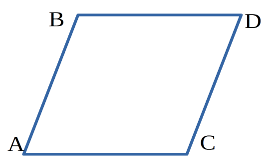
7 Vetores, Produto escalar e Vetorial

1. Considere o desenho



Onde $A = (0, 1, -1),\ B = (0, 0, 1),\ D = (2, -1, 1)$. Determine

a) o plano π que contém $A,\ B,\ D$,

b) o ponto C, e verifique que $C \in \pi$,

c) a área do triângulo $\widehat{ABC}$ utilizando produto vetorial,

d) a área do triangulo $\widehat{ABC}$ utilizando a fórmula $A = \frac{\text{base}\cdot\text{altura}}{2}$ onde a base é dada pelo segmento $\overline{AC}$.

Resposta:

a) A equação do plano π é
$$x + 2y + z = 1.$$

b) o ponto $C = (2, 0, -1)$

c) a área do triângulo $\widehat{ABC}$ utilizando produto vetorial é $\sqrt{6}$,

d) a área do triangulo $\widehat{ABC}$ utilizando a fórmula $A = \frac{\text{base}\cdot\text{altura}}{2}$ onde a base é dada pelo segmento $\overline{AC}$ é $\sqrt{6}$.

2. Verificar se as afirmações abaixo são verdadeiras ou falsas.

- Os pontos
$$A = (0, 1, 1),\ \ B = (1, 1, 1),\ \ C = (3, -3, 1)\ \text{ e }\ D = (-5, 2, 4)\ \text{ de } \mathbb{R}^3$$
são coplanares. **Resposta:** (FALSO)

- Sejam $\vec{u}, \vec{v}$ e $\vec{w}$ três vetores no espaço tais que $\vec{u} + \vec{v} + \vec{w} = \vec{0}$, então
$$\vec{u} \times \vec{v} = \vec{v} \times \vec{w} = \vec{w} \times \vec{u}.$$
Resposta: (VERDADEIRO).

- Os vetores $\vec{u} = (1, -2, 1)$, $\vec{v} = (2, 1, 3)$ e $\vec{w} = (3, 1, 4)$ são linearmente dependentes. **Resposta:** (FALSO)

- Se $\vec{u}$ e $\vec{v}$ são dois vetores no espaço então
$$||\vec{u}||^2 \cdot ||\vec{v}||^2 = |\vec{u} \cdot \vec{v}|^2 + ||\vec{u} \times \vec{v}||^2$$
Resposta: (VERDADEIRO)

- Para quaisquer dois vetores $\vec{u}$ e $\vec{v}$ vale $||\vec{u}+\vec{v}|| \geq ||\vec{u}-\vec{w}||$. **Resposta:** (FALSO)
- Para quisquer vectores $\vec{u}, \vec{v}$ e $\vec{w}$ de $\mathbb{R}^3$ vale

$$\vec{u} \times (\vec{v}+\vec{w}) = (\vec{u} \times \vec{v}) - (\vec{w} \times \vec{u}).$$

  Resposta: (VERDADEIRO)
- Para quaisquer dois vetores $\vec{v},\ \vec{w}$ vale $||\vec{v}||^2 + ||\vec{w}||^2 - ||\vec{v}-\vec{w}||^2 = 2 < \vec{v}, \vec{w} >$. **Resposta:** (VERDADEIRO)
- Para quaisquer três vetores $\vec{u},\ \vec{v},\ \vec{w}$ em $\mathbb{R}^3$ vale

$$\vec{u} \times (\vec{v} \times \vec{w}) = (\vec{u} \times \vec{v}) \times \vec{w}.$$

  Resposta: (FALSO)
- Para quaisquer três vetores $\vec{u},\ \vec{v},\ \vec{w}$ em $\mathbb{R}^3$ tais que $\vec{u} \times \vec{v} = \vec{u} \times \vec{w}$ vale $\vec{u} \times (\vec{v}-\vec{w}) = \vec{0}$. **Resposta:** (VERDADEIRO)

3. Determine a extremidade ou a origem do segmento orientado nos seguintes casos:

   a) Representa o vetor $v = (1, -2, 1)$ e sua origem é o ponto $P = (1, 0, 1)$.
   b) Representa o vetor $v = (-1, 0, 1)$ e sua origem é o ponto médio entre os pontos $P_1 = (1, 1, 3)$ e $P_2 = (-1, 1, 1)$.
   c) Representa o vetor $v = (1, 1, 1)$ e sua extremidade é o ponto $P = (1, 1, 1)$.

   Resposta:

   a) $Q = (2, -2, 2)$.
   b) $Q = (-1, 1, 3)$.
   c) $Q = (0, 0, 0)$.

4. Verifique se os pontos dados abaixo são colineares:

   a) $A = (1, 0, 1)$, $B = (2, 2, 0)$ e $C = (0, -2, 2)$;
   b) $A = (0, 1, -1)$, $B = (1, 2, 0)$ e $C = (0, 2, 1)$;
   c) $A = (3, 1, 4)$, $B = (2, 7, 1)$ e $C = (0, 1, 5)$.

   Resposta:

   a) São colineares.
   b) Não são colineares.
   c) Não são colineares.

5. Dados os pontos $A = (1, 0, 1)$, $B = (-1, 1, 1)$ e $C = (0, 1, 2)$.

   a) Determine o ponto D tal que A, B, C e D sejam os vértices consecutivos de um paralelogramo
   b) Determine o ponto médio entre A e C e o ponto médio entre B e D.

Resposta:

a) $D = (2, 0, 2)$

b) O ponto médio entre A e C é $(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{3}{2})$. O ponto médio entre B e D é $(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{3}{2})$

6. Demonstre que as diagonais de um paralelogramo se cortam ao meio (Sugestão: Sejam M e N os pontos médios das duas diagonais. Mostre $\overline{MN} = \vec{0}$.)

7. Demonstre que o segmento que une os pontos médios dos lados não paralelos de um trapézio é paralelo às bases e seu comprimento é a média aritmética dos comprimentos das bases.

8. Sejam $\overrightarrow{OA}$ e $\overrightarrow{OB}$ dois vetores não colineares no espaço. Qual o conjunto dos pontos P tais que $\overrightarrow{OP} = \lambda\overrightarrow{OA} + (1-\lambda)\overrightarrow{OB}$?

   Resposta: A reta que passa por B e A.

9. a) Mostre que as medianas de um triângulo interseptam-se num ponto. Encontre a razão em que esse ponto divide cada mediana.

   b) Tente generalizar o item (a) para tetraedros.

10. A área do triângulo ABC é $\sqrt{6}$. Sabendo-se que $A = (2, 1, 0)$, $B = (-1, 2, 1)$ e que o vértice C está no eixo y, encontre as coordenadas de C.

    Resposta:

$$C = (0, 3, 0) \text{ ou } C = \left(0, \frac{1}{5}, 0\right)$$

11. a) Decompor o vetor $\vec{w} = (1, 3, 2)$ como soma de dois vetores $\vec{w} = \vec{u} + \vec{v}$, onde $\vec{u}$ é paralelo ao vetor $(0, 1, 3)$ e v é ortogonal a $(0, 1, 3)$.

    b) Encontre um vetor $\vec{u}$ que seja ortogonal aos vetores $(2, 3, -1)$ e $(2, -4, 6)$ tal que $\| \vec{u} \| = 3\sqrt{3}$.

    Resposta:

    a)

$$\vec{u} = \left(0, \frac{9}{10}, \frac{27}{10}\right) \quad \vec{v} = \left(1, \frac{21}{10}, \frac{-7}{10}\right)$$

    b) $\vec{u} = \pm(3, -3, -3)$.

12. a) Demonstre que não existe x tal que os vetores $\vec{v} = (x, 2, 3)$ e $\vec{u} = (x, -2, 3)$ sejam perpendiculares.

    b) Encontre o ângulo entre os vetores $\vec{u} = (2, 1, 0)$ e $\vec{v} = (0, 1, -1)$ e entre os vetores $\vec{w} = (1, 1, 1)$ e $\vec{z} = (0, -2, -2)$.

13. a) Dado um triângulo isósceles, mostre que a mediana relativa à base é a mediatriz (i.é., é perpendicular à base).

    b) Mostre que: Se um triângulo tem duas medianas iguais então ele é isósceles.

14. Sejam $\vec{u}$ e $\vec{v}$ dois vetores de comprimentos iguais, mostre que para quaisquer números a e b, os vetores $a\vec{u} + b\vec{v}$ e $a\vec{v} + b\vec{u}$ têm o mesmo comprimento. O que significa isso?

15. Determine, se existir, os valores de x para que o vetor $\vec{v} = x\vec{i} + 6\vec{k}$ seja paralelo ao produto vetorial de $\vec{w} = \vec{i} + x\vec{j} + 2\vec{k}$ por $\vec{u} = 2\vec{i} + \vec{j} + 2\vec{k}$

    Resposta: Não serão paralelos $\forall\ x \in \mathbb{R}$.

16. Determine x para que os pontos $A = (x, 1, 2)$, $B = (2, -2, -3)$, $C = (5, -1, 1)$ e $D = (3, -2, -2)$ sejam coplanares.

    Resposta:
    $$x \equiv 4$$

17. Encontre o volume do paralelepípedo determinado pelos vetores $\vec{u}$, $\vec{v}$ e $\vec{w}$ nos seguintes casos:

    a) Dados os pontos $A = (1, 3, 4)$, $B = (3, 5, 3)$, $C = (2, 1, 6)$ e $D = (2, 2, 5)$ tome $\vec{u} = \overrightarrow{AB}$, $\vec{v} = \overrightarrow{AC}$ e $\vec{w} = \overrightarrow{AD} = (1, 3, 4)$.

    b) $\vec{u} = \vec{i} + 3\vec{j} + 2\vec{k}$, $\vec{v} = 2\vec{i} + \vec{j} - \vec{k}$ e $\vec{w} = \vec{i} - 2\vec{j} + \vec{k}$.

    Resposta:

    a) $vol = 1$.

    b) $vol = 20$.

18. Sejam $\vec{u}$ e $\vec{v}$ vetores no espaço. Mostre que

    a) $(\vec{u} + \vec{v}) \times (\vec{u} - \vec{v}) = 2\vec{v} \times \vec{u}$

    b) Se $\vec{u} \times \vec{v}$ é não nulo e $\vec{w}$ é um vetor qualquer no espaço então existem números reais a, b e c tal que $\vec{w} = a(\vec{u} \times \vec{v}) + b\vec{u} + c\vec{v}$.

    c) Se $\vec{u} \times \vec{v}$ é não nulo e $\vec{u}$ é ortogonal a $\vec{v}$ então $\vec{u} \times (\vec{u} \times \vec{v})$ é paralelo a $\vec{v}$.

19. Sejam $A = (2, 1, 2)$, $B = (1, 0, 0)$ e $C = (1 + \sqrt{3}, \sqrt{3}, -\sqrt{6})$ três pontos no espaço. Calcule os ângulos do triângulo $\widehat{ABC}$, e os comprimentos da mediana e da altura que saem do vértice A.

20. Sejam $\vec{u} = (-1, 1, 1)$ e $\vec{v} = (2, 0, 1)$ dois vetores. Encontre os vetores $\vec{w}$ que são paralelos ao plano determinado por O, $\vec{u}$ e $\vec{v}$, perpendiculares a $\vec{v}$ e $\vec{u} \cdot \vec{w} = 7$.

    Resposta:
    $$\vec{w} = \frac{5}{2} \cdot \vec{u} + \frac{1}{2} \cdot \vec{v}$$

21. O vetor $\vec{w}$ é ortogonal aos vetores $\vec{u} = (2, 3, -1)$ e $\vec{v} = (1, -2, 3)$ e $\vec{w} \cdot (2, -1, 1) = -6$. Encontre $\vec{w}$.

    Resposta: $\vec{w} = (-3, 3, 3)$.

22. Sejam $u = (1, -1, 3)$ e $v = (3, -5, 6)$. Encontre $proj_{u+v}(2u - v)$.

Resposta:

$$proj_{u+v}(2u - v) = \frac{-22}{133} \cdot (4, 6, 9).$$

23. Responda, justificando, falso ou verdadeiro a cada uma das seguintes afirmações:

   a) Se $\vec{u}$, $\vec{v}$ e $\vec{w}$ são vetores no espaço, com $\vec{v}$ não nulo e $\vec{v} \times \vec{u} = \vec{v} \times \vec{w}$ então $\vec{u} = \vec{w}$.

   b) Se $\vec{u}$, $\vec{v}$ e $\vec{w}$ são vetores no espaço então: $\mid \vec{u} \cdot (\vec{v} \times \vec{w}) \mid = \mid \vec{v} \cdot (\vec{u} \times \vec{w}) \mid = \mid \vec{w} \cdot (\vec{v} \times \vec{u}) \mid = \mid \vec{v} \cdot (\vec{w} \times \vec{u}) \mid$.

   c) Se $\vec{u}$, $\vec{v}$ e $\vec{w}$ são vetores no espaço então $\vec{u} \times (\vec{v} \times \vec{w}) = (\vec{u} \times \vec{v}) \times \vec{w}$.

   d) Se $\vec{u}$, $\vec{v}$ e $\vec{w}$ são vetores no espaço, $\vec{u}$ é não nulo e $\vec{u} \times \vec{v} = \vec{u} \times \vec{w} = \vec{0}$ então $\vec{v} \times \vec{w} = \vec{0}$.

Resposta:

   a) **Falso**

   b) **Verdadeiro**

   c) **Falso**

   d) **Verdadeiro**