96

PEDRO SADER AZEVEDO RA: 243245

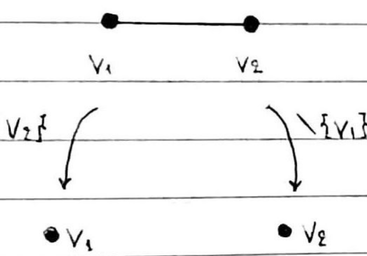
Pedro Sader Azevedo

CORRIGIR A QUESTÃO 3

(1) SEJA $P(m)$ A PROPOSIÇÃO DE QUE UM GRAFO SIMPLES $G = (V, E)$ COM $m \geq 1$ ARESTAS TEM AO MENOS DOIS VÉRTICES QUE NÃO SÃO VÉRTICES DE CORTE

PROVA POR INDUÇÃO FORTE EM m

BASE: $m = 1$



UM GRAFO SIMPLES COM UMA ARESTA TEM APENAS DOIS VÉRTICES v_1 E v_2. CLARAMENTE, NENHUM DELES É UM VÉRTICE DE CORTE, POIS A SUA REMOÇÃO NÃO AUMENTA O NÚMERO DE COMPONENTES CONEXAS (VIDE O DIAGRAMA AO LADO).

HIPÓTESE DE INDUÇÃO (FORTE): $P(k)$ PARA TODO $k \in [1, m]$

PASSO DE INDUÇÃO: QUEREMOS PROVAR $P(m+1)$

TOME G POR UM GRAFO GENÉRICO DE $m+1$ ARESTAS E RETIRE DELE UMA ARESTA ARBITRÁRIA, OBTENDO UM SUBGRAFO H COM m ARESTAS

CASO I: H É CONEXO

NESSE CASO PODEMOS APLICAR A HIPÓTESE DE INDUÇÃO AO H COMPLETO POIS $m \in [1, m]$, ASSIM GARANTINDO A EXISTÊNCIA DE AO MENOS DOIS VÉRTICES QUE NÃO SÃO DE CORTE EM UM SUBGRAFO DE G E, PORTANTO, EM G.

CASO II: H É DESCONEXO

NESSE CASO H TEM EXATAMENTE DUAS COMPONENTES CONEXAS C_1 E C_2, POIS A ARESTA REMOVIDA LIGAVA DOIS VÉRTICES. ASSIM, $\#C_1 = x$ E $\#C_2 = m - x$, $m-1 \geq x \geq 1$, OU SEJA PODEMOS APLICAR A HIPÓTESE DE INDUÇÃO ÀS COMPONENTES POIS $x \in [1, m]$ E $m - x \in [1, m]$. ENTÃO GARANTIMOS A EXISTÊNCIA DE AO MENOS DOIS VÉRTICES QUE NÃO SÃO DE CORTE EM H E ~~EM~~ CONSEQUENTEMENTE EM G ■

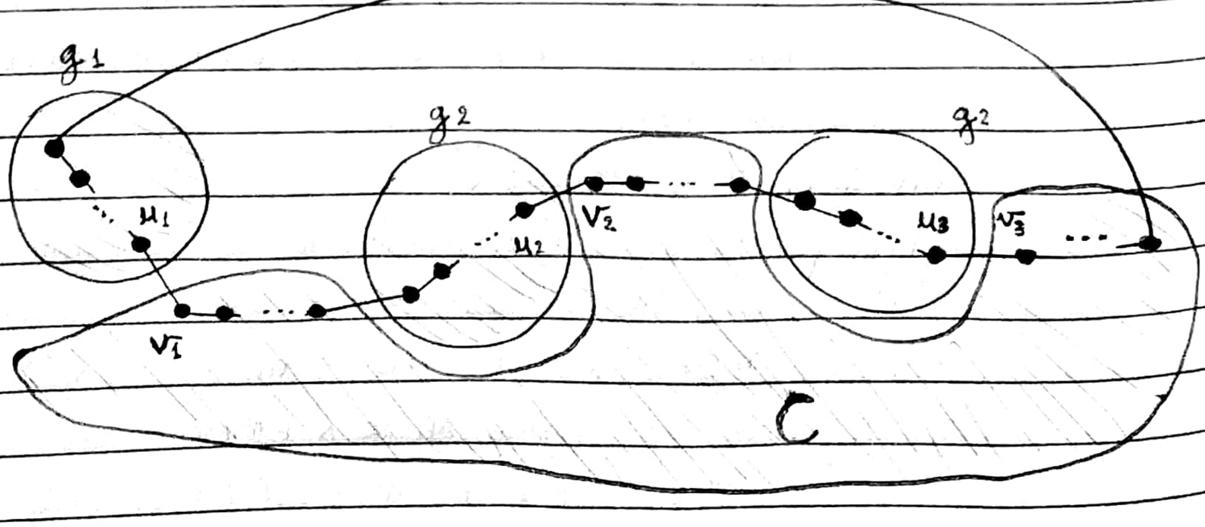
2

PROVA DIRETA

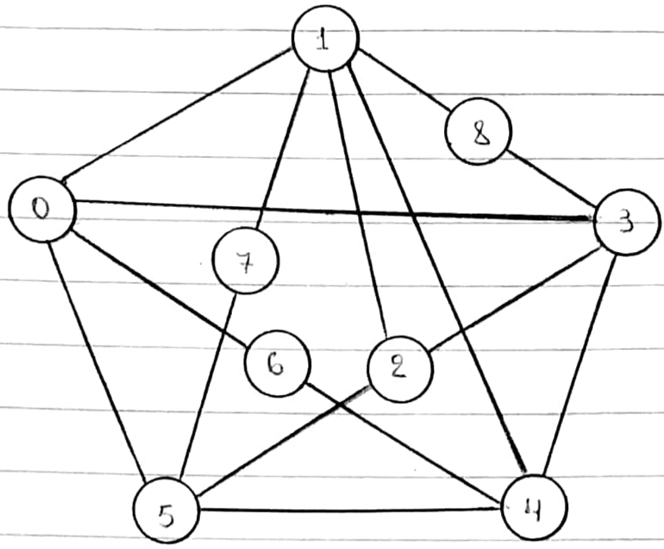
Se um grafo simples G é Hamiltoniano, por definição, ele tem um circuito que passa por todos vértices apenas uma vez. Como o grafo é simples, podemos representar esse circuito como uma sequência de vértices ao invés de uma sequência de arestas. Vamos atribuir o sentido a esse circuito sem perda de generalidade (a prova seria exatamente a mesma no sentido oposto) obtendo um ciclo ordenado Q.

Quando removemos o corte de vértices C de G obtemos γ componentes conexas, para $1 < \gamma$.
Como todos os vértices das componentes estão contidos no ciclo ordenado Q, podemos chamar de u o último vértice de cada componente. Em G, o vértice v seguinte a u definitivamente não pertence à própria componente (devido ao jeito que definimos u) nem à componente seguinte (se não as componentes seriam conexas) então $v \in C$.

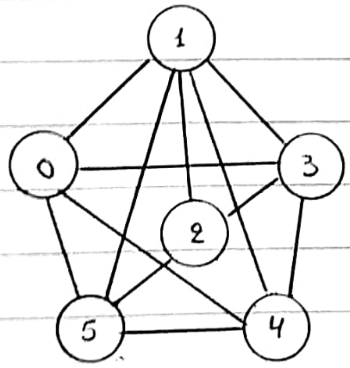
O vértice seguinte ao v pode pertencer também a C ou pertencer à próxima componente. Essa próxima componente também terá um vértice v' após seu último vértice, tal que $v' \neq v$ se não o ciclo Q se fecharia no lugar errado. Assim, cada componente g_i tem um vértice $v_i \in C$ unicamente associado a ela e vice-e-versa. Portanto, se $|C| = k$ temos, no máximo, as componentes $g_1, g_2, g_3 \cdots g^k$ que ocorrem quando os vértices do tipo v ligam duas componentes diretamente.



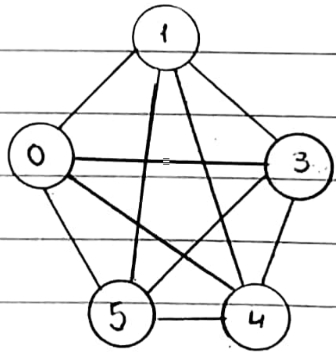
3) a) PERCEBA QUE PODEMOS REARRANJAR O DESENHO DE G1 ASSIM:



SEJA G1' UM GRAFO HOMEOMÓRFICO A G1, SUBSTITUINDO
O CAMINHO ({5,7}, {7,1}) PELA ARESTA {5,1},
O CAMINHO ({0,6}, {6,4}) PELA ARESTA {0,4}, E
O CAMINHO ({1,8}, {8,3}) PELA ARESTA {1,3}



G1'



G1''

EM SEGUIDA OBTEMOS G1'' A PARTIR DE UM SUBCONJUNTO DE G1' EQUIVALENTE A G1' \ {1,2} E SUBSTITUÍMOS HOMEOMORFICAMENTE
O CAMINHO ({5,2}, {2,3}) PELA ARESTA {5,3}.
NOTE QUE G1'' É O GRAFO K5 (PENTÁGONO COM TODAS AS DIAGONAIS TRAÇADAS)
ENTÃO, PELO TEOREMA DE KURATOWSKI, G1 É NÃO-PLANAR

b) O GRAFO G2 É PLANAR, POIS PODE SER DESENHADO SEM INTERSECÇÃO DE LINHAS, ASSIM: