A Representação Simbólica da GEOMETRIA EUCLIDEANA: *Representação Numérica (Descartes) e Vetorial (Grassmann)*

Wilson Castro Ferreira Jr-IMECC-Unicamp-2015

Introdução:

> "*Magia é a capacidade de entender e controlar o Universo por intermédio de símbolos*".
> Giordano Bruno(1548-1600)

A Geometria "Ecológica" consiste nos princípios básicos que regem a nossa percepção do ambiente em que vivemos e, portanto, é matéria que diz respeito essencialmente à capacidade cognitiva humana. (Os animais também desenvolvem suas próprias Geometrias Ecológicas, de acordo com as teorias de J. von Uexkull e J.J.Gibson, exemplificada contemporaneamente pelos notáveis trabalhos de Karl von Frisch com abelhas e Rudiger Wehner com formigas. O pequeno famoso livro de Edwin Abbott, "Flatland", de1880, por sua vez, é uma criativa e interessante paródia que expõe a subjetividade de nossa percepção espacial na construção de Geometrias. As Geometrias ditas não-Euclideanas que surgiram no século XIX contrariavam alguns principios básicos da Geometria Ecológica-razão porque encontraram tanta resistencia inicial- e culminaram com a Teoria da Relatividade e determinando um divorcio irreconciliável entre a Geometria Ecológica e a Geometria Física. A arte da pintura e da escultura que nasceram da busca de uma reprodução fiel da percepção espacial humana em algum ponto também transpuseram este objetivo imediato e partiram para a busca de significados que estavam além da percepção natural do espaço ecológico-ambiental. E.Gombrich, J.Gray ..... . É interessante ressaltar que a Geometria Ecológica de animais aquáticos, que vivem em um meio com difração acentuada e trajetorias luminosas curvas, seria melhor descrita pela Geometria não-Euclideana hiperbólica. As espécies de peixes que utilizassem a Geometria Euclideana para descrever seu ambiente estariam extintas rapidamente. v. Gabor Horvath).

A Geometria Euclideana é uma estrutura lógico-matemática que tem por fim sintetizar axiomaticamente toda a informação que recolhemos cognitivamente da Geometria Ecológica. Por esta razão o termo Geometria Euclideana tornou-se equivalente ao termo Geometria Ecológica.

A Geometria Analitica, por outro lado, em todas as suas expressões, tem por objetivo construir uma correspondencia (ou, "ponte") com trânsito de duas mãos entre a percepção espacial humana baseada na Geometria Euclideana/Ecológica e uma Estrutura Matemática simbólica que responde pelo adjetivo "*Analitica*" de seu título. Uma das maneiras mais bem sucedidas de representar a Geometria Euclideana foi inventada por René Descartes no século XVIII e consiste no "mapeamento" dos pontos do Espaço Ecológico por intermédio de conjuntos numéricos ($\mathbb{R}^3$) com a utilização da estratégia dos eixos ortogonais. A correspondencia entre operações algébricas neste conjunto ($\mathbb{R}^3$) e ações concretas no Espaço Ecológico completa os objetivos principais desta Teoria. A posterior extensão natural da teoria *matemática* resultante para estruturas em $\mathbb{R}^n$ com

$n > 3$ permitiu, por outro lado, a "Geometrização" das teorias algébricas que tratam especificamente de equações lineares de várias variáveis desenvolvida por Euler, Gauss e outros.

Em pleno século XIX (portanto 200 anos depois de Descartes) uma nova representação simbólica para a Geometria Euclideana foi iniciada pelo matemático alemão H.Grassmann e, posteriormente desenvolvida e axiomatizada pelos matemáticos italianos R.Burali-Forti e Giuseppe Peano no início do século XX, denominada por eles de "*Ommografia*". Esta estrutura matemática que poderia ser naturalmente designada *Álgebra Vetorial*, por motivos históricos é denominada hoje *Álgebra Linear*.(J.Gray, M.Kline, J.-L. Dorier).

O termo "Geometria Analítica" designa com mais frequencia a representação matemática de Descartes para a Geometria Euclideana/Ecológica, mas também inclui a representação vetorial de Grassmann-Peano.

Em dimensão finita, a Estrutura Matemática Vetorial (Álgebra Linear) é totalmente equivalente (isomorfa) à estrutura Cartesiana que utiliza a linguagem de matrizes. Entretanto, no inicio do século XX, matemáticos como Vito Volterra , Maurice Fréchét e David Hilbert perceberam que as ideias básicas destas teorias clássicas poderiam ser utilizadas com grande vantagem em Análise de funções o que, todavia, exigiria o tratamento de "espaços de dimensão infinita". Esta generalização foi de fato estabelecida pelo matemático polonês Stefan Banach em seu histórico (e pedagógico) texto "*Théorie des Opérations Linéaires*", Varsóvia 1932, que fundamentou a área denominada *Análise Funcional*, tornando-se hoje uma das mais importantes da Matemática. A Análise Funcional que resultou de um longo e tortuoso caminho que teve seu início na percepção ecológica do ambiente humano, surpreendentemente (ou não) mostrou ser a linguagem adequada para uma descrição do Universo *microscópico* tal como nos apresenta a Teoria Quântica. Por outro lado (ou, no outro extremo da escala) as Geometrias não-Euclideanas se constituiriam na linguagem matemática apropriada para a representação do Espaço cosmológico tal como nos apresenta a Teoria da Relatividade. Entre estas conexões extremas a Álgebra Linear em todas as suas expressões se constitui hoje em um núcleo matemático em que está apoiada uma rede de áreas científicas dentro e exterior à Matemática.

Portanto, é ilustrativo o seguinte esquema de continencia (ou de influencia) entre as diferentes Teorias Matemáticas

Geometria Ecológica $\Rightarrow$ **Geometria Euclideana** $\Rightarrow$ **(Álgebra Linear/Vetorial** $\Leftrightarrow$ **Teoria de Matrizes/Descartes)**$\Rightarrow$**Análise Funcional**

Analogamente, Geometria Física(Relatividade)$\Leftrightarrow$ Geometrias Não Euclideanas$\Leftrightarrow$Geometrias Ecológicas.

Este desenvolvimento demonstra o carater central da Álgebra Linear e de sua representação numérica em dimensão finita, a Teoria de Matrizes.

Em termos mais contemporâneos e tecnológicos pode-se dizer que a Geometria Analitica estabelece uma *bancada de símbolos* a partir da qual podemos manipular virtualmente os objetos Geometricos, e onde cada operação algébrica corresponde a uma ação concreta no Espaço Ecológico tal como o percebemos.

As vantagens desta estratégia são várias:

1) O procedimento simbólico substitui construções "concretas" (retas, planos, poligonos, poliedros e etc.) e evita todos os problemas práticos que decorrem delas, desde acidentes em sua execução, à sua inerente imprecisão prática incluindo também a poluição do ambiente e o desperdício de energia. Além disso, se alguma "construção" virtual se mostrar incorreta ou inútil, simplesmente amassamos o papel em que ela é simbolicamente registrada e a descartamos para o lixo com pouquíssima perda material.

Experiências matemáticas, ao contrario das biológicas, químicas, físicas, e de engenharia, não causam riscos à integridade de ninguém nem ao ambiente, e podem ser executadas inúmeras vezes e a um custo relativamente baixo! Os físicos e engenheiros já sabiam disso há muito tempo e, hoje em dia com o auxilio dos computadores, os biólogos, economistas e até sociológos estão utilizando cada vez mais este expediente computacional.

2)A *bancada* matemática (Analitica) da Geometria Analitica tem um papel de "*piloto automático*" no sentido de que são realizadas construções geométricas difíceis, e na maioria das vezes impossíveis, de serem visualizadas no espaço ambiental. A percepção espacial humana (e de mamíferos em geral) é relativamente boa quanto ao plano (devido à planitude da retina!)mas é especialmente dificil no espaço tridimensional. A *visão (isto é, a cognição visual)* tridimensional depende de forma crucial da interpretação e é realizada em grande parte internamente por um setor "nobre" (e recente em termos evolutivos) do cérebro, o cortex visual.(Hubel-Wiesel).As ilusões óticas decorrem em grande parte da não bijetividade entre um objeto espacial e sua representação plana na retina o que leva, naturalmente, a uma ambiguidade de interpretação da percepção visual. Trabalhar mentalmente estruturas espaciais é uma atividade imprecisa e restritiva, muito embora nosso cérebro tenha desenvolvido estratégias visuais extraordinarias para este propósito.(Gaetano Kanisza).

"*E programas computacionais como o CAD*?". Estes programas somente existem porque a manipulação geométrica foi primeiro representada em uma "bancada matemática" que é então inserida no computador e posteriormente reinterpretada na sua tela de forma "amigavel" à cognição visula humana. A representação espacial na tela plana somente tem valor se puder ser visualizada em vários planos, isto é, sob diversas perspectivas, um fato descoberto pelos pintores da Renascença. (E.Gombrich).

3)Os conceitos e construções geométricas que desenvolvemos para o familar espaço plano, e o não tão simples mas ainda familiar espaço tridimensional, podem ser generalizados por intermédio das estruturas simbólicas para espaços abstratos, o que aumenta consideravelmente o escopo representativo destas estruturas matemáticas. Neste caso, a vantagem é da Matematica pois podemos utilizar a nossa extraordinaria intuição geométrica no plano e no espaço e aproveitar a parte mais "nobre" do cérebro que está dedicada à visão (Hubel&Wiesel) para desenvolver métodos e conceitos matemáticos aplicáveis a contextos abstratos, como, por exemplo os R^n, para $n > 3$ até dimensão infinita, que extrapolam de muito o espaço ambiental.

Na verdade, vários problemas matemáticos analíticos quando transpostos para um contexto geométrico do plano e do espaço, permitem interpretações naturais que de outra forma seriam obscuras. Os gráficos de funções para a exposição das ideias do Cálculo Diferencial e Integral é um exemplo típico deste fato.

4)Uma vez montada uma "bancada matemática" para a Geometria, podemos imediatamente "transcreve-la" para o computador, o que aumenta consideravelmente as possibilidades de manipulação dos simbolos e, portanto, das próprias estruturas geométricas. Este é um aspecto que Descartes no século XVII não podia sequer imaginar quando ele iniciou (com outros) a Geometria Analitica. Hoje, esta possibilidade se constitui em uma de suas principais vantagens e softwares como o *Mathematica* e progrmas como o *CAD* são expressões deste fato..

Poderíamos enumerar outras razões para o estudo da Geometria de forma Analitica, mas estas quatro são mais do que a maioria das ciencias poderia apresentar.

Neste capitulo apresentaremos as conexões mais fundamentais entre os conceitos geometricos e uma estrutura matematica abstrata que, no caso, é constituida pela Álgebra Linear, e mais especificamente, a Teoria de matrizes.

I-A Representação Matemática de Pontos do Espaço e Deslocamento: *A SÍNTESE DE DESCARTES*

Para manipularmos simbolicamente o Espaço segundo a percepção Euclideana a primeira providência indispensável é estabelecer uma correspondência entre os pontos do espaço e os elementos da Estrutura matemática que empregaremos para tal.

As estruturas matemáticas mais importantes são baseadas no conceito de Números e também é com estes que iniciaremos a "*analitização*" da Geometria.

O método mais antigo e bem sucedido, (mas longe de ser o único, como perceberemos rapidamente) para a representação numérica do espaço bi e tri dimensional foi inventado por Descartes no século XVII e faz uso do tradicional sistema de **eixos ortogonais**. Para isto, Descartes escolhe (arbitraria e artificialmente) no plano duas famílias contínuas de retas paralelas, a primeira, digamos "horizontais" que "varrem" todo o plano verticalmente e a segunda de retas **ortogonais** às primeiras, o que significa que serão "verticais", e que "varrem" o plano no sentido horizontal.(A não ortogonalidade entre as retas dos dois sistemas causaria uma complicação analítica desnecessaria na representação numérica do espaço. Entretanto, a única condição indispensável para a implementação da ideia de Descartes é que os dois sistemas de retas não sejam colineares). Todas estas retas são metrizadas com a mesma unidade, ou seja, identificadas com o conjunto dos números reais.

É como se tivessemos um quadriculamento viário de uma cidade, em que as linhas horizontais seriam as ruas e as verticais, as avenidas. Todas as esquinas da cidade serão bem determinadas por um par de informação (R,A) , em que R é o nome da rua e A o da avenida que se interceptam na referida esquina. Este processo se denomina "reticulação do espaço".

Para identificar cada uma das retas é necessário dar "nomes numéricos" a delas, e como cada família é infinita e varia continuamente, uma tabela finita de nomes não é suficiente. Por isto utilizaremos números reais para nomea-las. Primeiro determinamos (arbitrariamente) um par qualquer , (reta horizontal, reta vertical), a serem denominadas "Eixos Ortogonais" e, com isto, o "nome numérico" de cada reta horizontal será a distancia que ela intercepta o eixo vertical (medida positivamente se para cima, negativamente se para baixo do Eixo vertical) e, um procedimento equivalente para as retas verticais que serão denominadas pelas suas interseções com o Eixo horizontal. Assim, inequivocamente, cada ponto do plano fica determinado por um par de numeros reais $P \Leftrightarrow \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$ em que , x_1 é o "nome" da reta horizontal e x_2 o "nome" da reta vertical que se interceptam no referido ponto. Para matematizarmos a nomeação intepretaremos os pares / pontos $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$ como matrizes com duas linhas e uma coluna, ou seja, 2×1. Naturalmente esta identificação é arbitrária e podemos também interpretar o par como uma matriz 1×2 (x_1, x_2), o que faremos frequentemente.

O exemplo acima nos sugere que podemos estabelecer regras de correspondência entre pontos do plano e pares de números utilizando o mesmo procedimento básico, mas com outras duas famílias de curvas coordenadas (não necessariamente retas e nem ortogonais entre si) desde que se interceptem uma e uma unica vez e cada ponto do espaço que desejamos descrever corresponda à uma interseção de duas curvas. O sistema polar, por exemplo, faz uso de semiretas que partem de um ponto (denominadas pelo ângulo com uma semireta fiza "horizontal") e os círculos concêntricos na origem, caracterizados pelos seus raios. A representação polar tem uma ambiguidade de representação com relação à origem a à semireta horizontal, a partir da qual é estabelecido o ângulo das outras no sentido anti-horário. Esta questão será tratada mais adiante.

Uma vez concluida a representação de pontos do plano na forma Cartesiana, fica claro que para representar o espaço, necessitaremos de três informações numéricas que representaremos na forma de matrizes colunas 3×1, $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$, **ou**, com matrizes linha 1×3, (x_1, x_2, x_3).

Com base nestas representações, é possível dar asas à imaginação e tratar formalmente de espaços com dimensão superior, que não são objetos espaciais "concretos" relacionados à nossa percepção ambiental, visual, ou de qualquer outro sentido, e que, desta forma, são associados por similaridade às estruturas matemáticas descritas pelas matrizes $n \times 1$.

Estas estruturas matemáticas gerais serão, por sua vez, utilizadas para representar outros objetos "concretos" de naturezas distintas (matemática, ou não) e a familiaridade com eles derivada da experiencia geométrica que os originaram será de grande utilidade conceitual.

Uma teoria/estrutura matemática tem maior importância e significado quanto mais variadas são as suas interpretações em outros campos do conhecimento, inclusive matemáticos. O extraordinário matemático polonês Stefan Banach(...-1945) (um dos influentes do século XX) afirmava que as analogias são a essência da Matemática, uma afirmação proferida com total conhecimento de causa visto que foi êle mesmo um dos que desenvolveram a Análise Funcional Contemporânea cuja base intuitiva está fortemente apoiada na linguagem e nos conceitos da geometria euclideana do plano e espaço.

Entretanto, estabelecer uma correspondencia, ou um **mapeamento**,(um "dicionário")que bijetivamente identifica os pontos do espaço com uma classe de matrizes serve apenas para estabelecermos uma linguagem matemática na descrição pura e simples do espaço e não é esta a razão suficiente que nos move; seria o mesmo que utilizar o húngaro, ou finlandês ou qualquer outra lingua; nenhuma matemática estaria ainda envolvida. A grande vantagem da linguagem matemática é a disponibilidade das estruturas matemáticas já existentes no conjunto de "palavras" utilizado na correspondencia. Por exemplo, no caso da representação Cartesiana acima, as matrizes 3×1 podem ser entendidas como "imersas" na teoria algébrica de matrizes. É claro que ainda resta saber se esta teoria matematica e suas operações podem ser traduzidas em manipulações geométricas de interesse pela correspondencia instituida. Ou seja, não apenas os pontos devem ser identificados ("traduzidos") em objetos matemáticos, mas, para que se tenha algum ganho é necessário que as operações já definidas na Estrutura matemática também sejam identificadas a "*ações*" no espaço ambiental euclideano.

De fato, verificaremos em seguida que as três operações algébricas da teoria de matrizes, **1)**multiplicação por escalar, **2)**, soma $x+y$ e **3)**o produto matricial xy^t (em que y^t é a matriz transposta de x e,portanto, xy^t é um número) tem interpretações geometricas fundamentais, respectivamente, a homotetia, os deslocamentos seguidos e disposição angular relativa.

Exatamente estas interpretações que fazem com que a teoria de matrizes seja especialmente relevante no estudo da Geometria Euclideana do Plano e do Espaço que trata de pontos, retas, planos e, posteriormente, curvas quádricas.

Além da interpretação geométrica para as matrizes $n \times 1$ $(n = 2, n = 3)$ como representantes de pontos do espaço, é interessante também interpretá-las alternativamente como deslocamentos de translação retilinea de pontos. Esta interpretação sugere uma ideia de movimento e será entendida como um **DESLOCAMENTO** dos pontos do espaço (daí o nome "**vetor**" comumento utilizado para denotá-lo). Assim, uma matriz $\vec{v} = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix}$ será interpretada como um deslocamento no espaço tridimensional que transporta um ponto P representado pela matriz $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$, para o ponto P' representado por $\begin{pmatrix} x_1' \\ x_2' \\ x_3' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 + v_1 \\ x_2 + v_2 \\ x_3 + v_3 \end{pmatrix}$. (A *seta* acima do símbolo literal é frequentemente utilizada em textos de Física para enfatizar a ideia de movimento, mas raramente será empregada aqui).

Portanto, a mesma matriz $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$ pode ser interpretada também como o ponto resultante do deslocamento da origem pelo vetor correspondente. Enfim, as matrizes

$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$ podem ser intepretadas tanto como **deslocamentos** quanto **pontos** do espaço.

Matematicamente, estes objetos serão sempre matrizes 3×1.

II-Interpretação do Produto $xx^t = \sum x_k^2$: *Teorema de Pitágoras*

O Teorema de Pitagoras da Geometria Euclideana nos convence facilmente (faça um esboço geometrico no plano) de que o número real não negativo $\sqrt{xx^t} = \sqrt{\sum x_k^2}$ representa geometricamente o **comprimento** do deslocamento efetuado pelo vetor x, o que denominaremos pela notação $\|x\| = \sqrt{xx^t} = \sqrt{\sum x_k^2}$, um fato que decorre imediatamente da ortogonalidade do sistema de eixos. (A não ortogonalidade deste sistema produziria uma expressão com funções trigonométricas que não auxiliam em nada na sua interpretação geométrica).

Exercício:

Obtenha uma expressão para o comprimento de um vetor no plano em que o sistema de coordenadas é formado por retas que se interceptam em um ângulo θ.

III-Interpretação da Multiplicação por Escalar (número real): *Homotetia de Triângulos*

A multiplicação de uma matriz $v = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix}$ por um número real λ é definida algebricamente por nova matriz denotada por λv e representada por $\lambda v = \begin{pmatrix} \lambda v_1 \\ \lambda v_2 \\ \lambda v_3 \end{pmatrix}$.

Vejamos a interpretação geométrica desta operação quando as matrizes representam deslocamentos na correspondencia Cartesiana.

1)Se $\lambda = 0$ a operação algébrica produz $\lambda v = 0$, isto é, o deslocamento nulo.

2)Se $\lambda = 1$, a operação algébrica produz $1v = v$, isto é, não modifica o vetor.

3)Se $\lambda > 0$ a operação matricial nos leva a: $\lambda v = \begin{pmatrix} \lambda v_1 \\ \lambda v_2 \\ \lambda v_3 \end{pmatrix}$. Um desenho geométrico mostra claramente pela propriedade da **h*omotetia de triangulos*** equivalentes da Geometria Euclideana que a representação λv é um deslocamento na mesma direção e sentido de v mas por um comprimento $\lambda \|v\|$.

4)Se $\lambda = -1$ a operação matricial resulta em $(-1)v = -v = \begin{pmatrix} -v_1 \\ -v_2 \\ -v_3 \end{pmatrix}$ um esboço simples mostra que este deslocamento tem a mesma direção, mesmo comprimento, mas sentido oposto ao deslocamento associado a v, ou seja, "*multiplicação por* -1" significa "*inversão de sentido*".

5)Se $-\lambda < 0$ o novo deslocamento é $(-\lambda)v = \begin{pmatrix} -\lambda v_1 \\ -\lambda v_2 \\ -\lambda v_3 \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} -v_1 \\ -v_2 \\ -v_3 \end{pmatrix}$ e, sendo $\lambda > 0$, utiliza-se as duas interpretações anteriores para concluir que o deslocamento $-\lambda v$ para $\lambda > 0$, representa um deslocamento na mesma direção e sentido oposto de v e de comprimento $\lambda\|v\|$.

Com isto, interpretamos geometricamente todos os casos da operação "multiplicação por escalar" e são todos eles geometricamente significativos.

É importante enfatizar que a correspondencia entre multiplicação algébrica e as operações geométricas descritas decorre fundamentalmente da propriedade de ***Homotetia entre triângulos semelhantes***, um assunto da Geometria Euclideana.

IV-Interpretação da Operação Soma: *Regra do Paralelogramo e Comutatividade da soma*

A soma de duas matrizes $u = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{pmatrix}$ e $v = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix}$ é definida de forma que a resultante desta operação algebrica é : $u + v = \begin{pmatrix} u_1 + v_1 \\ u_2 + v_2 \\ u_3 + v_3 \end{pmatrix}$.

Um esboço geométrico simples no plano, e que pode ser repetido no espaço com um pouco mais de imaginação, mostra que a operação algébrica de soma $u + v$ representa a operação geométrica de ***composição sucessiva de deslocamentos*** , primeiro o indicado por u e no resultado aplica-se o indicado por v. Como a soma matricial é comutativa concluimos que deslocamentos sucessivos na ordem inversa devem resultar no mesmo resultado final. E, de fato, esta constatação no esboço geométrico é o que se denomina vulgarmente como "*Regra do Paralelogramo*" e representa a indiferença na ordem de aplicação sucessiva de duas operações de deslocamento.

Portanto a soma matricial tem uma interpretação geométrica simples e relevante , assim como a multiplicação por escalar e esta é a razão da conveniencia de intepretar a representação matemática de deslocamentos do espaço na Estrutura de matrizes.

Estudantes de Física Elementar devem se lembrar dos conceitos físicos de Velocidade, Aceleração, Força e Campo Eletrico que são também representados por vetores e satisfazem a "Regra do Paralelogramo". A esta altura estes fatos não devem lhes causar nenhuma surpresa pois a velocidade é obtida pela multiplicação de um deslocamento por um escalar $\frac{1}{\Delta t}$. Portanto a aceleração é resultante da multiplicação de deslocamentos pelo escalar $\frac{1}{(\Delta t)^2}$, (ou de velocidades por um escalar $\frac{1}{\Delta t}$) assim como F é definida pela multiplicação da aceleração por escalar (massa) e o Campo Elétrico é a Força exercida em uma unidade de carga elétrica (escalar) e, portanto todos devem satisfazer a regra do Paralelogramo, sem nenhum mistério maior! Estes fatos aumentam a importancia desta interpretação geométrica das matrizes, ou, por outro lado, a representação de deslocamentos por intermédio de matrizes colunas, ou seja, vetores de $\mathbb{R}^3$.

(Embora os *torques* e velociadas de rotação rígida sejam representaveis "linguisticamente" por vetores, as operações algébrica de soma não tem interpretação física nestes casos, o que torna a estrutura matematica de $\mathbb{R}^3$ de soma e multiplicação inadequada para a sua manipulação. Esta dificulade será desvendada mais adiante quando tratarmos do produto vetorial).

Exercício:

Verifique, **experimentalmente** e com base na Geometria Euclideana, que valem as seguintes propriedades operacionais para os deslocamentos:

1-Comutatividade da Soma: $u+v = v+u$, 2-Associatividade da Soma: $(u+v)+w = u+(v+w)$, 3-Elemento neutro; $v+0 = v$, 4-Linearidade da multiplicação por escalar $\lambda(u+v) = \lambda u+\lambda v$, 5) $\lambda(\gamma v) = (\lambda\gamma)v$, 6- $1v = v$

V-Interpretação Geométrica do Produto Escalar $\langle u,v\rangle = uv^t = \sum u_k v_k$

O produto matricial $uv^t = \sum u_k v_k$ será tão importante para a *analitização* da Geometria que utilizaremos uma notação especial que se refere exclusivamente a vetores e o chamaremos de produto interno.

Definição:

Dados dois vetores $u,v \in R^n$ definiremos uma operação algébrica denotada por $\langle u,v\rangle = u \bullet v$ que resulta em um número real chamado **produto interno/escalar** definido da seguinte maneira:

$$\langle u,v\rangle = u\bullet v = uv^t = \sum u_k v_k$$

As propriedades deste "produto" são imediatamente herdadas das propriedades da operação matricial que o representa:

1)Positividade definida: $\langle u,u\rangle = \|u\|^2 \geqq 0$ e a igualdade somente ocorre se $u = 0$.

2)Comutação com Multiplicação por escalar: $\langle \lambda u,v\rangle = \langle u,\lambda v\rangle = \lambda\langle u,v\rangle$

3)Comutatividade: $\langle u,v\rangle = \langle v,u\rangle$

4)Distributividade: $u\bullet(v+w) = u\bullet v+u\bullet w$.

Para abordarmos a interpretação desta operação matricial , consideremos inicialmente dois vetores não nulos u e v no plano **bidimensional** para os quais definimos o ângulo entre eles, denotado por $\widehat{(u,v)} = \alpha$, ou seja, o ângulo plano $0 \leq \alpha \leq \pi$ formado pelos respectivos segmentos orientados de reta representam os dois deslocamentos correspondentes. Utilizando a geometria Euclideana elementar (Teorema de Pitagoras) concluimos que : $\|u-v\|^2 = (\|u\|sen\alpha)^2+(\|v\|-\|u\|\cos\alpha)^2$ e esta igualdade vale tanto para ângulos α agudos ($0 \leq \alpha \leq \frac{\pi}{2}$) para os quais $\cos\alpha > 0$, quanto para obtusos, $\frac{\pi}{2} \leq \alpha \leq \pi$, para os quais $\cos\alpha < 0$. Expandidno as operações obtemos $\|u-v\|^2 = \|u\|^2+\|v\|^2-2\|u\|\|u\|\cos\alpha$ e representando esta igualdade em termos de coordenadas cartesianas, temos:

$$\cos\alpha = \cos\widehat{(u,v)} = \frac{uv^t}{\|u\|\|v\|} = \left\langle \frac{u}{\|u\|}, \frac{v}{\|v\|} \right\rangle = \frac{\sum u_k v_k}{\sqrt{\left(\sum u_k^2\right)\left(\sum v_k^2\right)}}$$

Esta é uma fórmula excepcional e exemplar sob o ponto de vista da Geometria Analitica, pois permite calcular exatamente a *posição relativa* entre dois vetores no **plano** (isto é, o ângulo geométrico entre eles) a partir de operações totalmente analiticas efetuadas na sua representação cartesiana.

Para generalizar este conceito de ângulo plano entre vetores, observamos inicialmente que dois vetores não nulos $u, v \in R^n$ formam um espaço bidimensional que é possivel visualizar como sendo um plano físico. Este fato é geometricamente "confortavel" mas não garante que podemos estender a definição de ângulo com a fórmula acima para espaços de dimensão superior (tridimensional e mais) pois não sabemos (ainda) nem se a expressão $\frac{uv^t}{\|u\|\|v\|} = \left\langle \frac{u}{\|u\|}, \frac{v}{\|v\|} \right\rangle$ tem sempre valor entre -1 e 1.

Para garantir esta definição, mostraremos analiticamente a importante desigualdade CSB para quaisquer pares de $n-plas$ de números reais. Esta desigualdade, sendo um dos resultados mais fundamentais da Matematica, deve ser enfatizada com o titulo de Teorema.

Teorema de CSB (Cauchy-Schwartz-Bunyakovskii):

Se $u = (u_1, \ldots, u_n)$ e $v = (v_1, \ldots, v_n)$ são duas $n-plas$ de números reais, então vale a desigualdade:

$$\left|\sum_{k=1}^{k=n} u_k v_k\right| \leq \left(\sum_{k=1}^{k=n} u_k^2\right)\left(\sum_{k=1}^{k=n} v_k\right)^2$$

e a igualdade somente é válida quando um dos vetores for múltiplo do outro, $u = \lambda v$, $u_k = \lambda v_k$ para todo k.

Demonstração:

Considere a função de variavel real t :

$$p(t) = \|u - tv\|^2 = \langle u - tv, u - tv\rangle = \left(\|v\|^2\right)t^2 - (2\langle u,v\rangle)t + \left(\|u\|^2\right) = at^2 - 2bt + c$$

que, na verdade é um polinomio (trinomio) de segundo grau. Pela sua propria definição (quadrado de uma norma) concluimos que este trinomio é sempre não negativo, ou seja, $p(t) \geqq 0$ para todo $t \in R$. Isto significa que ele não pode ter duas raizes reais distintas, pois neste caso, necessariamente elas seriam $t_\pm = b \pm \sqrt{b^2 - ac}$ e portanto $b^2 - ac > 0$ e $b > 0$ (pois $a, c \geqq 0$) de onde viria que $a, b > 0$. Daí,o valor minimo de p seria dado por $p(\frac{b}{a}) = -\frac{b^2 - ac}{a} < 0$, contrario à hipotese. Portanto nos resta a conclusão de que $b^2 - ac \geqq 0$, que é exatamente a desigualdade CSB. A igualdade, $b^2 - ac = 0$, ocorre quando existe t_0 raiz dupla do trinomio, o que significa $\|u - t_0 v\|^2 = 0$, ou seja, $u = t_0 v$.$\blacksquare$

Com base nesta desigualdade é possivel definir de maneira compativel o conceito geometrico de *angulo* $\widehat{(u,v)}$ *entre dois vetores não nulos* de espaços reais R^n com qualquer dimensão (em particular para o espaço tridimensional "Físico" $n = 3$) na forma:

Definição:

Dados dois vetores *não nulos* $u, v \in R^n$, definiremos o ângulo interno $\alpha = \widehat{(u,v)} \in [0,\pi]$ entre estes dois vetores u e v pela fórmula:

$$\alpha = \widehat{(u,v)} = \arccos\left(\frac{\langle u,v\rangle}{\|u\|\|v\|}\right)$$

que é consistente conforme nos garante a desigualdade CSB.

OBSERVAÇÕES:

1-A definição de ângulo é *consistente* pois a expressão $\frac{\langle u,v\rangle}{\|u\|\|v\|}$ sempre pode ser calculada para vetores não nulos, e, como tem valor no intervalo $[-1,1]$ (Teorema de CSB), então, ela determina de maneira *unívoca* um ângulo no intervalo $[0,\pi]$ por intermédio da função $\arccos$.

2-O conceito de ângulo não tem "sinal de orientação", ou seja, ele é definido "entre" vetores e não *de um vetor para outro*. Em outras palavras, há uma simetria na participação de cada vetor na determinação do ângulo que é decorrencia analitica da comutatividade do produto interno.

3-O comprimento de um vetor (e consequentemente do produto interno entre dois vetores) é expresso analiticamente em termos de suas coordenadas ortogonais. Entretanto, a sua interpretação geométrica **exige** que este valor seja independente deste sistema, fato que ainda não foi constatado! Para constatar isto, verificamos que a matriz mudança de coordenadas entre sistemas de coordenadas ortogonais, $y = Px$ é uma matriz ortogonal no sentido de que $P^tP = PP^t = I$. Assim, conclui-se que $\langle y,y\rangle = \langle Px,Px\rangle = \langle x,P^tPx\rangle = \langle x,x\rangle$, o que mostra esta invariância.

Exercicio:

1-Mostre como obter o produto interno entre dois vetores medindo apenas comprimentos (Identidade do Paralelograno) e vice-versa.(Sugestão: $\|u-v\|^2 = \|u\|^2 + \|v\|^2 - 2\langle u,v\rangle$)

2-Verifique a afirmação acima sobre a matriz de mudança de coordenadas: $P^tP = PP^t = I$ (Sugestão: Mostre que vale $\langle Ax,y\rangle = \langle x,A^ty\rangle$ para qualquer matriz A, $n \times n$ e utilize este fato).

3-Verifique a invariancia da definição cartesiana do comprimento de um vetor com relação ao sistemas de coordenadas ortogonais.

Até o momento, identificamos o conceito de ângulo geométrico entre vetores e a expressão algébrica definida acima (em termos de suas coordenadas ortogonais) apenas para o caso de vetores planos.

É necessário verificar também, que no espaço tridimensional (isto é, até onde alcança a nossa intuição) a definição algébrica de ângulo entre vetores é também consistente com a nossa visão espacial.

Lembremos inicialmente que o conceito de "ângulo" entre vetores do espaço se refere ao ângulo *plano* , ou seja, este conceito geométrico se refere ao ângulo entre dois vetores com respeito ao *plano definido por eles*.

Observemos agora que a ortogonalidade geométrica entre dois vetores do espaço, denotada por $u \perp v$, é facilmente associada ao produto interno nulo em virtude do Teorema de Pitágoras, pois (geometricamente) $u \perp v$ se e somente se $\|u - v\|^2 = \|u\|^2 + \|v\|^2$. Entretanto, como foi verificado,isto somente ocorre quando $\langle u, v \rangle = 0$, o que prova o desejado.

Assim, tomando um sistema de coordenadas ortogonais em que dois vetores da base pertencem ao plano dos dois vetores e o terceiro ortogonal (no sentido geométrico e algebrico) a este mesmo plano, o ângulo entre eles pode ser definido pelas suas (duas)coordenadas no referido plano, que, pelo visto acima, tem o mesmo valor do produto interno em quaisquer coordenadas ortogonais.Assim, de fato, a expressão algébrica de produto interno no espaço tridimensional corresponde, de fato, à sua interpretação geométrica usual.

Esta verificação pode parecer um excesso de cuidado e raramente é indicado em textos do assunto, mas é útil para entender a natureza da "algebrização cartesiana" da geometria euclideana.

VI-Projeção Ortogonal *Escalar* e Projeção Ortogonal *Vetorial*

O conceito geométrico mais importante associado ao produto interno é o de **Projeção Ortogonal** (ou, *sombra* ortogonal) que é facilmente visualizada quando se escreve a definição de ângulo entre vetores de uma outra forma :

$$\langle u, v \rangle = \|u\| \|v\| \cos \alpha = \|u\|(\|v\| \cos \alpha) = \|v\|(\|u\| \cos \alpha)$$

A primeira expressão $\langle u, v \rangle = \|u\|(\|v\| \cos \alpha)$ indica claramente que podemos interpreta-la geometricamente (via Teorema de Pitagoras) como a **Projeção ortogonal** de v sobre u multiplicada pela norma de u, enquanto que a segunda expressão $\langle u, v \rangle = \|v\|(\|u\| \cos \alpha)$ indica o produto da projeção ortogonal de u sobre v multiplicada pela norma de v.

Caso um dos vetores participantes, digamos N seja unitario, $\|N\| = 1$, então, é possivel interpretar geometricamente o produto interno de qualquer vetor u por N na forma: $\langle u, N \rangle = \langle u, N \rangle = \|u\| \cos \alpha =$"*Projeção ortogonal de v sobre a reta definida por N*".

Vetores unitários são o padrão para a representação específica de uma direção e um sentido. Portanto se v for um vetor não nulo, para representar especificamente a sua **direção** e **sentido** utilizamos o vetor unitário $\frac{1}{\|v\|} v$ que denotamos usualmente na forma $\frac{v}{\|v\|}$. É fácil ver que os vetores unitarios do plano (espaço bidimensional) podem ser todos representados parametricamente na forma trigonometrica, $N(\theta) = (\cos \theta, sen \theta)$ onde $0 \leq \theta \leq 2\pi$ tem uma interpretação geométrica natural.

No espaço tridimensional, os vetores unitários podem ser parametricamente descritos na forma: $N_{\theta\varphi} = (\cos \theta sen \varphi, sen \theta sen \varphi, \cos \varphi)$ onde $\theta \in [0, 2\pi]$ e $\varphi \in [0, \pi]$. Verifique que, de fato, $N_{\theta\varphi}$ é de fato unitário e representa todos os vetores unitários do espaço quando $\theta \in [0, 2\pi]$ e $\varphi \in [0, \pi]$.

Observe que o vetor $(\cos \theta sen \varphi, sen \theta sen \varphi, 0) = sen \varphi(\cos \theta, sen \theta, 0)$ é a projeção vetorial ortogonal do unitário $N_{\theta\varphi}$ no plano "horizontal" , cujo modulo é $sen \varphi$.

Exercícios:

Verifique as afirmações acima

Se N for um vetor unitário então o produto interno de N com qualquer outro vetor$u$, $\langle N,u\rangle = \|u\| \cos\widehat{N,u}$ é a projeção ortogonal de u em N, observando-se que o sinal algebrico desta projeção é positivo se o ângulo $\widehat{N,u}$ entre os dois vetores for agudo e, negativa se o ângulo for obtuso. A projeção ortogonal escalar de u em N pode ser interpretada geometricamente como o segmento "sombra" da projeção de u sobre a reta suporte de N quando a iluminação for perpendicular a N.

A Projeção Vetorial de u em N é definida na forma $\langle u,N\rangle N$ que representa um vetor com o módulo igual à projeção ortogonal de u em N , direção de N e sentido igual caso $\widehat{N,u}$ seja agudo e sentido oposto se $\widehat{N,u}$ for obtuso. A ideia geometrica desta importante operação é de uma sombra do vetor u projetada por uma iluminação ortogonal à reta de suporte de N ; observe que a "ponta" do vetor projeção aponta para o mesmo sentido de N se $\widehat{N,u}$ for agudo e no sentido posto de N se $\widehat{N,u}$ for obtuso. facilmente obtida com esboços no plano, embora a interpretação seja valida em qualquer dimensão.

A projeção ortogonal vetorial pode ser escrita na forma matricial da seguinte maneira: $N(\langle N,u\rangle) = N(N^t u) = (NN^t)u$, onde o primeiro termo é o produto de uma matriz $n \times 1$ (vetor) por uma matrix 1×1 (numero), este ultimo obtido do produto de uma matriz coluna $(n \times 1)$ N por uma matriz coluna $(1 \times n)$ N^t . Utilizando a associatividade do produto matricial, reescrevemos o produto destas tres matrizes na forma do produto da matriz $n \times n$ obtida na forma NN^t pelo vetor (matriz $n \times 1$) u. Portanto a matriz NN^t tem sempre esta interpretação. Ou, dado um vetor qualquer não nulo w (matriz coluna) então a matriz $\frac{1}{\|w\|^2} ww^t$ multiplicada por um vetor qualquer u nos fornece a projeção ortogonal vetorial de u sobre o vetor unitário $\frac{1}{\|w\|} w$.

Exercícios:

Verifique as afirmações acima

VII-ROTAÇÃO DO ESPAÇO EM TORNO DE EIXO FIXO-

O estudo do movimento de rotação de um corpo rígido em torno de um eixo é uma das questões mais fundamentais da Mecânica e pode ser visualizado como o movimento do peão, se mantiver um ponto fixo, um movimento básico de qualquer robô mecânico. Nesta seção analisaremos o caso mais simples em que o eixo está fixado em uma reta do espaço. Leonhard Euler (sec.XVIII) foi o iniciador destes estudos como de muitos outros da Matemática, da Mecânica e da Dinâmica de Populações (Mark Levi). O modelo matemático desta questão tem sido o protótipo para o estudo de diversas questões através dos tempos até os dias de hoje. Nesta seção mostraremos como o produto vetorial no espaço tridimensional é sugerido pela descrição da rotação de um corpo rígido e posteriormente como este modelo pode ser utilizado em outros contextos e para a visualização de conceitos e procedimentos em Espaços de dimensão superior.

O objetivo principal desta seção é descrever o campo vetorial *linear* $\vec{v}(x)$ do ponto $x \in \mathbb{R}^3$, resultante deste movimento, considerando que o corpo rígido efetua um movimento de rotação no espaço em torno de um eixo fixo (uma reta) que passa pela origem, digamos definido pelo vetor unitário $\overrightarrow{\omega_0}$, e que a sua velocidade angular seja dado pelo número não negativo Ω.

Definiremos inicialmente o vetor de rotação $\vec{\omega} = \Omega\,\overrightarrow{\omega_0}$. Assim se o ponto x estiver à distância d do eixo, a velocidade linear escalar deste ponto terá o valor $\|\vec{v}(x)\| = d\,\Omega$. Por outro lado se o vetor posição x fizer um ângulo $0 \leq \theta \leq \pi$ com o eixo fixo então $d = \|x\| sen\,\theta$.

Geometricamente, é claro que a direção do vetor $\vec{v}(x)$ está na reta que é perpendicular ao plano gerado por $\vec{\omega}$ e $\vec{x}$ quando nenhum deles for nulo. Se estes vetores forem colineares (isto é, o ponto estiver no eixo ou se algum deles for nulo) a velocidade é zero.

Para determinar o vetor velocidade $\vec{v}(x)$ não nulo basta agora determinar seu sentido. Para isto faremos a seguinte convenção denominada "*regra da mão direita*" em que, se o polegar direito estiver apontando na direção de $\vec{\omega}$ os dedos desta mão fechada indicam a velocidade de rotação angular e portanto determinam o sentido do vetor $\vec{v}(x)$. .

Abstraindo da interpretação dinâmica associada aos vetores $\vec{\omega}$ e $\vec{x}$ designaremos o vetor $\vec{v}(x)$ resultante desta construção geométrica (cinemática) pela notação peculiar de produto $\wedge$ (chamado *produto vetorial*) da seguinte maneira: $\omega \wedge x = v(x)$ (eliminando as setas que tanto embaralham os textos de Física).

Resta agora determinar as propriedades algébricas básicas desta operação que serão úteis no seu cálculo numérico (isto é, das coordenadas de v em termos das coordenadas de ω e x) e para analisar suas demais propriedades.

Propriedades Operacionais (algébricas) básicas do Produto Vetorial:

1-$\omega \wedge (\lambda x) = \lambda(\omega \wedge x)$ (*Homogeneidade*)

2-$\omega \wedge x = -x \wedge \omega$. (*Antireflexividade*)

3-$\omega \wedge (x+y) = \omega \wedge x + \omega \wedge y$ (*Distributividade*)

As duas primeiras propriedades são facilmente verificadas pela sua interpretação geométrica/cinemática; a terceira exige um pouco de imaginação.

Para verificarmos a propriedade iii) utilizarem os passos seguintes:

i)-Se x e y forem perpendiculares ao vetor ω (isto é, se pertencerem ao plano que passa pela origem que é perpendicular a ω) então a propriedade Distributiva é válida porque significa simplesmente uma rotação de $\frac{\pi}{2}$ de todo o plano seguida de uma homotetia (multiplicação por $\|\omega\|$) e, portanto preserva o paralelogramo da soma $x+y$ homotetizado.(Verifique geometricamente)

ii)-Dado um vetor x podemos escreve-lo sempre na forma única: $x = x_{\|} + x_{\perp}$ em que $x_{\|}$ é paralelo a ω e $x_{\perp}$ é perpendicular a ω.

iii)-Se x e y forem dois vetores então a projeção ortogonal destes vetores no plano perpendicular a ω (denotada pelo sub-índice $\perp$) satisfaz à seguinte propriedade: $(x+y)_{\perp} = x_{\perp} + y_{\perp}$, ou seja, a projeção ortogonal é distributiva (linear).

iv-Demonstração final: $\omega \wedge (x+y) =$
$\omega \wedge (x+y)_{\perp} = \omega \wedge (x_{\perp} + y_{\perp}) = \omega \wedge x_{\perp} + \omega \wedge y_{\perp} = \omega \wedge x + \omega \wedge y$, o que **demonstra o desejado**.

Exercício:

Verifique geometricamente as três simples propriedades geométricas enunciadas acima.

Tabuada do Produto Vetorial:

Dado um sistema ortonormal $\{e_k\}$ denominamos este sistema *positivamente orientado* se $e_1 \wedge e_2 = e_3, e_2 \wedge e_3 = e_1, e_3 \wedge e_1 = e_2$.

Verifique que esta é uma possibilidade consistente, isto é, que um arranjo espacial destes vetores leva a estes resultados.

Observe que, as propriedades $e_k \wedge e_k = 0$, e $e_k \wedge e_j = -e_j \wedge e_k$ completam a Tabuada.

Assim, dado um vetor $\omega = \sum a_k e_k$ e $x = \sum x_k e_k$ e utilizando as propriedades básicas i)ii)iii)iv) e a Tabuada podemos imediatamente determinar as coordenadas do vetor resultante $\omega \wedge x = v = \sum v_k e_k$.

Conclui-se imediatamente que fixado o vetor ω , a operação que associa cada vetor x ao produto vetorial $\omega \wedge x = v(x)$ é uma Transformação linear em $\mathbb{R}^3$. Consequentemente esta transformação pode ser representada por uma Matriz.

Exercícios:

0-Mostre que "Tabuada" do produto vetorial para um sistema ortonormal tem apenas duas possibilidades, uma sendo o negativo da outra.

1-Verifique todas as afirmações acima.

2-Mostre que $\|x \wedge y\| = Área$ do paralelogramo cujas arestas são x e y. Portanto $x \wedge y$ pode ser interpretado como área com sinal.

3-Mostre que a Matriz A, 3×3, que representa a operação "produto vetorial por vetor ω fixo" , $Ax = \omega \wedge x$, é antisimétrica, isto é, $A^t = -A$.

4-Mostre que o chamado produto misto $(xyz) = x \cdot (y \wedge z) = (x \wedge y) \cdot z = y \cdot (z \wedge x)$ satisfaz estas igualdades cíclicas e representam o volume do paralelepípedo. Analise o sinal.

5-Mostre tambem que o produto misto entre tres vetores pode ser calculado pelo determinante da matriz que tem suas colunas definidas pelas coordenadas dos respectivos vetores.

6-Mostre que, dada uma matriz antisimétrica A , 3×3, é possivel descrever a sua ação na forma de um produto vetorial, ou seja, existe um único vetor $\omega(A)$ tal que $\omega \wedge x = Ax$ para todo $x \in \mathbb{R}^3$.

7-Mostre que a associação $\omega \Leftrightarrow \omega(A)$ é linear e bijetora.

8-Interprete neste contexto a não comutatividade, em geral, do produto matricial entre matrizes antisiméticas de ordem 3.

9-Argumente sobre a possibilidade de definição de um produto para espaços de dimensão $n > 3$ que representasse a ação das matrizes antisimétricas A de ordem n. (Verifique as dimensões, isto é, para caracterizar um vetor de $\mathbb{R}^n$ são n parametros enquanto que para uma matriz antisimétrica de ordem n são...). Portanto, a existencia do produto vetorial é único para o espaço tridimensional; para generaliza-lo alguma propriedade tem que ser perdida.

10-Mostre que o produto vetorial não é comutativo e nem associativo.

11-Inteprete o produto complexo de dois vetores (numeros complexos) $z = x + iy = (x,y)$ e $u = a + ib = (a,b)$no plano $\mathbb{R}^2$ em termos de produtos interno e vetoriais dos mesmos quando considerados como imersos no espaço tridimensional, ou seja, $\{(x,y,0)\}$ e $(a,b,0) \in \mathbb{R}^3$.

12-Cauchy-Helmholz- Mostre que qualquer campo vetorial $v(x)$ dado por uma matriz 3×3 , $v(x) = Mx$ pode ser interpretado como a soma de um campo de rotação e um campo simétrico (que podemos associar a uma deformação, já que rotação rígida não "quebra nada").Sugestão: Mostre que existe uma única decomposição $M = A + S$ onde $A^t = -A$ e $S^t = S$.

BIBLIOGRAFIA:

E. Abbott- *Flatland*, 1880 (várias edições recentes)

E.Gombrich-*A História da Arte,* 1950

Jeremy Gray-*Worlds Out of Nothing-A Course on the History of Geometry in the 19th century,* Sprinbger 2010

Jeremy Gray-*A History of Abstract Algebra: From Algebraic Equations to Modern Algebra*. Springer 2018.

D.Hubel-T.Wiesel-*Eye, Brain and Vision,* W.H.Freeman

M.Kline-*Mathematical Thought from Ancient to Modern Times*, Oxford UP

Mark Levi-*The Mathematical Mechanic,* Princeton UP

G.Kanisza-....

V.I.Arnold-*Métodos de Mecânica Clássica, Ed*. MIR 1980

J.Stillwell-*History of Mathematics*, Springer

J. von Uexküll-*Dos Animais e dos Homens: Digressões pelos seus mundos próprios, Doutrina do Significado*. 1982

Rudiger Wehner-*Desert Navigator: The Journey of the Ant* , Harvard UP 2020

Jean-Luc Dorier-*A General Outline of the Genesis of Vector Space Theory*, Historia Mathematica 22, 1995, 227-261.

G.Birkhoff-S.MacLane-*Álgebra Moderna*,