GLOSSÁRIO:

OPERADORES BÁSICOS

$\iota = Inversão: \iota: GL_n \to GL_n$, $I \equiv Identidade$

$\tau = Transposição, \tau: M_{nn}(\mathbb{C}) \to M_{nn}(\mathbb{C})$, $\tau(A) = A^T$,

$c = Conjugação, c: M_{mn}(\mathbb{C}) \to M_{mn}(\mathbb{C}), \left(c(A)\right)_{kj} = (\bar{A})_{kj} = \overline{A_{kj}}$

ad = Adjunção, $ad: M_{nn}(\mathbb{C}) \to M_{nn}(\mathbb{C})$, $\left(ad(A)\right)_{kj} = \overline{A_{jk}}$, $ad(A) = A^*$

$S = Deslocamento: S: \mathcal{F}(\mathbb{N}, \mathbb{C}) \to \mathcal{F}(\mathbb{N}, \mathbb{C})$; $S: \mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{C}) \to \mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{C})$, $Sf(x) = f(x+1)$

$\delta = Diferença: \delta: \mathcal{F}(\mathbb{N}, \mathbb{C}) \to \mathcal{F}(\mathbb{N}, \mathbb{C}), \delta f(x) = f(x+1) - f(x)$; $\delta: \mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{C}) \to \mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{C})$, $\delta f(x) = f(x+1) - f(x)$.

Se A for um conjunto $\#A$ é a cardinalidade deste conjunto, isto é, o número de elementos deste conjunto: **Zero** se for vazio, um **inteiro $\boldsymbol{n}$** $\in \mathbb{N}$ se for isomorfo a $I_n = \{1,2,..,n\}$, ∞ **caso contrário** e, neste caso, **Enumerável** se for isomorfo a $\mathbb{N}$.

ESPAÇOS FUNCIONAIS

$\mathcal{F}(A, \mathbb{R})$ =*Espaços vetoriais de todas as funções* $\varphi: A \to \mathbb{C}$ *com soma e multiplicação por Escalar Real ponto a ponto:*

$(\varphi + \psi)(x) = \varphi(x) + \psi(x)$, $(\lambda\varphi)(x) = \lambda\, \varphi(x)$ *e elemento zero sendo a função nula:* $0(x) = 0\ \forall x \in A$. *(*$A \neq \emptyset$*).*

$\mathcal{F}(A, \mathbb{C})$ =*Espaços vetoriais de todas as funções* $\varphi: A \to \mathbb{C}$ *com soma e multiplicação por Escalar (Real ou Complexo) ponto a ponto (*$A \neq \emptyset$*). (Obs: É necessário especificar qual é o Campo de Escalares; Real ou Complexo).*

$P(\mathbb{R}) \subset \mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R}) = Polinômios\ com\ coeficientes\ reais$ $P(\mathbb{C}) \subset \mathcal{F}(\mathbb{C}, \mathbb{C}) = Polinômios\ com\ coeficientes\ complexos$

$P_N(\mathbb{R}) = Polinômios\ reais\ de\ grau\ \leq N$, $P_N(\mathbb{C}) = Polinômios\ complexos\ de\ grau\ \leq N$,

$C^0(\mathbb{R}, \mathbb{R}) \subset \mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R}) = Conjunto\ de\ Funções\ Reais\ continuas$,

$C^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R}) \subset \mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R}) = Conjunto\ de\ Funções\ Reais\ com\ todas\ as\ derivadas\ contínuas$, $C^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R}^m) = \{f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}^m, f(t) = \left(f_1(t), .., f_m(t)\right);\ f_k \in C^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R})\}$,

$C^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{C}) \subset \mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{C}) = \{f: \mathbb{R} \to \mathbb{C}, f(t) = f_1(t) + i f_2(t), f_k(t) \in C^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R})\}$,

Espaço das Transformações Lineares: Se E, F forem Espaços Vetoriais com **Escalares Reais**: $\mathcal{L}(E, F) = \{L: E \to F; L\ linear\}$ (Analogamente com **Escalares Complexos**)

Espaço Dual: Se E for um Espaço Vetorial com **Escalares Reais**: $\mathcal{L}(E, \mathbb{R}) = E^*$ (Analogamente com **Escalares Complexos**)

Atenção: Quando as funções de um Espaço Funcional admitem valores complexos, as operações de soma e multiplicação por escalar **ponto a ponto** podem resultar na definição de duas Estruturas Vetoriais distintas: Uma delas com o Campo de *Escalares Reais*, outra, com o Campo de *Escalares Complexos*. O mesmo com vetores e matrizes; por exemplo, $\mathbb{C}^n$ pode resultar em duas estruturas vetoriais distintas a depender do Campo de Escalares considerados, Real ou Complexo.

MATRIZES ESPECIAIS

Matriz Identidade: $I \in M_{nn}(\mathbb{C})$; $I_{kj} = \delta_{kj}$, **Matriz Nula** :$0 \in M_{mn}(\mathbb{C}), 0_{kj} = 0$.

$M_{mn}(\mathbb{R}) = Matrizes\ Reais\ com\ m\ linhas\ e\ n\ colunas$, $M_{mn}(\mathbb{C}) = Matrizes\ Complexas\ com\ m\ linhas\ e\ n\ colunas$,

$M_{nn}(\mathbb{R}) = Matrizes\ Reais\ quadradas\ de\ ordem\ n$, $M_{nn}(\mathbb{C}) = Matrizes\ Complexas\ quadradas\ de\ ordem\ n$

$GL_n(\mathbb{C}) \subset M_{nn}(\mathbb{C})$= *"Grupo das Matrizes Complexas Inversíveis de ordem n"* (Analogamente $GL_n(\mathbb{R}) \subset M_{nn}(\mathbb{R})$).

$\mathcal{S}_n(\mathbb{R}) = \{A \in M_{nn}(\mathbb{R});\ S^T = S\} \equiv Matrizes\ Reais\ Simétricas\ de\ ordem\ n$,

$\mathcal{A}_n(\mathbb{R}) = \{A \in M_{nn}(\mathbb{R});\ A^T = -A\} \equiv Matrizes\ Reais\ Antisimétricas\ de\ ordem\ n$,

$\mathcal{H}_{nn}(\mathbb{C}) = \{A \in M_{nn}(\mathbb{C});\ \overline{A^T} = ad(A) = A\}$ ≡*Matrizes Autoadjuntas- Hermiteanas (Transposta Conjugada):*

$Ort_n(\mathbb{R}) = Matrizes\ Reais\ Ortogonais\ de\ ordem\ n\ ,\ GL_n = Conjunto\ de\ Matrizes\ Reais\ inversíveis\ de\ ordem\ n\ ,$

Matrizes Diagonais: $\{A \in M_{nn}(\mathbb{C});\ A_{ij} = \delta_{ij}\lambda_j\} = diag(\lambda_1, , , , , \lambda_n);$

Matrizes Triangulares Superiores: $\{A \in M_{nn}(\mathbb{C});\ A_{ij} = 0\ se\ j > i\}$ (Analogamente *Triangulares Inferiores*)

Matriz "Reduzida": $A \in M_{mn}(\mathbb{C})$. $A^{[ij]} \in M_{(n-1)(n-1)}(\mathbb{C})$ *é a matriz resultante da extração da i-ésima linha e j-ésima coluna de A.*

Vetores Linhas de uma Matriz $A \in M_{mn}(\mathbb{R}) :\ 1 \le r \le m\ ;\quad A_r \in \mathbb{R}^n\ , (A_r)_k = A_{rk}\ , 1 \le k \le n$

Vetores Colunas de uma Matriz $A \in M_{mn}(\mathbb{R}) :\ 1 \le s \le n\ ;\ A^s \in \mathbb{R}^m\ , (A^s)_j = A_{js}\ , 1 \le j \le m$

Base Canônica de $\mathbb{R}^n$: $\{\delta^j\}_{1 \le j \le n}$. Por exemplo, para $n = 3$ $\delta^1 = e_1 = \begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}, \delta^2 = e_2 = \begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}, \delta^3 = e_3 = \begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}$.

Delta de Kronecker/Matriz Identidade: $\delta_{jk} = 0\ se\ j \neq k, \delta_{jj} = 1$

Posto de Matriz: $r: M_{mn}(\mathbb{R}) \to \mathbb{N}, r(A) = Posto\ de\ A = \dim[A^k] = \dim[A_j]$,

Nucleo de um Operador/Matriz: $N(A) = \{x \in \mathbb{R}^n; Ax = 0\} = Ker(A) = Nucleo\ de\ A \in\ M_{mn}(\mathbb{R})\ , N(A) \subset \mathbb{R}^n,$

Imagem de Operador/Matrix: $R(A) = Imagem\ de\ A \in M_{mn}(\mathbb{R}) = \{y \in \mathbb{R}^m;\ \exists x \in \mathbb{R}^n, Ax = y\},$

Álgebra Gerada:
$[\![\{v_k\}]\!] = Álgebra\ gerada\ pelo\ conjunto\ de\ vetores\ \{v_k\} \equiv$
$"Combinações\ lineares\ de\ todos\ os\ possíveis\ produtos\ finitos\ de\ elementos\ deste\ conjunto"$

$Sim_n = \{\sigma: I_n \to I_n = \{1, \dots, n\} : \sigma\ bijeção(Permutação)\}\ ; sgn: Sim_n \to \{+1, -1\};\ sgn(\sigma) = "\boldsymbol{Sinal\ da\ permuta}ção\ \boldsymbol{\sigma}"$ **.**

Potências *Colchete*: $x^{[n]} = nx^{[n-1]}$ onde , $x^{[0]} = 1, x^{[n+1]} = x^{[n]}(x - n)$

Sub-espaços Complementares-Soma Direta:Se U, V sub-espaços vetoriais de H, escreve-se a **soma direta** de sub-espaços: $H = U \oplus V$ se $\forall h \in H, \exists únicos\ u \in U, v \in V\ ;\ h = u + v$. Diz-se que U, V são sub-espaços vetoriais **complementares** em H.

Espaços Ortogonais: e U, V sub-espaços vetoriais de H, escreve-se $U \perp V$ se $\langle u, v\rangle = 0\ , \forall u \in U, v \in V$.

Complemento Ortogonal: Se $S \subset E$ é sub-espaço de um EVPI $E, \langle\ ,\ \rangle$ de dimensão finita ($\dim E = n$) então $S^\perp = \{h \in E;\ \langle h, s\rangle = 0, \forall s \in S\}$ é o **complemento e ortogonal** de S em $E, \langle\ ,\ \rangle$. Diz-se que a soma direta $E = S \oplus S^\perp$ é ortogonal.

Espaços Quocientes , Soma de Espaços,

Álgebra é um Espaço Vetorial E que também dispõe de uma operação produto $E \times E \to E$, uv que é associativa, $(uv)w = u(vw)$ e distributiva,$(u(v + \lambda w) = uv + \lambda uw)$, , $\forall u, v, w \in E, \forall \lambda$ escalar . É Álgebra com elemento neutro para o produto se existe $e \in E;\ ue = u = eu\ \forall u \in E$ e, é Comutativa se $uv = vu\ \forall u, v \in E$.

OPERADORES:

Operador Derivação:

$D: C^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R}) \to C^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R})\ , (Du)(x) = \frac{du(x)}{dx},$

$D: C^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R}^m) \to C^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R}^m)\ ,\ Df(t) = \big(Df_1(t), .., Df_m(t)\big)\ ,$

$D: C^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{C}) \to C^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{C})\ ,\ Df(t) = Df_1(t) + iDf_2(t)\ ,$

Operador Integração: $\int_a\ : C^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R}) \to C^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R})\ , \left(\int_a u\right)(x) = \int_a^x u(s)ds,$

Operador Multiplicação por uma Função Fixa: Para $\varphi \in C^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R}),\quad M_\varphi: C^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R}) \to C^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R});\quad M_\varphi u = \varphi(x)u(x)$

Se $p(x) = \sum_{k=0}^n a_k x^k$ for polinômio com coeficientes complexos então $p(D): C^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{C}) \to C^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{C}), p(D)u(t) = \sum_{k=0}^n a_k \frac{d^k u}{dt^k}$ é um **Operador Diferencial Polinomial** associado ao polinômio algébrico $p(x)$

Se $p(x)=\sum_{k=0}^{N} a_k x^k$ for polinômio com coeficientes complexos então $p(S)\colon \mathcal{F}(\mathbb{R},\mathbb{C}) \to \mathcal{F}(\mathbb{R},\mathbb{C})$,
$p(S)\varphi(n)=\sum_{k=0}^{N} a_k S^k \varphi(n)=\sum_{k=0}^{N} a_k \varphi(n+k)$ é **Operador Recursivo Polinomial,** associado ao polinômio algébrico $p(x)$ **.**

-Traço: $Tr\colon \mathcal{L}(E) \to \mathbb{C}, Tr(L)=\sum_{k=1}^{n} A_{kk}$, $A=L_{[\alpha]}$, α *é Base de E*. (V.-*Teor. Invariância do Traço com a base*)

-Determinante: $det\colon \mathcal{L}(E) \to \mathbb{C}, \det L=\sum_{k=1}^{n} sgn(\sigma) A_{1\sigma(1)} \cdots A_{n\sigma(n)}=A^1 \wedge \ldots \wedge A^k \wedge \ldots A^n$ (Produto Alternado/Exterior) ,
$A=L_{[\alpha]}$, α *é Base de E*.(V. *Teor. Invariância com a base)*

Função Bilinear *Real* *(Função de 2º Grau):* $q\colon \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}, q(x,y)=\langle Sx,y\rangle=\langle x,Sy\rangle=\sum S_{ij}x_i y_j$, $S \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$

Função Quadrática *Real*- *Função de 2º Grau):* $Q\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}, Q(x)=\langle Sx,x\rangle=q(x,x)$, $S \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$.

XXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXX

EXERCÍCIOS:

-TRANSFORMAÇÕES LINEARES

-**Apresente** os ingredientes (objetos) matemáticos e as operações matemáticas necessárias e indispensáveis para definir 1)uma Estrutura de Espaço Vetorial, 2) uma Estrutura de Espaço Vetorial com Produto Interno e 3) uma Estrutura de Álgebra. (**Sugestão**: (1)Conjunto de Vetores, Elemento Zero, Campo de Escalares, Soma, Multiplicação por Escalar, (2).......).

-**Operações Lineares**: Determine as Operações Lineares dentre as seguintes definidas em Espaços Vetoriais (com seus respectivos Campos de Escalares):

1) Traço em $\{M_{nn}(\mathbb{R}),\mathbb{R}\}$, 2)Transposição $\{M_{nn}(\mathbb{R}),\mathbb{R}\}$, 3) Determinante $\{M_{nn}(\mathbb{R}),\mathbb{R}\}$, 4)Posto $\{M_{mn}(\mathbb{R}),\mathbb{R}\}$

5)Derivação $\{C^\infty(\mathbb{R},\mathbb{R}),\mathbb{R}\}$, 6)Integração $\{C^\infty(\mathbb{R},\mathbb{R}),\mathbb{R}\}$, 7)Multiplicação em $\{C^\infty(\mathbb{R},\mathbb{R}),\mathbb{R}\}$ por função fixa $\varphi \in C^\infty(\mathbb{R},\mathbb{R})$: $M_\varphi\colon C^\infty(\mathbb{R},\mathbb{R}) \to C^\infty(\mathbb{R},\mathbb{R}), M_\varphi u(x)=\varphi(x)u(x)$, 7)Deslocamento: $S\colon C^0(\mathbb{R},\mathbb{R}) \to C^0(\mathbb{R},\mathbb{R}), Sf(x)=f(x+1)$ em $\{C^0(\mathbb{R},\mathbb{R}),\mathbb{R}\}$ 8) Multiplicação por um número complexo fixo $h_\alpha\colon \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, $h_\alpha(z)=\alpha z$ em $\{\mathbb{C},\mathbb{R}\}$, 9)Conjugação em $\{\mathbb{C}^n,\mathbb{R}\}$, 10)Conjugação em $\{\mathbb{C}^n,\mathbb{C}\}$, 11) Traço em $\{\mathcal{L}(E),\mathbb{R}\}$ para $\{E,\mathbb{R}\}$ de dimensão finita 12)$det\{\mathcal{L}(E),\mathbb{C}\}$ para $\{E,\mathbb{C}\}$ de dimensão finita, 13)Diferença $\delta\colon C^0(\mathbb{R},\mathbb{R}) \to C^0(\mathbb{R},\mathbb{R}), \delta f(x)=f(x+1)-f(x)$ em $\{C^0(\mathbb{R},\mathbb{C}),\mathbb{C}\}$, 14)Avaliação, $a\colon C^0(\mathbb{R},\mathbb{C}) \to \mathbb{C}$, $a(f)=f(0)$ em $\{C^0(\mathbb{R},\mathbb{C}),\mathbb{C}\}$, 15) Avaliação, $a\colon P(\mathbb{C}) \to \mathbb{C}^n$, $a(p)=(p(1),\ldots,p(n))$ em $\{C^0(\mathbb{R},\mathbb{C}),\mathbb{C}\}$, 16) Campo de Velocidade $V\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ definido no Espaço Euclideano pelo produto vetorial: $V(x)=\omega \wedge x$, $(\omega \in \mathbb{R}^3)$, 17) $L\colon \mathcal{F}(\mathbb{N},\mathbb{C}) \to \mathcal{F}(\mathbb{N},\mathbb{C})$; $Lf(x)=f(x+2)-2f(x+1)+f(x)$ em $\{\mathcal{F}(\mathbb{N},\mathbb{C}),\mathbb{C}\}$, 18)Translação por um elemento fixo a : $t\colon E \to E$, $t(x)=a+x$, 19)$l\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, $l(x)=\sum_{i\neq j} A_{ij}x_i x_j$.

-Calcule uma expressão elementar para soma dos quadrados dos primeiros *n* números inteiros $S_2\colon \mathbb{N} \to \mathbb{C}$, $S_2(n)=\sum_{k=0}^{n} k^2$, **utilizando a caracterização** de $S_2(n)$ como solução da seguinte equação de recorrência: $\delta^3 S_2=0$, pois $\delta S_2(n)=(n+1)^2-n^2=2n+1$. (**Sugestão**: $Ker\{\delta^3\}=\text{"}Polinômios\ de\ segundo\ grau\ (\{an^2+bn+c\})\text{"}$ e $S_2(0)=0, S_2(1)=1, S_2(2)=5$)

Subespaços Vetoriais:

-Determine os sub-espaços vetoriais: $Ker\,\{\delta^3\}, R(\delta^3), Ker\,(D^2), R(D^2)$ do Operador $\delta\colon P_N(\mathbb{C}) \to P_N(\mathbb{C})$.(**Sugestão**: $grau\{\delta p\}=grau\{p\}-1$, *em geral.*

-Determine os sub-espaços vetoriais: $Ker\,\{L\}$, $(Ker\{L\})^\perp$, $R(L)$, $(R\{L\})^\perp$ do Operador: $L\colon P_N(\mathbb{C}) \to P_N(\mathbb{C})$, $L=D^2+1$ em $P_N, \langle p,q\rangle=\int_0^1 p(x)q(x)dx$. Determine o isomorfismo entre $(Ker\{L\})^\perp$ e $R(L)$ resultante da restrição de L.

-Obtenha a condição de consistência de Hausdorff para a existência de soluções da equação $Lx=b$ para o vetor $b \in P_N$ do exercício anterior.

-Determine os sub-espaços vetoriais: $Ker\,\{L\}, R(L)$ do Operador: $L\colon \mathbb{C}^3 \to \mathbb{C}^3$, $L=\begin{pmatrix}1 & 1 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$.

-Determine $(Ker\{L\})^\perp$ para : $L\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, $L=\begin{pmatrix}1 & 1 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}$ e obtenha o isomorfismo $L_*\colon (Ker\{L\})^\perp \to R\{L\}$ resultante da restrição de L.

-Determine $(R\{L\})^{\perp}$ para : $L: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$, $L = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ e a condição de Consistência de Haurdorff para existência de soluções da equação $Lx = b$ para o vetor $b \in \mathbb{R}^3$.

Determine as dimensões dos seguintes Espaços Vetoriais: 1)$M_{mn}(\mathbb{R})$ 2) $M_{mn}(\mathbb{C})$ com 2a)Escalares Reais e 2b)Escalares Complexos, 3)$\mathcal{A}_n(\mathbb{R}) \subset M_{mn}(\mathbb{R})$ antisimétricas reais de ordem n, 4)$\mathcal{S}_n(\mathbb{R}) \subset M_{nn}(\mathbb{R})$ Simétrica Reais, 5)Matrizes Triangulares Superiores Reais, 6) $\mathcal{L}(E,F), \dim E = n, \dim F = m$, 7)$\mathcal{L}(\mathcal{L}(E,F),F)$, $\dim E = n, \dim F = m$, 8) $\left(\mathcal{L}(E,F)\right)^*$, 9)$\mathcal{L}(M_{nn}(\mathbb{R}), \mathbb{R}$), 10) $\mathcal{F}(A,\mathbb{R}), \#A = p$, 11) $E \times F, \dim E = n, \dim F = m$, 12) $E/_F$, $\dim E = n > \dim F = m$, 13)$dimF^{\perp}$, $\dim E = n > \dim F = m$ (**Sugestão:** Escreva explicitamente uma base $\{E^{(st)}\}$ para $M_{mn}(\mathbb{R})$, onde $\left(E^{(st)}\right)_{ij} = \delta_{is}\delta_{jt}$ e, lembre-se do isomorfismo $\mathcal{L}(E,F) \approx M_{mn}(\mathbb{R}), se\ \dim E = n, \dim F = m$. Para $\mathcal{A}_n(\mathbb{R})$ $\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ e Matrizes Triangulares Superiores, bastas contar quantas entradas com valores independentes são disponíveis.

-**Determinar os Autovalores** da Operações lineares:

1) $\delta: \mathcal{F}(\mathbb{N},\mathbb{C}) \to \mathcal{F}(\mathbb{N},\mathbb{C})$, 2) $\delta: E \to E$, $E = \{\mathcal{F}(\mathbb{N},\mathbb{C});\ f(0) = 0$, 3) $D: C^{\infty}(\mathbb{R}) \to C^{\infty}(\mathbb{R})$, 4) $D: E \to E = \{f \in C^{\infty}(\mathbb{R},\mathbb{R}), f(0) = 0$, 5) $\delta: E \to E$, $E = \{\mathcal{F}(\mathbb{N},\mathbb{C});\ f(0) = f(100)\}$, 6) $\delta: E \to E$, $E = \{\mathcal{F}(\mathbb{N},\mathbb{C});\ f(0) = f(10)\}$,

7)$\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -3 & 2 \end{pmatrix}: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, 8)$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, 9)$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$,10) Matriz Triangular Superior (com diagonal Ajj)e das transpostas de 7)8)9) 10).

-Mostre que para n números $\{\gamma_k\}_{1 \le k \le n}$ distintos , as n respectivas funções $h_\gamma(t) = e^{\gamma t}$ são LI. (**Sugestão**: São **autofunções** do operador $D: C^{\infty}(\mathbb{R}) \to C^{\infty}(\mathbb{R})$. (**Sugestão**:Consulte Teorema geral a respeito).

-Se $F \subset \mathcal{F}(\mathbb{N},\mathbb{C})$ é o sub-conjunto das funções que satisfazem a **Recursão de Fibonacci**, $(f(k+2) = f(k+1) + f(k))$, mostre que F é um sub-espaço vetorial. (**Sugestão**: A Função que associa uma função $f \in F$ ao vetor $\begin{pmatrix} f(0) \\ f(1) \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^n$ é linear, e biunívoca, e determina a $\dim Ker\{L\}$, onde $Lh(k) = h(k+2) - h(k+1) - h(k)$.)

-**Determine a matriz** $i_{[\alpha\beta]}$ que representa a identidade $i: E \to E$ nas bases ortonormais, $\{\alpha_k\}_{1 \le k \le 2} = \{(1,0) = \alpha_1, (0,1) = \alpha_2\}$ e $\{\beta_k\}_{1 \le k \le 2} = \{(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}})\ ,(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{-1}{\sqrt{2}})\}$. Mostre que esta Matriz é ortogonal: $\left(i_{[\alpha\beta]}\right)^T = \left(i_{[\alpha\beta]}\right)^{-1}$.

-**Determine a matriz** $T_{[\alpha\beta]}$ que representa a operação $T: E \to E$ nas bases ortonormais, $\{\alpha_k\}_{1 \le k \le 2} = \{(1,0) = \alpha_1, (0,1) = \alpha_2\}$ e $\{\beta_k\}_{1 \le k \le 2} = \{(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}})\ ,(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{-1}{\sqrt{2}})\}$ sabendo-se que $T_{[\alpha]} = T_{[\alpha\alpha]} = \begin{pmatrix} \frac{3}{2} & \frac{3}{4} \\ \frac{3}{4} & \frac{5}{4} \end{pmatrix}$.

-MÉTODO DE FOURIER-

-Mostre que a **Recursão de Fibonacci** de **2ª** *ordem* $(F(n+2) = F(n=1) + F(n)\ ;\ \forall n \in \mathbb{N}$) e **dimensão 1** (isto é, numérica) pode ser escrita como uma recursão vetorial *equivalente* de **1ª** ordem e **dimensão 2** da seguinte maneira:$\varphi(n+1) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \varphi(n);\ \forall n \in \mathbb{N}$ em que $\varphi(n) = \begin{pmatrix} F(n) \\ F(n+1) \end{pmatrix}$. (**Obs:***Equivalencia* entre Equações significa que o conjunto de soluções de uma Equação pode ser biunivocamente associado ao conjunto de soluções da outra)

-Obtenha a solução geral (isto é, o conjunto de todas as soluções) da Recursão vetorial de Fibonacci calculando As **Potencias** $A^N = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}^N \in M_{22}(\mathbb{R})$. (**Sugestão**: Observe que $\varphi(k) = A^k \varphi(0)$. Diagonalize $O^T \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} O = \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \mu \end{pmatrix}$).

-Calcule a solução específica da **Recursão de Fibonacci** para $F(0) = 1, F(1) = 2$.

-Escreva a **Recursão de Fibonacci** $(F(n+2) = F(n=1) + F(n)\ ;\ \forall n \in \mathbb{N}$) na forma **Operacional** e **Funcional** $p(S)F = 0$ em que $S: \mathcal{F}(\mathbb{N},\mathbb{C}) \to \mathcal{F}(\mathbb{N},\mathbb{C})$ é o operador linear de "deslocamento" ("Shift") , $Sf(k) = f(k+1)$.

-**Autovalores-Autofunções** para **Operadores Polinomiais** de Recursão: Mostre que para qualquer função de potência $f(k) = \gamma^k$, temos $Sf = \gamma f$ e , portanto $p(S)f = p(\gamma)f$. Obtenha duas soluções da forma $f(k) = \gamma^k$ para a Recursão de Fibonacci e a solução geral da recursão. Calcule a expressão numérica para a solução que parte das seguintes condições iniciais $f(0) = 1, f(1) = 2$.

-O **Operador Polinomial** de Recursão $p(S): \mathcal{F}(\mathbb{N},\mathbb{C}) \to \mathcal{F}(\mathbb{N},\mathbb{C})$, cujo polinômio associado é $p(\lambda) = (\lambda-1)(\lambda^2+1)(\lambda+2)$ tem o seu núcleo gerado por: $Ker\{P(S)\} = \left[1, (-2)^k, \cos k\frac{\pi}{2}, \operatorname{sen} k\frac{\pi}{2}\right] = [1, (-2)^k, i^k, (-i)^k]$. Escreva a Equação recursiva de ordem 4 correspondente a $p(S)f = 0$. (**Sugestão**: $p(\lambda) = (\lambda-1)(\lambda^2+1)(\lambda+2) = \lambda^4+\lambda^3-\lambda^2+\lambda-2$ e, portanto, $p(S)f(x) = f(x+4)+f(x+3)-f(x+2)+f(x+1)-2f(x)$, ou, $f(x+4) = -f(x+3)+f(x+2)-f(x+1)+2f(x)$.

-**Operador Diferença**: Mostre que: $\delta: P_N(\mathbb{C}) \to P_N(\mathbb{C})$; $\delta\, x^{[n]} = nx^{[n-1]}$ onde , $x^{[0]} = 1, x^{[n+1]} = x^{[n]}(x-n)$,

-Calcule a expansão $x^4 = \sum_{k=0}^{4} c_k x^{[k]}$ e δx^4 na base $\{x^{[k]}\}$.

-**Operador Diferencial**: Mostre que $p(D)e^{\alpha t} = p(\alpha)e^{\alpha t}, \forall\alpha \in \mathbb{C}$, e $h_\lambda(t) = e^{\lambda t}$ é solução de $p(D)h = 0$. Mostre que a Solução geral de $p(D)u = e^{i\omega t}$ é $u = \sum_{k=0}^{n} a_k h_k(t) + \frac{e^{i\omega t}}{p(i\omega)}$. (**Sugestão**:Siga as instruções/regras de derivação para $e^{(a+ib)t} = (e^{at}cosbt) + i\,(e^{at}\ sent\ bt)$) , coordenada a coordenada e leve em conta as relações trigonométricas elementares).

-TEORIA ESPECTRAL

-Obtenha os autovalores de $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$ e seus respectivos autovetores **ortonormais**.

-Se $\dot{x} = Ax$ onde $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$ utilize o ***Método Espectral de Fourier*** para obter a solução geral $x(t) = c_1 h_1(t) + c_2 h_2(t)$ e em particular aquela solução que satisfaz a seguinte condição inicial $x(0) = 1, \dot{x}(0) = 0$. (**Sugestão**: Obtenha os **dois** autovalores e autovetores $Av = \lambda v$ e as soluções $h_\lambda(t) = e^{\lambda t}v$).

-Utilize o ***Método de Diagonalização*** de Fourier para obter a solução geral de $\dot{x} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} x$. (**Sugestão**: Diagonalize $O\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}O^{-1} = diag(\lambda,\mu)$ e faça mudança de variável $y = Ox$.

-**Espectro**: Verdade ou não: Se $A \in GL_n(\mathbb{C})$ e $\lambda \in Sp(A)$ então $\lambda^2 \in Sp(A^2)$, $\lambda^{-1} \in Sp(A^{-1})$, $\lambda \in Sp(A^T)$,

-**Matrizes de Blocos**: Verdade ou não: Se $M = \begin{pmatrix} A_{11} & 0 \\ 0 & A_{22} \end{pmatrix} \in M_{(n+2)(n+2)}$, $A_{11} \in M_{nn}, A_{22} \in M_{22}$, então,

$Sp(A_{11}) \cap Sp(A_{22}) \subset Sp(M)$

-Calcule $\det\begin{pmatrix} A_{11} & 0 \\ 0 & A_{22} \end{pmatrix}$ se $A_{11} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ e $A_{22} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$.

-**Posto de Matrizes***:* Dadas as Matrizes $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ determine $r(A), r(B), r(A^2), r(AB)$

-**Matriz** J :

-Dada $J = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \in M_{22}$, determine $J^{353} = -I$, $\det J^{11}$, $Tr\, J^{33}$ (**Sugestão**:Analise a "Tabuada multiplicativa da matriz J".

-Dada $M = aI + bJ \in M_{22}$, determine M^7 .

-Mostre que as Matrizes $\mathcal{C} = \{aI + bJ, a, b \in \mathbb{R}\} \subset M_{22}(\mathbb{R})$ constituem uma sub-álgebra de $M_{22}(\mathbb{R})$ com invertibilidade e isomorfa à Àlgebra dos Números complexos com escalares reais.

-**Matrizes Antisimétricas** $A \in M_{33}(\mathbb{R})$. Mostre que: $\langle Ax, x\rangle = 0, \forall x$, $detA = 0$, $\exists\omega \in \mathbb{R}^3, Ax = \omega \wedge x$, $\exists x \neq 0, Ax = 0$, $TrA = 0$

-Mostre que se $A \in M_{nn}(\mathbb{R})$ e n ímpar então $\det A = 0$, mas não necessariamente se n par.

-Mostre que se $A \in M_{nn}(\mathbb{R})$ então $iA \in H_{nn}(\mathbb{C})$

-Matrizes Simétricas: $S_{ij} = S_{ji}$, $\langle Sx, y\rangle = \langle x, Sy\rangle$, $\exists x \neq 0$; $Ax \parallel x, \exists O, O^T O = I$; $OSO^T = diag(..\lambda_k..)$; $\langle Sx, x\rangle > 0, \|x\| = 1 \Longrightarrow E = \{x; \langle Sx, x\rangle = 1\}\ é\ um\ Elipsoide,$

- $O^T = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{-1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}$, $O = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{-1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}$, $O^T \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} O = \begin{pmatrix} \frac{3}{2} & \frac{3}{4} \\ \frac{3}{4} & \frac{5}{4} \end{pmatrix} = A$

DETERMINANTE:

-Lápis e Papel: Considere o produto vetorial no **plano** $u \wedge v$ cujo valor é interpretado como a área orientada do **paralelogramo**$\alpha = u \wedge v$ com arestas $u\ e\ v$. Mostre que as seguintes propriedades são satisfeitas: 1) $u \wedge v = 0$ se e somente se $u\ e\ v$ forem LI. Utilizando a *"Tabuada dos produtos vetoriais da base canônica"* mostre que esta operação em $(\mathbb{R}^2)^2$ estabelece a função determinante $det: M_{22}(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$ definida axiomaticamente. Identifique os termos da Expansão de Leibniz.

-Lápis e Papel: Considere o produto misto $(u \wedge v\ ) \cdot w$ no **Espaço** cujo valor é interpretado como a área orientada do **paralelepípedo** $V = (u \wedge v) \cdot w$ com arestas $u\ , v, w$. Mostre que as seguintes propriedades são satisfeitas: 1) $(u \wedge v\ ) \cdot w\ = 0$ se e somente se $u\ , v, w$ forem LI. Utilizando a "*Tabuada dos produtos vetoriais da base canônica*" , mostre que esta operação tripla em $(\mathbb{R}^3)^3$ estabelece a função determinante $det: M_{33}(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$ definida axiomaticamente. Identifique os termos da Expansão de Leibniz.

-Sinais de Permutações: Calcule $sgn(\sigma)$ onde $\sigma \in P_{(4)}$; $\sigma: I_4 \to I_4 = \{1,2,3,4\}$; $\sigma(1) = 2, \sigma(2) = 4, \sigma(3) = 1, \sigma(4) = 3$. (**Sugestão**: Escreva $\sigma = T_{k_1} \circ\circ\circ T_{k_m}$ como uma sucessão de transposições adjacentes aplicadas à Identidade.

Transposições adjacentes $T_k \in P_{(n)}$, $1 \le k < n$ são permutações que apenas trocam a posição de dois valores adjacentes : $T_k(k) = k + 1$ e $T_k(k+1) = k$ e para outros pontos $s \ne, k+1\ T_k(s) = s$ .Como $sgn(T_k) = -1$, $sgn(\sigma) = (-1)^{k_m}$.

-**Derivada de Determinante**-Obtenha a derivada $\frac{d}{dt}\ det(A + tB))$ em que $B \in GL_n$. (**Sugestão**: Escreva $\det\{\ (AB + tI)\ B^{-1}\} = \det(AB + tI) \det B^{-1}$ e expanda $\det\ (A + tB)$ em potências de t calculando apenas o termo de grau zero e grau 1).

-Mostre que o determinante da **Matriz de Vandermode** $\{V_{ij}\}_{1\le,i,j\le n} = \{(\gamma_i)^{j-1}\}$, é distinto de zero para números $\{\gamma_k\}_{1\le k\le n}$ distintos. (**Sugestão-** As funções $h_\gamma(k) = \gamma^k$ são autofunções do Operador linear de deslocamento $S: \mathcal{F}(\mathbb{N}, \mathbb{C}) \to \mathcal{F}(\mathbb{N}, \mathbb{C}), Sf(k) = f(k+1)$ e os seus valores em $k = 1$ formam um vetor LI e, portanto , uma base de $\dim Ker\{p(S)\}$. Se $p(\lambda) = \prod_{s=1}^n(\lambda - \lambda_s)$) , então $\dim Ker\{p(S)\} = n$ e existe uma função linear bijetiva entre $\mathbb{R}^n$ (condições iniciais) e as soluções de $p(S)h = 0$.

-**Calcule**: $Tr\{L\}$: $L: P_N(\mathbb{R}) \to P_N(\mathbb{R}),\ L = D - xD + 1\ , L = D, L = xD\ , L = S\ , L = \delta$. (**Sugestão**: Represente a Operação Linear em uma base apropriada $\alpha \subset P_N$, na forma matricial, $L_{[\alpha]}$ e utilize a invariância do traço: $\mathrm{Tr}(PA) = \mathrm{Tr}(AP)$).

-**Calcule:** $\det L$: $L: P_N(\mathbb{R}) \to P_N(\mathbb{R}),\ L = D - xD + 1\ , L = D, L = xD\ , L = S\ , L = \delta$. (**Sugestão**: Represente a Operação Linear em uma base apropriada $\alpha \subset P_N$, na forma matricial, $L_{[\alpha]}$ e utilize a invariância do determinante: $\det A = \det(P^{-1}AP)$)

-Calcule $\det A$; $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ -1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ escrevendo-o na forma de um **produto alternado**/externo $\det A = A^1 \wedge A^2 \wedge A^3$ **utilizando apenas** os axiomas que o definem: **1)Normalização**: Se $\{\delta^k\}_{1\le k\le n}\ for\ Base\ Canônica\ de\ \mathbb{R}^n$, então $\delta^1 \wedge \dots \wedge \delta^n = 1$, (isto é, $\det I = 1$) **2)Multilinearidade** (isto é, Linearidade termo a termo: $..\wedge u \wedge (w + \lambda v) \wedge .. = .\wedge u \wedge w \wedge + \lambda(..\wedge u \wedge v \wedge ..)$.) **3)Antisimetria** (isto é, o produto alternado de n vetores de $\mathbb{R}^n$que contenha dois fatores adjacente iguais é sempre nulo). (**Sugestão**: Mostre inicialmente que os axiomas acima implicam que a transposição de colunas adjacentes modificam apenas o sinal do produto, pois, $0 = .\wedge (u + v) \wedge (u + v) \wedge .. = .\wedge u \wedge v \wedge + .\wedge v \wedge u \wedge \dots$. Em seguida expanda cada vetor coluna em termos da base canônica $\{\delta^j\}\ A^k = A_{1k}\delta^1 + A_{2k}\delta^2 + A_{3k}\delta^3$. Os **3** Axiomas do produto alternado/externo são na verdade uma "Tabuada" para esta operação e basta segui-los para calcular o produto externo de quaisquer vetores).

-Faça o mesmo com a Matriz em Blocos: $M = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} \in M_{66}(\mathbb{R})$, $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} = B^T$, $C = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix} = D$

ESPAÇOS COM PRODUTO INTERNO

-Considere um vetor unitário $N \in E$, sendo E um **E**spaço **V**etorial Real com **P**roduto **I**nterno (**EVPI**) Cartesiano real. Mostre que a operação "Projeção Vetorial Ortogonal sobre N" é uma **operação linear**, $P_N: E \to E, P_N(v) = \langle v, N \rangle N$. Represente esta operação como um produto matricial quando $E = \mathbb{R}^n$.(**Sugestão**: Escreva $\langle v, N \rangle N$ com produto de 3 matrizes respectivamente de ordens: $(n \times 1)(1 \times n)(n \times 1)$ cujo resultado e´uma matriz (vetor) de ordem $(n \times 1)$: $P_N(v) = (NN^T)v$.

-Se $N = \frac{1}{\sqrt[2]{3}}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ obtenha $P_N(v)$ onde $v = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$ e determine a expressão matricial para P_N.

-O mesmo para $N = \frac{1}{c}(x^2 + 1) \in E = P_5(\mathbb{R}) = \{Polinomios\ reais\ de\ grau\ \leq 5\}$, $\langle p, q \rangle = \int_0^1 p(x)q(x)dx$ e $v = x^5 + x$.(Observação: Calcule c para Normalizar $(x^2 + 1)$.

-Se a Projeção Ortogonal Vetorial se dá em um subespaço $F \subset E$ de um EVPI real com Base Ortonormal $\{v_k\}_{1 \leq k \leq p}$: $P: E \to F$, então $P_F(x) = \sum_{k=1}^{p} \langle x, v_k \rangle\, v_k$. Escreva este Operador na representação matricial. Faça isto para o subespaço de $E = P_N(\mathbb{R}), \langle p, q \rangle = \int_0^1 p(x)q(x)dx$, $F = [1, x, x^2]$. (**Sugestão**: Obtenha uma base ON para F e siga o roteiro!).

-Obtenha a ortonormalização de Gram-Schmidt para o sub-espaço E_0 gerado pelos vetores $\{x^k\}_{0 \leq k \leq 2}$ em $E = P_5(\mathbb{R}) = \{Polinomios\ reais\ de\ grau\ \leq 5\}$, $\langle p, q \rangle = \int_0^1 p(x)q(x)dx$. Obtenha a Projeção ortogonal $P_{E_0}: E \to E_0$ na forma matricial.

-Mostre que $O = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{-1}{\sqrt{6}} \\ \frac{-1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & 0 & \frac{2}{\sqrt{6}} \end{pmatrix}$ é uma matriz Ortogonal cujo determinante é..?..e cujo traço é...?..

-Obtenha a representação matricial da operação linear $L: E = P_5(\mathbb{R}) \to P_{10}(\mathbb{R})$ definida por $Lp(x) = xD^2 - D + x^2$ com as bases

$\{x^k\}_{0 \leq k \leq 5} \subset P_5(\mathbb{R})$e vetores $\{x^k\}_{0 \leq k \leq 10} \subset P_{10}(\mathbb{R})$.

-Obtenha a representação matricial da operação linear $\delta: E = P_5(\mathbb{R}) \to P_{10}(\mathbb{R})$ definida por $\delta p(x) = p(x+1) - p(x)$ com as bases$\{x^{[k]}\}_{0 \leq k \leq 5} \subset P_5(\mathbb{R})$e vetores $\{x^{[k]}\}_{0 \leq k \leq 1} \subset P_{10}(\mathbb{R})$. (Obs: $x^{[0]} = 1, x^{[n+1]} = (x - n + 1)x^{[n]}$

-Mostre que o Operador linear $\frac{d^2}{dx^2} = D^2: E \to E = \{p \in P(\mathbb{R}); p(0) = p(1) = 0\}$, $\langle p, q \rangle = \int_0^1 p(x)q(x)dx$, **é linear, e simétrico.** **(Sugestão:** Utilize a integração por partes para mostrar que $\langle D^2 p, q \rangle = \langle p, D^2 q \rangle$ o que demonstra a simetria de D^2 em E.

-Mostre que o Operador linear $D: E \to E = \{p \in P(\mathbb{R}); p(0) = p(1) = 0\}$, $\langle p, q \rangle = \int_0^1 p(x)q(x)dx$, é **linear, antisimétrico** . **(Sugestão:** Utilize a integração por partes para mostrar que $\langle Dp, q \rangle = \langle p, -Dq \rangle$ o que demonstra a antisimetria de D em E).

GLOSSÁRIO:

OPERADORES BÁSICOS

$\iota = Inversão\colon \iota\colon GL_n \to GL_n$, $I \equiv Identidade$

$\tau = Transposição, \tau\colon M_{nn}(\mathbb{C}) \to M_{nn}(\mathbb{C}), \tau(A) = A^T$,

$c = Conjugação, c\colon M_{mn}(\mathbb{C}) \to M_{mn}(\mathbb{C}), \left(c(A)\right)_{kj} = (\bar{A})_{kj} = \overline{A_{kj}}$

ad = Adjunção , $ad\colon M_{nn}(\mathbb{C}) \to M_{nn}(\mathbb{C}), \left(ad(A)\right)_{kj} = \overline{A_{jk}}$, $ad(A) = A^*$

$S = Deslocamento\colon S\colon \mathcal{F}(\mathbb{N},\mathbb{C}) \to \mathcal{F}(\mathbb{N},\mathbb{C});\ \ S\colon \mathcal{F}(\mathbb{R},\mathbb{C}) \to \mathcal{F}(\mathbb{R},\mathbb{C}), Sf(x) = f(x+1)$

$\delta = Diferença\colon \delta\colon \mathcal{F}(\mathbb{N},\mathbb{C}) \to \mathcal{F}(\mathbb{N},\mathbb{C}), \delta f(x) = f(x+1) - f(x)\ ;\ \delta\colon \mathcal{F}(\mathbb{R},\mathbb{C}) \to \mathcal{F}(\mathbb{R},\mathbb{C}), \delta f(x) = f(x+1) - f(x).$

Se A for um conjunto $\#A$ é a cardinalidade deste conjunto, isto é, o número de elementos deste conjunto: **Zero** se for vazio, um **inteiro n** $\in \mathbb{N}$ se for isomorfo a $I_n = \{1,2,..,n\}$, ∞ **caso contrário** e, neste caso, **Enumerável** se for isomorfo a $\mathbb{N}$.

ESPAÇOS FUNCIONAIS

$\mathcal{F}(A,\mathbb{R})$ =*Espaços vetoriais de todas as funções* $\varphi\colon A \to \mathbb{C}$ *com soma e multiplicação por Escalar Real ponto a ponto:*

$(\varphi + \psi)(x) = \varphi(x) + \psi(x)$, $(\lambda\varphi)(x) = \lambda\, \varphi(x)$ *e elemento zero sendo a função nula:* $0(x) = 0\ \forall x \in A$. *(*$A \neq \emptyset$*).*

$\mathcal{F}(A,\mathbb{C})$ =*Espaços vetoriais de todas as funções* $\varphi\colon A \to \mathbb{C}$ *com soma e multiplicação por Escalar (Real ou Complexo) ponto a ponto (*$A \neq \emptyset$*). (Obs: É necessário especificar qual é o Campo de Escalares; Real ou Complexo).*

$P(\mathbb{R}) \subset \mathcal{F}(\mathbb{R},\mathbb{R}) = Polinômios\ com\ coeficientes\ reais\ \ P(\mathbb{C}) \subset \mathcal{F}(\mathbb{C},\mathbb{C}) = Polinômios\ com\ coeficientes\ complexos$

$P_N(\mathbb{R}) = Polinômios\ reais\ de\ grau\ \leq N$, $P_N(\mathbb{C}) = Polinômios\ complexos\ de\ grau\ \leq N$,

$C^0(\mathbb{R},\mathbb{R}) \subset \mathcal{F}(\mathbb{R},\mathbb{R}) = Conjunto\ de\ Funções\ Reais\ continuas$,

$C^\infty(\mathbb{R},\mathbb{R}) \subset \mathcal{F}(\mathbb{R},\mathbb{R}) = Conjunto\ de\ Funções\ Reais\ com\ todas\ as\ derivadas\ contínuas$, $C^\infty(\mathbb{R},\mathbb{R}^m) = \{f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}^m, f(t) = \left(f_1(t),..,f_m(t)\right);\ f_k \in C^\infty(\mathbb{R},\mathbb{R})\}$,

$C^\infty(\mathbb{R},\mathbb{C}) \subset \mathcal{F}(\mathbb{R},\mathbb{C}) = \{\, f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{C}, f(t) = f_1(t) + if_2(t), f_k(t) \in C^\infty(\mathbb{R},\mathbb{R})\,\}$,

Espaço das Transformações Lineares: Se E, F forem Espaços Vetoriais com **Escalares Reais**: $\mathcal{L}(E,F) = \{L\colon E \to F; L\ linear\}$ (Analogamente com **Escalares Complexos**)

Espaço Dual: Se E for um Espaço Vetorial com **Escalares Reais**: $\mathcal{L}(E,\mathbb{R}) = E^*$ (Analogamente com **Escalares Complexos**)

Atenção: Quando as funções de um Espaço Funcional admitem valores complexos, as operações de soma e multiplicação por escalar **ponto a ponto** podem resultar na definição de duas Estruturas Vetoriais distintas: Uma delas com o Campo de *Escalares Reais*, outra, com o Campo de *Escalares Complexos*. O mesmo com vetores e matrizes; por exemplo, $\mathbb{C}^n$ pode resultar em duas estruturas vetoriais distintas a depender do Campo de Escalares considerados, Real ou Complexo.

MATRIZES ESPECIAIS

Matriz Identidade: $I \in M_{nn}(\mathbb{C});\ I_{kj} = \delta_{kj}$, **Matriz Nula** :$0 \in M_{mn}(\mathbb{C}), 0_{kj} = 0$.

$M_{mn}(\mathbb{R}) = Matrizes\ Reais\ com\ m\ linhas\ e\ n\ colunas$, $M_{mn}(\mathbb{C}) = Matrizes\ Complexas\ com\ m\ linhas\ e\ n\ colunas$,

$M_{nn}(\mathbb{R}) = Matrizes\ Reais\ quadradas\ de\ ordem\ n$, $M_{nn}(\mathbb{C}) = Matrizes\ Complexas\ quadradas\ de\ ordem\ n$

$GL_n(\mathbb{C}) \subset M_{nn}(\mathbb{C})$= *"Grupo das Matrizes Complexas Inversíveis de ordem n"* (Analogamente $GL_n(\mathbb{R}) \subset M_{nn}(\mathbb{R})$).

$\mathcal{S}_n(\mathbb{R}) = \{A \in M_{nn}(\mathbb{R});\ S^T = S\} \equiv Matrizes\ Reais\ Simétricas\ de\ ordem\ n$,

$\mathcal{A}_n(\mathbb{R}) = \{A \in M_{nn}(\mathbb{R});\ A^T = -A\} \equiv Matrizes\ Reais\ Antisimétricas\ de\ ordem\ n$,

$\mathcal{H}_{nn}(\mathbb{C}) = \{A \in M_{nn}(\mathbb{C});\ \overline{A^T} = ad(A) = A\}$ ≡*Matrizes Autoadjuntas- Hermiteanas (Transposta Conjugada):*

$Ort_n(\mathbb{R}) = Matrizes\ Reais\ Ortogonais\ de\ ordem\ n$, $GL_n = Conjunto\ de\ Matrizes\ Reais\ inversíveis\ de\ ordem\ n$,

Matrizes Diagonais: $\{A \in M_{nn}(\mathbb{C});\ A_{ij} = \delta_{ij}\lambda_j\} = diag(\lambda_1, , , , , \lambda_n)$;

Matrizes Triangulares Superiores: $\{A \in M_{nn}(\mathbb{C});\ A_{ij} = 0\ se\ j > i\}$ (Analogamente *Triangulares Inferiores*)

Matriz "Reduzida": $A \in M_{mn}(\mathbb{C})$. $A^{[ij]} \in M_{(n-1)(n-1)}(\mathbb{C})$ *é a matriz resultante da extração da i-ésima linha e j-ésima coluna de A.*

Vetores Linhas de uma Matriz $A \in M_{mn}(\mathbb{R})$: $1 \le r \le m$; $A_r \in \mathbb{R}^n$, $(A_r)_k = A_{rk}$, $1 \le k \le n$

Vetores Colunas de uma Matriz $A \in M_{mn}(\mathbb{R})$: $1 \le s \le n$; $A^s \in \mathbb{R}^m$, $(A^s)_j = A_{js}$, $1 \le j \le m$

Base Canônica de $\mathbb{R}^n$: $\{\delta^j\}_{1 \le j \le n}$. Por exemplo, para $n = 3$ $\delta^1 = e_1 = \begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}$, $\delta^2 = e_2 = \begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}$, $\delta^3 = e_3 = \begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}$.

Delta de Kronecker/Matriz Identidade: $\delta_{jk} = 0\ se\ j \ne k, \delta_{jj} = 1$

Posto de Matriz: $r: M_{mn}(\mathbb{R}) \to \mathbb{N}, r(A) = Posto\ de\ A = \dim[A^k] = \dim[A_j]$,

Nucleo de um Operador/Matriz: $N(A) = \{x \in \mathbb{R}^n; Ax = 0\} = Ker(A) = Nucleo\ de\ A \in\ M_{mn}(\mathbb{R})$, $N(A) \subset \mathbb{R}^n$,

Imagem de Operador/Matrix: $R(A) = Imagem\ de\ A \in M_{mn}(\mathbb{R}) = \{y \in \mathbb{R}^m;\ \exists x \in \mathbb{R}^n, Ax = y\}$,

Álgebra Gerada:
$[\![\{v_k\}]\!] = Álgebra\ gerada\ pelo\ conjunto\ de\ vetores\ \{v_k\} \equiv$
$"Combinações\ lineares\ de\ todos\ os\ possíveis\ produtos\ finitos\ de\ elementos\ deste\ conjunto"$

$Sim_n = \{\sigma: I_n \to I_n = \{1, \dots, n\} : \sigma\ bijeção(Permutação)\}$; $sgn: Sim_n \to \{+1, -1\};\ sgn(\sigma) =$ "$\boldsymbol{Sinal\ da\ permutação\ \sigma}$" **.**

Potências *Colchete*: $x^{[0]} = 1, x^{[n+1]} = x^{[n]}(x - n)$

Sub-espaços Complementares-Soma Direta:Se U, V sub-espaços vetoriais de H, escreve-se a **soma direta** de sub-espaços: $H = U \oplus V$ se $\forall h \in H, \exists únicos\ u \in U, v \in V$; $h = u + v$. Diz-se que U, V são sub-espaços vetoriais **complementares** em H.

Espaços Ortogonais: e U, V sub-espaços vetoriais de H, escreve-se $U \perp V$ se $\langle u, v \rangle = 0$, $\forall u \in U, v \in V$.

Complemento Ortogonal: Se $S \subset E$ é sub-espaço de um EVPI $E, \langle\ ,\ \rangle$ de dimensão finita ($\dim E = n$) então $S^\perp = \{h \in E;\ \langle h, s \rangle = 0, \forall s \in S\}$ é o **complemento e ortogonal** de S em $E, \langle\ ,\ \rangle$. Diz-se que a soma direta $E = S \oplus S^\perp$ é ortogonal.

Espaços Quocientes , Soma de Espaços,

Álgebra é um Espaço Vetorial E que também dispõe de uma operação produto $E \times E \to E$, uv que é associativa, $(uv)w = u(vw)$ e distributiva,($u(v + \lambda w) = uv + \lambda uw$) , , $\forall u, v, w \in E, \forall \lambda$ escalar . É Álgebra com elemento neutro para o produto se existe $e \in E;\ ue = u = eu\ \forall u \in E$ e, é Comutativa se $uv = vu\ \forall u, v \in E$.

OPERADORES:

Operador Derivação:

$D: C^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R}) \to C^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R})$, $(Du)(x) = \frac{du(x)}{dx}$,

$D: C^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R}^m) \to C^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R}^m)$, $Df(t) = \left(Df_1(t), .., Df_m(t)\right)$,

$D: C^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{C}) \to C^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{C})$, $Df(t) = Df_1(t) + iDf_2(t)$,

Operador Integração: $\int_a\ : C^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R}) \to C^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R})$, $\left(\int_a u\right)(x) = \int_a^x u(s)ds$,

Operador Multiplicação por uma Função Fixa: Para $\varphi \in C^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R})$, $M_\varphi: C^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R}) \to C^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R})$; $M_\varphi u = \varphi(x)u(x)$

Se $p(x) = \sum_{k=0}^n a_k x^k$ for polinômio com coeficientes complexos então $p(D): C^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{C}) \to C^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{C})$, $p(D)u(t) = \sum_{k=0}^n a_k \frac{d^k u}{dt^k}$ é um **Operador Diferencial Polinomial** associado ao polinômio algébrico $p(x)$

Se $p(x) = \sum_{k=0}^{N} a_k x^k$ for polinômio com coeficientes complexos então $p(S): \mathcal{F}(\mathbb{R},\mathbb{C}) \to \mathcal{F}(\mathbb{R},\mathbb{C})$,
$p(S)\varphi(n) = \sum_{k=0}^{N} a_k S^k \varphi(n) = \sum_{k=0}^{N} a_k \varphi(n+k)$ é **Operador Recursivo Polinomial,** associado ao polinômio algébrico $p(x)$ **.**

-Traço: $Tr: \mathcal{L}(E) \to \mathbb{C}, Tr(L) = \sum_{k=1}^{n} A_{kk}$, $A = L_{[\alpha]}$, α *é* $Base\ de\ E$. (V.-*Teor. Invariância do Traço com a base*)

-Determinante: $det: \mathcal{L}(E) \to \mathbb{C}, \det L = \sum_{k=1}^{n} sgn(\sigma) A_{1\sigma(1)} \cdots A_{n\sigma(n)} = A^1 \wedge \dots \wedge A^k \wedge \dots A^n$ (Produto Alternado/Exterior) ,
$A = L_{[\alpha]}$, α *é* $Base\ de\ E$.(V. *Teor. Invariância com a base)*

Função Bilinear *Real* *(Função de 2º Grau):* $q: \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}, q(x,y) = \langle Sx, y\rangle = \langle x, Sy\rangle = \sum\ S_{ij} x_i y_j$, $S \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$

Função Quadrática *Real*- *Função de 2º Grau):* $Q: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}, Q(x) = \langle Sx, x\rangle = q(x,x),\quad S \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$.

XXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXX

EXERCÍCIOS:

-TRANSFORMAÇÕES LINEARES

1-Apresente os ingredientes (objetos) matemáticos e as operações matemáticas necessárias e indispensáveis para definir 1)uma Estrutura de Espaço Vetorial, 2) uma Estrutura de Espaço Vetorial com Produto Interno e 3) uma Estrutura de Álgebra. (**Sugestão**: (1)Conjunto de Vetores, Elemento Zero, Campo de Escalares, Soma, Multiplicação por Escalar, (2).......).

01-RESOLUÇÃO: Consulte a definição axiomática de Espaços Vetoriais e aproveite a oportunidade e consulte também a definição axiomática de Álgebras.

2--Operações Lineares: Determine as Operações Lineares dentre as seguintes definidas em Espaços Vetoriais (com seus respectivos Campos de Escalares):

1) Traço em $\{M_{nn}(\mathbb{R}), \mathbb{R}\}$, 2)Transposição $\{M_{nn}(\mathbb{R}), \mathbb{R}\}$, 3) Determinante $\{M_{nn}(\mathbb{R}), \mathbb{R}\}$, 4)Posto $\{M_{mn}(\mathbb{R}), \mathbb{R}\}$

5)Derivação $\{C^\infty(\mathbb{R},\mathbb{R}), \mathbb{R}\}$, 6)Integração $\{C^\infty(\mathbb{R},\mathbb{R}), \mathbb{R}\}$, 7)Multiplicação em $\{C^\infty(\mathbb{R},\mathbb{R}), \mathbb{R}\}$ por função fixa $\varphi \in C^\infty(\mathbb{R},\mathbb{R})$: $M_\varphi: C^\infty(\mathbb{R},\mathbb{R}) \to C^\infty(\mathbb{R},\mathbb{R}), M_\varphi u(x) = \varphi(x) u(x)$, 7)Deslocamento: $S: C^0(\mathbb{R},\mathbb{R}) \to C^0(\mathbb{R},\mathbb{R})$, $Sf(x) = f(x+1)$ em $\{C^0(\mathbb{R},\mathbb{R}), \mathbb{R}\}$ 8) Multiplicação por um número complexo fixo $h_\alpha: \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, $h_\alpha(z) = \alpha z$ em $\{\mathbb{C}, \mathbb{R}\}$, 9)Conjugação em $\{\mathbb{C}^n, \mathbb{R}\}$, 10)Conjugação em $\{\mathbb{C}^n, \mathbb{C}\}$, 11) Traço em $\{\mathcal{L}(E), \mathbb{R}\}$ para $\{E, \mathbb{R}\}$ de dimensão finita 12)$det\{\mathcal{L}(E), \mathbb{C}\}$ para $\{E, \mathbb{C}\}$ de dimensão finita, 13)Diferença $\delta: C^0(\mathbb{R},\mathbb{R}) \to C^0(\mathbb{R},\mathbb{R}), \delta f(x) = f(x+1) - f(x)$ em $\{C^0(\mathbb{R},\mathbb{C}), \mathbb{C}\}$, 14)Avaliação, $a: C^0(\mathbb{R},\mathbb{C}) \to \mathbb{C}$, $a(f) = f(0)$ em $\{C^0(\mathbb{R},\mathbb{C}), \mathbb{C}\}$, 15) Avaliação, $a: P(\mathbb{C}) \to \mathbb{C}^n$, $a(p) = (p(1), \dots, p(n))$ em $\{C^0(\mathbb{R},\mathbb{C}), \mathbb{C}\}$, 16) Campo de Velocidade $V: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ definido no Espaço Euclideano pelo produto vetorial: $V(x) = \omega \wedge x$, $(\omega \in \mathbb{R}^3)$, 17) $L: \mathcal{F}(\mathbb{N},\mathbb{C}) \to \mathcal{F}(\mathbb{N},\mathbb{C})$; $Lf(x) = f(x+2) - 2f(x+1) + f(x)$ em $\{\mathcal{F}(\mathbb{N},\mathbb{C}), \mathbb{C}\}$, 18)Translação por um elemento fixo a : $t: E \to E$, $t(x) = a + x$, 19)$l: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, $l(x) = \sum_{i \neq j} A_{ij} x_i x_j$.

02-RESOLUÇÃO:

1-Obviamente o traço e a transposição são lineares em decorrência de suas próprias definições. (3)A propriedade operacional notável da função determinante definida no espaço de matrizes quadradas e valores escalares **não é** a linearidade, mas a sim o fato $\det AB = \det A \det B$, ou seja a preservação do produto matricial no produto entre escalares. Em particular, observe que $\det(I+I) = 2^n$ e **não** $\det(I+I) = \det I + \det I = 2$ e, portanto, não é linear. (4) Contra-exemplo de linearidade: observe que $r(I-I) = 0$.

5)6)7) são óbviamente lineares. Quanto ao 8), cuidado, porque estão relacionados dois espaços vetoriais em $\mathbb{C}$, um com escalares reais e outro com escalares complexos. O Primeiro tem dimensão 2 e o segundo dimensão 1. Esta observação não interfere na questão 8) (Basta verificar), mas é decisiva em 9) e 10) pois, $\overline{\lambda u} = \bar{\lambda}\,\bar{u} \neq \lambda\bar{u}$ se $\lambda \notin \mathbb{R}$. 11) O Traço é sempre linear, 12)O Determinante nunca é linear. 13-14-15-17)A linearidade é facilmente verificada, 16)Distributividade do produto vetorial $\Rightarrow$ linearidade, 18 e 19) Obviamente não lineares.

3-Calcule uma expressão elementar para soma dos quadrados dos primeiros *n* números inteiros $S_2: \mathbb{N} \to \mathbb{C}\,, S_2(n) = \sum_{k=0}^{n} k^2$, **utilizando a caracterização** de $S_2(n)$ como solução da seguinte equação de recorrência: $\delta^3 S_2 = 0$, pois $\delta S_2(n) = (n+1)^2 - n^2 = 2n+1$. (**Sugestão**: $Ker\{\delta^3\} =$ "$Polinômios\ de\ segundo\ grau\ (\{an^2+bn+c\})$" e $S_2(0) = 0, S_2(1) = 1, S_2(2) = 5$)

3-RESOLUÇÃO: (Observação: Houve um engano claro na aplicação de $\delta S_2(n) = S_2(n+1) - S_2(n) = (n+1)^2 = n^2 + 2n + 1$, mas o problema é essencialmente o mesmo; calcular soluções de $\delta f(x) = p(x)$ em que $p \in P(\mathbb{R})$ é um polinômio.

Apesar do engano, a função $S_2: \mathbb{N} \to \mathbb{C}\,, S_2(n) = \sum_{k=0}^{n} k^2$ **obviamente** satisfaz a seguinte equação: $\delta S_2(n) = S_2(n+1) - S_2(n) = (n+1)^2 = n^2 + 2n + 1 \in P(\mathbb{R})$. Uma propriedade fácil de ser verificada é que se $q \in P_N$ então $\delta q \in P_{N-1}$. (O reverso é um pouco mais difícil de verificar, mas também é verdadeiro). Portanto, basta procurar confiantemente a solução na forma de um polinômio $r(n) = a + bn + cn^2 + dn^3$, lembrando-se que este polinômio deve satisfazer a equação de diferenças e também ter os valores $r(0) = 0, r(1) = 1, r(2) = 5, r(3) = 14$....Igualando coeficientes........

4-Determine os sub-espaços vetoriais: $Ker\ \{\delta^3\}, R(\delta^3), Ker\ (D^2), R(D^2)$ do Operador $\delta: P_N(\mathbb{C}) \to P_N(\mathbb{C})$.(**Sugestão**: $grau\{\delta p\} = grau\{p\} - 1$, *em geral.*

4-RESOLUÇÃO:

Lembre-se que a aplicação do operador diferença δ e do operador derivada D em espaços $P_N(\mathbb{C})$ diminuem o grau de um polinômio de (pelo menos) uma unidade e zera o polinomio de grau zero (constante). Assim, $Ker\ \{\delta\} = P_0 = \{Polinomios\ Constantes\}$, e $Ker\{\delta^2\} = P_1$ e assim por diante, pois cada aplicação de δ diminui um grau da função polinomial. O mesmo com o operador Derivada.

5-Determine os sub-espaços vetoriais: $Ker\ \{L\}$, $(Ker\{L\})^\perp$, $R(L)$, $(R\{L\})^\perp$ do Operador: $L: P_N(\mathbb{C}) \to P_N(\mathbb{C})$, $L = D^2 + 1$ em P_N, $\langle p, q\rangle = \int_0^1 p(x)q(x)dx$. Determine o isomorfismo entre $(Ker\{L\})^\perp$ e $R(L)$ resultante da restrição de L.

5-RESOLUÇÃO:

Observação Inicial: Um polinômio de grau $\leq N$ pode ser representado como uma soma (pseudo) infinita $p(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k$quando se deixa claro que $a_k = 0\ para\ k > N$. Esta representação é conveniente para a manipulação de somatórios desde que não se esqueça desta condição.

$Ker\{L\} = \{h \in P_N;\ (D^2+1)h = 0\}$. Se $h(x) = \sum_{k=0}^{N} a_k x^k$, $Lh = \sum_{k=2}^{N} k(k-1)x^{k-2} + \sum_{k=0}^{N} x^k =$

$= \sum_{k=0}^{N}\{(k+2)(k+1)a_{k+2} + a_k\}x^k = 0$, onde , obviamente, $a_k = 0\,, \forall k > N$. Igualando os coeficientes temos $(k+2)(k+1)a_{k+2} + a_k = 0\,; 0 \leq k \leq N-2$, de onde $a_{k+2} = \frac{-a_k}{(k+2)(k+1)}$ que determina todos os coeficientes do polinômio exceto $a_0\,, a_1$ que podem ser arbitrários. Portanto, $Ker\ \{L\} = \left\{h(x) = a_0 + a_1 x + \frac{-a_1}{6}x^2 + \cdots + \frac{-a_{N-2}}{N(N+1)}x^N\right\}$. Observe então que dim $Ker\ \{L\} = 2$ e para descrevê-lo bastam dois polinômios LI, por exemplo, tomando $a_0 = 1\,, a_1 = 0\ de\ onde\ vem\ h_1(x)$, ou $a_0 = 0, a_1 = 1\ de\ onde\ vem\ h_2(x)$. Portanto, para determinar $(Ker\{L\})^\perp = \{p(x) = \sum_{k=0}^{N} c_k x^k \in P_N\,;\ \int_0^1 p(x)h_1(x)dx = 0\ \ e\ \int_0^1 p(x)h_2(x)dx = 0\ \}$, é necessário resolver duas equações para as $N+1$ incognitas $\{c_k\}_{0\leq k\leq N}$ o que nos dá um espaço de dimensão $N-1$. Refaçam este argumento para $N = 5$.

Para calcular $R(L)$ façam a igualdade polinomial $\sum_{k=0}^{N-2}\{(k+2)(k+1)a_{k+2}+a_k\}x^k = \sum_{k=0}^{N} b_k x^k = q$ de onde vem $a_{k+2} = \frac{-a_k+b_k}{(k+2)(k+1)}$ a menos dos arbitrários valores de a_0 , a_1 que representam o Nucleo. Lembre-se do principio de superposição: "Se $Lp^* = q$ então todas soluções desta equação são da forma $p = p^* + h$; $\forall h \in Ker\{L\}$. Refaçam o argumento com $N = 5$.

O isomorfismo entre estes dois espaços de dimensão $N-1$ pode ser determinado pela representação matricial de L em bases de $(Ker\{L\})^{\perp}$ e de $R(L)$.

6-Obtenha a condição de consistência de Hausdorff para a existência de soluções da equação $Lx = b$ para o vetor $b \in P_N$ do exercício anterior.

6-RESOLUÇÃO:

Para isto, é suficiente obter uma base $\{r_1, r_2\}$para o espaço bidimensional $(R(L))^{\perp}$ e a condição de Hausdorff se reduz a constatar que $b \in R(L)$ o que é equivalente à condição operacional de b ser ortogonal a $(R(L))^{\perp}$, isto é, deve satisfazer as condições: $\langle b, r_1\rangle = 0$ e $\langle b, r_2\rangle = 0$. (Consulte a Postagem sobre a representação gráfica dos Teoremas Fundamentais da Álgebra Linear)

7-Determine os sub-espaços vetoriais: $Ker\ \{L\}, R(L)$ do Operador: $L: \mathbb{C}^3 \to \mathbb{C}^3$, $L = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

7-RESOLUÇÃO:

Utilizando o Método de Gauss e os Teoremas Fundamentais da Álgebra Linear (Sobre Núcleo, Imagem e complementos ortogonais de uma Matriz) é possivel obter uma base para o espaço gerado pelos vetores linhas e, posteriormente determinar uma base para o seu complemento ortogonal que é exatamente o Núcleo. Entretanto, a matriz L é obviamente inversivel (verificando-se a indep Lin das colunas ou das linhas ou o seu det) e portanto tem núcleo $KerA = \{0\}$ e $R(A) = \mathbb{C}^3$. Mas, cuidado que, considerando o problema imerso no espaço complexificado $\mathbb{C}^3$, as soluções são complexas e temos $\dim \mathbb{C}^3 = 3$ com escalares complexos e $\dim \mathbb{C}^3 = 6$ com escalares reais. Este tipo de problema é resolvido em muitos textos usuais.

8-Determine $(Ker\{L\})^{\perp}$ para : $L: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, $L = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ e obtenha o isomorfismo resultante da restrição de L , isto é, $L_*: (Ker\{L\})^{\perp} \to R\{L\}$.

8-RESOLUÇÃO

Como as duas primeiras colunas são LI e a ultima é nula, $\dim R(L) = 2$ e pelo Teor Fundamental $\dim Ker\{L\} = 1$, que pode ser facilmente identificado como, $Ker\{L\} = [\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}]$, de onde $(Ker\{L\})^{\perp} = \left[\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}\right] = \mathbb{R}^2 \times \{0\}$. O isomorfismo da restrição entre $(Ker\{L\})^{\perp}$ e $R(L)$ se dá entre $\mathbb{R}^2 \times \{0\}$ e o espaço gerado pelas colunas da matriz que pode ser descrito como $\begin{pmatrix} x \\ y \\ 0 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} x+y \\ y \\ x \end{pmatrix}$.

9-Determine $(R\{L\})^{\perp}$ para : $L{:}\,\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$, $L = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ e a condição de Consistência de Haurdorff para existência de soluções da equação $Lx = b$ para o vetor $b \in \mathbb{R}^3$.

9-RESOLUÇÃO

Em vista da Indep Lin das duas ultimas linhas verifica-se que o posto da Matriz é igual a dois e, portanto $\dim R(L) = 2$ gerado pelas duas colunas $R(L) = [\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}]$, sendo, portanto, $\dim(R(L))^{\perp} = 1$.

Resolvendo-se o sistema $\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, h \rangle = 0$, $\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, h \rangle = 0$ para a caracterização dos elementos de $(R(L))^{\perp}$, obtem-se a solução geral $h = \begin{pmatrix} x \\ -x \\ -x \end{pmatrix}$ de onde $(R(L))^{\perp} = [\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}]$ e a condição de Hausdorff para $b \in \mathbb{R}^3$ é: $\langle b, \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix} \rangle = 0$.

10-Determine as dimensões dos seguintes Espaços Vetoriais: 1)$M_{mn}(\mathbb{R})$ 2) $M_{mn}(\mathbb{C})$ com 2a)Escalares Reais e 2b)Escalares Complexos, 3)$\mathcal{A}_n(\mathbb{R}) \subset M_{nn}(\mathbb{R})$ antisimétricas reais de ordem n, 4)$\mathcal{S}_n(\mathbb{R}) \subset M_{nn}(\mathbb{R})$ Simétrica Reais, 5)Matrizes Triangulares Superiores Reais, 6) $\mathcal{L}(E,F), \dim E = n, \dim F = m$, 7)$\mathcal{L}(\mathcal{L}(E,F),F)$, $\dim E = n, \dim F = m$, 8) $\left(\mathcal{L}(E,F)\right)^*$, 9)$\mathcal{L}(M_{nn}(\mathbb{R}), \mathbb{R})$, 10) $\mathcal{F}(A,\mathbb{R}), \#A = p$, 11) $E \times F, \dim E = n, \dim F = m$, 12) ${}^{E}/_{F}$, $\dim E = n > \dim F = m$, 13)$dimF^{\perp}$, $\dim E = n > \dim F = m$ (**Sugestão:** Escreva explicitamente uma base $\{E^{(st)}\}$ para $M_{mn}(\mathbb{R})$, onde $\left(E^{(st)}\right)_{ij} = \delta_{is}\delta_{jt}$ e, lembre-se do isomorfismo $\mathcal{L}(E,F) \approx M_{mn}(\mathbb{R}), se\ \dim E = n, \dim F = m$. Para $\mathcal{A}_n(\mathbb{R})$ $\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ e Matrizes Triangulares Superiores, bastas contar quantas entradas com valores independentes são disponíveis.

10-RESOLUÇÃO

1)É fácil verificar que uma base para $M_{mn}(\mathbb{R})$ com escalares reais e $M_{mn}(\mathbb{C})$ com escalares complexos pode ser descrita pelas mn matrizes $\left(\beta_{pq}\right)_{kj} = \delta_{pk}\delta_{qj}$ onde δ_{kj} é o delta de Kronecker.(Em outras palavras estas matrizes β_{pq} da base são aquelas que tem 1 na entrada pq e zero nas outras entradas). Por outro lado, (2) $M_{mn}(\mathbb{C})$ com escalares **reais** tem uma base de $2mn$ matrizes da forma $\beta_{pq}\ e\ i\beta_{pq}$. (3)-**Obs: É necessario ressaltar que as matrizes antisimetricas são quadradas e, portanto, neste caso $\boldsymbol{m = n}$.**Contam-se as "entradas" acima da diagonal e tem-se este valor indicado. Observe-se que o total de "entradas" é a dimensão do espaço em que a matriz está situada, no caso, n^2 e que a diagonal das antisimetricas é sempre nula, pois $A^T = -A$. Portanto $\dim \mathcal{A}_n = \frac{n^2-n}{2}$. (4,5)Procedimento análogo. (6,7,8,9)Basta contar as dimensões lembrando-se do isomorfismo entre $\mathcal{L}(E,F) \approx M_{nm}()$ e da dimensão de $M_{nm}()$. (10)- Base $\varphi_a(a) = 1\ e\ \varphi_a(x) = 0\ se\ a \neq x$. (12)Bases $\alpha \subset E, \beta \subset F \implies Base\ (\alpha_j, \beta_k)$. (12) Se $\beta \subset F$ for base, complete-a como uma base $\alpha = \beta \cup \gamma \subset E$ e verifique $\#\gamma = \dim {}^{E}/_{F}$.

.

11 -**Determinar os Autovalores** da Operações lineares:

1) $\delta{:}\,\mathcal{F}(\mathbb{N},\mathbb{C}) \to \mathcal{F}(\mathbb{N},\mathbb{C})$, 2) $\delta{:}\,E \to E$, $E = \{\mathcal{F}(\mathbb{N},\mathbb{C});\ f(0) = 0$, 3) $D{:}\,C^{\infty}(\mathbb{R}) \to C^{\infty}(\mathbb{R})$, 4) $D{:}\,E \to E = \{f \in C^{\infty}(\mathbb{R},\mathbb{R}), f(0) = 0$, 5) $\delta{:}\,E \to E$, $E = \{\mathcal{F}(\mathbb{N},\mathbb{C});\ f(0) = f(100)\}$, 6) $\delta{:}\,E \to E$, $E = \{\mathcal{F}(\mathbb{N},\mathbb{C});\ f(0) = f(10)\}$,

7)$\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -3 & 2 \end{pmatrix}: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, 8)$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, 9)$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$,10) Matriz Triangular Superior (com diagonal Ajj)e das transpostas de 7)8)9) 10).

11-RESOLUÇÃO

Observação inicial: A **Equação Espectral** $Lv = \lambda v$ tem como **incógnitas**, não apenas o autovetor **não** nulo v, mas um **correspondente** autovalor escalar λ e as soluções desta equação devem **estar no** Espaço Vetorial indicado, que é especificado pelos seus **Elementos &** seus **Escalares**.

(1) A Equação Espectral é $\delta\varphi = \lambda\varphi \iff \varphi(x+1) - \varphi(x) = \lambda\varphi(x)\forall x \in \mathbb{N}$, $\varphi(x+1) = (1+\lambda)\varphi(x)$ de onde $\varphi(x) = (1+\lambda)^x\varphi(0)$. Portanto, para qualquer $\lambda \in \mathbb{C} - \{-1\}$ existem m funções não nulas $\varphi_\lambda(x) = C(1+\lambda)^x$, ou seja, $Sp(\delta) = \mathbb{C} - \{-1\}$.

(2)-Mesmo argumento de onde vem que $Sp(\delta) = \emptyset$ pois nenhuma das funções acima não-nulas (como é exigido aos autovetores) satisfaz à condição.

(3)-A **Equação Espectral** $D\varphi = \lambda\varphi$ tem solução geral em $C^\infty(\mathbb{R})$ $\varphi(x) = \varphi(0)e^{\lambda x}$ de onde $Sp\{D\} = \mathbb{R}$.

(4) Neste caso $Sp\{D\} = \emptyset$ pois nenhuma função **não nula** pode ser solução da equação espectral e também satisfazer a condição $\varphi(0) = 0$ exigida para os elementos de E.

(5)-A **Equação Espectral** é a mesma de (1) e, portanto a função necessariamente terá forma $\varphi_\lambda(x) = (1+\lambda)^x$. Para que ela pertença ao espaço E, também será necessário que $\varphi(0) = \varphi(100) = \varphi(0)(1+\lambda)^{100}$ de onde (como $\varphi(0) \neq 0$) $(1+\lambda)^{100} = 1$. Esta equação algébrica somente pode ser resolvida para valores reais se $\lambda = \{0, -2\}$, mas para valores complexos há outras soluções: Escrevendo-se $1 + \lambda = e^{i\theta}$ a equação toma a forma $\left(e^{i\theta}\right)^{100} = e^{i(k2\pi)}$; $k \in \mathbb{Z}$ de onde tiramos as soluções, $\theta_k = k\frac{2\pi}{100}$ e $\lambda_k = -1 + e^{k\frac{2\pi}{100}i}$; $k \in \mathbb{Z}$. Observando bem verificamos que temos , na verdade,"apenas" 100 soluções distintas determinadas por $0 \leq k < 100$. Observe-se que as soluções reais estão incluídas em $k = 0, \lambda_0 = 0$, $k = 50, \lambda_{50} = -2$. Assim: $S_p\{L\} = \{\lambda_k = -1 + e^{k\frac{2\pi}{100}i}$; $0 \leq k < 100$ }.

Observe que se o operador diferença δ considerado tivesse um domínio em funções **reais**, isto é, $\delta: E \to E$, $E = \{\mathcal{F}(\mathbb{N}, \mathbb{R});\ f(0) = f(100)\}$ o espectro do operador seria $S_p\{\delta\} = \{0, -2\}$.

(6)-Análogo ao anterior.

7-8-9)- A Equação Espectral $Lv = \lambda v$ para as incógnitas $\lambda, v \neq 0$ a ser resolvida, obviamente terá uma indeterminação, pois são n equações para n+1 incognitas.(O que se pode ver também do fato de que se $Lv = \lambda v$ então qualquer múltiplo de cv também é solução, mas para cada v existe um único λ associado). Com estas observações em vista a solução decorre de manobras simples qu estão amplamente ilustradas em Geometria Analitica e textos usuais.

10)-Matriz Triangular Superior. A Equação Espectral $Ax = 0$ consiste em uma sucessão de equações que podem ser resolvidas recursivamente "de baixo para cima" começando por $A_{nn}v_n = \lambda v_n \implies \lambda = A_{nn}$, $v_n = 1$, de onde as outras coordenadas de v são sucessivamente obtidas. Com isto se vê que todos os elementos da diagonal A_{kk} são autovalores, fazendo $v_j = 0$; $j < k$ e resolvendo $A_{kk}v_k = \lambda v_k \implies \lambda = A_{kk}$, $v_k = 1$ daí por diante. (Faça um exemplo com uma matriz triangular superior de ordem 3 e uma triangular inferior de ordem 3). Com as transpostas o procedimento é análogo.

12-Mostre que para n números $\{\gamma_k\}_{1\le k\le n}$ distintos , as n respectivas funções $h_\gamma(t) = e^{\gamma t}$ são LI. (**Sugestão**: São **autofunções** do operador $D: C^\infty(\mathbb{R}) \to C^\infty(\mathbb{R})$. (**Sugestão**:Consulte Teorema geral a respeito).

12-RESOLUÇÃO: *Siga a Sugestão.*

13-Se $F \subset \mathcal{F}(\mathbb{N},\mathbb{C})$ é o sub-conjunto das funções que satisfazem a **Recursão de Fibonacci**, $(f(k+2) = f(k+1) + f(k))$, mostre que F é um sub-espaço vetorial. (**Sugestão**: A Função que associa uma função $f \in F$ ao vetor $\begin{pmatrix} f(0) \\ f(1) \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^n$ é linear, e biunívoca, e determina a dim $Ker\{L\}$, onde $Lh(k) = h(k+2) - h(k+1) - h(k)$.)

RESOLUÇÃO:

Para verificar a afirmação, basta mostrar que uma função $f \in \mathcal{F}(\mathbb{N},\mathbb{C})$ satisfaz a recursão de Fibonacci $f(k+2) = f(k+1) + f(k)\ \forall k \ge 0$ se e somente ela faz parte do Nucleo da operação linear $L: \mathcal{F}(\mathbb{N},\mathbb{C}) \to \mathcal{F}(\mathbb{N},\mathbb{C}); Lf\ (x) = f(x+2) - f(x+1) - f(x)$, o que é imediato. Para determinar dim $Ker\{L\}$ utilize a sugestão e o Teorema de isomorfismo que estabelece a mesma dimensão entre dois espaços isomorfos. Neste caso, $\mathbb{C}^2 \approx Ker\{L\}$, $\begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \end{pmatrix} \leftrightarrow$Solução da recursão com a respectiva condição inicial $\begin{pmatrix} f(0) \\ f(1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \end{pmatrix}$ que é única e sempre existe, pois basta efetuar a recursão para determinar os valores $f(k), \forall k \ge 2$. (Calcule os valores $f(2), f(3), f(4), f(5)$ *até onde a paciencia e a curiosidade lhe conduzir* , a partir dos valores iniciais para ter certeza da existência e unicidade da solução do problema).

13-Determine a matriz $i_{[\alpha\beta]}$ que representa a identidade $i: E \to E$ nas bases ortonormais, $\{\alpha_k\}_{1\le k\le 2} = \{(1{,}0) = \alpha_1 , (0{,}1) = \alpha_2\}$ e $\{\beta_k\}_{1\le k\le 2} = \{(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}) , (\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{-1}{\sqrt{2}})\}$. Mostre que esta Matriz é ortogonal: $(i_{[\alpha\beta]})^T = (i_{[\alpha\beta]})^{-1}$.

RESOLUÇÃO:

Se $v \in E$, $v = x_1\alpha_1 + x_2\alpha_2\ \ e,\ \ i(v) = v = y_1\beta_1 + y_2\beta_2$. Agora, se $\alpha_1 = A_{11}\beta_1 + A_{21}\beta_2\ \ \ \alpha_2 = A_{12}\beta_1 + A_{22}\beta_2$, substituindo, temos $v = x_1\alpha_1 + x_2\alpha_2 = v = x_1(A_{11}\beta_1 + A_{21}\beta_2) + x_2(A_{12}\beta_1 + A_{22}\beta_2) = (A_{11}x_1 + A_{12}x_2)\beta_1 + (A_{21}x_1 + A_{22}x_2)\beta_2$ de onde, pela uniciadade da expressão em uma base, vem que $y_1 = (A_{11}x_1 + A_{12}x_2)$, $y_2 = (A_{21}x_1 + A_{22}x_2)$ ou, matricialmente:

$y = Ax = i_{[\alpha\beta]}x$. No caso específico acima $\alpha_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}}\beta_1 + \frac{1}{\sqrt{2}}\beta_2$, $\alpha_{22} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}}\beta_1 - \frac{1}{\sqrt{2}}\beta_2$, de onde vem: $A = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}$.

Observe que as duas bases são ortonormais e, portanto, $A_{jk} = \langle \beta_j, \alpha_k \rangle$. Pelo mesmo motivo a transformação de coordenadas entre bases ONs é realizada por uma Matriz Ortogonal, como a obtida acima. Atenção para a ordem dos índices para a construção da Matriz A quando expressar os vetores da base α em termos dos vetores da Base β.

Uma forma mnemônica útil para se lembrar destas construções é escrever simbolicamente: $v = \langle x, \alpha \rangle = \langle x, A^T\beta \rangle = \langle Ax, \beta \rangle = \langle y, \beta \rangle \Longrightarrow Ax = y$, onde $\alpha = \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \end{pmatrix} = A^T \begin{pmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \end{pmatrix} = A^T\beta$ e $\beta = \begin{pmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \end{pmatrix} = A\alpha$).

14-**Determine a matriz** $T_{[\alpha\beta]}$ que representa a operação $T: E \to E$ nas bases ortonormais, $\{\alpha_k\}_{1\le k\le 2} = \{(1{,}0) = \alpha_1 , (0{,}1) = \alpha_2\}$ e $\{\beta_k\}_{1\le k\le 2} = \{(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}) , (\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{-1}{\sqrt{2}})\}$ sabendo-se que $T_{[\alpha]} = T_{[\alpha\alpha]} = \begin{pmatrix} \frac{3}{2} & \frac{3}{4} \\ \frac{3}{4} & \frac{5}{4} \end{pmatrix}$.

RESOLUÇÃO: *Utilize os argumentos empregados na solução da questão anterior*.

-MÉTODO DE FOURIER-

15-Mostre que a **Recursão de Fibonacci** de **2ª** *ordem* $(F(n+2) = F(n=1) + F(n)\ ;\ \forall n \in \mathbb{N}\ )$ e **dimensão 1** (isto é, numérica) pode ser escrita como uma recursão vetorial *equivalente* de **1ª** ordem e **dimensão 2** da seguinte maneira:$\varphi(n+1) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \varphi(n);\ \forall n \in \mathbb{N}$ em que $\varphi(n) = \begin{pmatrix} F(n) \\ F(n+1) \end{pmatrix}$. (**Obs:***Equivalencia* entre Equações significa que o conjunto de soluções de uma Equação pode ser biunivocamente associado ao conjunto de soluções da outra)

RESOLUÇÃO: *Quase imediata, mas observe a definição de "Equivalencia" entre duas equações que deve ser verificada.*

16-Obtenha a solução geral (isto é, o conjunto de todas as soluções) da Recursão vetorial de Fibonacci calculando As **Potencias** $A^N = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}^N \in M_{22}(\mathbb{R})$. **(Sugestão**: Observe que $\varphi(k) = A^k \varphi(0)$. Diagonalize $O^T \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} O = \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \mu \end{pmatrix}$).

RESOLUÇÃO: A Matriz correspondente à recursão vetorial de Fibonacci foi copiada erradamente da questão anterior (onde está correta), ou seja, $\boldsymbol{A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}}$. Esta é uma Matriz simétrica e portanto (Teor Espectral) dispõe de autovalores reais e autovetores ortogonais dos quais se pode obter uma base ortonormal. Resolva a Equação Espectral $Au = \lambda u$ e obtenha dois autovalores (que são distintos) e seus respectivos autovetores, (que são ortogonais). Normalize estes autovetores e surgirá uma base ortonormal $\{u, v\}$de $\mathbb{R}^2$. Escreva a relação $Au = au, Av = bv$ na forma matricial $A(u \quad v) = (u \quad v)\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix}$ onde, naturalmente a matriz $O = (u \quad v) \in M_{22}$ tem colunas ortonormais u, v e é portanto matriz Ortonormal. Então , $A = O^T \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix} O$. Assim, $A^N = \left(O^T \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix} O\right)\left(O^T \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix} O\right) \cdots \left(O^T \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix} O\right) = \left(O^T \begin{pmatrix} a^N & 0 \\ 0 & b^N \end{pmatrix} O\right)$.

Finalmente, se $F_{n+1} = AF_n$, conclui-se que $F_n = A^N F_0 = \left(O^T \begin{pmatrix} a^N & 0 \\ 0 & b^N \end{pmatrix} O\right) F_0$. Como $F_n = \begin{pmatrix} \varphi(n) \\ \varphi(n+1) \end{pmatrix}$, a primeira componente de F_n revela a solução, lembrando-se que $F_0 = \begin{pmatrix} \varphi(0) \\ \varphi(1) \end{pmatrix}$ são os dados iniciais da questão.

17-Calcule a solução específica da **Recursão de Fibonacci** para $F(0) = 1, F(1) = 2$.

RESOLUÇÃO: V. 16.

18-Escreva a **Recursão de Fibonacci** $(F(n+2) = F(n=1) + F(n)\ ;\ \forall n \in \mathbb{N}\ )$ na forma **Operacional** e **Funcional** $p(S)F = 0$ em que $S: \mathcal{F}(\mathbb{N}, \mathbb{C}) \to \mathcal{F}(\mathbb{N}, \mathbb{C})$ é o operador linear de "deslocamento" ("Shift") , $Sf(k) = f(k+1)$.

19-**Autovalores-Autofunções** para **Operadores Polinomiais** de Recursão: Mostre que para qualquer função de potência $f(k) = \gamma^k$, temos $Sf = \gamma f$ e , portanto $p(S)f = p(\gamma)f$. Obtenha duas soluções da forma $f(k) = \gamma^k$ para a Recursão de Fibonacci e a solução geral da recursão. Calcule a expressão numérica para a solução que parte das seguintes condições iniciais $f(0) = 1, f(1) = 2$.

17-18-RESOLUÇÃO: Esta questão está feita em vários lugares das Notas e é muito simples; basta seguir as definições.

20-O **Operador Polinomial** de Recursão $p(S): \mathcal{F}(\mathbb{N}, \mathbb{C}) \to \mathcal{F}(\mathbb{N}, \mathbb{C})$, cujo polinômio associado é $p(\lambda) = (\lambda - 1)(\lambda^2 + 1)(\lambda + 2)$ tem o seu núcleo gerado por: $Ker\{P(S)\} = \left[1, (-2)^k, \cos k\frac{\pi}{2}, \text{sen}\, k\frac{\pi}{2}\right] = [1, (-2)^k, i^k, (-i)^k]$. Escreva a Equação recursiva de ordem 4 correspondente a $p(S)f = 0$. (**Sugestão**: $p(\lambda) = (\lambda - 1)(\lambda^2 + 1)(\lambda + 2) = \lambda^4 + \lambda^3 - \lambda^2 + \lambda - 2$ e, portanto, $p(S)f(x) = f(x + 4) + f(x + 3) - f(x + 2) + f(x + 1) - 2f(x)$, ou, $f(x + 4) = -f(x + 3) + f(x + 2) - f(x + 1) + 2f(x)$.

RESOLUÇÃO:

Observe que, a primeira vista, $\cos k\frac{\pi}{2}$ e $\text{sen}\, k\frac{\pi}{2}$ não parecem ser representáveis como funções de potencias soluções da equação. Entretanto, como $e^{\pm ik\frac{\pi}{2}} = \pm i = \cos k\frac{\pi}{2} \pm i\, \text{sen}\, k\frac{\pi}{2}$, concluimos que $\cos k\frac{\pi}{2} = \frac{1}{2}e^{ik\frac{\pi}{2}} + \frac{1}{2}e^{-ik\frac{\pi}{2}} = \frac{1}{2}i^k + \frac{1}{2}(-i)^k$, $\text{sen}\, k\frac{\pi}{2} = \frac{1}{2i}e^{ik\frac{\pi}{2}} - \frac{1}{2i}e^{-ik\frac{\pi}{2}}$, sendo combinações lineares de soluções , também são soluções.

A recorrência neste caso é de ordem 4 e, portanto, exige 4 valores iniciais para que possa ser calculada recursivamente. As quatro raízes apresentadas explicitamente, fornecem quatro soluções básicas Lin Indep que geram todo o espaço de soluções que pode ser descrito na forma:

$$f(x) = c_1(1)^k + c_2(-2)^k + c_3(i)^k + c_4(-i)^k$$

21-**Operador Diferença**: Mostre que: $\delta: P_N(\mathbb{C}) \to P_N(\mathbb{C})$; $\delta\, x^{[n]} = nx^{[n-1]}$ onde , $x^{[0]} = 1, x^{[n+1]} = x^{[n]}(x - n)$,

22-Calcule a expansão $x^4 = \sum_{k=0}^{4} c_k x^{[k]}$ e δx^4 na base $\{x^{[k]}\}$.

21-22-RESOLUÇÃO: Observe que $x^{[0]} = 1$, $x^{[1]} = x$, $x^{[2]} = x(x - 1)$, $x^{[3]} = x(x - 1)(x - 2)$ ….. e que $x^{[n]}(k) = 0$, se $j < n$. Portanto, para calcular a expansão $x^4 = \sum_{k=0}^{4} c_k x^{[k]}$, calcule para os dois lados fazendo sucessivamente $x = 0, x = 1, x = 2, x = 3$, $x = 4$,e com isso obtendo sucessivamente os valores de $c_0, c_1, c_2, \dots$.

23 -Operador Diferencial: Mostre que $p(D)e^{\alpha t} = p(\alpha)e^{\alpha t}$, $\forall \alpha \in \mathbb{C}$, e $h_\lambda(t) = e^{\lambda t}$ é solução de $p(D)h = 0$. Mostre que a Solução geral de $p(D)u = e^{i\omega t}$ é $u = \sum_{k=0}^{n} a_k h_k(t) + \frac{e^{i\omega t}}{p(i\omega)}$. (**Sugestão**:Siga as instruções/regras de derivação para $e^{(a+ib)t} = (e^{at} cosbt) + i\,(e^{at}\, sent\, bt))$, coordenada a coordenada e leve em conta as relações trigonométricas elementares).

23-RESOLUÇÃO: *Siga a sugestão.*

-TEORIA ESPECTRAL

24-Obtenha os autovalores de $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$ e seus respectivos autovetores **ortonormais**.

24-RESOLUÇÃO: Observe que a Matriz é simétrica e, portanto, pelo Teorema Espectral a requisição de ortonormalidade dos autovetores pode ser cumprida. Escreva a Equação Espectral e resolva-a como em itens anteiroes.

25-Se $\dot{x} = Ax$ onde $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$ utilize o ***Método Espectral de Fourier*** para obter a solução geral $x(t) = c_1 h_1(t) + c_2 h_2(t)$ e em particular aquela solução que satisfaz a seguinte condição inicial $x(0) = 1, \dot{x}(0) = 0$. (**Sugestão**: Obtenha os **dois** autovalores e autovetores $Av = \lambda v$ e as soluções $h_\lambda(t) = e^{\lambda t}v$).

26-Utilize o ***Método de Diagonalização*** de Fourier para obter a solução geral de $\dot{x} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} x$. (**Sugestão**: Diagonalize $O\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} O^{-1} = diag(\lambda, \mu)$ e faça mudança de variável $y = Ox$.

25-26-RESOLUÇÃO: Siga as sugestões.

27-Espectro: Verdade ou não: Se $A \in GL_n(\mathbb{C})$ e $\lambda \in Sp(A)$ então $\lambda^2 \in Sp(A^2)$, $\lambda^{-1} \in Sp(A^{-1})$, $\lambda \in Sp(A^T)$,

28-Matrizes de Blocos: Verdade ou não: Se $M = \begin{pmatrix} A_{11} & 0 \\ 0 & A_{22} \end{pmatrix} \in M_{(n+2)(n+2)}$, $A_{11} \in M_{nn}, A_{22} \in M_{22}$, então,

$Sp(A_{11}) \cap Sp(A_{22}) \subset Sp(M)$

29-Calcule $\det \begin{pmatrix} A_{11} & 0 \\ 0 & A_{22} \end{pmatrix}$ se $A_{11} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ e $A_{22} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$.

30-**Posto de Matrizes***:* Dadas as Matrizes $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ determine $r(A), r(B), r(A^2), r(AB)$

31-Matriz J :

-Dada $J = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \in M_{22}$, determine $J^{353} = -I$, $\det J^{11}$, $Tr\, J^{33}$ (**Sugestão**:Analise a "Tabuada multiplicativa da matriz J".

-Dada $M = aI + bJ \in M_{22}$, determine M^7 .

32-Mostre que as Matrizes $\mathcal{C} = \{aI + bJ, a, b \in \mathbb{R}\} \subset M_{22}(\mathbb{R})$ constituem uma sub-álgebra de $M_{22}(\mathbb{R})$ com invertibilidade e isomorfa à Àlgebra dos Números complexos com escalares reais.

33-**Matrizes Antisimétricas** $A \in M_{33}(\mathbb{R})$. Mostre que: $\langle Ax, x\rangle = 0, \forall x$, $detA = 0$, $\exists \omega \in \mathbb{R}^3, Ax = \omega \wedge x$, $\exists x \neq 0, Ax = 0$, $TrA = 0$

34-Mostre que se $A \in M_{nn}(\mathbb{R})$ e n ímpar então $\det A = 0$, mas não necessariamente se n par.

35-Mostre que se $A \in M_{nn}(\mathbb{R})$ então $iA \in H_{nn}(\mathbb{C})$

36-Matrizes Simétricas: $S_{ij} = S_{ji}$, $\langle Sx, y\rangle = \langle x, Sy\rangle$, $\exists x \neq 0$; $Ax \parallel x$, $\exists O, O^T O = I$; $OSO^T = diag(..\lambda_k..)$; $\langle Sx, x\rangle > 0, \|x\| = 1 \Longrightarrow E = \{x; \langle Sx, x\rangle = 1\}$ *é um Elipsoide*,

- $O^T = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{-1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}, O = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{-1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}, O^T \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} O = \begin{pmatrix} \frac{3}{2} & \frac{3}{4} \\ \frac{3}{4} & \frac{5}{4} \end{pmatrix} = A$

RESOLUÇÃO: As questões de 25-36 são muito imediatas.

DETERMINANTE:

37-Lápis e Papel: Considere o produto vetorial no **plano** $u \wedge v$ cujo valor é interpretado como a área orientada do **paralelogramo**$\alpha = u \wedge v$ com arestas $u\ e\ v$. Mostre que as seguintes propriedades são satisfeitas: 1) $u \wedge v = 0$ se e somente se $u\ e\ v$ forem LI. Utilizando a *"Tabuada dos produtos vetoriais da base canônica*" mostre que esta operação em $(\mathbb{R}^2)^2$ estabelece a função determinante $det: M_{22}(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$ definida axiomaticamente. Identifique os termos da Expansão de Leibniz.

38-Lápis e Papel: Considere o produto misto $(u \wedge v) \cdot w$ no **Espaço** cujo valor é interpretado como a área orientada do **paralelepípedo** $V = (u \wedge v) \cdot w$ com arestas u, v, w . Mostre que as seguintes propriedades são satisfeitas: 1) $(u \wedge v) \cdot w = 0$ se e somente se u, v, w forem LI. Utilizando a "*Tabuada dos produtos vetoriais da base canônica*" , mostre que esta operação tripla em $(\mathbb{R}^3)^3$ estabelece a função determinante $det: M_{33}(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$ definida axiomaticamente. Identifique os termos da Expansão de Leibniz.

37-38-RESOLUÇÃO: Desenhos de Geometria Analitica do curso secundário.

39-Sinais de Permutações: Calcule $sgn(\sigma)$ onde $\sigma \in P_{(4)}$; $\sigma: I_4 \to I_4 = \{1,2,3,4\}$; $\sigma(1) = 2, \sigma(2) = 4, \sigma(3) = 1, \sigma(4) = 3$. (**Sugestão**: Escreva $\sigma = T_{k_1} \circ\circ\circ T_{k_m}$ como uma sucessão de transposições adjacentes aplicadas à Identidade.

Transposições adjacentes $T_k \in P_{(n)}$, $1 \leq k < n$ são permutações que apenas trocam a posição de dois valores adjacentes : $T_k(k) = k + 1$ e $T_k(k + 1) = k$ e para outros pontos $s \neq, k + 1$ $T_k(s) = s$ .Como $sgn(T_k) = -1$, $sgn(\sigma) = (-1)^{k_m}$.

RESOLUÇÃO: Consulte as Notas Preliminares

40-**Derivada de Determinante**-Obtenha a derivada $\frac{d}{dt}$ $det(A + tB))$ em que $B \in GL_n$. (**Sugestão**: Escreva $\det\{ (AB + tI) B^{-1}\} = \det(AB + tI) \det B^{-1}$ e expanda det $(A + tB)$ em potências de t calculando apenas o termo de grau zero e grau 1).

RESOLUÇÃO: Siga a sugestão lembrando-se de que cada parcela da soma da expansão de Leibniz é consituida de um produto de n fatores cada um deles representando uma linha e uma coluna distintas. Uma destas parcelas é a diagonal que é constituída do produto de representantes das linhas e colunas de mesmo índice. Analise este termo e os outros obtendo os únicos que não contem t ou que contem t apenas na primeira potencia.

41-Mostre que o determinante da **Matriz de Vandermode** $\{V_{ij}\}_{1\leq,i,j\leq n} = \{(\gamma_i)^{j-1}\}$, é distinto de zero para números $\{\gamma_k\}_{1\leq k\leq n}$ distintos. (**Sugestão-** As funções $h_\gamma(k) = \gamma^k$ são autofunções do Operador linear de deslocamento $S: \mathcal{F}(\mathbb{N}, \mathbb{C}) \to \mathcal{F}(\mathbb{N}, \mathbb{C}), Sf(k) = f(k + 1)$ e os seus valores em $k = 1$ formam um vetor LI e, portanto , uma base de dim $Ker\{p(S)\}$. Se $p(\lambda) = \prod_{s=1}^{n}(\lambda - \lambda_s)$) , então dim $Ker\{p(S)\} = n$ e existe uma função linear bijetiva entre $\mathbb{R}^n$ (condições iniciais) e as soluções de $p(S)h = 0$.

RESOLUÇÃO: Siga a sugestão.

42-**Calcule**: $Tr\{L\}$: $L: P_N(\mathbb{R}) \to P_N(\mathbb{R})$, $L = D - xD + 1$, $L = D, L = xD$, $L = S$, $L = \delta$. (**Sugestão**: Represente a Operação Linear em uma base apropriada $\alpha \subset P_N$, na forma matricial, $L_{[\alpha]}$ e utilize a invariância do traço: $\mathrm{Tr}(PA) = \mathrm{Tr}(AP)$).

RESOLUÇÃO:

Utilize a base canônica $\alpha = \{x^k\}_{0\leq k\leq N}$ e calcule $L\ \{\sum_{k=0}^{N} a_k\, x^k\} = \sum_{k=0}^{N}\{\sum_{n=0}^{N}(A_{kn}a_n)\}x^k$ obtendo assim a Matriz $L_{[\alpha]} = A$ com a qual se pode calcular o traço. Por exemplo

$(D - xD + 1\,) \sum_{k=0}^{N} a_k\, x^k = \sum_{k=0}^{N} a_k\, kx^{k-1} + a_k(1 - k)x^k = \sum_{k=0}^{N}\{a_{k+1}\,(k + 1) + a_k(1 - k)\}\, x^k$,
donde vem que $A_{k(k+1)} = k + 1$, $A_{kk} = 1 - k$ e $A_{jm} = 0\ nas\ outras\ entradas.$

43-Calcule: $\det L$: $L: P_N(\mathbb{R}) \to P_N(\mathbb{R})$, $L = D - xD + 1$, $L = D, L = xD$, $L = S$, $L = \delta$. (**Sugestão**: Represente a Operação Linear em uma base apropriada $\alpha \subset P_N$, na forma matricial, $L_{[\alpha]}$ e utilize a invariância do determinante: $\det A = \det(P^{-1}AP)$)

RESOLUÇÃO: V. Sugestão semelhante a do exercício anterior.

44-Calcule $\det A$; $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ -1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ escrevendo-o na forma de um **produto alternado**/externo $\det A = A^1 \wedge A^2 \wedge A^3$ **utilizando apenas** os axiomas que o definem: **1)Normalização**: Se $\{\delta^k\}_{1\leq k\leq n}$ $for\ Base\ Canônica\ de\ \mathbb{R}^n$, então $\delta^1 \wedge \ldots \wedge \delta^n = 1$, (isto é, $\det I = 1$) **2)Multilinearidade** (isto é, Linearidade termo a termo: $..\wedge u \wedge (w + \lambda v) \wedge .. = .. \wedge u \wedge w \wedge + \lambda(..\wedge u \wedge v \wedge ..)$.)
3)Antisimetria (isto é, o produto alternado de n vetores de $\mathbb{R}^n$que contenha dois fatores adjacente iguais é sempre nulo). (**Sugestão**: Mostre inicialmente que os axiomas acima implicam que a transposição de colunas adjacentes modificam apenas o sinal do produto, pois, $0 = .. \wedge (u + v) \wedge (u + v) \wedge .. = .. \wedge u \wedge v \wedge + .. \wedge v \wedge u \wedge \ldots$. Em seguida expanda cada vetor coluna em

termos da base canônica $\{\delta^j\}$ $A^k = A_{1k}\delta^1 + A_{2k}\delta^2 + A_{3k}\delta^3$. Os **3** Axiomas do produto alternado/externo são na verdade uma "Tabuada" para esta operação e basta segui-los para calcular o produto externo de quaisquer vetores).

RESOLUÇÃO:

Escreva cada coluna em termos da base canônica: $A^1 = e_1 - e_2$, $A^2 = 2e_1 + e_2 + e_3$, $A^3 = -e^2 + e_1$

De onde vem que $\det A = (e_1 - e_2) \wedge (2e_1 + e_2 + e_3) \wedge (-e^2 + e_1)$ e agora utilizamos (como se faz em qualquer produto) a propriedade multilinear (linear em cada coluna separadamente) e a "tabuada" dos produtos de colunas canônicas.

$$\det A = e_1 \wedge \{(2e_1 + e_2 + e_3) \wedge (-e_2 + e_1)\} - e_2 \wedge \{(2e_1 + e_2 + e_3) \wedge (-e^2 + e_1)\} =$$

Para exemplificar Calculemos o produto $e_1 \wedge (2e_1 + e_2 + e_3) \wedge (-e_2 + e_1)$ (com ênfase em vermelho aos produtos nulos)

$\{2e_1 \wedge e_1 + e_1 \wedge e_2 + e_1 \wedge e_3\} \wedge (-e_2 + e_1) = -e_1 \wedge e_2 \wedge e_2 + e_1 \wedge e_2 \wedge e_1 - e_1 \wedge e_3 \wedge e_2 + e_1 \wedge e_3 \wedge e_1$

$= -e_1 \wedge e_3 \wedge e_2 = e_1 \wedge e_2 \wedge e_3 = 1$

Analogamente se faz com os outros casos.

45-Faça o mesmo com a Matriz em Blocos: $M = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} \in M_{66}(\mathbb{R})$, $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} = B^T$, $C = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix} = D$

RESOLUÇÃO: Repita o mesmo procedimento aplicado no Ex. 44.

ESPAÇOS COM PRODUTO INTERNO

46-Considere um vetor unitário $N \in E$, sendo E um **E**spaço **V**etorial Real com **P**roduto **I**nterno (**EVPI**) Cartesiano real. Mostre que a operação "Projeção Vetorial Ortogonal sobre N" é uma **operação linear**, $P_N: E \to E, P_N(v) = \langle v, N \rangle N$. Represente esta operação como um produto matricial quando $E = \mathbb{R}^n$.(**Sugestão**: Escreva $\langle v, N \rangle N$ com produto de 3 matrizes respectivamente de ordens: $(n \times 1)(1 \times n)(n \times 1)$ cujo resultado e´uma matriz (vetor) de ordem $(n \times 1)$: $P_N(v) = (NN^T)v$.

RESOLUÇÃO: Aplique a sugestão identificando os vetores de $\mathbb{R}^n$ com matrizes colunas M_{n1}

47-Se $N = \frac{1}{\sqrt[2]{3}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ obtenha $P_N(v)$ onde $v = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$ e determine a expressão matricial para P_N.

-O mesmo para $N = \frac{1}{c}(x^2 + 1) \in E = P_5(\mathbb{R}) = \{Polinomios\ reais\ de\ grau\ \leq 5\}$, $\langle p, q \rangle = \int_0^1 p(x)q(x)dx$ e $v = x^5 + x$.(Observação: Calcule c para Normalizar $(x^2 + 1)$.

RESOLUÇÃO: Siga o formalismo da sugestão do exercício anterior.

48-Se a Projeção Ortogonal Vetorial se dá em um subespaço $F \subset E$ de um EVPI real com Base Ortonormal $\{v_k\}_{1 \leq k \leq p}$: $P: E \to F$, então $P_F(x) = \sum_{k=1}^{p} \langle x, v_k \rangle v_k$. Escreva este Operador na representação matricial. Faça isto para o subespaço de $E = P_N(\mathbb{R}), \langle p, q \rangle = \int_0^1 p(x)q(x)dx$, $F = [1, x, x^2]$. (**Sugestão**: Obtenha uma base ON para F e siga o roteiro!).

RESOLUÇÃO: Siga a sugestão e os procedimentos dos exercícios anteriores. Faça uma figura ilustrativa do problema semelhante em Geometria Analitica.

49-Obtenha a ortonormalização de Gram-Schmidt para o sub-espaço E_0 gerado pelos vetores $\{w_k = x^k\}_{0\leq k\leq 2}$ em $E = P_5(\mathbb{R}) = \{Polinomios\ reais\ de\ grau\ \leq 5\}$, $\langle p,q\rangle = \int_0^1 p(x)q(x)dx$. Obtenha a Projeção ortogonal $P_{E_0}: E \to E_0$ na forma matricial.

RESOLUÇÃO: Siga o procedimento indicado pelo problema (Ortogonalização de Gram-Schmidt): Escolha o primeiro vetor já normalizado $v_0 = 1 = w_0$ e, em seguida projete o vetor x em v_0 : $\langle v_0, w_1\rangle = \langle 1, x\rangle = \int_0^1 1\ x\ dx = \frac{1}{2}$ e tome apenas a parte ortogonal a w_0 : $u_1 = w_1 - \langle v_0, w_1\rangle v_0 = x - \frac{1}{2}$. Em seguida, normalize $v_1 = \frac{1}{\|u_1\|}u_1$, onde $\|u_1\| = \sqrt{\int_0^1 \left(x - \frac{1}{2}\right)^2 dx} = \sqrt{\frac{1}{12}} = \frac{1}{2\sqrt{3}}$ e, portanto, $v_1 = 2\sqrt{3}\,x - \sqrt{3}$. O terceiro elemento ortonormal da base é obtido de forma semelhante: Primeiro projeta-se $w_2 = x^2$ no sub-espaço gerado por $[v_0, v_1]$: $\langle w_2, v_0\rangle v_0 + \langle w_2, v_1\rangle v_1$ e , em seguida retiramos apenas a sua componente ortogonal a este subespaço, ou seja

$u_2 = w_2 - \langle w_2, v_0\rangle v_0 + \langle w_2, v_1\rangle v_1$ para finalmente obtermos o terceiro elemento da base ON de E_0 , isto é, $v_2 = \frac{1}{\|u_2\|}u_2$. A Projeção ortogonal no subespaço E_0 é obtida com o mesmo procedimento de Geometria Analitica: $P_{E_0}(h) = \sum_{k=0}^{2}\langle h, v_k\rangle v_k$. Faça as contas!

50-Mostre que $O = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{-1}{\sqrt{6}} \\ \frac{-1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & 0 & \frac{2}{\sqrt{6}} \end{pmatrix}$ é uma matriz Ortogonal cujo determinante é..?..e cujo traço é...?..

51-Obtenha a representação matricial da operação linear $L: E = P_5(\mathbb{R}) \to P_{10}(\mathbb{R})$ definida por $Lp(x) = xD^2 - D + x^2$ com as bases $\{x^k\}_{0\leq k\leq 5} \subset P_5(\mathbb{R})$e vetores $\{x^k\}_{0\leq k\leq 10} \subset P_{10}(\mathbb{R})$.

52-Obtenha a representação matricial da operação linear $\delta: E = P_5(\mathbb{R}) \to P_{10}(\mathbb{R})$ definida por $\delta p(x) = p(x+1) - p(x)$ com as bases$\{x^{[k]}\}_{0\leq k\leq 5} \subset P_5(\mathbb{R})$e vetores $\{x^{[k]}\}_{0\leq k\leq 1} \subset P_{10}(\mathbb{R})$. (Obs: $x^{[0]} = 1, x^{[n+1]} = (x-n)x^{[n]}$

ATENÇÃO PARA A CORREÇÃO DOS POLINOMIOS POTENCIAS DE COLCHETE: $x^{[0]} = 1, x^{[n+1]} = (x-n)x^{[n]}$

53-Mostre que o Operador linear $\frac{d^2}{dx^2} = D^2: E \to E = \{p \in P(\mathbb{R}); p(0) = p(1) = 0\}$, $\langle p,q\rangle = \int_0^1 p(x)q(x)dx$, **é linear, e simétrico. (Sugestão:** Utilize a integração por partes para mostrar que $\langle D^2p, q\rangle = \langle p, D^2q\rangle$ o que demonstra a simetria de D^2 em E.

54-Mostre que o Operador linear $D: E \to E = \{p \in P(\mathbb{R}); p(0) = p(1) = 0\}$, $\langle p,q\rangle = \int_0^1 p(x)q(x)dx$, é **linear, antisimétrico** . **(Sugestão:** Utilize a integração por partes para mostrar que $\langle Dp, q\rangle = \langle p, -Dq\rangle$ o que demonstra a antisimetria de D em E).

RESOLUÇÃO:

Os argumentos para a resolução dos exercícios 50-54 foram apresentados em outros exercícios e nas sugestões.