Lista 4 - MS211

Pedro Sader Azevedo, RA: 243245

---

① Prova por contradição:

Suponha, para fins de contradição, que existe uma matriz $C = AB$ tal que $|C| = 0$ e $|A| \neq 0$, $|B| \neq 0$.

Como o determinante do produto é o produto dos determinantes, temos:

$$C = AB \Rightarrow |C| = |A||B| \Rightarrow 0 = |A||B|$$

Um produto é nulo se e somente se um dos fatores é nulo, ou seja, $|A| = 0$ ou $|B| = 0$. No entanto isso contradiz nossa suposição que $|A| \neq 0$ e $|B| \neq 0$, então a afirmação está provada.

■

② Para pensar no número de FLOPS necessárias para calcular o produto de $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ por $B \in \mathbb{R}^{n \times p}$, facilita muito fazer um exemplo

$$A = \begin{bmatrix} a & b & c & d & e \\ f & g & h & i & j \\ k & l & \alpha & \beta & \gamma \end{bmatrix}, \quad m = 3 \quad n = 5$$

$$B = \begin{bmatrix} \theta & u \\ q & v \\ r & w \\ s & x \\ t & y \end{bmatrix}, \quad n = 5 \quad p = 2$$

Como A é 3×5 e B é 5×2, sabemos que AB será 3×2. Assim:

$$\Rightarrow AB = \begin{bmatrix} a & b & c & d & e \\ f & g & h & i & j \\ k & l & \alpha & \beta & \gamma \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \theta & u \\ q & v \\ r & w \\ s & x \\ t & y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a\cdot\theta + b\cdot q + cr + d\cdot s + e\cdot t & \cdots \\ \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots \end{bmatrix}$$

Quando olhamos $AB_{1,1}$ fica claro que temos uma multiplicação entre os elementos da primeira linha de A e da primeira coluna de B. Como as duas tem n elementos, são n produtos.

Depois das multiplicações temos uma soma, exceto pelo último elemento. Assim, temos $n-1$ somas. Portanto:

$$\text{FLOPS por elemento de } AB = n + (n-1) = 2n - 1$$

Quando n é muito grande, esse "-1" se torna irrelevante então

$$\text{FLOPS por elemento de } AB \approx 2n$$

Sabemos, por propriedades do produto de matrizes, que AB tem o número de linhas de A e o número de colunas de B então $AB \in \mathbb{R}^{m \times p}$. Isso significa que AB tem $m \cdot p$ elementos então o total de FLOPS para calculá-la é $\boxed{2n \cdot m \cdot p}$

Caso $A, B \in \mathbb{R}^{n \times n}$ teríamos $m = p = n$ então o número de FLOPS seria $\boxed{2n^3}$

(3) Vamos escalonar a matriz dos coeficientes do sistema A, representando as operações elementares como matrizes (vai ajudar na próxima questão):

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ -3 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \overbrace{\begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 & 3 \\ -2 & -2 & 1 & 1 \\ 6 & 5 & 2 & 2 \\ -4 & -3 & 6 & 5 \end{bmatrix}}^{A} = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & -1 & 2 & 4 \\ 0 & 2 & -1 & -7 \\ 0 & -1 & 8 & 11 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & -1 & 2 & 4 \\ 0 & 2 & -1 & -7 \\ 0 & -1 & 8 & 11 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & -1 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 6 & 7 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & -1 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 6 & 7 \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & -1 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 5 \end{bmatrix}}_{U}$$

Agora podemos usar substituição regressiva para resolver o sistema para diferentes vetores **b** de termos independentes.

$$\mathbf{b} = \begin{bmatrix} -2 \\ -3 \\ 5 \\ -9 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{x} = \begin{bmatrix} i \\ j \\ k \\ l \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{cases} 2i + j + k + 3l = -2 \\ -j + 2k + 4l = -3 \\ 3k + l = 5 \\ 5l = -9 \end{cases}$$

$$\Rightarrow l = -9/5, \quad k = 34/15, \quad j = 1/3, \quad i = 4/5$$

$$\mathbf{b} = \begin{bmatrix} 0 \\ -4 \\ 0 \\ -15 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{x} = \begin{bmatrix} i \\ j \\ k \\ l \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{cases} 2i + j + k + 3l = 0 \\ -j + 2k + 4l = -4 \\ 3k + l = 0 \\ 5l = -15 \end{cases}$$

$$\Rightarrow l = -3, \quad k = 1, \quad j = -6, \quad i = 14$$

4) Da questão anterior temos:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ -3 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} A = U$$

$$\Rightarrow A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ -3 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 1 \end{bmatrix}^{-1} U$$

INVERTER MATRIZES DE OPERAÇÕES ELEMENTARES DE COMBINAÇÃO LINEAR É BEM SIMPLES, POIS BASTA INVERTER O SINAL DOS ELEMENTOS FORA DA DIAGONAL PRINCIPAL (AFINAL, O CONTRÁRIO DE "SOMAR DUAS VEZES A LINHA 3" É "SUBTRAIR DUAS VEZES A LINHA 3"). ASSIM, TEMOS:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \end{bmatrix} U$$

O PRODUTO DESSE TIPO DE MATRIZ TAMBÉM É SIMPLES: BASTA COMBINAR DA PRIMEIRA COLUNA DA PRIMEIRA MATRIZ, DA SEGUNDA COLUNA DA SEGUNDA MATRIZ E ASSIM POR DIANTE. PORTANTO

$$A = \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & -2 & 1 & 0 \\ -2 & 1 & 2 & 1 \end{bmatrix}}_{L} \underbrace{\begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & -1 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 5 \end{bmatrix}}_{U}$$

5) MATRIZES TRIANGULARES (TANTO SUPERIORES QUANTO INFERIORES) TEM COMO DETERMINANTE O PRODUTÓRIO DOS ELEMENTOS NA DIAGONAL PRINCIPAL. ASSIM, OS DETERMINANTES DE $L, U \in \mathbb{R}^{n \times n}$ SÃO:

$$|L| = \prod_{k=1}^{n} l_{k,k} \quad , \quad |U| = \prod_{k=1}^{n} u_{k,k}$$

COMO O DETERMINANTE DO PRODUTO É O PRODUTO DOS DETERMINANTES.

$$A = LU \Rightarrow |A| = |L||U| \Rightarrow |A| = \prod_{k=1}^{n} l_{k,k} \prod_{k=1}^{n} u_{k,k}$$

$$\Rightarrow \boxed{|A| = \prod_{k=1}^{n} l_{k,k}\, u_{k,k}}$$

E COMO O DETERMINANTE DA MATRIZ INVERSA É O INVERSO DO DETERMINANTE

$$|A^{-1}| = |A|^{-1} = \boxed{\left(\prod_{k=1}^{n} l_{k,k}\, u_{k,k}\right)^{-1} = |A^{-1}|}$$

Questão 6

In [73]:
```julia
using LinearAlgebra
```

In [68]:
```julia
A = [1.133 5.281; 24.140 -1.210]
b = [6.414, 22.93]
```

Out[68]:
```
2-element Vector{Float64}:
  6.414
 22.93
```

In [69]:
```julia
function subs_reg(A, b)
    n = length(b)
    x = Vector{Float64}(undef, n)
    for i = n:-1:1
        ld = b[i]
        for j = i + 1:n
            ld -= round(A[i, j]*x[j], digits = 3)
        end
        x[i] = round(ld / A[i, i], digits = 3)
    end
    x .= round.(x, digits = 3)
    return x
end


function subs_prog(A, b)
    n = length(b)
    x = Vector{Float64}(undef, n)
    x[1] = b[1]/A[1, 1]
    for i = 2:n
        x[i] = (b[i] - dot(A[i, 1:i], x[1:i]))/A[i, i]
    end
    x .= round.(x, digits = 3)
    return x
end
```

Out[69]:
```
subs_prog (generic function with 1 method)
```

In [72]:
```julia
# Fatoracao LU de uma matriz A sem pivoteamento
function preLU(A)
```

```
    n, _ = size(A)
    L = one(A)
    U = copy(A)
    for i = 1:n - 1
        for j = i + 1:n
            coef = round(U[j, i] / U[i, i], digits = 3)
            L[j, i] = coef
            U[j, i] = 0.0
            U[j, i + 1:end] .-= coef .* U[i, i + 1:end]
        end
    end
    L .= round.(L, digits = 3)
    U .= round.(U, digits = 3)
    return L, U
end


preL, preU = preLU(A)
prey = subs_prog(preL, b)
prex = subs_reg(preU, prey)
println("Solucao         = ", prex)
println("Verificacao, Ax = ", A*prex)
println("lado direito    = ", b)
```

```
Solucao         = [0.48, 4.239]
Verificacao, Ax = [22.929999, 6.45801]
lado direito    = [22.93, 6.414]
```

In [71]:

```
# Fatoracao LU de uma matriz A com pivoteamento parcial
function PLU(A)
    n, _ = size(A)
    P = collect(1:n)
    L = one(A)
    U = copy(A)
    for i = 1:n - 1
        # Busca o maior pivot em valor absoluto
        maxind = argmax(abs.(U[i:end, i])) + i - 1
        # Troca as linhas de lugar e guarda a informação.
        U[i, i:end], U[maxind, i:end] = U[maxind, i:end], U[i, i:end]
        L[i, 1:i-1], L[maxind, 1:i-1] = L[maxind, 1:i-1], L[i, 1:i-1]
        P[i], P[maxind] = P[maxind], P[i]
```

```julia
        # Continua com a fatoração LU.
        for j = i + 1:n
            coef = round(U[j, i] / U[i, i], digits = 3)
            L[j, i] = coef
            U[j, i] = 0.0
            U[j, i + 1:end] .-= coef .* U[i, i + 1:end]
        end
    end
    P .= round.(P, digits = 3)
    L .= round.(L, digits = 3)
    U .= round.(U, digits = 3)
    return P, L, U
end


P, L, U = PLU(A)
b = b[P]
y = subs_prog(L, b)
x = subs_reg(U, y)
println("Solucao         = ", x)
println("Verificacao, Ax = ", A*x)
println("lado direito    = ", b)
```

```
Solucao         = [1.0, 1.0]
Verificacao, Ax = [6.414, 22.93]
lado direito    = [22.93, 6.414]
```

Como podemos ver, a solução do sistema sem pivoteamento foi mais distante da resposta exata que a solução com pivoteamento. Isso aconteceu, pois provavelmente houve erro de cancelamento no primeiro caso, mas não no segundo.

(7) A MATRIZ DE PIVOTEAMENTO ARMAZENA AS TROCAS DE POSIÇÃO DE LINHAS, ENTÃO OS TERMOS INDEPENDENTES **b'** DO SISTEMA PIVOTEADO SERÃO:

$$\mathbf{b}' = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -5 \\ 5 \\ -7 \\ -4{,}5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 \\ -7 \\ -5 \\ -4{,}5 \end{bmatrix}$$

ENTÃO O SISTEMA QUE DEVEMOS RESOLVER É:

$$U\mathbf{x} = \mathbf{b}' \Rightarrow \begin{cases} 5i - 2j + 2k + l = 5 \\ 2j + k - 5l = -7 \\ k + 6l = -5 \\ -3l = 4{,}5 \end{cases}$$

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} i \\ j \\ k \\ l \end{bmatrix}$$

USANDO SUBSTITUIÇÃO REGRESSIVA, TEMOS: $l = -1{,}5$, $k = 4$, $j = -9{,}25$, $i = 4$