LISTA 4 - MS211

PEDRO SADER AZEVEDO, RA: 243245

---

(1) PROVA POR CONTRADIÇÃO:

SUPONHA, PARA FINS DE CONTRADIÇÃO, QUE EXISTE UMA MATRIZ $C = AB$ TAL QUE $|C| = 0$ E $|A| \neq 0$, $|B| \neq 0$.

COMO O DETERMINANTE DO PRODUTO É O PRODUTO DOS DETERMINANTES, TEMOS:

$$C = AB \Rightarrow |C| = |A||B| \Rightarrow 0 = |A||B|$$

UM PRODUTO É NULO SE E SOMENTE SE UM DOS FATORES É NULO, OU SEJA, $|A| = 0$ OU $|B| = 0$. NO ENTANTO ISSO CONTRADIZ NOSSA SUPOSIÇÃO QUE $|A| \neq 0$ E $|B| \neq 0$, ENTÃO A AFIRMAÇÃO ESTÁ PROVADA.

$\blacksquare$

(2) PARA PENSAR NO NÚMERO DE FLOPS NECESSÁRIAS PARA CALCULAR O PRODUTO DE $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ POR $B \in \mathbb{R}^{n \times p}$, FACILITA MUITO FAZER UM EXEMPLO

$$A = \begin{bmatrix} a & b & c & d & e \\ f & g & h & i & j \\ k & l & \alpha & \beta & \gamma \end{bmatrix}, \quad m = 3 \quad n = 5$$

$$B = \begin{bmatrix} \theta & u \\ q & v \\ r & w \\ s & x \\ t & y \end{bmatrix}, \quad n = 5 \quad p = 2$$

COMO A É 3×5 E B É 5×2, SABEMOS QUE AB SERÁ 3×2. ASSIM:

$$\Rightarrow AB = \begin{bmatrix} a & b & c & d & e \\ f & g & h & i & j \\ k & l & \alpha & \beta & \gamma \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \theta & u \\ q & v \\ r & w \\ s & x \\ t & y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a\cdot\theta + b\cdot q + cr + d\cdot s + e\cdot t & \cdots \\ \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots \end{bmatrix}$$

Quando olhamos $AB_{1,1}$ fica claro que temos uma multiplicação entre os elementos da primeira linha de A e da primeira coluna de B. Como as duas tem n elementos, são n produtos.

Depois das multiplicações temos uma soma, exceto pelo último elemento. Assim, temos $n-1$ somas. Portanto:

$$\text{FLOPS por elemento de } AB = n + (n-1) = 2n - 1$$

quando n é muito grande, esse "-1" se torna irrelevante então

$$\text{FLOPS por elemento de } AB \approx 2n$$

Sabemos, por propriedades do produto de matrizes, que AB tem o número de linhas de A e o número de colunas de B então $AB \in \mathbb{R}^{m\times p}$. Isso significa que AB tem $m \cdot p$ elementos então o total de FLOPS para calculá-la é $\boxed{2n \cdot m \cdot p}$

Caso $A, B \in \mathbb{R}^{n\times n}$ teríamos $m = p = n$ então o número de FLOPS seria $\boxed{2n^3}$

3 Vamos escalonar a matriz dos coeficientes do sistema A, representando as operações elementares como matrizes (vai ajudar na próxima questão):

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ -3 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \overbrace{\begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 & 3 \\ -2 & -2 & 1 & 1 \\ 6 & 5 & 2 & 2 \\ -4 & -3 & 6 & 5 \end{bmatrix}}^{A} = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & -1 & 2 & 4 \\ 0 & 2 & -1 & -7 \\ 0 & -1 & 8 & 11 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & -1 & 2 & 4 \\ 0 & 2 & -1 & -7 \\ 0 & -1 & 8 & 11 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & -1 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 6 & 7 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & -1 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 6 & 7 \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & -1 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 5 \end{bmatrix}}_{U}$$

AGORA PODEMOS USAR SUBSTITUIÇÃO REGRESSIVA PARA RESOLVER O SISTEMA PARA DIFERENTES VETORES **b** DE TERMOS INDEPENDENTES.

$$\mathbf{b} = \begin{bmatrix} -2 \\ -3 \\ 5 \\ -9 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{x} = \begin{bmatrix} i \\ j \\ k \\ l \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{cases} 2i + j + k + 3l = -2 \\ -j + 2k + 4l = -3 \\ 3k + l = 5 \\ 5l = -9 \end{cases}$$

$$\Rightarrow l = -9/5, \quad k = 34/15, \quad j = 1/3, \quad i = 4/5$$

$$\mathbf{b} = \begin{bmatrix} 0 \\ -4 \\ 0 \\ -15 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{x} = \begin{bmatrix} i \\ j \\ k \\ l \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{cases} 2i + j + k + 3l = 0 \\ -j + 2k + 4l = -4 \\ 3k + l = 0 \\ 5l = -15 \end{cases}$$

$$\Rightarrow l = -3, \quad k = 1, \quad j = -6, \quad i = 14$$

4. DA QUESTÃO ANTERIOR TEMOS:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ -3 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} A = U$$

$$\Rightarrow A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ -3 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}^{-1}\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}^{-1}\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 1 \end{bmatrix}^{-1} U$$

Inverter matrizes de operações elementares de combinação linear é bem simples, pois basta inverter o sinal dos elementos fora da diagonal principal (afinal, o contrário de "somar duas vezes a linha 3" é "subtrair duas vezes a linha 3"). Assim, temos:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \end{bmatrix} U$$

O produto desse tipo de matriz também é simples: basta combinar da primeira coluna da primeira matriz, da segunda coluna da segunda matriz e assim por diante. Portanto

$$A = \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & -2 & 1 & 0 \\ -2 & 1 & 2 & 1 \end{bmatrix}}_{L} \underbrace{\begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & -1 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 5 \end{bmatrix}}_{U}$$

(5) Matrizes triangulares (tanto superiores quanto inferiores) tem como determinante o produtório dos elementos na diagonal principal. Assim, os determinantes de $L, U \in \mathbb{R}^{n \times n}$ são:

$$|L| = \prod_{k=1}^{n} l_{k,k} \quad , \quad |U| = \prod_{k=1}^{n} u_{k,k}$$

Como o determinante do produto é o produto dos determinantes.

$$A = LU \Rightarrow |A| = |L||U| \Rightarrow |A| = \prod_{k=1}^{n} l_{k,k} \prod_{k=1}^{n} u_{k,k}$$

$$\Rightarrow \boxed{|A| = \prod_{k=1}^{n} l_{k,k} \, u_{k,k}}$$

E como o determinante da matriz inversa é o inverso do determinante

$$|A^{-1}| = |A|^{-1} = \boxed{\left(\prod_{k=1}^{n} l_{k,k} \, u_{k,k} \right)^{-1} = |A^{-1}|}$$