# LISTA 5 - MS211

PEDRO SADER AZEVEDO RA: 243245
Pedro Sader Azevedo

---

(1) COMO DOIS DOS TRÊS PONTOS DADOS TÊM $x = 3$, CONVÉM DEFINIR NOSSO POLINÔMIO $p(x)$ EM BASE $(x-3)$, ASSIM:

$$p(x) = \alpha (x-3)^2 + \beta (x-3) + \gamma$$

PARA DERIVAR ESSE POLINÔMIO E OBTER $p'(x)$ SEM PRECISAR FAZER A DISTRIBUTIVA DOS TERMOS, VAMOS USAR UMA TROCA DE VARIÁVEIS E A REGRA DA CADEIA:

$$y = x - 3 \Rightarrow \frac{dy}{dx} = 1$$

$$p(y) = \alpha y^2 + \beta y + \gamma \Rightarrow \frac{d}{dx} p(x) = \cancelto{1}{\frac{dy}{dx}} \frac{d}{dy} p(y) = 2\alpha y + \beta$$

$$= 2\alpha (x-3) + \beta$$

PORTANTO, TEMOS QUE RESOLVER O SEGUINTE SISTEMA

$$\begin{cases} p(2) = -1 \\ p(3) = 1 \\ p'(3) = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \alpha (2-3)^2 + \beta (2-3) + \gamma = -1 \\ \gamma = 1 \\ \beta = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \alpha = -2 \\ \beta = 0 \\ \gamma = 1 \end{cases}$$

ENTÃO $\boxed{p(x) = -2(x-3)^2 + 1}$

(2) RESOLVIDO EM JULIA, NA PRÓXIMA PÁGINA :)

# Questão 2

Para escolher os pontos de interpolação de $f(x)$ e de $g(x)$, vamos usar um gráfico para visualizar os três pontos mais próximos à região onde aparenta que ocorre a intersecção entre as funções.

In [156…

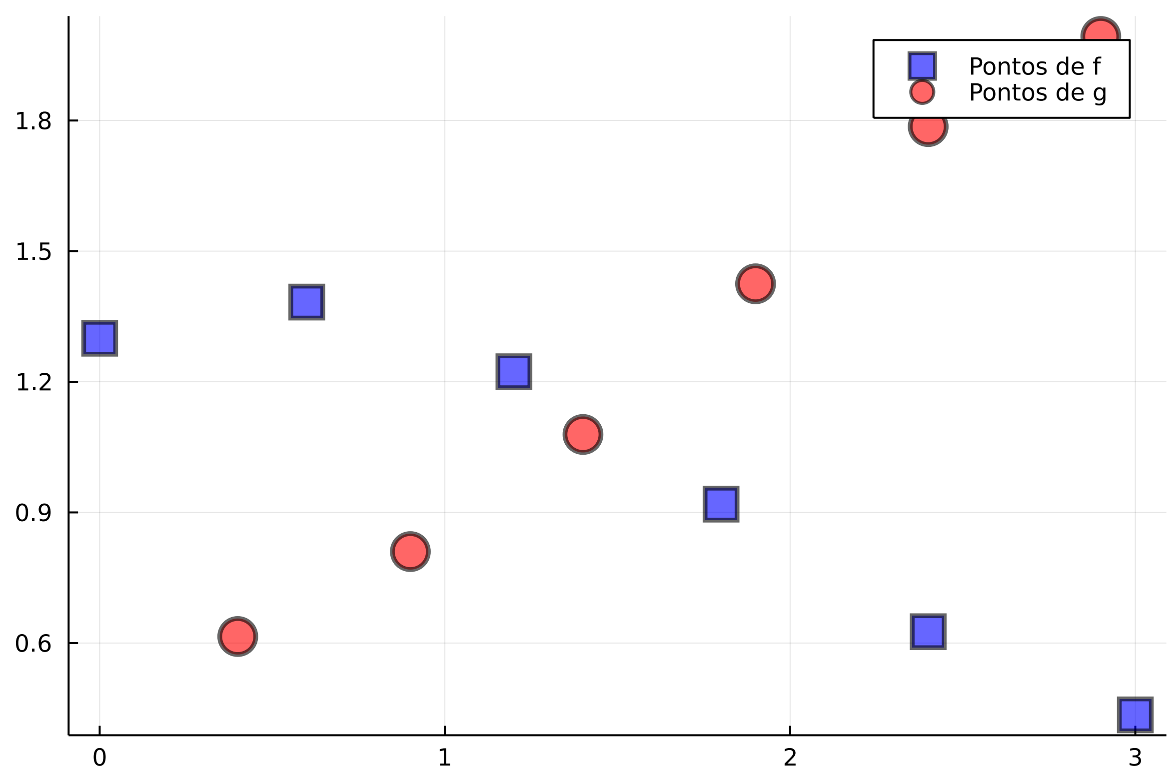
```
using Plots
```

In [144…

```
xf = [0, 0.6, 1.2, 1.8, 2.4, 3.0]
f = [1.300, 1.383, 1.223, 0.919, 0.626, 0.435]
scatter(xf, f, marker = (:square, 8, 0.6, :blue, stroke(3, 0.2, :black, :dot)), label
= "Pontos de f")

xg = [0.4, 0.9, 1.4, 1.9, 2.4, 2.9]
g = [0.615, 0.810, 1.079, 1.425, 1.786, 1.993]
scatter!(xg, g, marker = (:circle, 10, 0.6, :red, stroke(3, 0.2, :black, :dot)),
label = "Pontos de g")
```

Out[144…




Parece que devemos escolher três pontos seguidos, a partir do segundo ponto cada função. Com isso, podemos resolver o sistema da interpolação polinomial usando a funcionalidade nativa de Julia (a operação \ ).

In [145…

```
xf = [0.6, 1.2, 1.8]
f = [1.383, 1.223, 0.919]
```

```
Af = [0.6^2 0.6 1
      1.2^2 1.2 1
      1.8^2 1.8 1]
cf = Af\f
```

Out[145…

```
3-element Vector{Float64}:
 -0.20000000000000012
  0.09333333333333336
  1.399
```

In [146…

```
xg = [0.9, 1.4, 1.9]
g = [0.810, 1.079, 1.425]

Ag = [0.9^2 0.9 1
      1.4^2 1.4 1
      1.9^2 1.9 1]
cg = Ag\g
```

Out[146…

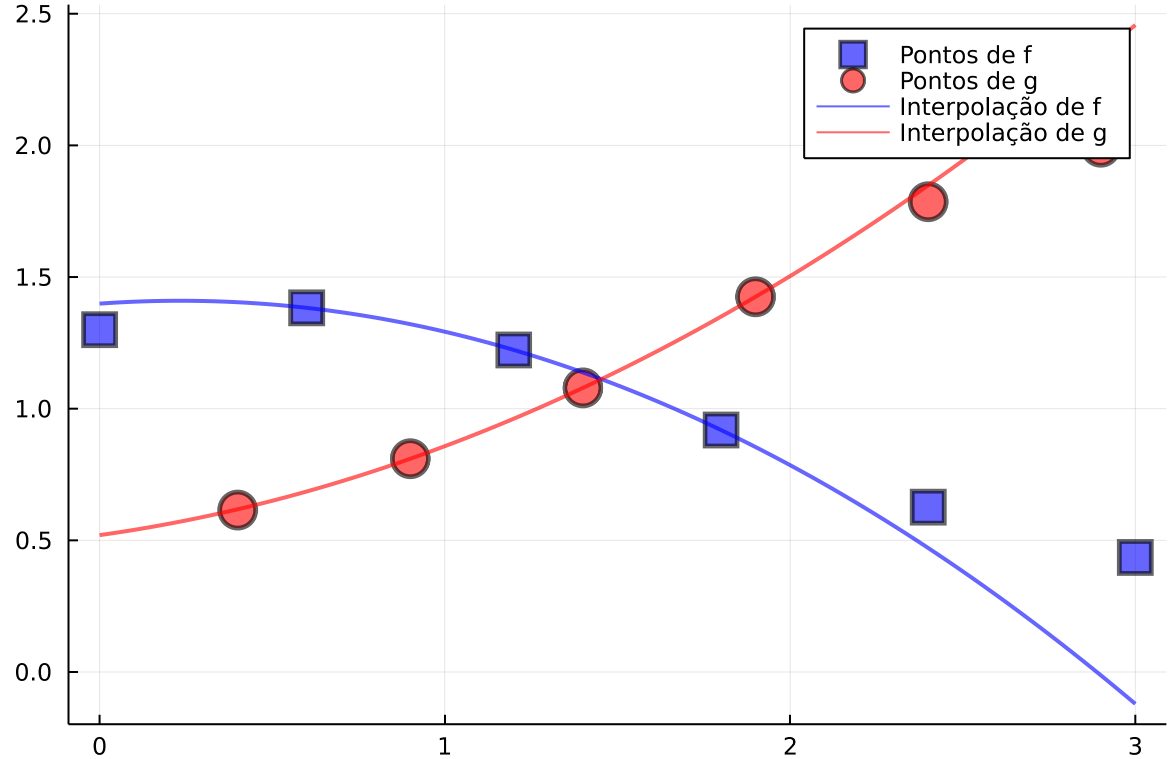
```
3-element Vector{Float64}:
 0.15400000000000033
 0.18379999999999908
 0.5198400000000006
```

In [125…

```
x =  LinRange(0, 3, 100)
F(x) = cf[1]*x^2 + cf[2]*x + cf[3]
G(x) = cg[1]*x^2 + cg[2]*x + cg[3]

plot!(x, F, linewidth = 2, linecolor = :blue, linealpha = 0.6, label = "Interpolação de f")
plot!(x, G, linewidth = 2, linecolor = :red, linealpha = 0.6, label = "Interpolação de g")
```

Out[125…




Achar o ponto de intersecção entre $f(x)$ e $g(x)$ é o mesmo que resolver a equação $f(x) - g(x) = 0$. Por isso, podemos definir um novo polinômio de grau 2 $h(x) = f(x) - g(x)$ e encontrar a sua raiz usando a fórmula de Bhaskara.

In [148…

```
ch = cf .- cg


function bhaskara(a, b, c)
    delta = b^2 - 4*a*c
    return (-b + sqrt(delta))/2a, (-b - sqrt(delta))/2a
end


x1, x2 = bhaskara(ch[1], ch[2], ch[3])
```

Out[148…

```
(-1.7088628435957345, 1.453307288040183)
```

In [149…

```
H(x) = ch[1]*x^2 + ch[2]*x + ch[3]
H(x2) # será um valor muito próximo a 0
```

Out[149…

```
-2.220446049250313e-16
```

③ TEMOS QUE RESOLVER O SISTEMA ABAIXO (TRÊS EQUAÇÕES E TRÊS INCÓGNITAS)

$$\begin{cases} p(100) = 10 \\ p(121) = 11 \\ p(144) = 12 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \alpha(100-100)^2 + \beta(100-100) + \gamma = 10 \\ \alpha(121-100)^2 + \beta(121-100) + \gamma = 11 \\ \alpha(144-100)^2 + \beta(144-100) + \gamma = 11 \end{cases}$$

COMO USAMOS UM POLINÔMIO DE LAGRANGE, A PRIMEIRA EQUAÇÃO RESOLVE UMA DAS INCÓGNITAS E ACABAMOS COM UM SISTEMA MAIS SIMPLES (DUAS EQUAÇÕES E DUAS INCÓGNITAS):

$$\begin{cases} 21^2\alpha + 21\beta = 1 \\ 44^2\alpha + 44\beta = 2 \end{cases} \qquad \text{POIS} \quad \gamma = 10$$

ESSE SISTEMA NÃO É MUITO FÁCIL DE RESOLVER "NA MÃO", ENTÃO EU FIZ O RESTO DA QUESTÃO (RESOLUÇÃO DO SISTEMA + AVALIAÇÃO DO NÍVEL DE PRECISÃO DA INTERPOLAÇÃO AO CALCULAR $\sqrt{115}$) USANDO JULIA. ESTÁ NA PRÓXIMA PÁGINA :)

# Questão 3 (continuação)

In [2]:
```
A = [21^2 21
     44^2 44]
b = [1, 2]
c = A \ b
```

Out[2]:
```
2-element Vector{Float64}:
 -9.41087897609637e-5
  0.049595332204027856
```

In [4]:
```
p(x) = c[1]*(x - 100)^2 + c[2]*(x - 100) + 10
```

Out[4]:
```
p (generic function with 1 method)
```

In [5]:
```
err = abs(p(115) - sqrt(115))/sqrt(115)
print("Erro relativo: ", err)
```

```
Erro relativo: 9.789336625861462e-5
```

(5) a) Como 2 pontos definem uma reta, nosso polinômio $p$ terá grau 1. O sistema que temos que resolver para achar a equação de $p$ é:

$$\begin{cases} p(\frac{-2}{3}) = f(\frac{-2}{3}) \\ p(\frac{2}{3}) = f(\frac{2}{3}) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \frac{-2}{3}a + b = f(\frac{-2}{3}) \\ \frac{2}{3}a + b = f(\frac{2}{3}) \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} a = \dfrac{3\left(f(\frac{2}{3}) - f(\frac{-2}{3})\right)}{4} \\ \\ b = \dfrac{f(\frac{-2}{3}) + f(\frac{2}{3})}{2} \end{cases}$$

$$\Rightarrow p(x) = \frac{3}{4}\left(f(\tfrac{2}{3}) - f(\tfrac{-2}{3})\right)x + \frac{1}{2}\left(f(\tfrac{-2}{3}) + f(\tfrac{2}{3})\right)$$

b) $$\int_{-1}^{1} f(x)\,dx \approx \int_{-1}^{1} p(x)\,dx$$

$$= \int_{-1}^{1}\Big[\underbrace{\tfrac{3}{4}\left(f(\tfrac{2}{3}) - f(\tfrac{-2}{3})\right)}_{\text{NÚMERO REAL}} x + \underbrace{\tfrac{1}{2}\left(f(\tfrac{-2}{3}) + f(\tfrac{2}{3})\right)}_{\text{NÚMERO REAL}}\Big]dx$$

$$= \tfrac{3}{4}\left(f(\tfrac{2}{3}) - f(\tfrac{-2}{3})\right)\int_{-1}^{1} x\,dx + \tfrac{1}{2}\left(f(\tfrac{-2}{3}) + f(\tfrac{2}{3})\right)\int_{-1}^{1} dx$$

$$= \tfrac{3}{4}\left(f(\tfrac{2}{3}) - f(\tfrac{-2}{3})\right)\underbrace{\cancel{\tfrac{x^2}{2}\Big|_{-1}^{1}}}_{0} + \cancel{\tfrac{1}{2}}\left(f(\tfrac{-2}{3}) + f(\tfrac{2}{3})\right)\underbrace{\cancel{x\Big|_{-1}^{1}}}_{\cancel{2}}$$

$$= f(\tfrac{-2}{3}) + f(\tfrac{2}{3})$$

$$\Rightarrow \boxed{\int_{-1}^{1} f(x)\,dx \approx f(\tfrac{-2}{3}) + f(\tfrac{2}{3})}$$

c) Como o logaritmo é difícil de computar "na mão", usei Julia para avaliar a fórmula do item b:

log((2/3) + 2) + log((-2/3) + 2)

OUTPUT: 1.268511...

Agora vamos à integral!

$$\int_{-1}^{1} \log(x+2)\,dx = \int_{1}^{3} \log(u)\,du = u\ln(u) - u\Big|_{1}^{3} = 1.2958$$

$u(x) = x+2 \Rightarrow du = dx$ Erro relativo $= 0.02105\ldots$

$u(1) = 3$, $u(-1) = 1$ (calculado em Julia) $\cong 2,1\%$