PEDRO SADER AZEVEDO RA: 243245

Pedro Sader Azevedo

CORRIGIR QUESTÃO 1

---

(1) SEJA $P(n)$ A PROPOSIÇÃO DE QUE $\forall n \in \mathbb{N} \setminus \{0,1\}, |A_n| = n \rightarrow$
$\exists S_n \subseteq A_n$ TAL QUE $\forall a \in A_n \setminus S_n, \exists s \in S_n, (a,s) \in R$
SENDO A_n UM CONJUNTO FINITO E S_n UM SUBCONJUNTO INDEPENDENTE COM RESPEITO A UMA RELAÇÃO SIMÉTRICA R.

PROVA POR INDUÇÃO FRACA EM n

BASE: $n = 2$

PROVA EXISTENCIAL CONSTRUTIVA:

DENOTEMOS OS DOIS ELEMENTOS DE A_2 GENERICAMENTE POR a E a'.

CASO I: $(a, a') \in R$

ESCOLHEMOS $S_2 = \{a'\}$, ENTÃO $A_2 \setminus S_2 = \{a\}$
COMO ASSUMIMOS QUE $(a,a') \in R$, $P(2)$ CLARAMENTE SE APLICA NESSE CASO.

CASO II: $(a, a') \notin R$

ESCOLHEMOS $S_2 = \{a, a'\}$ ENTÃO $A_2 \setminus S_2 = \emptyset$
COMO $S_2 = A_2$ E A_2 NÃO POSSUI ARESTAS, A IMAGEM DE R EM A_2 É DE FATO O CONJUNTO VAZIO
ENTÃO $P(2)$ TAMBÉM SE APLICA NESSE CASO.

HIPÓTESE: $P(n-1)$

PASSO: QUEREMOS PROVAR $P(n)$

SEJA $A_{n-1} = A_n \setminus \{a\}$, ONDE a É UM ELEMENTO ARBITRÁRIO DE A_n. PELA HIPÓTESE DE INDUÇÃO, EXISTE UM SUBCONJUNTO DE A_{n-1} INDEPENDENTE S_{n-1}. AGORA DEVOLVEMOS a E CONSTRUÍMOS S_n.

CASO I: $R(a) \in S_{n-1}$, ENTÃO $S_n = S_{n-1}$

CASO II: $R(a) \notin S_{n-1}$, ENTÃO $S_n = S_{n-1} \cup \{a\}$

ASSIM, PARA TODO $s \in S_n$, SE $s \neq R(s)$ ENTÃO $R(s) \in A_n \setminus S_n$ E COMO R É SIMÉTRICA ESCOLHEMOS $(R(s), s) \in R$ COMO EXEMPLO ■

(2) Seja $P(n)$ a proposição de que $\forall n \in \mathbb{N}^*$, B_n é bipartido sendo B_n o grafo cujos vértices são todas as 2^n cadeias de n bits e cujas arestas conectam as cadeias que diferem de 1 bit.

Prova por Indução Fraca em n

Base: $n = 1 \Rightarrow 2^n = 2$

os vértices de B_1 são 0 e 1 e a aresta é $\{0,1\}$. Como B pode ser particionado em $\{0\}, \{1\}$ e $B_1(0) = 1$ e $B_1(1) = 0$, então B_1 é bipartido.

Hipótese: $P(n-1)$

Passo: queremos provar $P(n)$

Seja B_n um grafo de 2^n cadeias de n-bits. Chamemos de B^1_{n-1} e B^0_{n-1} os subgrafos de B_n compostos pelos vértices que começavam com 1 e com 0 (respectivamente) mas que tiveram seu primeiro dígito removido. Assim B^1_{n-1} e B^0_{n-1} são grafos 2^{n-1} cadeias de $n-1$ bits às quais podemos aplicar a hipótese de indução e bipartir em $B^1_{n-1}\,I$, $B^1_{n-1}\,II$ e $B^0_{n-1}\,I$, $B^0_{n-1}\,II$. Para o grafo B_n prefixamos 1 como primeiro dígito nos vértices de $B^1_{n-1}\,I$ e prefixamos 0 como primeiro dígito nos vértices de $B^1_{n-1}\,II$ (assim evitamos introduzir mais dígitos em comum de tal forma que preservamos ao menos 2 bits diferentes em $B^x_{n-1}\,I$ e $B^x_{n-1}\,II$). Analogamente, prefixamos 0 aos vértices de $B^0_{n-1}\,I$ e 1 aos de $B^0_{n-1}\,I$ (invertemos a ordem de prefixação para evitar repetição de cadeias, pois $B^1_{n-1}\,I = B^0_{n-1}\,I$ e $B^1_{n-1}\,II = B^0_{n-1}\,II$). Consequentemente as uniões prefixadas de $B^1_{n-1}\,I \cup B^1_{n-1}\,II$ e $B^0_{n-1}\,I \cup B^0_{n-1}\,II$ são equivalentes às bipartições $B_n I$ e $B_n II$.

■

③ SEJA P A PROPOSIÇÃO DE QUE, SE $G=(V,E)$ É UM GRAFO AUTO-COMPLEMENTAR E $|V| \leq 50$, ENTÃO $|V| \in \{1, 4, 5, 8, 9, 12, 13, 16, 17, 20, 21 \dots\}$

PARA PROVAR P VAMOS PROVAR A PROPOSIÇÃO MAIS FORTE $Q(K)$ DE QUE $|V| \in \{v \mid v = 1+4K, K \in \mathbb{N}\} \cup \{v \mid v = 4+4K, K \in \mathbb{N}\}$.

PROVA DIRETA

PELA DEFINIÇÃO DE GRAFO COMPLEMENTAR SABEMOS QUE $G_n \cup \overline{G_n} = K_n$.
UMA DAS INVARIANTES DE GRAFOS ISOMORFOS (COMO É O CASO DE G E $\overline{G}$) É QUE ELES TEM O MESMO NÚMERO e DE ARESTAS.
COMO O NÚMERO DE ARESTAS DE K_n É O MESMO DO NÚMERO DE DIAGONAIS DE UM POLÍGONO DE n LADOS SOMADO AO NÚMERO DE LADOS TEMOS:

$$2e = \frac{n(n-2)}{2} + n = \frac{n(n-1)}{2}$$

$$\Rightarrow e = \frac{n(n-1)}{4} = \frac{n^2}{4} - \frac{n}{4}$$

O NÚMERO DE ARESTAS PRECISA SER NATURAL, O QUE OCORRE PARA MÚLTIPLOS DE 4 (EXCETO 0, POIS $|V| \neq 0$ PELA DEFINIÇÃO DE GRAFO) POIS:

$$n = 4+4K \Rightarrow e = \frac{(4+4K)(4+4K+1)}{4} = \underbrace{(1+K)}_{\in \mathbb{N}}\underbrace{(4+4K+1)}_{\in \mathbb{N}}$$

E PARA (MÚLTIPLOS DE 4) + 1 POIS:

$$n = 1+4K \Rightarrow e = \cancel{\frac{1(\overset{0}{\cancel{1}-1})}{4}} + \frac{4K(4K+1)}{4} = \underbrace{K}_{\in \mathbb{N}}\underbrace{(4K+1)}_{\in \mathbb{N}}$$

■