0$ (Lembre-se, todo número real admite uma expansão binária $\lambda=\sum_{k=-\infty}^{N} d_k 2^k$, $d_k \in \{0,1\}$).

4b-Mostre como construir geometricamente no plano (régua e compasso) o dobro e a metade de um segmento de reta.

5-PROBLEMA DE AL-HAZEN (sec. VIII DC)

Considere um Meio Ecológico constituído do semiplano superior refratariamente heterogêneo, isto é, a velocidade da luz varia com a altura de tal forma que todas as trajetórias de raios luminosos (por conta da "lei" de Al-Hazen, sec. VIII DC ,conhecida como "lei" de Snell) são semicírculos com centro em pontos da base do semiplano. Portanto, para os habitantes deste ambiente, as "retas" são estas trajetórias semicirculares. Mostre que na Geometria "Ecológica" percebida por esses habitantes o famoso quinto axioma de Euclides (i.e., "Dada uma *reta* e um *ponto* fora desta *reta*, existe uma única *reta* paralela a ela passando por tal ponto") seria substituído pelo axioma: "Dada uma *reta* e um *ponto* fora desta *reta*, existe uma infinidade de *retas paralelas* a ela passando por tal ponto").

OBS: Os habitantes desse universo tomariam suas decisões baseadas em informações visuais utilizando uma Geometria não-Euclideana, a Geometria Euclideana seria enganosa para eles. Geometrias não-Euclideanas são todas aquelas que de uma forma ou de outra contrariam algum axioma da Geometria Euclideana e, portanto, são obviamente mais numerosas, devem ser mais comuns, mas são bem mais complicadas do que a Euclideana que trata de espaços "*planos*" ("*flats*"). Os pássaros predadores de peixes (mergulhões, martim pescador, por exemplo) "apreendem" a geometria de seu espaço ecológico de maneira não euclideana, ou jamais conseguiriam capturar seu alimento. Já nós, da espécie humana, somos enganados pelas posições de peixes e de estrelas, pois nossa cognição espacial é construída segundo a Geometria Euclideana que se fundamenta nas trajetórias luminosas em meios homogêneos. A Estrutura matemática de Espaço Vetorial é inspirada na interpretação espacial segundo a Geometria Euclideana e, portanto, tem essa característica "*plana*". As Geometrias apropriadas para a descrição do espaço macroscópico (cosmológico) são geometrias **não**-euclideanas que Poincaré e Einstein utilizaram na elaboração da Teoria de Relatividade.

Por outro lado, a "Geometria" apropriada para a descrição do espaço microscópico (subatômico) é "Euclideana plana" representada pela estrutura de *Espaço de Hilbert*, que é uma generalização da Geometria Euclideana e foi desenvolvida para o tratamento de espaços de funções de dimensão infinita pelos matemáticos David Hilbert e Stefan Banach , dentre vários outros, e aplicada à descrição da Teoria Quântica por Paul Dirac e John Von Neumann.

Enfim, as diversas "Geometrias Ecológicas" fornecem os diversos fundamentos para a descrição física do Universo em todas as suas escalas e para todas as espécies segundo os seus ambientes.

Este exemplo *não* será tema desta disciplina, mas a sua apresentação é útil para demonstrar que a Geometria Euclideana e a sua representação Vetorial não são "***verdades pétreas***" tal côo foram consideradas por milênios, mas simplesmente modelos matemáticos que podem ser, ou não, convenientes para representar o universo observado.

6-PROBLEMA DE FIBONACCI (sec.XIII DC):

Uma população de coelhos (que se reproduzem rapidamente) é recenseada apenas pelo número de fêmeas ao final de cada mês e se desenvolve da seguinte maneira: Uma coelha quando nasce permanece no estado imaturo por um mês, sem se reproduzir. Completando um mês, ela já estará fértil e produzirá (além de machos) uma coelha e isto se repete a cada mês seguinte, isto é, uma coelha a cada mês. Não havendo mortes, a questão é determinar a população de coelhas após *n* meses se começarmos a criação no mês zero com apenas uma coelha fértil. Defina $F: \mathbb{N} \to \mathbb{R}, F(k) = F_k$ como o número de coelhas no *k-ésimo* mês.

6a-Mostre que esta função satisfaz à seguinte recorrência de 2ª ordem: $F_{k+1} = F_{k+1} + F_k \text{ , } k \geq 0$.
Calcule $F(0), F(1), F(2), \dots, F(10)$.

6b-Suponha que comecemos no mês zero a criação com duas coelhas, uma fértil e outra imatura. Calcule os valores $F(0), F(1), F(2), \dots, F(10)$.

6c-Defina as funções $\varphi: \mathbb{N} \to \mathbb{R}^2, \varphi(k) = \begin{pmatrix} I(k) \\ M(k) \end{pmatrix}$ onde *I(k)="Número de coelhas imaturas no k-ésimo mês"*, *M(k)="Número de coelhas férteis no k-ésimo mês".*

Mostre que $\varphi(k+1) = A\varphi(k)$ onde *A* é uma matriz 2x2 *que deve ser determinada*.

6d-Considere um alfabeto constituído de duas letras, digamos {0,1} e defina palavras de comprimento *n* como sendo qualquer seqüencia de *n* cópias destes dois símbolos dispostos em linha. (Por exemplo

01001011 é uma palavra de comprimento 8). Defina palavras *não-confluentes* como aquelas que **não** admitem 0's adjacentes. Mostre que, se $F: \mathbb{N} \to \mathbb{R}, F(k) = F_k$ for a função que representa $F(k) =$"*Número de palavras não-confluentes de comprimento k*", então esta função satisfaz à seguinte recorrência de 2ª ordem: $F_{k+1} = F_{k+1} + F_k\ , k > 0$ (Fibonacci).

6e-Considere *k* lançamentos seguidos de uma moeda "honesta". Determine o número possível de resultados em *k* lançamentos que não ocorra duas caras seguidas.

Defina a função $F: \mathbb{N} \to \mathbb{R}, F(k) = F_k, F(k) =$"*Número de k lançamentos que não apresentem duas caras seguidas*" e mostre que $F_{k+1} = F_{k+1} + F_k\ , k > 1$. Determine a probabilidade de que em *k* lançamentos seguidos não ocorram duas caras seguidas em termos da função *F*.(*Obs: Obviamente há* 2^k *possiveis resultados para este experimento*)

6f-Mostre que o conjunto de soluções da equação recursiva de Fibonacci forma um sub-Espaço Vetorial $\mathcal{F}$ do Espaço Vetorial que consiste no conjunto das funções $\mathcal{E} = \{\text{f}: \mathbb{N} \to \mathbb{R}\}$ com elemento zero representado pela função nula e o negativo de uma função, a Soma de duas funções e a multiplicação de uma função por número real são definidas ponto a ponto.

OBS 1: O Modelo matemático de Fibonacci exemplifica bem o conceito de "Sistema Linear", o qual "***alimentado***" com um conjunto de informações (no caso, duas, a sub-população de coelhas imaturas e a sub-população de coelhas férteis) "***responde"*** com outras duas informações, no caso do mesmo tipo.

OBS 2-O modelo também é um protótipo de Sistemas Dinâmicos em tempo discreto, pois a informação alimentada pode ser interpretada como o estado do sistema em um ***instante*** e a sua resposta como o estado do sistema no ***instante seguinte***. A matriz *A* , neste caso, tem um papel de "***motor***" que propulsiona o sistema, de estado em estado a cada "*tic* do relógio" descrevendo assim uma trajetória no Espaço de estados do sistema, identificável, no caso, ao $\mathbb{R}^2$.

OBS 3-O Modelo populacional de Fibonacci não foi levado muito a sério por ter sido apresentado como uma curiosidade, ou quebra-cabeça ao longo de séculos. Entretanto, ele contém os princípios básicos da demografia que somente foram estabelecidos em 1754 por Leonhard Euler (sempre ele!) e que hoje são amplamente aplicados nesta área. O Modelo de Euler descreve a dinâmica discreta de uma população cujo estado é determinado por suas sub-populações de faixas etárias fixadas (digamos de cinco em cinco anos) de tal forma que a taxa média de fertilidade e de mortalidade em cada uma destas faixas é bem representativa. Portanto, em vez de duas sub-populações como em Fibonacci, o modelo de Euler utiliza 20 (ou mais) subpopulações e a matriz que "propulsiona" o sistema é, conseqüentemente, de ordem 20x20, ou maior. (Ref: H.Caswell).

7-PROBLEMA DE ARQUIMEDES (sec. III AC):

7a-Descreva em poucas palavras o relato sobre a coroa do rei Hieron de Siracusa. (Referência específica para a/os mais curiosas/os: Roberto Andrade Martins-*Arquimedes e a coroa do rei*, Caderno de Ensino da Física 17(2000) https://doi.org/10.5007/%25x)

Estenda a tarefa original de Arquimedes e suponha que o rei suspeite que o artesão tenha utilizado não apenas ***ouro*** (1) e ***prata*** (2), mas também um outro ingrediente mais barato, digamos, ***cobre*** (3)na confecção da coroa.

O Método não destrutivo de investigação de Arquimedes consiste, em linhas gerais, na aplicação de "***testes lineares***" com respeito às massas dos ingredientes da coroa, isto é,

(**1**)A resposta particular de cada elemento constituinte a um teste é **proporcional** à sua quantidade de massa $\{x_k\}_{1\le k\le 3}$ presente na coroa e

(**2**) A resposta total é resultante de uma "*superposição*" (soma) das respectivas respostas características de cada elemento constituinte, isto é, **Não** ocorre **interação/interferência** entre as suas respostas.

Portanto, ***Proporcionalidade*** e ***Superposição*** (***Não-Interação***) são condições fundamentais para a utilidade de um teste.

Por exemplo, se o teste é o peso (ação da gravidade) cada constituinte "responde independentemente" com um peso gx_k , de tal forma que a resposta total será dada pela expressão: $l_p(x) = l_p(x_1, x_2, x_3) = gx_1 + gx_2 + gx_3$. Se o teste é o volume, a resposta de cada ingrediente será proporcional à sua massa de acordo com o coeficiente "volume específico" $\{v_k\}_{1\leq k\leq 3}$ e a resposta total será dada pela expressão: $l_v(x) = l_v(x_1, x_2, x_3) = v_1x_1 + v_2x_2 + v_3x_3$.

Se Arquimedes tivesse à sua disposição a tecnologia atual, ele poderia lançar mão de infindáveis *testes lineares* $l_\lambda(x)$, por exemplo, de espectroscopia. Nestes casos uma radiação (de comprimento de onda λ) é incidida sobre uma amostra cuja resposta total registrada pelo instrumento, é a superposição (soma) das respostas individuais de cada ingrediente (sem interferências mútuas). Além disso, a intensidade da resposta de cada ingrediente é especifica para λ e proporcional à sua respectiva massa na amostra. Portanto, para cada λ temos um teste *linear*, o que disponibiliza uma enorme quantidade deles.

7b-Mostre que, por outro lado, qualquer sistema de *m* equações lineares a *n* incógnitas, $Ax = b$, pode ser interpretado como um conjunto de *m* testes lineares em uma amostra de *n* ingredientes sendo cada valor b_k a resposta total de uma superposição de respostas independentes de cada ingrediente.

7c-Descreva em termos de sistemas lineares o problema matemático que Arquimedes deveria resolver caso ele lançasse mão de uma enorme quantidade de testes lineares, muito maior do que a quantidade de ingredientes presentes na coroa. (Lembre-se do Método de Eliminação de Gauss –sec. XIX DC).

7d-Suponha que três testes lineares sejam feitos por Arquimedes: (1) Peso utilizando a gravidade g na no nível do mar, (2) Peso utilizando a gravidade G no alto do monte Olimpo, (3) Volume ("*Eureka*!"). Seria possível determinar a constituição de ouro, prata e cobre da coroa com estes três testes? Descreva a questão sob o ponto de vista matemático.

7e-Suponha que Arquimedes utilize apenas dois testes, de peso e volume, e que a coroa, além dos dois principais ingredientes (ouro, prata) que ele e o rei supunham ter, também apresentasse (como é de se esperar) uma enorme variedade de impurezas, mas em pequenas quantidades com relação às massas de ouro e a prata . Qual seria a influência deste fato no resultado final em termos matemáticos?

OBSERVAÇÃO: *DISPOSITIVOS LINEARES*

O Problema de Arquimedes e o Problema de Fibonacci , assim como inúmeros outros, são representativos de questões que (bem) mais tarde (segunda metade do sec. XX) foram denominadas ***Sistemas Lineares*** e representam *Dispositivos* "***Caixa Preta***" que recebem em seus ***n*** "terminais de entrada" uma "*batelada*" de *n* sinais como ***estímulos*** ("*input*" "*entrada*")e que resultam em uma ***resposta*** ("*output*" "*saída*") também em "batelada"em ***m*** terminais de saída. (*Algumas entradas ou saídas podem ser nulas, mas todas estão ativadas*). Tanto as entradas quanto as saídas são representadas por números, mas também podem ser funções ou outros objetos matemáticos, desde que possam ser "*somados*", uma operação que na linguagem da área é denominada "***Superposição***". A única (e fundamental) propriedade que caracteriza estes sistemas é a "Linearidade" ou o "***Principio de Superposição***" que em termos gerais representa a seguinte hipótese: "*O processamento do efeito de cada entrada isolada(que resulta em uma resposta com saídas nos* ***m*** *terminais) é independente das outras, ou seja,* ***não há interação*** *interna entre elas e, portanto a resposta total de um conjunto simultâneo de entradas isoladas é uma superposição dos respectivos efeitos"*. A possibilidade de "*superpor*" os estímulos e saídas dá às entradas e respostas um caráter de Espaços Vetoriais associáveis , rspectivamente a $\mathbb{R}^n$ *e* $\mathbb{R}^m$, enquanto que o Principio de Superposição do Dispositivo faz dele uma Transformação Linear que é representável por uma matriz $M_{mn}(\mathbb{R})$.

A grande parte destes *Dispositivos* são, na verdade, ***Não lineares*** (o que significa a existência de interações entre os sinais) onde, portanto não vale o Principio de Superposição. Entretanto, se o dispositivo responde com uma saida *zero* a uma entrada *nula* e tem comportamento suave (diferenciável) é possivel analisá-lo próximo desta situação de repouso aproximando-o por uma função linear, utilizando para isto a idéia fundamental do Cálculo Diferencial segundo a concepção de Leibniz:

$F(h) \approx F(0) + \frac{\partial F}{\partial x}(0)h = Ah$, onde $A = \left(\frac{\partial F_k}{\partial x_j}\right)_{1 \le k \le m\,;\,1 \le j \le n}(0)$ é a respectiva matriz Jacobiana. Esta estratégia explica a enorme aplicabilidade dos Sistemas Lineares em Engenharia, Física e Economia.

…………………………………………………….

AXIOMAS que Fundamentam A ESTRUTURA DE ESPAÇO VETORIAL REAL

Um ***Espaço Vetorial Real*** $\{E, 0, +, \ \cdot, \mathbb{R}\}$ é constituído de:

1)Um conjunto E que contem um elemento especial denominado ***zero***

e denotado por 0

2)Uma Operação Binária denominada ***Soma*** e denotada pelo símbolo “ ***+*** ” que a cada par de vetores $u, v \in E$ associa um vetor denotado por $(u + v) \in E$

3)Uma Operação denominada ***Homotetia*** (Ou ***Multiplicação por escalar***) que a cada número real $\lambda \in \mathbb{R}$ e a cada vetor $u \in E$ associa um vetor denotado por $\lambda u \in E$

4)Satisfazendo as seguintes propriedades: (onde $u, v, w \in E$, $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$)

4a- **Comutatividade da Soma**: $u + v = v + u$

4b-**Associatividade da Soma**: $(u + v) + w = u + (v + w)$

4c-**Neutralidade do zero**: $u + 0 = u$

4d-Existência do **elemento negativo**: Para cada $u \in E$ existe um elemento denotado por $(-u) \in E$ tal que $u + (-u) = 0$

4e-**Associatividade** $\lambda(\mu\, u) = (\lambda\mu)u$

4f- **Distributividade** à esquerda: $(\lambda + \mu)u = \lambda u + \mu u$

4g-**Distributividade** à direita: $\lambda(\ u + v) = \lambda u + \lambda v$

4h-**Neutralidade** do número 1: $1u = u$

OBSERVAÇÕES:

A ***Completude*** deste sistema de Axiomas é verificada quando mostrarmos que, de fato, os importantes espaços $\mathbb{R}^n$ estão incluídos como Modelos da Estrutura.

A ***Não Redundância*** do sistema de Axiomas pode ser verificada com Modelos *distópicos* que satisfazem todos os Axiomas exceto aquele que se pensava ser redundante. Um exemplo interessante mostra como o “ingênuo” axioma 4h) é indispensável (e, portanto, não redundante com relação ao resto deles) quando se define em $\mathbb{R}^2$ a multiplicação por escalar da forma: $\lambda(x, y) = (\lambda x, y)$ que obviamente não segue 4h) mas segue todos os outros axiomas. (verifique).

A ***Consistência*** do sistema é atestada pela consistência do Modelo matemático $\mathbb{R}^n$ que o exemplifica e não é passível de nenhuma contradição.

ESPAÇOS VETORIAIS COM ESCALARES COMPLEXOS

Um Espaço Vetorial com escalares complexos será definido, não como uma abstração de um Modelo Geométrico familiar, ou ecológico, que não existe, mas como uma ***extensão matemática*** natural do Modelo matemático mais importante da Estrutura de Espaços Vetoriais Reais, qual seja, os $\mathbb{R}^n = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ \cdots \\ x_n \end{pmatrix} ;\ x_k \in \mathbb{R} \right\}$.

Portanto, os Modelos concretos que deram origem aos Axiomas que definem a **Estrutura de Espaços Vetoriais Complexos** são dados por $\mathbb{C}^n = \left\{ \begin{pmatrix} z_1 \\ \cdots \\ z_n \end{pmatrix} ;\ z_k \in \mathbb{C} \right\}$ em que as operações são definidas de forma totalmente análoga àquelas do caso Real . A intuição geométrica que acompanha de perto a Estrutura Real não está mais presente, mas somente a sua representação matemática original que, obviamente, não é a única. É importante ressaltar, por exemplo, especialmente para quem pensa que esta generalização é apenas um exercício matemático, que a Estrutura matemática utilizada pela Teoria Quântica é exatamente um Espaço Vetorial Complexo, sendo este apenas uma de seus múltiplos Modelos "concretos".

AXIOMAS que Fundamentam a ESTRUTURA DE ESPAÇO VETORIAL COMPLEXO:

Um ***Espaço Vetorial Complexol*** $\{E, 0, +,\ \cdot\ , \mathbb{C}\}$ é constituído de:

1)Um conjunto E que contem um elemento especial denominado ***zero***

e denotado por 0

2)Uma Operação Binária denominada ***Soma*** a ser denotada (arbitrária, mas sabiamente) pelo símbolo " ***+*** " que a cada par de vetores $u, v \in E$ associa um vetor denotado por $(u + v) \in E$

3)Uma Operação denominada ***Homotetia*** (Ou ***Multiplicação por escalar***) que a cada número complexo $\alpha \in \mathbb{C}$ e a cada vetor $u \in E$ associa um vetor denotado por $\alpha u \in E$

4)Satisfazendo as seguintes propriedades: (onde $u, v, w \in E$, $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$)

4**a**- **Comutatividade da Soma**: $u + v = v + u$

4**b-Associatividade da Soma**: $(u + v) + w = u + (v + w)$

4**c-Neutralidade do zero**: $u + 0 = u$

4**d**-Existência do **elemento negativo**: Para cada $u \in E$ existe um elemento denotado por $(-u) \in E$ tal que $u + (-u) = 0$

4e-**Associatividade** $\alpha(\beta\, u) = (\alpha\beta)u$

4f- **Distributividade** à esquerda: $(\alpha + \beta)u = \alpha u + \beta u$

4g-**Distributividade** à direita: $\alpha(\, u + v) = \alpha u + \alpha v$

4h-**Neutralidade** do número 1: $1u = u$

......

Sob o ponto de vista matemático a generalização da Estrutura de Espaços Vetoriais não termina aqui, pois os escalares podem ser substituídos por elementos de uma estrutura algébrica de *Corpo* que tem aparições "concretas" mais raras e generaliza o papel multiplicador dos números (reais ou complexos). Uma outra generalização substitui os escalares numéricos por elementos de uma estrutura menos exigente com relação à possibilidade de inversão do produto denominada de *Anéis*. Estas generalizações não são temas desta disciplina, mas eventualmente citaremos algumas situações em que elas podem desempenhar um papel decisivo na resolução de problemas, especialmente relacionados às equações funcionais. Refer. G.Birkhoff-S.MacLane-*Algebra Moderna,* J.Stillwell-*Algebra,* Springer.