MA211 - Lista 01

Curvas Diferenciáveis

3 de agosto de 2015

1. ★ Calcule os limites.

   a) $\lim_{t\to 0}\left(\dfrac{e^t-1}{t}, \dfrac{\sqrt{1+t}-1}{t}, \dfrac{3}{t+1}\right)$

   b) $\lim_{t\to\infty}\left(\operatorname{arctg} t, e^{-2t}, \dfrac{\ln t}{t}\right)$

2. Esboce o gráfico da curva cuja equação vetorial é dada. Indique com setas a direção na qual o parâmetro cresce.

   a) $\mathbf{r}(t) = (t, \cos 2t, \operatorname{sen} 2t)$

   b) $\mathbf{r}(t) = (1+t, 3t, -t)$

3. Mostre que a curva com equações paramétricas $x = t\cos t$, $y = t \operatorname{sen} t$, $z = t$ está no cone $z^2 = x^2 + y^2$ e use esse fato para esboçar a curva.

4. Mostre que a curva com equações paramétricas $x = \operatorname{sen} t$, $y = \cos t$, $z = \operatorname{sen}^2 t$ é a curva de intersecção das superfícies $z = x^2$ e $x^2 + y^2 = 1$. Use esse fato para esboçar a curva.

5. Trace a curva com equações paramétricas

$$\begin{aligned} x &= \sqrt{1 - 0,25\cos^2 10t}\,\cos t \\ y &= \sqrt{1 - 0,25\cos^2 10t}\,\operatorname{sen} t \\ z &= 0,5\cos 10t. \end{aligned}$$

   Explique a aparência da curva, mostrando que ela está em uma esfera.

6. Mostre que a curva com equações paramétricas $x = t^2$, $y = 1 - 3t$, $z = 1 + t^3$ passa pelos pontos $(1, 4, 0)$ e $(9, -8, 28)$, mas não passa pelo ponto $(4, 7, -6)$.

7. ♦ Determine a função vetorial que representa a curva obtida pela intersecção do cone $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ com o plano $z = 1 + y$.

8. Determine o domínio da curva de equação vetorial

$$\mathbf{r}(t) = \left(\sqrt{\frac{t-2}{t+1}}, \ln(5-t^2), e^{-t}\right).$$

9. Mostre que a função vetorial

$$\mathbf{r}(t) = (2\mathbf{i} + 2\mathbf{j} + \mathbf{k}) + (\cos t)\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\mathbf{i} - \frac{1}{\sqrt{2}}\mathbf{j}\right) + (\operatorname{sen} t)\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\mathbf{i} + \frac{1}{\sqrt{3}}\mathbf{j} + \frac{1}{\sqrt{3}}\mathbf{k}\right)$$

   descreve o movimento de uma partícula no círculo de raio 1 centrado no ponto $(2, 2, 1)$ e contido no plano $x + y - 2z = 2$.

10. Uma partícula se move no plano xy de tal maneira que sua posição no instante t é

$$\mathbf{r}(t) = (t - \operatorname{sen} t)\mathbf{i} + (1 - \cos t)\mathbf{j}.$$

Trace o gráfico de $\mathbf{r}(t)$. A curva resultante é chamada de ciclóide.

11. **a)** Faça um esboço grande da curva descrita pela função vetorial $\mathbf{r}(t) = (t^2, t)$, $0 \leq t \leq 2$, e desenhe os vetores $\mathbf{r}(1)$, $\mathbf{r}(1,1)$ e $\mathbf{r}(1,1) - \mathbf{r}(1)$.

    b) Desenhe o vetor $\mathbf{r}(1)$ começando em $(1, 1)$ e compare com o vetor

$$\frac{\mathbf{r}(1,1) - \mathbf{r}(1)}{0,1}.$$

12. Nos itens abaixo: **(i)** Esboce o gráfico da curva plana com a equação vetorial dada; **(ii)** Determine $\mathbf{r}'(t)$; **(iii)** Esboce o vetor posição $\mathbf{r}(t)$ e o vetor tangente $\mathbf{r}'(t)$ para o valor dado de t.

    a) $\mathbf{r}(t) = (t - 2, t^2 + 1)$ e $t = -1$.

    b) $\mathbf{r}(t) = \operatorname{sen}(t)\mathbf{i} + 2\ \cos(t)\mathbf{j}$ e $t = \pi/4$.

    c) ♦ $\mathbf{r}(t) = (1 + \cos t)\mathbf{i} + (2 + \operatorname{sen} t)\mathbf{j}$ e $t = \pi/6$.

13. ★ Determine a derivada da função vetorial.

    a) $\mathbf{r}(t) = (\operatorname{tg} t, \sec t, 1/t^2)$

    b) $\mathbf{r}(t) = \operatorname{sen}^{-1}(t)\mathbf{i} + \sqrt{1 - t^2}\mathbf{j} + \mathbf{k}$

14. ★ Determine o vetor tangente unitário $\mathbf{T}(t)$ no ponto com valor de parâmetro t dado, sendo $\mathbf{r}(t) = \cos(t)\mathbf{i} + 3t\mathbf{j} + 2\operatorname{sen}(2t)\mathbf{k}$ e $t = 0$.

15. Determine as equações paramétricas para a reta tangente *à* curva dada pelas equações paramétricas $x = e^{-t}\ \cos t$, $y = e^{-t}\ \operatorname{sen} t$, $z = e^{-t}$ no ponto $(1, 0, 1)$.

16. As curvas $\mathbf{r}_1(t) = (t, t^2, t^3)$ e $\mathbf{r}_2(t) = (\operatorname{sen} t, \operatorname{sen} 2t, t)$ se interceptam na origem. Determine o ângulo de intersecção destas com precisão de um grau.

17. Calcule a integral $\displaystyle\int_0^{\pi/2} (3\operatorname{sen}^2(t)\cos(t)\mathbf{i} + 3\operatorname{sen}(t)\cos^2(t)\mathbf{j} + 2\operatorname{sen}(t)\cos(t)\mathbf{k})\mathrm{d}t$.

18. ♦Encontre $\mathbf{r}(t)$ se $\mathbf{r}'(t) = 2t\ \mathbf{i} + 3t^2\ \mathbf{j} + \sqrt{t}\ \mathbf{k}$ e $\mathbf{r}(1) = \mathbf{i} + \mathbf{j}$.

19. Se $\mathbf{u}(t) = (\operatorname{sen} t, \cos t, t)$ e $\mathbf{v}(t) = (t, t\cos t, \operatorname{sen} t)$, use a Fórmula 5 do Teorema 3 da Seção 13.2 do Stewart para encontrar

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}[\mathbf{u}(t) \cdot \mathbf{v}(t)].$$

20. $\bigstar$ Se $\mathbf{r}(t) \neq \mathbf{0}$, mostre que

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}|\mathbf{r}(t)| = \frac{1}{|\mathbf{r}(t)|}\mathbf{r}(t) \cdot \mathbf{r}'(t).$$

(Sugestão: $|\mathbf{r}(t)|^2 = \mathbf{r}(t) \cdot \mathbf{r}(t)$).

21. Calcule $\dfrac{\mathrm{d}\mathbf{r}}{\mathrm{d}t}$ e $\dfrac{\mathrm{d}^2\mathbf{r}}{\mathrm{d}t^2}$.

a) $\mathbf{r}(t) = (3t^2, e^{-t}, \ln(t^2+1))$

b) $\mathbf{r}(t) = \sqrt[3]{t^2}\mathbf{i} + \cos(t^2)\mathbf{j} + 3t\mathbf{k}$

c) $\mathbf{r}(t) = \mathrm{sen}(5t)\mathbf{i} + \cos(4t)\mathbf{j} - e^{-2t}\mathbf{k}$

22. Determine a equação da reta tangente à trajetória da função dada, no ponto dado.

a) $\mathbf{r}(t) = (\cos t, \mathrm{sen}\, t, t)$ e $\mathbf{r}(\pi/3)$.

b) $\mathbf{r}(t) = (t^2, t)$ e $\mathbf{r}(1)$.

c) $\blacklozenge$ $\mathbf{r}(t) = \left(\dfrac{1}{t}, \dfrac{1}{t}, t^2\right)$ e $\mathbf{r}(2)$.

23. Determine $\mathbf{r}(t)$ sabendo que

a) $\mathbf{r}'(t) = t\mathbf{i} + 2\mathbf{k}$ e $\mathbf{r}(0) = \mathbf{i} + \mathbf{j}$.

b) $\mathbf{r}'(t) = \mathrm{sen}(t)\mathbf{i} + \cos(2t)\mathbf{j} + \dfrac{1}{t+1}\mathbf{k}$, $t \geq 0$ e $\mathbf{r}(0) = \mathbf{i} - \mathbf{j} + 2\mathbf{k}$.

c) $\mathbf{r}'(t) = \dfrac{1}{1+4t^2}\mathbf{i} + e^{-t}\mathbf{j} + \mathbf{k}$ e $\mathbf{r}(0) = \mathbf{k}$.

24. Calcule.

a) $\bigstar$ $\displaystyle\int_0^1 (t\mathbf{i} + e^t\mathbf{j})\mathrm{d}t$

b) $\displaystyle\int_{-1}^1 \left(\mathrm{sen}(3t)\mathbf{i} + \frac{1}{1+t^2}\mathbf{j} + \mathbf{k}\right)\mathrm{d}t$

c) $\displaystyle\int_1^2 (3\mathbf{i} + 2\mathbf{j} + \mathbf{k})\mathrm{d}t$

25. Sejam $\mathbf{u}(t) = t\mathbf{i} + \mathbf{j} + e^t\mathbf{k}$ e $\mathbf{v}(t) = \mathbf{i} + \mathbf{j} + \mathbf{k}$. Calcule

a) $\displaystyle\int_0^1 (\mathbf{u}(t) \times \mathbf{v}(t))\mathrm{d}t$

b) $\displaystyle\int_0^1 (\mathbf{u}(t) \cdot \mathbf{v}(t))\mathrm{d}t$

26. Seja $\mathbf{F}(t)$ uma força dependendo do tempo t, que atua sobre uma partícula entre os instantes t_1 e t_2. Supondo $\mathbf{F}$ integrável em $[t_1, t_2]$, o vetor

$$\mathbf{I} = \int_{t_1}^{t_2} \mathbf{F}(t)\mathrm{d}t$$

denomina-se *impulso* de $\mathbf{F}$ no intervalo de tempo $[t_1, t_2]$. Calcule o impulso de $\mathbf{F}$ no intervalo de tempo dado.

a) $\mathbf{F}(t) = t\mathbf{i} + \mathbf{j} + t^2\mathbf{k}$, $t_1 = 0$ e $t_2 = 2$.

b) $\mathbf{F}(t) = \dfrac{1}{t+1}\mathbf{i} + t^2\mathbf{j} + \mathbf{k}$, $t_1 = 0$ e $t_2 = 1$.

Referências

[1] J. Stewart. *Cálculo*, Volume 2, 6^a edição, São Paulo, Pioneira/ Thomson Learning.

[2] H. L. Guidorizzi. *Um Curso de Cálculo*, Volume 2, 5^a Edição, 2002, Rio de Janeiro.

[3] G. B. Thomas. *Cálculo*, Volume 2, 10^a edição, São Paulo, Addison-Wesley/Pearson,2002.