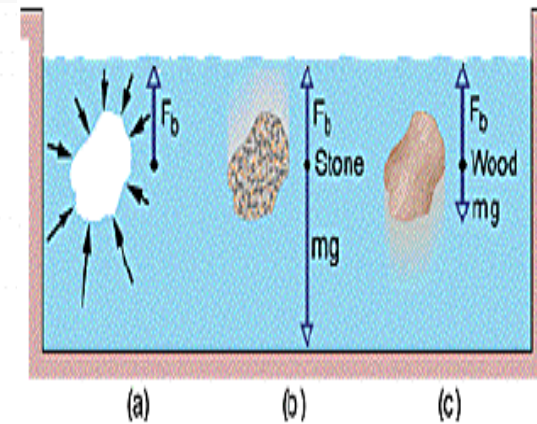
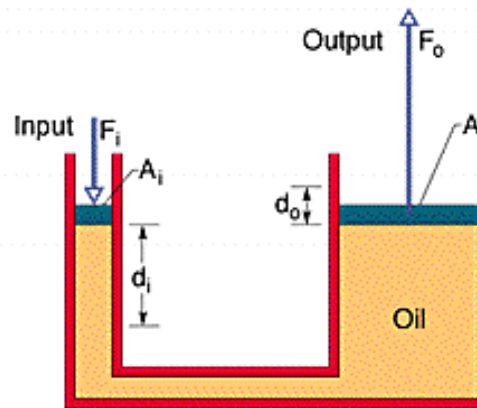
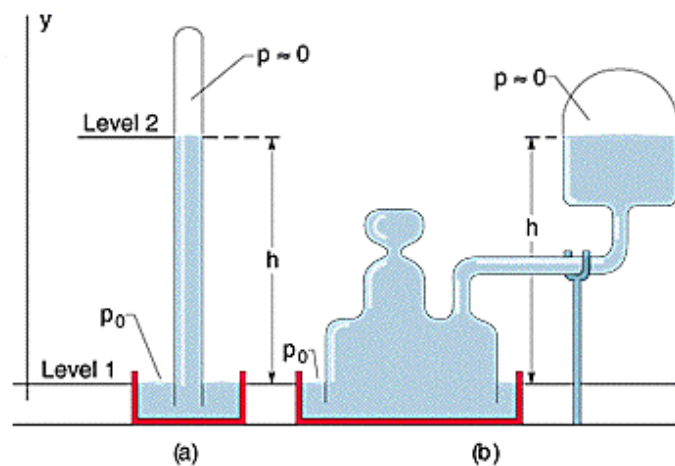


Aula-5

Fluidos

Física Geral II - F 228

1º semestre, 2021



Fluido Ideal em Movimento

Consideremos um fluido:

- Incompressível
- Não-viscoso
- Com temperatura constante

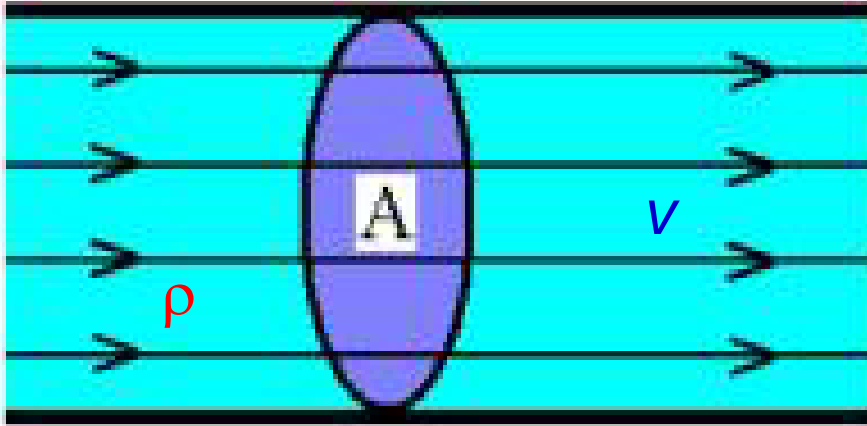
... e um fluxo:

- Estacionário (velocidade e pressão num dado ponto independentes do tempo)
- Laminar (não-turbulento)
- Irrotacional (sem vórtices)



Fluxo Ideal

Caso simples



Velocidade de escoamento v uniforme e perpendicular à área **A**, da seção transversal do tubo

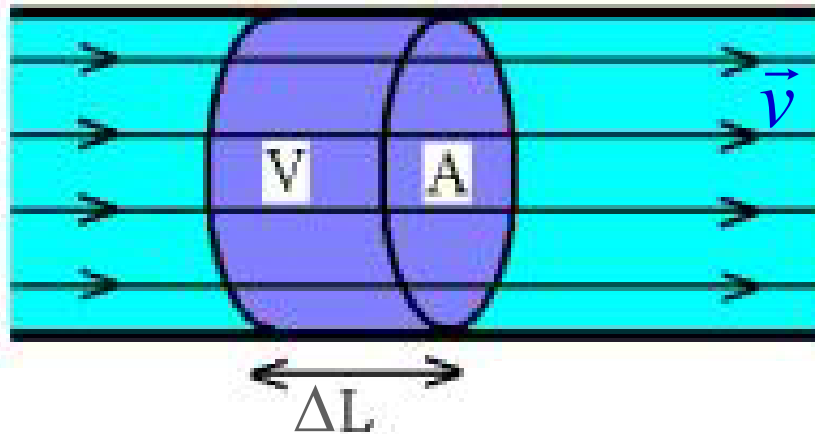
Densidade ρ cte.

Equação da continuidade

Fluxo de massa:
$$\frac{\Delta m}{\Delta t} = \frac{\rho \Delta V}{\Delta t} = \frac{\rho A \Delta L}{\Delta t} = \rho A \frac{\Delta L}{\Delta t} = \rho A v_{\perp}$$

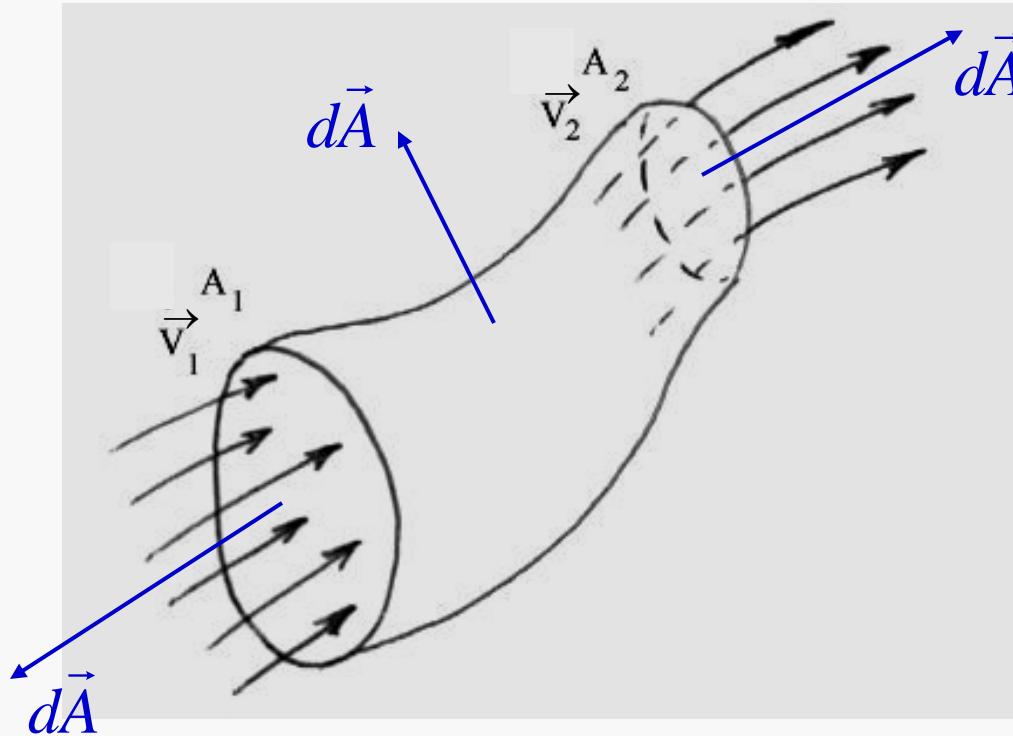
Volume que cruza a área A
no intervalo de tempo Δt : V

Densidade
do fluido: ρ



Velocidade de
escoamento do
fluido: \vec{v}

Equação da continuidade



$$\frac{\Delta m}{\Delta t} = \rho A v_{\perp} = \rho \vec{v} \cdot \vec{A}$$

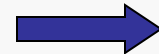
Caso Geral:

$$\frac{dm}{dt} = \oint \rho \vec{v} \cdot d\vec{A}$$

Vazão:

$$R_v = \vec{v} \cdot \vec{A} = v_{\perp} A$$

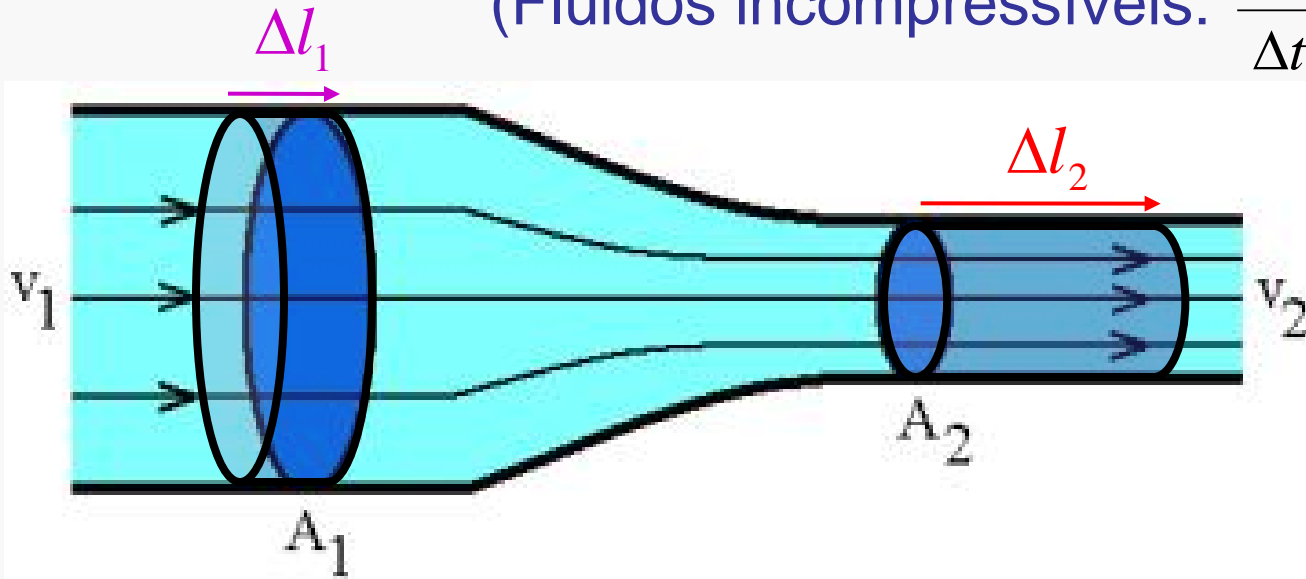
Fluxo de massa:



$$\frac{\Delta m}{\Delta t} = \rho R_v$$

Equação da continuidade

(Fluidos incompressíveis: $\frac{\Delta m}{\Delta t} = Cte.$)



$$\text{Vazão: } R_v = A_1 v_1 = A_1 \frac{\Delta l_1}{\Delta t} = \frac{\Delta V_1}{\Delta t} = A_2 v_2 = A_2 \frac{\Delta l_2}{\Delta t} = \frac{\Delta V_2}{\Delta t} = A v = Cte.$$

$$\text{Ou (mais geral): } \frac{dm}{dt} = \oint \rho \vec{v} \cdot d\vec{A} = \rho(v_2 A_2 - v_1 A_1) = 0$$

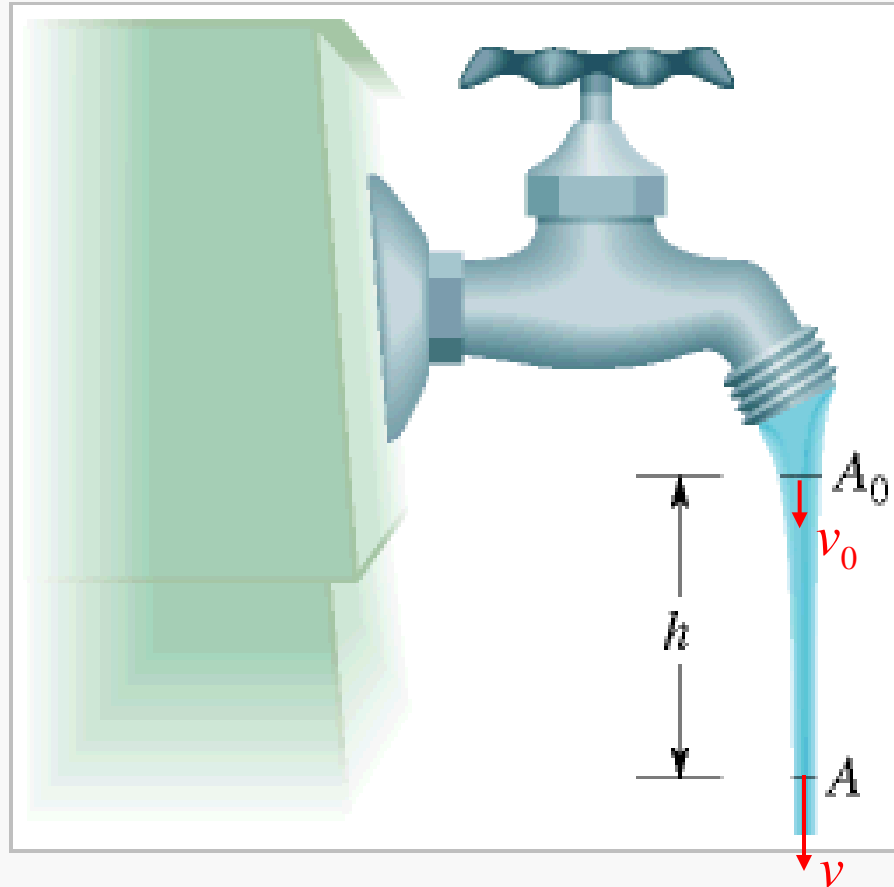
- Massa que entra é igual a massa que sai.

Exemplo: Equação da continuidade

Vazão:

$$A_0 v_0 = A v$$

$$v = v_0 \frac{A_0}{A}$$



mas:

$$v^2 = v_0^2 + 2gh = v_0^2 \frac{A_0^2}{A^2} \quad \rightarrow \quad v_0 = \sqrt{\frac{2ghA^2}{A_0^2 - A^2}}$$

Exemplo: Fluxo sangüíneo

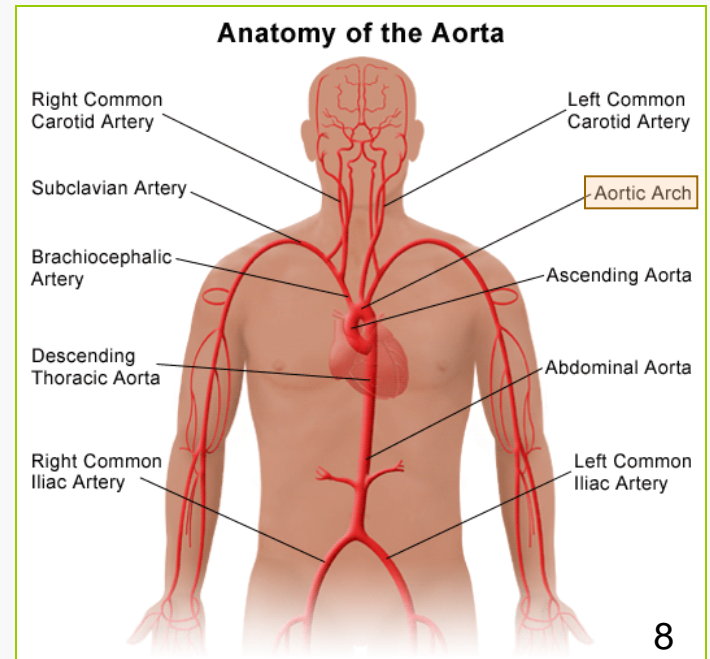
Suponha que o sangue flui através da aorta com velocidade de 0,35 m/s. A área da seção reta da aorta é de $2 \times 10^{-4} \text{ m}^2$.

- a) Encontre a vazão de sangue;
- b) Os ramos da aorta se dividem em dezenas de milhares de vasos capilares com área de seção reta total de $0,28 \text{ m}^2$. Qual é a velocidade média do sangue nesses vasos?

a) $R_V = A v = 2 \times 10^{-4} \text{ m}^2 \times 0,35 \text{ m/s}$
 $R_V = 7 \times 10^{-5} \text{ m}^3/\text{s}$

b) $A v = A_c v_c \rightarrow v_c = \frac{A v}{A_c}$

$$v_c = \frac{7 \times 10^{-5} \text{ m}^3 / \text{s}}{0,28 \text{ m}^2} = 2,5 \times 10^{-4} \text{ m/s}$$



Equação de Bernoulli

Trabalho realizado para mover um fluido ideal:

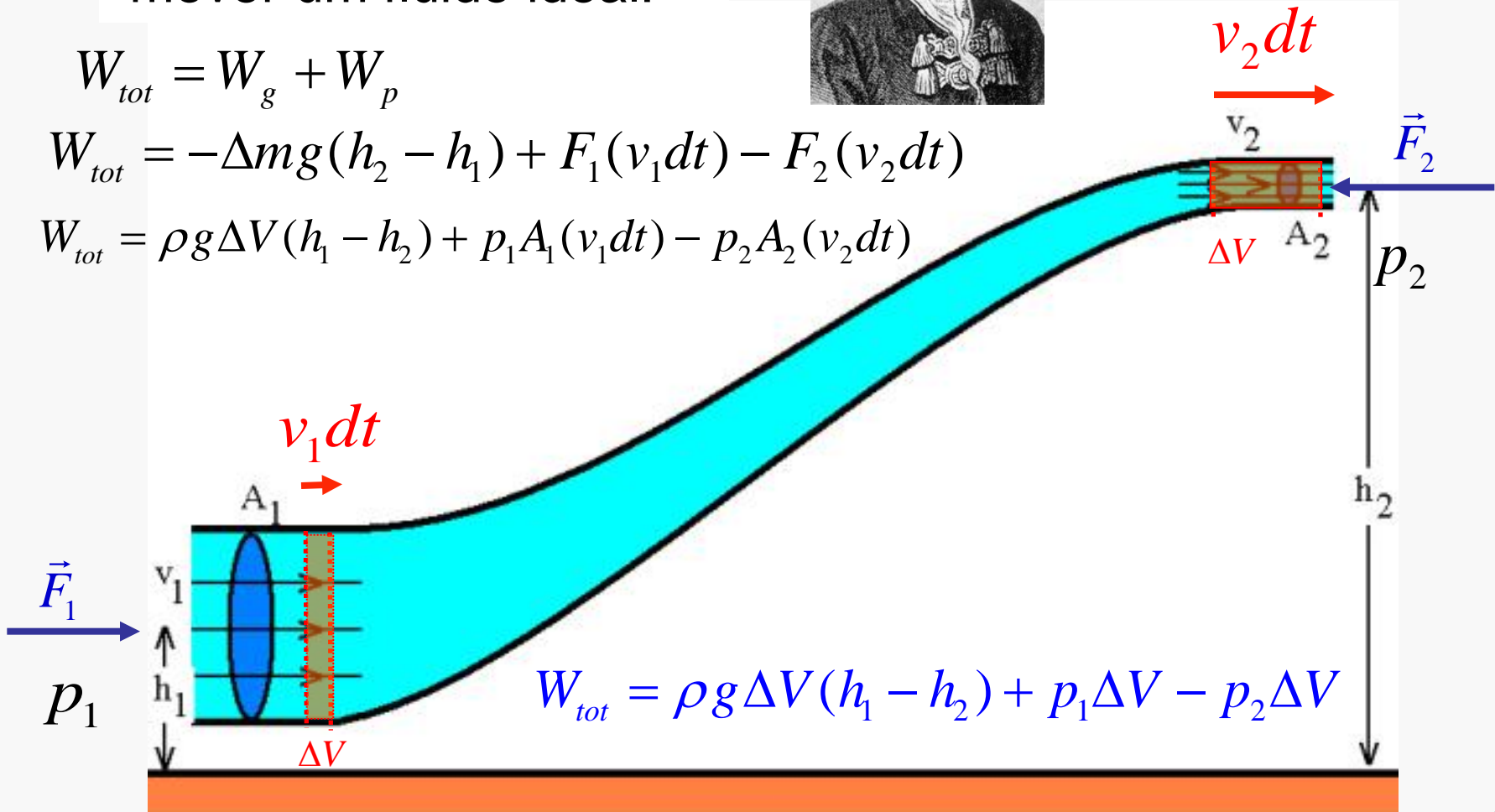


Daniel Bernoulli (1700 – 1782)
Físico e Médico Holandês

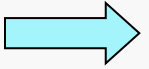
$$W_{tot} = W_g + W_p$$

$$W_{tot} = -\Delta mg(h_2 - h_1) + F_1(v_1 dt) - F_2(v_2 dt)$$

$$W_{tot} = \rho g \Delta V (h_1 - h_2) + p_1 A_1 (v_1 dt) - p_2 A_2 (v_2 dt)$$



Equação de Bernoulli



Trabalho total realizado ao longo do tubo (entre “1” e “2”):

$$W_{tot} = \rho g \Delta V (h_1 - h_2) + p_1 \Delta V - p_2 \Delta V$$

Teorema trabalho-energia: (Sistema conservativo)

$$E_T = U + E_c \quad \Rightarrow \quad \Delta U = -\Delta E_c$$

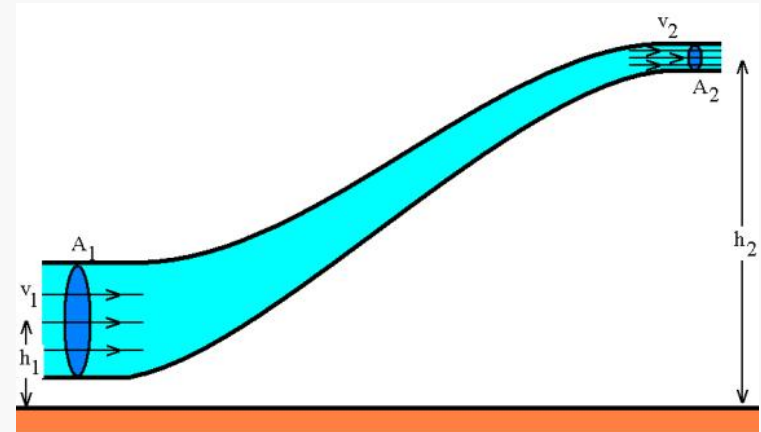
$$\Delta U = -W_{tot} \quad \Rightarrow \quad W_{tot} = \Delta E_c$$

$$\text{Mas: } \Delta E_c = \frac{1}{2} (\rho \Delta V) (v_2^2 - v_1^2)$$



$$\rho g (h_1 - h_2) + p_1 - p_2 = \frac{1}{2} \rho (v_2^2 - v_1^2) \quad \hookrightarrow$$

$$p_1 - p_2 = \frac{1}{2} \rho (v_2^2 - v_1^2) + \rho g (h_2 - h_1)$$



Equação de Bernoulli

$$p_1 - p_2 = \frac{1}{2} \rho (v_2^2 - v_1^2) + \rho g (h_2 - h_1)$$



$$p_1 + \frac{1}{2} \rho v_1^2 + \rho g h_1 = p_2 + \frac{1}{2} \rho v_2^2 + \rho g h_2$$



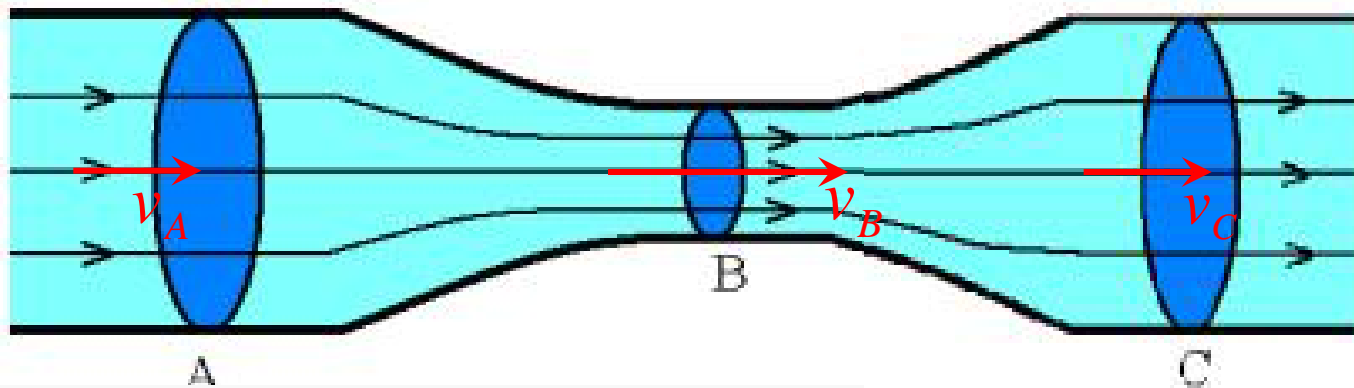
$$p + \frac{1}{2} \rho v^2 + \rho g h = cte$$

...ao longo de uma linha de corrente ou escoamento de um fluido ideal.

Equação de Bernoulli

Escoamento horizontal: $y = cte$

$$p + \frac{1}{2} \rho v^2 + \rho gh = cte$$



$$A_B < A_A = A_C \rightarrow v_B > v_A = v_C \rightarrow p_B < p_A = p_C$$

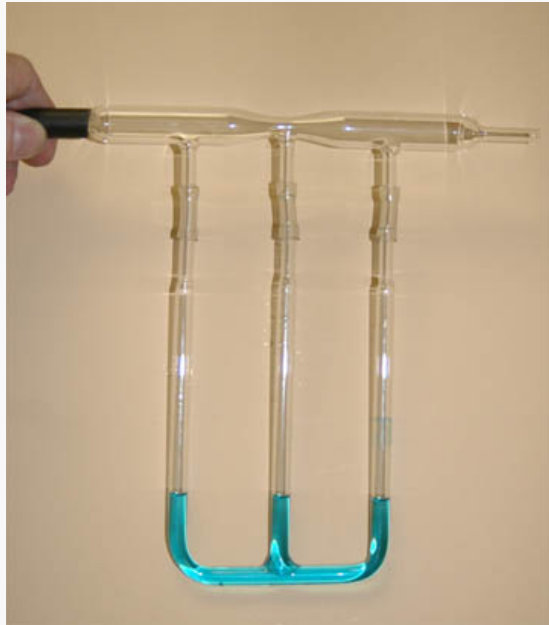
pois:

$$\left\{ \begin{array}{l} A_A v_A = A_B v_B = A_C v_C \\ p_A + \frac{1}{2} \rho v_A^2 = p_B + \frac{1}{2} \rho v_B^2 = p_C + \frac{1}{2} \rho v_C^2 \end{array} \right.$$

Fluxômetro de Venturi

(Giovanni Battista Venturi – Físico italiano)

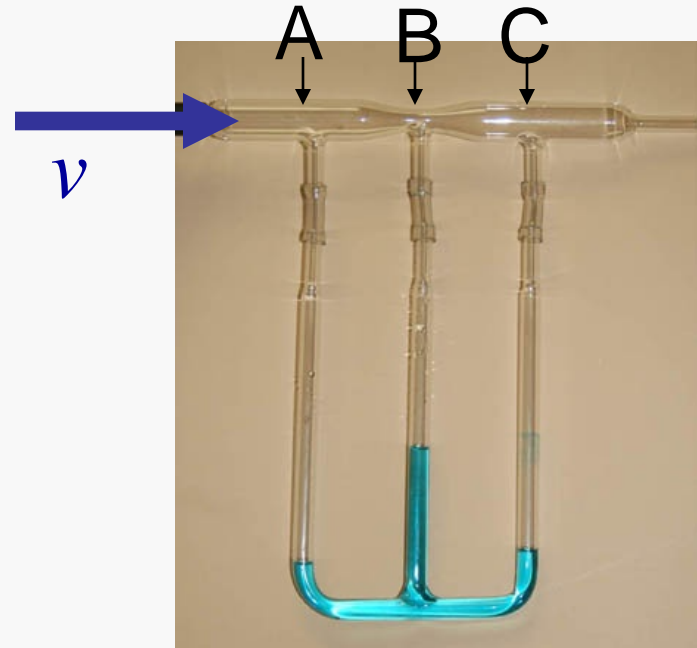
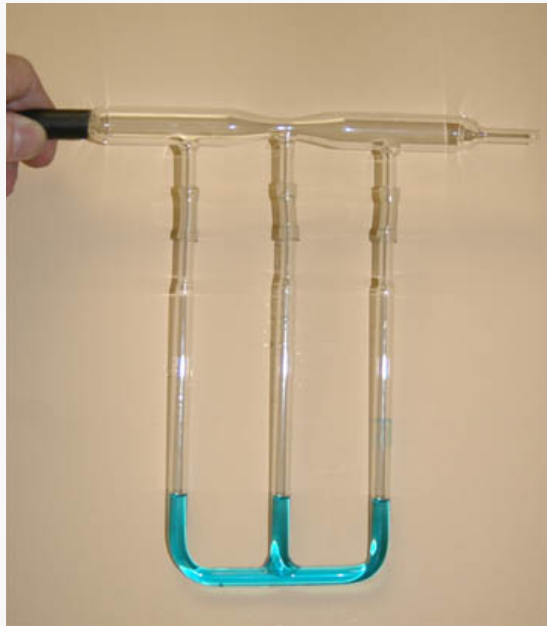
Mede a velocidade de escoamento de um fluido



Fluxômetro de Venturi

(Giovanni Battista Venturi – Físico italiano)

Mede a velocidade de escoamento de um fluido

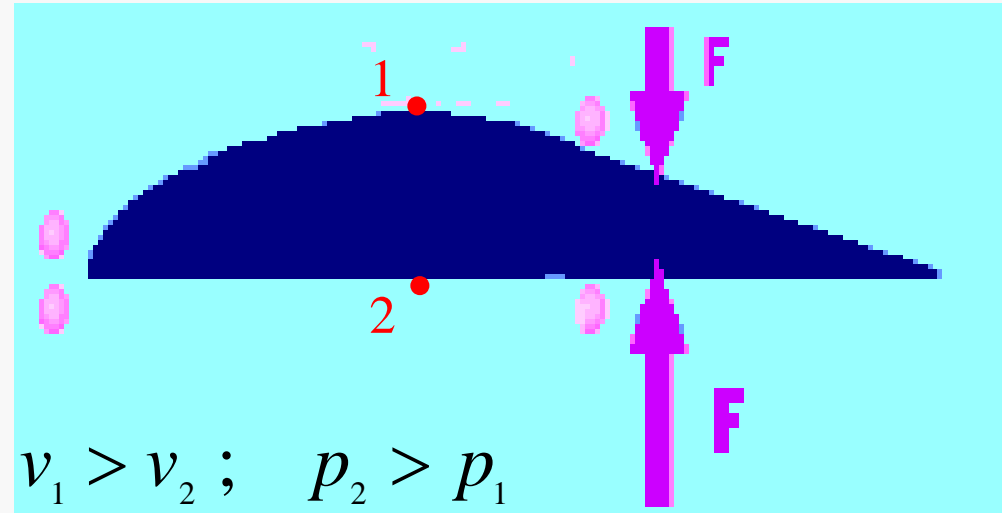
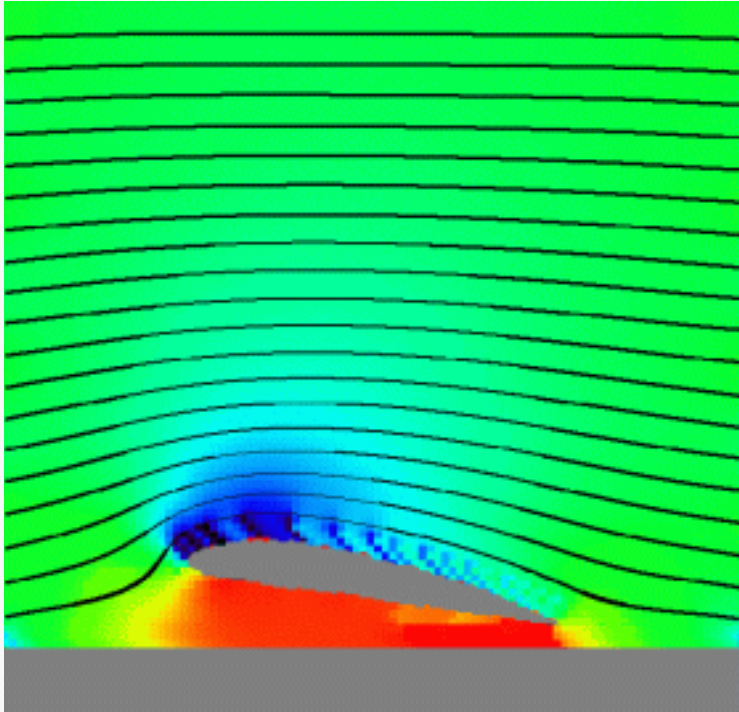


$$A_B < A_A = A_C \rightarrow v_B > v_A = v_C \rightarrow p_B < p_A = p_C$$

pois:

$$\left\{ \begin{array}{l} A_A v_A = A_B v_B = A_C v_C \\ p_A + \frac{1}{2} \rho v_A^2 = p_B + \frac{1}{2} \rho v_B^2 = p_C + \frac{1}{2} \rho v_C^2 \end{array} \right.$$

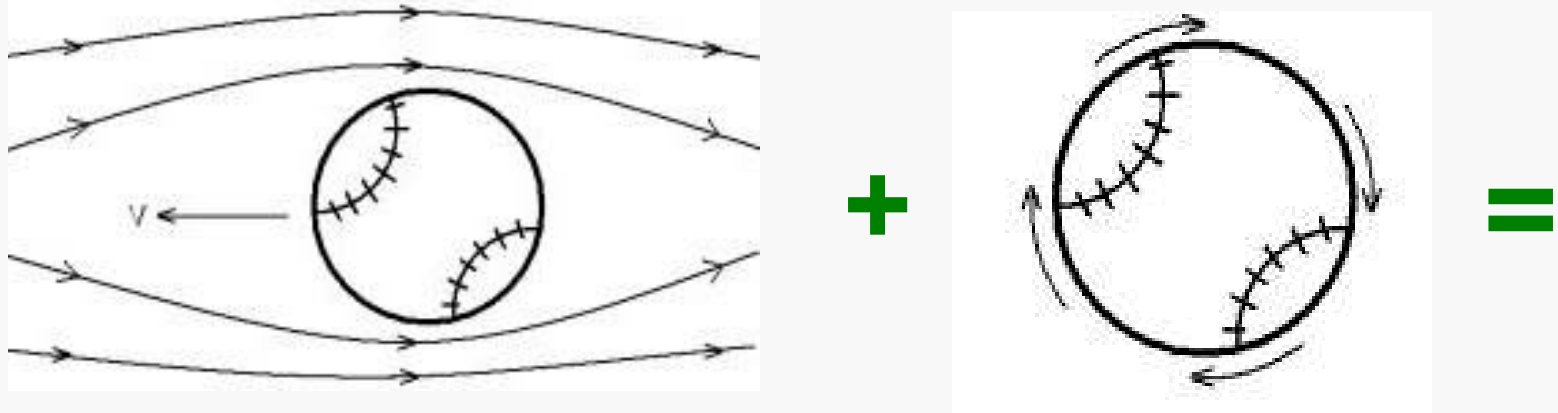
Sustentação aerodinâmica



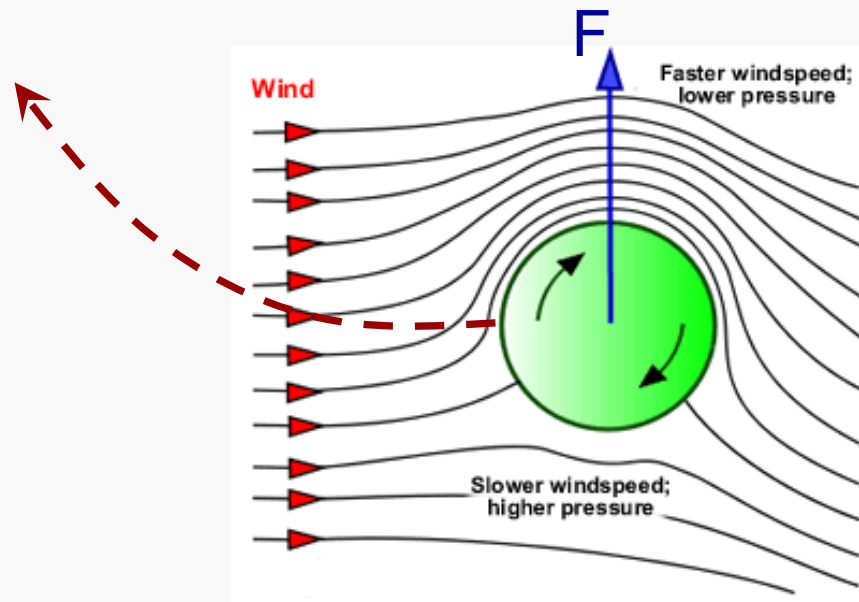
$$p_1 - p_2 = \frac{1}{2} \rho (v_2^2 - v_1^2) + \rho g (h_2 - h_1)$$

$$p_2 - p_1 \approx \frac{\rho}{2} (v_1^2 - v_2^2) \approx \frac{F_R}{A} \quad \Rightarrow \quad F_R \approx \frac{\rho \bar{A}}{2} (v_1^2 - v_2^2)$$

Efeito Magnus

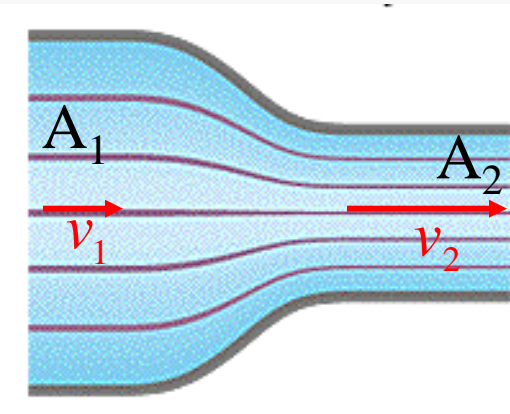


Bola com o efeito
de força vertical



Exemplo: Eq. de Bernoulli

$A_1 = 1,2 \times 10^{-3} \text{ m}^2$; $A_2 = A_1/2$; $\rho = 791 \text{ kg/m}^3$; $\Delta p = 4120 \text{ Pa}$, $R_v = ?$



$$p_1 + \frac{1}{2} \rho v_1^2 + \rho g h = p_2 + \frac{1}{2} \rho v_2^2 + \rho g h$$

$$p_1 - p_2 = \frac{1}{2} \rho (v_2^2 - v_1^2)$$

$$\Delta p = \frac{1}{2} \rho \left(\frac{4R^2}{A_1^2} - \frac{R^2}{A_1^2} \right) = \frac{3\rho R^2}{2A_1^2}$$

$$R = v_1 A_1 = v_2 A_2$$

$$v_1 = \frac{R}{A_1} \quad \text{and} \quad v_2 = \frac{R}{A_2} = \frac{2R}{A_1}$$

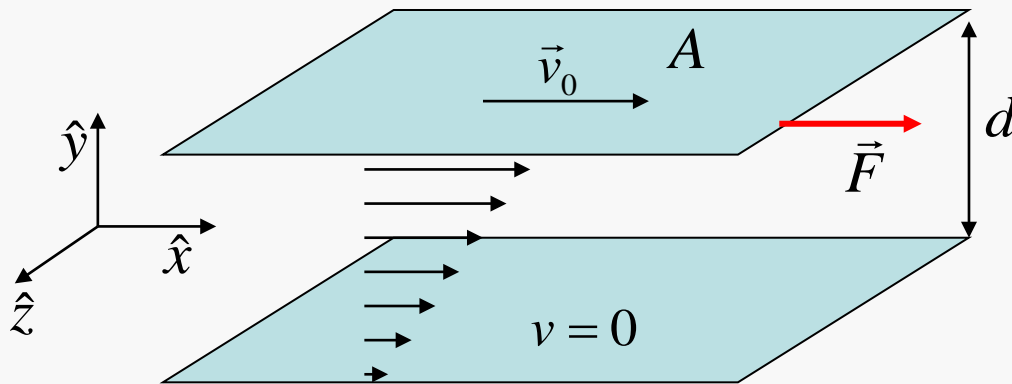


$$\begin{aligned} R &= A_1 \sqrt{\frac{2\Delta p}{3\rho}} = 1,20 \times 10^{-3} \text{ m}^2 \sqrt{\frac{(2)(4120 \text{ Pa})}{(3)(791 \text{ kg/m}^3)}} \\ &= 2,24 \times 10^{-3} \text{ m}^3/\text{s} \end{aligned}$$

Fluidos reais

→ Fluxo laminar com VISCOSIDADE

Fluido entre duas placas:



- Placa superior em movimento;
- Placa inferior parada

Gradiente de velocidades:

$$\vec{v}(y) = v_0 \frac{y}{d} \hat{x} = v(y) \hat{x}$$

Lei de Newton da Viscosidade:

η : coeficiente de Viscosidade

$$\vec{F} = \eta A \frac{v_0}{d} \hat{x}$$

Unidade: $1\text{cp} = 10^{-2} \text{ Poise} = 10^{-3} \text{ Ns/m}^2$

Turbulência

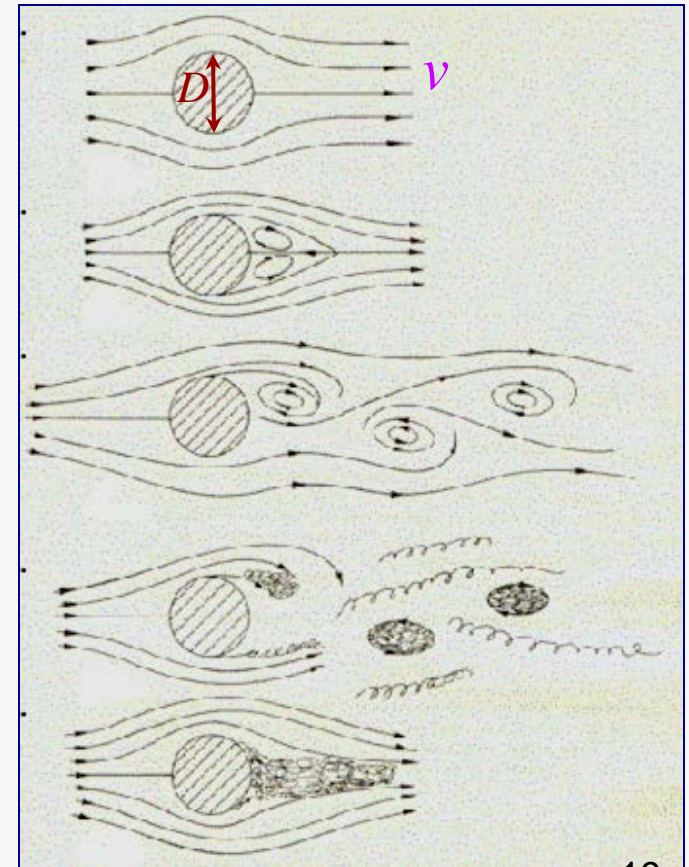
- Velocidade e pressão num ponto variam no tempo;
- Fatores: Velocidade do fluido, viscosidade, densidade, obstáculos.

Número de Reynolds: **Re**

$$\text{Re} = vD \left(\frac{\rho}{\eta} \right) \quad \text{Cilindro de diâmetro } D$$

Previsão de Turbulência:

$$\text{Re} \geq 2000$$



Mais exemplos: Eq. de Bernoulli

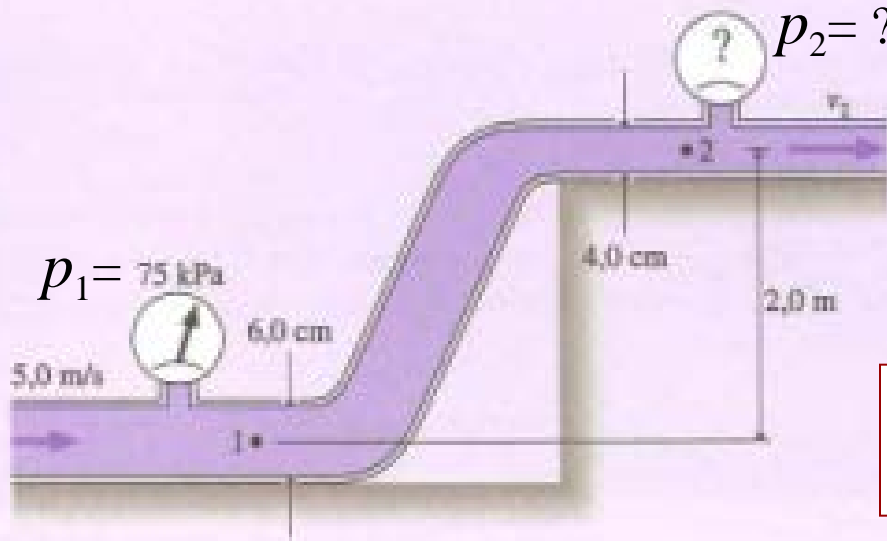


FIGURA 15.33 Os canos de água de um sistema de irrigação.

$$p + \frac{1}{2} \rho v^2 + \rho g h = cte$$

$$p_1 + \frac{1}{2} \rho v_1^2 + \rho g h_1 = p_2 + \frac{1}{2} \rho v_2^2 + \rho g h_2$$

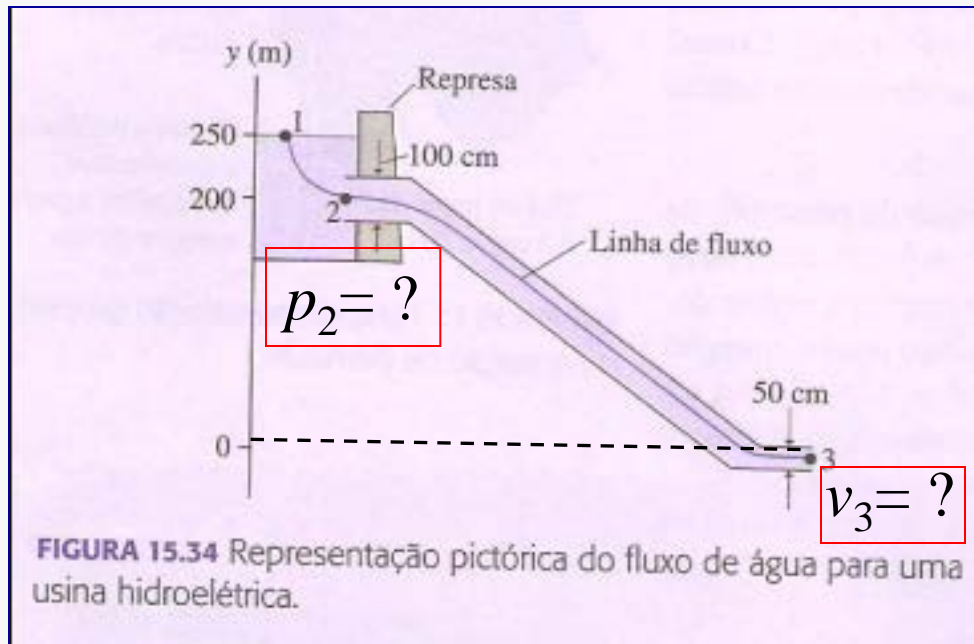
$$p_2 = p_1 + \frac{1}{2} \rho (v_1^2 - v_2^2) + \rho g (h_1 - h_2)$$

$$\Rightarrow v_2 = \frac{A_1}{A_2} v_1 = \frac{\pi (6/2)^2}{\pi (4/2)^2} \times 5,0 = \mathbf{11,25 \text{ m/s}}$$

$$p_2 = 75000 + \frac{10^3}{2} (5,0^2 - 11,25^2) + 10^3 \times 9,8 (-2,0)$$

$$p_2 = 75000 - 70380 = 4620 \text{ Pa}; \quad p_2 = 4,6 \text{ kPa}$$

Mais exemplos: Eq. de Bernoulli



$$p + \frac{1}{2} \rho v^2 + \rho gh = cte$$

$$p_1 + \frac{1}{2} \rho v_1^2 + \rho gh_1 = p_3 + \frac{1}{2} \rho v_3^2 + \rho gh_3$$

$$\rho gh_1 \approx \frac{1}{2} \rho v_3^2; \quad v_1 \approx 0; \quad p_1 = p_3 = p_{atm}$$

$$v_3 = \sqrt{2gh_1} = 70 \text{ m/s}$$

$$p_2 + \frac{1}{2} \rho v_2^2 + \rho gh_2 = p_1 + \frac{1}{2} \rho v_1^2 + \rho gh_1$$

e

$$v_2 = \frac{A_3}{A_2} v_3 = \frac{r_3^2}{r_2^2} 70 \text{ m/s}$$

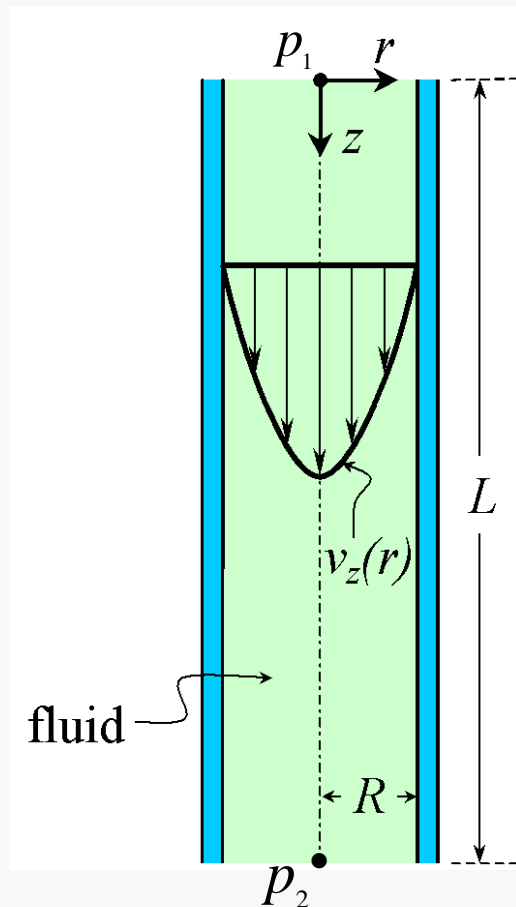
$$p_2 = p_{atm} + \rho g(h_1 - h_2) - \frac{1}{2} \rho v_2^2 \approx 4,5 \times 10^5 \text{ N/m}^2; \quad \rho = 10^3 \text{ kg/m}^3$$

(p_2 é 1.5 atm menor que p_2 estático. 50 m \rightarrow ~ 5 atm)

Lei de Poiseuille

Fluido Viscoso

Força: diferença de pressão para manter fluxo



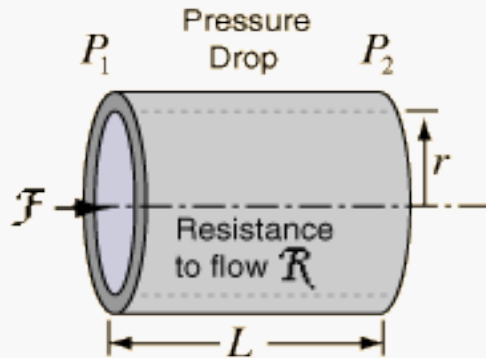
TUBO CILÍNDRICO

Perfil de Velocidades:

$$v_z(r) = \frac{(p_1 - p_2)}{4\eta L} (R^2 - r^2)$$

$$\text{Vazão: } V = \frac{(p_1 - p_2)}{8\eta L} \pi R^4$$

Fluxo de Poiseuille







$$\text{Volume Flowrate} = J = \frac{P_1 - P_2}{R} = \frac{\pi(\text{Pressure difference})(\text{radius})^4}{8(\text{viscosity})(\text{length})}$$

$$\text{Resistance to Flow } R = \frac{8\eta L}{\pi r^4}$$

$$V = \frac{(p_1 - p_2)}{8\eta L} \pi R^4$$

A small amount of arterial occlusion can have a surprisingly large effect!

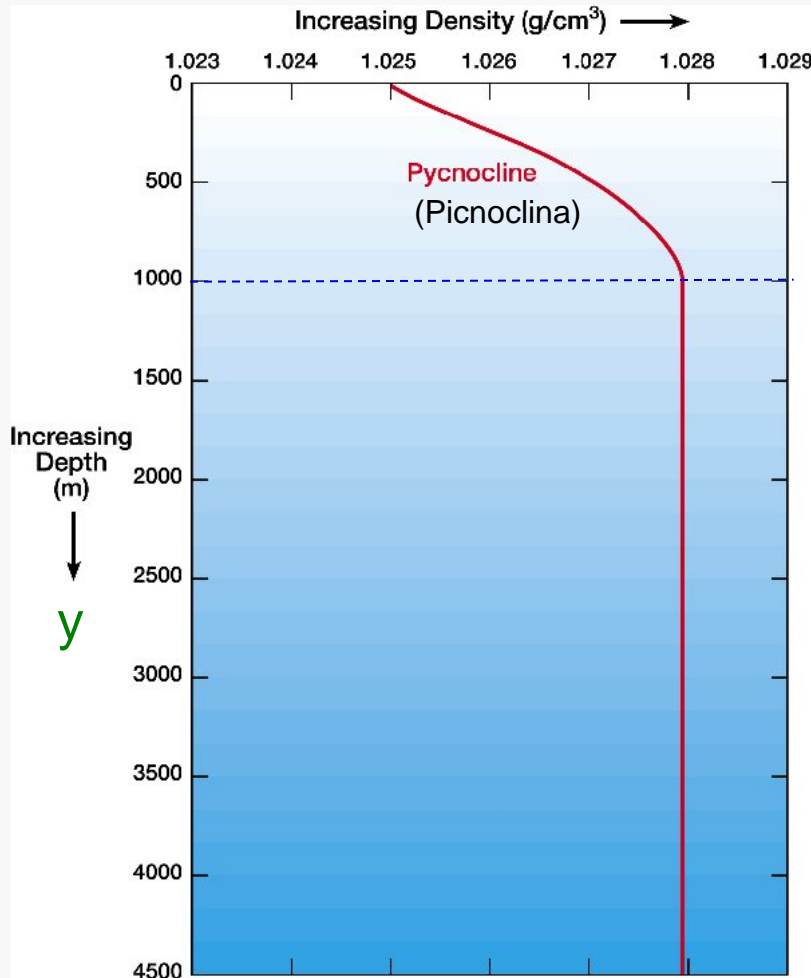
Occlusion*	healthy artery	If pressure is 120 mmHg, Flowrate =	Pressure to restore normal Flowrate:
0%		100 cm ³ /min	120 mmHg
20%		41 cm ³ /min	293 mmHg
50%		6.3 cm ³ /min	1920 mmHg
80%		0.16 cm ³ /min	75,000 mmHg

*20% occlusion here is taken to mean a reduction of the inside radius by 20%, to 80% of its original radius.

A 19% decrease in radius will halve the volume flowrate!

Compressibilidade

Densidade da água do mar **vs** profundidade



$y \approx 1000 \text{ m:}$

$$\Delta p \approx 100 \text{ atm}$$

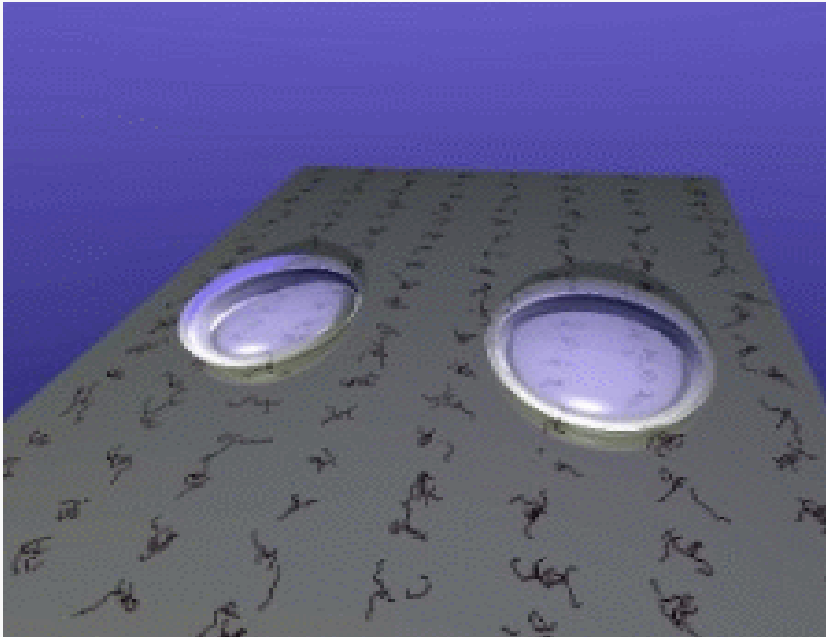
$$\Delta \rho \approx 0,005 \frac{\text{g}}{\text{cm}^3} \rightarrow 0,5\%$$

$y > 1000 \text{ m:}$

$$\Delta \rho \approx 0$$

Viscosidade

- É equivalente ao **ATRITO**
- Sem VISCOSIDADE =
= Sem dissipação de energia
→ Com Conservação da energia mecânica



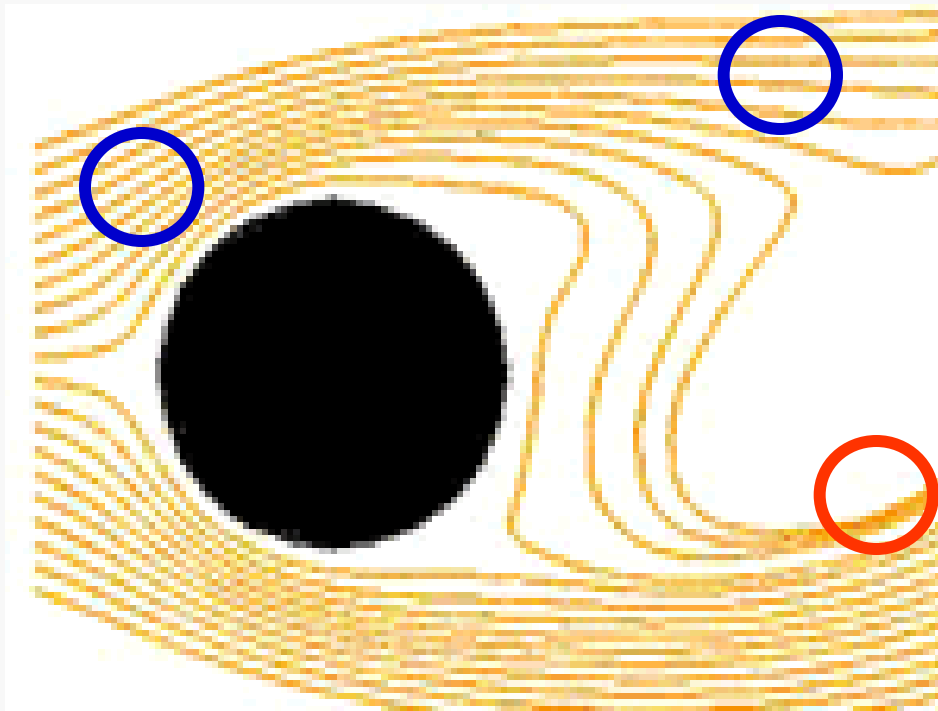
- Ex.: A velocidade de aglutinação de 2 gotas de um líquido depende da sua viscosidade.

Turbulência



LINHA DE CORRENTE:

É a trajetória de um pequeno elemento do fluido



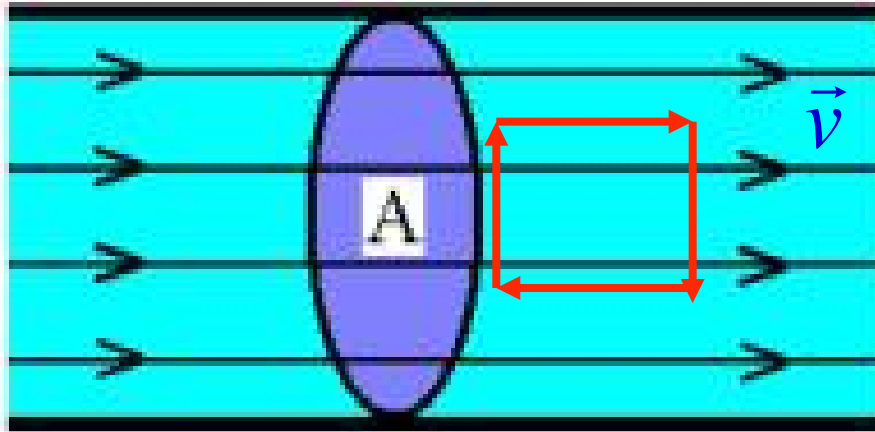
Fluxo laminar:

Linhas de corrente não se cruzam

Fluxo turbulento:

Há cruzamento de linhas de corrente

Fluxo irrotacional



Velocidade de escoamento do fluido: \vec{v}

$$\oint \vec{v} \cdot d\vec{l} = 0$$

O fluxo é irrotacional se a integral da velocidade ao longo de uma trajetória fechada no fluido for nula.