Lista 04 - MS211

Pedro Sader Azevedo, RA: 243245

Questão 1

In [10]:

```julia
using LinearAlgebra


function gauss_seidel(A, b, maxiters = 100, prec = 1.0e-5)
    n = length(b)
    x = 1.0 ./ diag(A) .* b
    # Cria um vetor do mesmo tipo e comprimento de x
    xnovo = similar(x)
    iters = 0
    while iters < maxiters && norm(A*x - b) > prec
        for i = 1:n
            xnovo[i] = b[i]
            for j = 1:i - 1
                # Usa a estimativa mais atualizada
                xnovo[i] = xnovo[i] - A[i, j]*xnovo[j]
            end
            for j = i + 1:n
                # Usa a estimativa mais atualizada
                xnovo[i] = xnovo[i] - A[i, j]*x[j]
            end
            xnovo[i] = xnovo[i] / A[i, i]
        end
        # Copia o valor de xnovo sobre x, coordenada a coordenada
        x .= xnovo
        iters = iters + 1
    end
    print(iters)
    return x
end
```

Out[10]:

```
gauss_seidel (generic function with 3 methods)
```

(2) A FÓRMULA DE UM ELEMENTO x_i DA SOLUÇÃO DE UM SISTEMA $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ USANDO MÉTODO DE JACOBI É

$$x_i^{k+1} = \frac{b_i - \sum_{j=1}^{i-1} a_{ij} x_j^k - \sum_{j=i+1}^{n} a_{ij} x_j^k}{a_{ii}} \quad , \quad i = 1, 2 \cdots, n$$

ONDE k É O NÚMERO DA ITERAÇÃO, NÃO UM EXPOENTE!

PARA CONTAR O NÚMERO DE FLOPs, VALE A PENA VER ALGUNS EXEMPLOS

★ $i = 1, \; n = 4$

$$x_1^{k+1} = \left(b_1 - \sum_{j=1}^{0} a_{1j} x_j^k - \sum_{j=2}^{4} a_{1j} x_j^k\right) / a_{11}$$
$$= \left(b_1 - (a_{12} x_2^k + a_{13} x_3^k + a_{14} x_4^k)\right) / a_{11}$$

★ $i = 2, \; n = 4$

$$x_2^{k+1} = \left(b_2 - \sum_{j=1}^{1} a_{2j} x_j^k - \sum_{j=3}^{4} a_{2j} x_j^k\right) / a_{22}$$
$$= \left(b_2 - (a_{21} x_1^k) - (a_{23} x_3^k + a_{24} x_4^k)\right) / a_{22}$$
$$= \left(b_2 - (a_{21} x_1^k + a_{23} x_3^k + a_{24} x_4^k)\right) / a_{22}$$

NOTE QUE, QUANDO i AUMENTA DE 1, TEMOS UM ELEMENTO A MAIS NO PRIMEIRO SOMATÓRIO (QUE É SUPERIORMENTE LIMITADO POR i) E UM ELEMENTO A MENOS NO SEGUNDO SOMATÓRIO (QUE É INFERIORMENTE LIMITADO POR i). ASSIM, A QUANTIDADE DE ELEMENTOS SOMADOS NA FÓRMULA INTEIRA NÃO DEPENDE DE i APENAS DE n

NOS SOMATÓRIOS TEMOS $(n-1)$ MULTIPLICAÇÕES E $(n-2)$ ADIÇÕES DEPOIS DISSO, TEMOS UMA SUBTRAÇÃO E UMA DIVISÃO

COMO A FÓRMULA SÓ COMPUTA UM ÚNICO ELEMENTO DO VETOR SOLUÇÃO $\mathbf{x}$ DE TAMANHO n, UMA ITERAÇÃO COMPLETA DO MÉTODO DE JACOBI TEM $((n-1) + (n-2) + 1 + 1)\, n$ FLOPs

QUANDO $n \to \infty$ $\; n-1 \approx n-2 \approx n$ E OS TERMOS "+1" TORNAM-SE INSIGNIFICANTES. ASSIM TEMOS COMO RESULTADO FINAL $\boxed{2n^2 \text{ FLOPs}}$

Scanned with CamSca

③ a) PARA VERIFICAR SE O SISTEMA PODE SER FACILMENTE RESOLVIDO PELO MÉTODO DE JACOBI PRECISAMOS VERIFICAR SE A MATRIZ DE COEFICIENTES DO SISTEMA É DIAGONALMENTE DOMINANTE. PARA ISSO VERIFICAMOS SE A NORMA DA MATRIZ B ABAIXO É MENOR QUE 1:

$$B = -D^{-1}(L+U),$$ QUE PARA O SISTEMA DADO EQUIVALE A

$$B = \underbrace{\begin{bmatrix} 1/4 & 0 & 0 \\ 0 & 1/5 & 0 \\ 0 & 0 & 1/3 \end{bmatrix}}_{\text{MATRIZES DIAGONAIS SÃO INVERTIDAS COM O INVERSO MULTIPLICATIVO DE SEUS ELEMENTOS}} \left(\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \right) = \begin{bmatrix} 1/4 & 3 & 2 \\ 1 & 1/5 & 0 \\ 1 & 1 & 1/3 \end{bmatrix}$$

$$\|B\|_\infty = 3$$

COMO PODEMOS VER, $\|B\|_\infty > 1$, ENTÃO NÃO PODEMOS GARANTIR FACILMENTE A CONVERGÊNCIA DE JACOBI.

b) A FIM DE FACILITAR A NOTAÇÃO VAMOS CHAMAR OS ELEMENTOS DE $\mathbf{X}$ DE x_1, x_2, E x_3. A 1ª EQUAÇÃO VAI RESOLVER PARA x_1, A 2ª PARA x_2, E A 3ª PARA x_3. ASSIM TEMOS

$$\begin{cases} 4x_1 + 3x_2 + 2x_3 = 4 \\ 1x_1 + 5x_2 \quad 0x_3 = 9 \\ 1x_1 + 1x_2 \quad 3x_3 = 4 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x_1^{k+1} = (4 - 3x_2^k - 2x_3^k)/4 \\ x_2^{k+1} = (9 - x_1^k)/5 \\ x_3^{k+1} = (4 - x_1^k - x_2^k)/3 \end{cases}$$

ITERAÇÃO 1

$$\begin{cases} x_1^1 = (4 - 3x_2^0 - 2x_3^0)/4 = (4-3-2)/4 = -1/4 \\ x_2^1 = (9 - x_1^0)/5 = (9-1)/5 = 8/5 \\ x_3^1 = (4 - x_1^1 - x_2^1)/3 = (4-1-1)/3 = 2/3 \end{cases}$$

$$\text{RESÍDUO: } \|A\mathbf{x}^1 - \mathbf{b}\|_\infty = \left\| \begin{bmatrix} 77/15 \\ 31/4 \\ 67/20 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 4 \\ 9 \\ 4 \end{bmatrix} \right\|_\infty = \frac{17}{15}$$

Scanned with CamSca

ITERAÇÃO 2

$$\begin{cases} x_1^2 = (4 - 3x_2^1 - 2x_3^1)/4 = -160/300 \\ x_2^2 = (9 - x_1^1)/5 = 1{,}85 \\ x_3^2 = (4 - x_1^1 - x_2^1)/3 = 265/300 \end{cases}$$

RESÍDUO: $\|Ax + b\| \cong 1{,}217$

ITERAÇÃO 3

$$\begin{cases} x_1^3 = (4 - 3x_2^2 - 2x_3^2)/4 = -0{,}8291\bar{6} \\ x_2^3 = (9 - x_1^2)/5 = 1{,}90\bar{6} \\ x_3^3 = (4 - x_1^2 - x_2^2)/3 = 0{,}89\bar{4} \end{cases}$$

RESÍDUO: $\|Ax - b\| \cong 0{,}426$

NOTE QUE O RESÍDUO ESTÁ DIMINUINDO CONFORME ITERAMOS O ALGORITMO. NO ENTANTO, ISSO NÃO CONTRADIZ O RESULTADO DO ITEM ANTERIOR, POIS $\|B\| < 1$ É UMA CONDIÇÃO SUFICIENTE MAS NÃO NECESSÁRIA PARA A CONVERGÊNCIA DO MÉTODO.

Scanned with CamSca