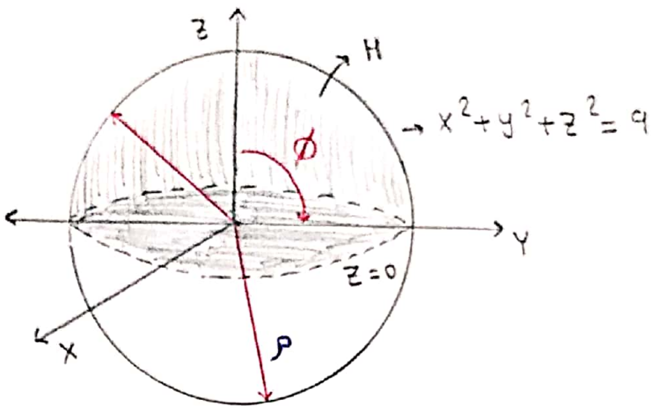
Exercício 1 Calcule utilizando coordenadas esféricas, a integral

$$I = \iiint_H (9 - x^2 - y^2)\, dV$$, onde H é o hemisfério sólido $x^2+y^2+z^2 \leq 9$

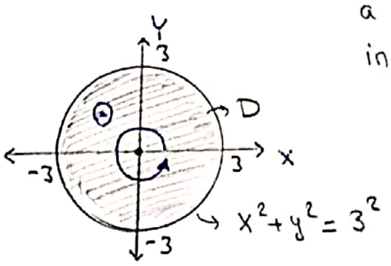
e $z \geq 0$.

Sol

Primeiro fazemos o desenho da região de integração H.



e também o desenho da projeção:



a fronteira de D é a interseção $x^2+y^2+z^2=9$

$z = 0$

$\Rightarrow x^2+y^2+0^2=9$

$x^2+y^2=3^2$

Mudança de coordenadas cartesianas a coordenadas esféricas:

$x = \rho . \operatorname{sen}\phi . \cos\theta$; $x^2+y^2+z^2=\rho^2$ Jacobiano : $\rho^2 . \operatorname{sen}\phi$

$y = \rho . \operatorname{sen}\phi . \operatorname{sen}\theta$ $x^2+y^2 = \rho^2 . \operatorname{sen}^2\phi$

$z = \rho . \cos\phi$

Encontramos os limites de integração:

$0 \leq \rho \leq 3$; $0 \leq \theta \leq 2\pi$; $0 \leq \phi \leq \frac{\pi}{2}$

Então

$$I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^3 \int_0^{2\pi} (9 - \rho^2 \operatorname{sen}^2\phi) . \rho^2 . \operatorname{sen}\phi \; d\theta\, d\rho . d\phi$$

$$I = 2\pi \int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^3 (9 . \rho^2 . \operatorname{sen}\phi - \rho^4 . \operatorname{sen}^3\phi)\, d\rho . d\phi$$ pois $\int_0^{2\pi} d\theta = 2\pi$

$$* \int_0^3 (9.\rho^2.\text{sen}\phi - \rho^4.\text{sen}^3\phi)\, d\rho = \int_0^3 9\rho^2.\text{sen}\phi\, d\rho - \int_0^3 \rho^4.\text{sen}^3\phi\, d\rho$$

$$= 9\,\text{sen}\phi \int_0^3 \rho^2\, d\rho - \text{sen}^3\phi \int_0^3 \rho^4\, d\rho$$

$$= 9.\text{sen}\phi . \frac{\rho^3}{3}\Big|_0^3 - \text{sen}^3\phi\, \frac{\rho^5}{5}\Big|_0^3 = 3.\text{sen}\phi . 27 - \text{sen}^3\phi . \frac{3^5}{5}$$

$$= 81.\text{sen}\phi - \frac{243}{5}\text{sen}^3\phi$$

$$I = 2\pi \int_0^{\frac{\pi}{2}} (81.\text{sen}\phi - \frac{243}{5}.\text{sen}^3\phi)\, d\phi$$

$$I = 2\pi \left\{ \int_0^{\frac{\pi}{2}} 81.\text{sen}\phi\, d\phi - \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{243}{5}.\text{sen}^3\phi\, d\phi \right\}$$

$$I = 2\pi \left\{ 81.(-\cos\phi)\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} - \frac{243}{5}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \text{sen}^3\phi\, d\phi \right\}$$

$$* \int_0^{\frac{\pi}{2}} \text{sen}^3\phi\, d\phi = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \text{sen}^2\phi.\text{sen}\phi\, d\phi = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (1-\cos^2\phi).\text{sen}\phi\, d\phi$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\text{sen}\phi - \cos^2\phi.\text{sen}\phi)d\phi = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \text{sen}\phi\, d\phi - \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2\phi\, \text{sen}\phi\, d\phi$$

$\omega = \cos\phi$

$d\omega = -\text{sen}\phi\, d\phi$

$$= -\cos\phi\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} + \int \omega^2.d\omega$$

$$= 1 + \frac{\omega^3}{3} = 1 + \frac{\cos^3\phi}{3}\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = 1 - \frac{1}{3} = \frac{2}{3}$$

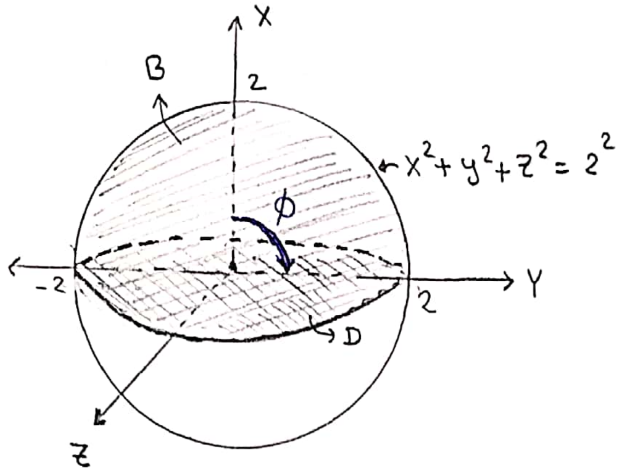
Portanto, reemplazando em I:

$$I = 2\pi\left\{ 81(-1) - \frac{\cancel{243}^{81}}{5}.\left(\frac{2}{\cancel{3}_1}\right)\right\} = \frac{486}{5}\pi$$

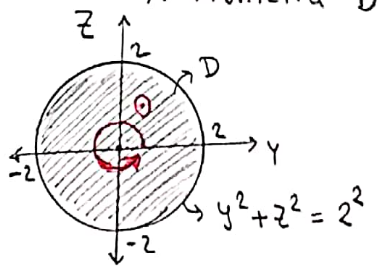
Exercício 2. Calcule a integral $I = \iiint_B x \, dx\,dy\,dz$, onde B é o conjunto: $x \geq 0$ e $x^2+y^2+z^2 \leq 4$.

Sol

Vamos fazer o desenho da região de Integração B :



Consideramos só a parte de acima da esfera de raio 2. Também desenhamos a projeção de B no plano ZY.



A fronteira D é a interseção de

$$x^2+y^2+z^2=4$$
$$x = 0$$

$$\Rightarrow \quad 0^2+y^2+z^2=4$$

$$\Rightarrow \quad y^2+z^2=4$$

Como nossa região B é a mitade de uma esfera então nos utilizamos coordenadas esféricas. olha que Z faz o papel de X e X faz o papel de Z. Então

$$z = \rho . \operatorname{sen}\phi . \cos\theta$$
$$y = \rho . \operatorname{sen}\phi . \operatorname{sen}\theta \qquad \text{e} \qquad 0 \leq \rho \leq 2, \quad 0 \leq \theta \leq 2\pi, \quad 0 \leq \phi \leq \frac{\pi}{2}$$
$$x = \rho . \cos\phi$$

Jacobiano: $\rho^2 \operatorname{sen}\phi$

Então

$$I = \int_0^2 \int_0^{2\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \rho . \cos\phi . \rho^2 . \operatorname{sen}\phi \; d\phi \, d\theta \, d\rho$$

$$I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^{2} \int_0^{2\pi} \rho^3 . \cos\phi . \operatorname{sen}\phi \, d\theta \, d\rho . d\phi$$

Então $$I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^{2} \rho^3 . \cos\phi . \operatorname{sen}\phi \int_0^{2\pi} d\theta \; d\rho \, d\phi$$

$$I = 2\pi \int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^{2} \rho^3 . \cos\phi . \operatorname{sen}\phi \, d\rho . d\phi$$

$$I = 2\pi \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos\phi \operatorname{sen}\phi \int_0^{2} \rho^3 d\rho . d\phi \;\; = 2\pi \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos\phi . \operatorname{sen}\phi . \frac{\rho^4}{4} \Big|_0^2 d\phi$$

$$I = 8\pi \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos\phi . \operatorname{sen}\phi \, d\phi \;\; = 8\pi \int \omega \, d\omega \; = 8\pi \frac{\omega^2}{2}$$

$$\omega = \operatorname{sen}\phi \;\; \Rightarrow \;\; d\omega = \cos\phi \, d\phi$$

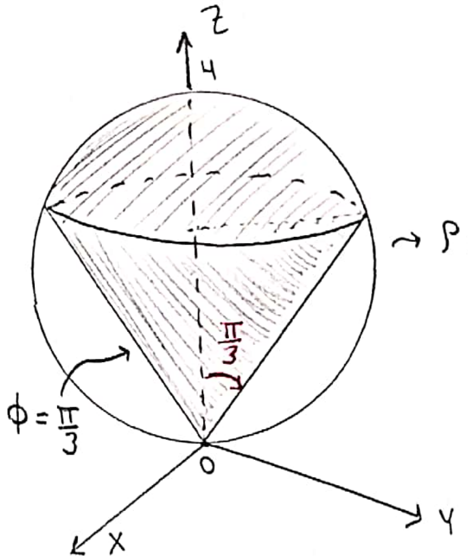
$$I = 4\pi . (\operatorname{sen}\phi) \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} \; = 4\pi (\operatorname{sen}\tfrac{\pi}{2} - \operatorname{sen} 0) \; = 4\pi$$

Observação, vocês podem utilizar Também coordenadas cilíndricas para a resolução da Integral.

Exercício 3.. Encontre o Volume do solido que fica acima do Cone $\phi = \frac{\pi}{3}$ e abaixo da esfera $\rho = 4.\cos\phi$

Sol

Fazendo o desenho



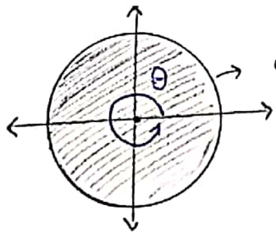
A equação Cartesiana da esfera é:

$$\rho^2 = 4\rho.\cos\phi$$

$$x^2+y^2+z^2 = 4z$$

$$x^2+y^2+(z-2)^2 = 2^2$$

Como nossa região de integração é parte de uma esfera, então nos utilizamos coordenadas esféricas. Olhemos a projeção no plano XY.



a fronteira é a interseção do cone com a esfera

Então, levando pra coordenadas esfericas Temos:

$x = \rho.\operatorname{sen}\phi.\cos\theta$

$y = \rho.\operatorname{sen}\phi.\operatorname{sen}\theta$

$z = \rho.\cos\phi$

$x^2+y^2+z^2 = \rho^2$

Jacobiano: $\rho^2.\operatorname{sen}\phi$

$0 \leq \phi \leq \frac{\pi}{3}$; $0 \leq \theta \leq 2\pi$ e $0 \leq \rho \leq 4\cos\phi$

$$\Rightarrow \quad V = \int_0^{2\pi}\int_0^{\frac{\pi}{3}}\int_0^{4.\cos\phi} \rho^2.\operatorname{sen}\phi \, d\rho.d\phi\, d\theta$$

$$V = \int_0^{2\pi}\int_0^{\frac{\pi}{3}} \operatorname{sen}\phi \left(\int_0^{4.\cos\phi} \rho^2 d\rho\right) d\phi\, d\theta = \int_0^{2\pi}\int_0^{\frac{\pi}{3}} \operatorname{sen}\phi . \frac{\rho^3}{3}\Big|_0^{4.\cos\phi} d\phi\, d\theta$$

$$V = \int_0^{2\pi}\int_0^{\frac{\pi}{3}} \operatorname{sen}\phi . \frac{64}{3}\cos^3\phi\, d\phi\, d\theta = -\frac{64}{3}\int_0^{2\pi} \frac{\cos^4\phi}{4}\Big|_0^{\frac{\pi}{3}} d\theta = \frac{\cancel{16}}{\cancel{3}_1} . \frac{\cancel{15}^5}{\cancel{16}_1}\int_0^{2\pi} d\theta$$

$$V = 10\pi$$

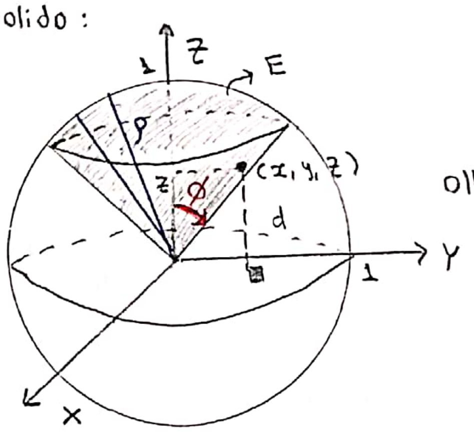
Exercício 4... Calcule a massa do sólido cujos pontos de coordenadas (x,y,z) satisfazem $x^2+y^2+z^2 \leq 1$ e $z \geq \sqrt{x^2+y^2}$. Sabendo que a densidade em cada ponto é igual à distância deste ponto ao plano XY.

Sol

Lembremos como encontrar a massa de um sólido:

$$m = \iiint_E d(x,y,z)\, dV$$; Em que $d(x,y,z)$ é a função densidade.

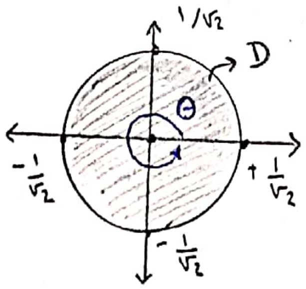
Fazemos o desenho do sólido:



Olhe que a função densidade $d(x,y,z) = z$

Utilizando coordenadas esféricas: $0 \leq \rho \leq 1$.

Para ver a variação de θ nós olhamos a projeção no plano XY:



A fronteira de D é a interseção de

$$\begin{cases} x^2+y^2+z^2 = 1 \\ z = \sqrt{x^2+y^2} \end{cases} \Rightarrow x^2+y^2 = \frac{1}{2}$$

$\Rightarrow 0 \leq \theta \leq 2\pi$. Finalmente se $z = \sqrt{x^2+y^2}$ $\Rightarrow$ levamos para coordenadas esféricas $\Rightarrow z = \rho.\cos\phi$ e $x^2+y^2 = \rho^2.\operatorname{sen}^2\phi$

$$\Rightarrow \rho.\cos\phi = \rho.\operatorname{sen}\phi$$
$$\Rightarrow \cos\phi = \operatorname{sen}\phi$$
$$\Rightarrow 1 = \frac{\operatorname{sen}\phi}{\cos\phi}$$
$$\Rightarrow 1 = \tan\phi$$
$$\Rightarrow \phi = \frac{\pi}{4}$$

Assim $0 \leq \phi \leq \frac{\pi}{4}$

Lembre

$x = \rho . \operatorname{sen}\phi . \cos\theta$

$y = \rho . \operatorname{sen}\phi . \operatorname{sen}\theta$

$z = \rho . \cos\phi$

Jacobiano : $\rho^2 . \operatorname{sen}\phi$

$0 \leq \rho \leq 1$

$0 \leq \phi \leq \frac{\pi}{4}$

$0 \leq \theta \leq 2\pi$

Logo

$$m = \int_0^1 \int_0^{\frac{\pi}{4}} \int_0^{2\pi} \overbrace{\rho . \cos\phi}^{\text{Função densidad}} . \underbrace{\rho^2 . \operatorname{sen}\phi}_{\text{Jacobiano}} \, d\theta \, d\phi . d\rho$$

$$m = \int_0^1 \int_0^{\frac{\pi}{4}} \rho^3 . \cos\phi . \operatorname{sen}\phi . \int_0^{2\pi} d\theta \, d\phi \, d\rho$$

$$m = 2\pi \int_0^1 \int_0^{\frac{\pi}{4}} \rho^3 . \cos\phi . \operatorname{sen}\phi \, d\phi \, d\rho$$

$$m = 2\pi \int_0^1 \rho^3 \int_0^{\frac{\pi}{4}} \cos\phi . \operatorname{sen}\phi \, d\phi \quad d\rho$$

$$m = \cancel{2}\pi \int_0^1 \rho^3 . \frac{\operatorname{sen}^2\phi}{\cancel{2}} \Big|_0^{\frac{\pi}{4}} d\rho = \pi . \int_0^1 \rho^3 \left(\operatorname{sen}^2 \frac{\pi}{4} - \operatorname{sen}^2 0 \right) d\rho$$

$$m = \frac{\pi}{2} \int_0^1 \rho^3 d\rho = \frac{\pi}{2} . \frac{\rho^4}{4} \Big|_0^1 = \frac{\pi}{8} . \rho^4 \Big|_0^1$$

$$m = \frac{\pi}{8}$$

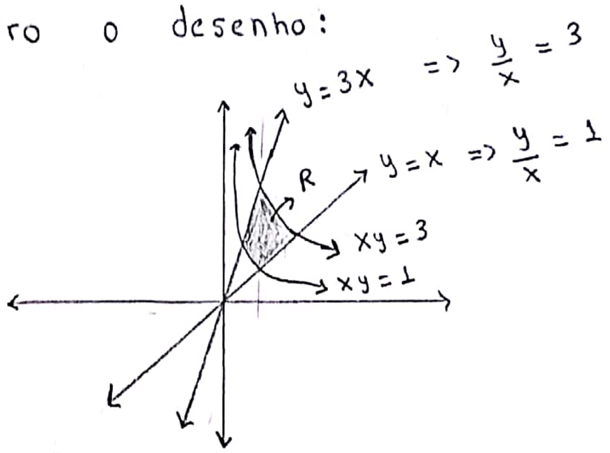
Exercício 5. : Fazendo a mudança certa, calcule a integral

$$I = \iint_R xy \, dA$$, em que R é a região do primeiro

quadrante limitada pelas retas $y = x$ e $y = 3x$ e pelas hipérboles $xy = 1$, $xy = 3$

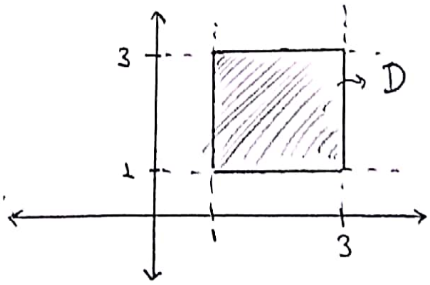
Sol

nós fazemos primeiro o desenho:



A ideia é transformar nossa região R em um retângulo:

$u = xy$ e $v = \dfrac{y}{x}$ $\Rightarrow$ $1 \leq u \leq 3$ e $1 \leq v \leq 3$



Agora temos que encontrar o Jacobiano : $\dfrac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)} =$

Como u, v estão em função de x, y nós vamos calcular

$$\frac{\partial(u,v)}{\partial(x,y)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} & \frac{\partial u}{\partial y} \\ \frac{\partial v}{\partial x} & \frac{\partial v}{\partial y} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} y & x \\ -\frac{y}{x^2} & \frac{1}{x} \end{vmatrix} = \frac{y}{x} + \frac{y}{x} = 2\frac{y}{x} \Rightarrow \frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)} = \frac{1}{\frac{\partial(u,v)}{\partial(x,y)}}$$

$$\Rightarrow \frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)} = \frac{x}{2y} = \frac{1}{2v}.$$ Assim nossa Integral é:

$$I = \int_1^3 \int_1^3 u \underbrace{\left(\frac{1}{2v}\right)}_{\text{Jacobiano}} . du.dv =$$

$$I = \frac{1}{2} \int_1^3 \int_1^3 \frac{u}{v} \, du \, dv = \frac{1}{2} \int_1^3 \frac{1}{v} \left(\int_1^3 u \, du \right) dv$$

$$I = \frac{1}{2} \int_1^3 \frac{1}{v} \cdot \frac{u^2}{2} \Big|_1^3 dv = \frac{1}{4} \int_1^3 \frac{1}{v} \cdot (3^2 - 1^2) \, dv$$

$$I = \frac{8}{4} \int_1^3 \frac{1}{v} \, dv = 2 \int_1^3 \frac{1}{v} \, dv$$

$$I = 2 \cdot \ln v \Big|_1^3 = 2 (\ln 3 - \ln 1)$$

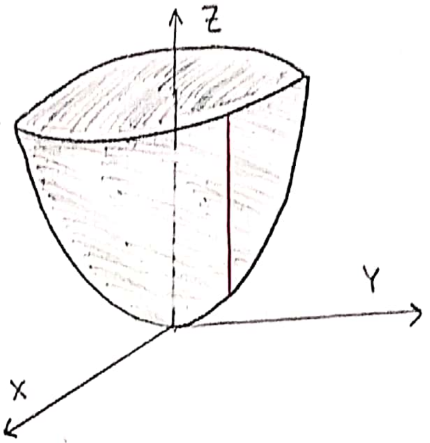
$$I = 2 \ln 3$$

Exercício 6.. Use a integral Tripla para determinar o volume do Sólido dado por $x^2+4y^2 \leq z \leq 1$.

Sol

Fazendo o desenho

$z = x^2+4y^2$



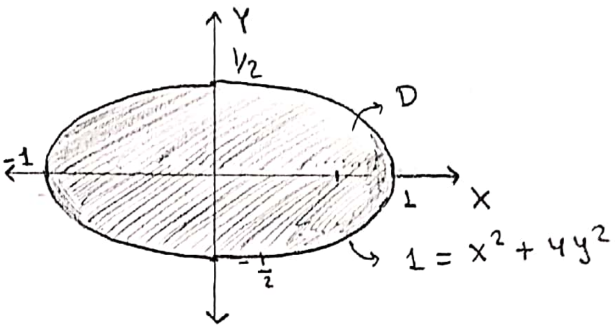
A projeção no plano XY:

é a interseção de

$$\begin{cases} z = x^2+4y^2 \\ z = 1 \end{cases}$$

$$\Rightarrow 1 = \frac{x^2}{1^2} + \frac{y^2}{\left(\frac{1}{2}\right)^2}$$

a elipse.



Então $V = \iint_D \int_{x^2+4y^2}^{1} dz \, . dA = \iint_D (1-(x^2+4y^2))\, dA$

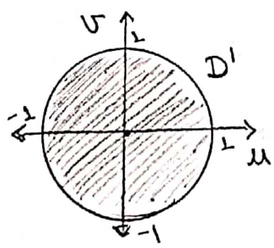
$$V = \iint_D (1 - x^2 - 4y^2)\, dA$$

A ideia agora é Transformar nossa elipse em uma circunferencia utilizamos a mudança de variaveis: $u = \frac{x}{1}$ e $v = \frac{y}{\frac{1}{2}} = 2y$

observe que: $u^2+v^2 = \left(\frac{x}{1}\right)^2 + \left(\frac{y}{\frac{1}{2}}\right)^2 = x^2 + \frac{y^2}{\left(\frac{1}{2}\right)^2} = 1$

$$u^2+v^2 = 1$$

$\Rightarrow$



Calculamos o Jacobiano $\frac{\partial(u,v)}{\partial(x,y)} = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} = 2$

Portanto $\dfrac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)} = \dfrac{1}{\dfrac{\partial(u,v)}{\partial(x,y)}} = \dfrac{1}{2}$

$\Rightarrow$

$V = \iint_{D'} (1 - u^2 - v^2) \cdot \frac{1}{2}\, du\, dv$, em que D' é o circulo com raio 1 e centro $(0,0)$.

$\Rightarrow \quad 0 \leq r \leq 1 \quad$ e $\quad 0 \leq \theta \leq 2\pi$

Mudando para coordenadas polares temos:

$$V = \frac{1}{2} \cdot \int_0^1 \int_0^{2\pi} (1 - r^2) . r\, dr\, d\theta = \frac{1}{2} \int_0^1 (1 - r^2) . r \int_0^{2\pi} d\theta\, dr$$

$$V = \pi \int_0^1 (1 - r^2) . r\, dr = \pi \int_0^1 (r - r^3)\, dr$$

$$V = \pi \left(\frac{r^2}{2} - \frac{r^4}{4} \right) \Big|_0^1 = \pi \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{4} \right)$$

$$V = \pi \cdot \frac{1}{4}$$

$$V = \frac{\pi}{4}$$