6 Sistemas Lineares

1. Sendo

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix} \qquad X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

determine os valores de λ para que o sistema $AX = \lambda X$ tenha uma, nenhuma ou infinitas soluções.

Resposta: O sistema terá infinitas soluções se $\lambda = 0, 1, 2$ e terá solução única se $\lambda \in \mathbb{R} \backslash \{0, 1, 2\}$.

2. Considere o sistema

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 - 3x_4 + x_5 & = & 2 \\ x_1 + 2x_2 + x_3 - 3x_4 + x_5 & = & 3 \\ x_1 + 2x_2 - 3x_4 + 2x_5 & = & 4 \\ 3x_1 + 6x_2 + x_3 - 9x_4 + 4x_5 & = & 9 \end{cases}$$

Resposta:

a) Escreva o sistema acima na forma matricial $AX = B$ e determine a matriz A.

b) Usando o método de Gauss-Jordan de linha equivalência encontre a forma escalonada reduzida (ou forma escada) da matriz aumentada do sistema.

c) Determine as variáveis livres da solução geral do sistema.

d) Escreva a solução geral desse sistema.

Resposta:

a)

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & -3 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & -3 & 1 \\ 1 & 2 & 0 & -3 & 2 \\ 3 & 6 & 1 & -9 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 4 \\ 9 \end{pmatrix},$$

com

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & -3 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & -3 & 1 \\ 1 & 2 & 0 & -3 & 2 \\ 3 & 6 & 1 & -9 & 4 \end{pmatrix}.$$

b) A matriz escalonada reduzida é

$$\left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 2 & 0 & -3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right).$$

c) O sistema linear equivalente é

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 - 3x_4 = 0 \\ x_3 = 1 \\ x_5 = 2 \end{cases},$$

e suas variáveis livres são x_2 e x_4.

d) A solução do sistema é

$$S = \{(-2x_2 + 3x_4, x_2, 1, x_4, 2),\ x_2, x_4 \in \mathbb{R}\}.$$

3. Considere o sistema linear

$$\begin{cases} (2-p)x & +(2-p)y & & +z & = 1 \\ x & +y & +(2-p)z & & = 1 \\ (3-2p)x & +(2-p)y & & +z & = p \end{cases},$$

com 3 equações e 3 variáveis. Determinar os valores de p para os quais o sistema tem:

a) Solução única;

b) Várias soluções;

c) Nenhuma solução.

d) Nos casos a) e b), resolver o sistema.

Resposta:

a) O sistema tem solução única quando $p \in \mathbb{R}\backslash\{1,\ 3\}$

b) O sistema tem infinitas soluções quando $p = 1$.

c) O sistema não tem solução quando $p = 3$.

d) Para cada $p \in \mathbb{R}\backslash\{1,\ 3\}$ a única solução do sistema é dada por

$$S = \left(-1, \frac{4-p}{3-p}, \frac{1}{3-p}\right).$$

Para $p = 1$ o conjunto solução é

$$S = \{(1 - y - z, y, z),\ y, z \in \mathbb{R}\}.$$

4. Dado $a \in \mathbb{R}$, considere o sistema

$$\begin{cases} x & + & y & + & az & = & 1 \\ x & + & (1+a)y & + & (2+a)z & = & 1 \\ 2x & + & 2y & + & (a^2+2a-4)z & = & a \end{cases}$$

a) Determine os valores de a para os quais o sistema tem: solução única, infinitas soluções, nenhuma solução.

b) Encontre o conjunto solução em cada caso que o sistema é solúvel.

Resposta:

O sistema, terá solução única se $a \notin \{0,\ 2,\ -2\}$. Para $\mathbf{a}$ fixo e diferente de $0,\ 2$, e -2, a solução do sistema é

$$S = \left(1 - \frac{a}{a+2} + \frac{2}{a(a+2)}, \frac{-2}{a(a+2)}, \frac{1}{a+2}\right)$$

Se $\mathbf{a} = \mathbf{2}$ é um sistema com infinitas soluções, e cujo conjunto solução é

$$S = \{(1-\lambda, -\lambda, \lambda),\ \lambda \in \mathbb{R}\}.$$

Se $\mathbf{a} = -\mathbf{2},\ \mathbf{0}$ que resulta em um sistema impossível:

5. Em cada um dos sistemas abaixo encontre, usando o metódo de Gauss, sua solução geral:

$$a)\left\{\begin{array}{lllll} 4x & +3y & -z & +t & = 4 \\ x & -y & +2z & -t & = 0 \\ 5x & +2y & +z & & = 4 \end{array}\right. ; \qquad b)\left\{\begin{array}{lllll} x & +5y & +4z & -13z & = 3 \\ 3x & -y & +2z & +5t & = 2 \\ 2x & +2y & +3z & -4t & = 1 \end{array}\right.$$

$$c)\left\{\begin{array}{lllll} x & -y & +2z & -t & = 0 \\ 3x & +y & +3z & +t & = 0 \\ x & -y & -z & -5t & = 0 \end{array}\right. \qquad d)\left\{\begin{array}{lllll} x & +y & +z & +t & = 1 \\ x & -y & +z & -t & = 1 \\ -x & -y & -z & t & = 1 \\ x & +y & -z & -t & = 1 \end{array}\right. .$$

Resposta:

a)

$$S = \left\{(x,y,z,t),\ \ x = \frac{4}{7} - \frac{-5}{7}z + \frac{2}{7}t,\ \ y = \frac{4}{7} + \frac{9}{7}z - \frac{5}{7}t,\ \ z,t \in \mathbb{R}\right\}$$

b) Sistema sem solução.

c)

$$S = \left\{(x,y,z,t),\ \ x = \frac{5}{3}t,\ \ y = -2t,\ \ z = -\frac{4}{3}t,\ \ t \in \mathbb{R}\right\}$$

d)

$$S = \{(2,-1,-1,1)\}$$

6. Seja

$$M = \begin{pmatrix} a & 0 & b & | & 2 \\ a & a & 4 & | & 4 \\ 0 & a & 2 & | & b \end{pmatrix}$$

a matriz ampliada (ou aumentada) do sistema linear. Para que valores de a e b o sistema admite:

a) Solução única

b) Solução com uma variável livre

c) Solução com duas variáveis livres.

d) Nenhuma solução.

Resposta:

- Se $b-2=0$ e $a=0$, $S=\{(x,y,1),\ \ x,y\in\mathbb{R}\}$

- Se $b-2=0$ e $a\neq 0$,

$$S=\left\{(x,y,z,),\ \ x=\frac{2}{a}-\frac{2}{a}z,\ \ y=\frac{2}{a}-\frac{2}{a}z\right\}$$

- Se $b\neq 2$ e $a=0$ o sistema não tem solução.
- Se $b\neq 2$ e $a\neq 0$ temos solução única dada por

$$S=\left\{\left(\frac{2-b}{a},\frac{b-2}{a},1,\right)\right\}$$

7. Considere o sistema $AX=B$, com

$$A=\begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 3 & -1 & 5 \\ 4 & 1 & a^2-16 \end{pmatrix} \text{ e } B=\begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ a+14 \end{pmatrix}$$

a) Determine o valor (ou valores) de a para que o sistema tenha solução única.

b) Existem valores para a de forma que o sistema tenha infinitas soluções?

c) Existem valores para a de forma que o sistema não tenha solução?

Resposta:

- Se $a^2=18$ o sistema não tem solução
- Se $a^2\neq 18$, o sistema possui solução única. Não há valores de a para que o sistema possua infinitas soluções.

8. Verificar se a afirmação abaixo é verdadeira ou falsa.

- Seja $AX=B$ um sistema linear com m equações e n variáveis. Se $n<m$ o sistema nunca admite soluções.

Resposta: (FALSO)

9. Considere o sistema linear nas três variáveis x,y,z

$$\left\{\begin{array}{ccccccc} x & + & ay & & & = & 2 \\ (a+1)x & + & 2y & + & (a+2)z & = & 3b-2 \\ x & + & ay & + & (a+2)z & = & b+2 \end{array}\right.$$

i) Determinar os valores de a e b para os quais o sistema tem: solução única, infinitas soluções ou nenhuma solução
ii) Nos casos onde tiver solução, resolver o sistema.

Resposta: Para $a \notin \{-2, 1\}$ o sistema possui solução única.

Caso $a \notin \{-2, 1\}$**:**

$$S = \left(2 - \frac{a(2b-4-2a)}{2-a-a^2}, \frac{2b-4-2a}{2-a-a^2}, \frac{b}{a+2}\right)$$

para todo $b \in \mathbb{R}$.

Caso $a = -2$**:** Se $b \neq 0$ o sistema não tem solução. Se $b = 0$, então

$$S = \{(2+2y, y, z),\ y,\ z \in \mathbb{R}\}$$

Caso $a = 1$**:** Se $b \neq 3$ o sistema não possui solução. Caso $b = 3$

$$S = \{(x, 2-x, 1),\ x \in \mathbb{R}\}.$$

10. Considere o sistema linear nas três variáveis x, y, z

$$\begin{cases} x + y + kz = 1 \\ x + ky + z = 1 \\ kx + y + z = 1 \end{cases}$$

Determinar os valores de k o sistema tem: solução única, infinitas soluções ou nenhuma solução.
Nos casos onde tiver solução, resolver o sistema.

Resposta:

Caso $k \notin \{-2,\ 1\}$**:**

$$S = \left\{\left(\frac{1}{k+2}, \frac{1}{k+2}, \frac{1}{k+2}\right)\right\}$$

Caso $k = 1$

$$S = \{(x, y, 1-x-y),\ x, y \in \mathbb{R}\}$$

Caso $k = -2$ é um sitema sem solução.

11. Verifique se as afirmações abaixo são verdadeiras ou falsas.

- Todo sistema Homogêneo com 5 equações e 6 variáveis possui soluções não nulas. **Resposta:** (VERDADEIRO)
- Se A é uma matriz de tamnho $n \times n$ com $\det(A) = 0$, então o sistema homogêneo $AX = 0$ sempre tem solução única. **Resposta:**(FALSO)
- Um sistema de 3 equações e 5 variáveis sempre possui solução. **Resposta:** (FALSO)
- Se A é uma matriz de tamanho $m \times n$ com $m < n$ e existe uma matriz B de tamanho $n \times m$ tal que $AB = I_m$, então todo sistema linear tendo A como matriz principal tem soluções múltiplas. **Resolução** (VERDADEIRO)
- Se A é uma matriz invertível, então ela não é matriz aumentada de um sistema solúvel. **Resposta:** (VERDADEIRO)

12. Sabendo que o sistema

$$\begin{cases} x & +y & +z & = 1 \\ mx & +2y & +3z & = 0 \\ m^2x & +4y & +9z & = 1 \end{cases}$$

admite uma única solução, podemos concluir que m pode assumir todos os valores do intervalo real:

a) $[0, 1]$ b) $[1, 2]$ c) $[3, 4)$ d)$[0, 4]$.

Resposta:

$m \in [0, 1]$

13. Resolva o sistema dependendo dos valores dos parámetros respectivos:

a) $\begin{cases} 2x_1+ & 3x_2+ & x_3 & = 1 \\ x_1+ & 6x_2+ & x_3 & = 3 \\ 2x_1- & 3x_2+ & 2x_3 & = \lambda \\ x_1+ & 3x_2+ & 2x_3 & = 1 \end{cases}$; b) $\begin{cases} x_1- & 2x_2- & x_3+ & x_4 & = -2 \\ 2x_1+ & 7x_2+ & 3x_3+ & x_4 & = 6 \\ 11x_1+ & 11x_2+ & 4x_3+ & 8x_4 & = 8 \\ 10x_1+ & 2x_2+ & & 8x_4 & = \lambda \end{cases}$.

Resposta:

- a) Tem solução se $\lambda = \frac{-11}{4}$ Neste caso

$$x = -\frac{1}{4}, \ \ 3y = \frac{7}{4}, \ \ z = -\frac{1}{4}$$

- b) Tem solução somente se $\lambda = 0$. Neste caso temos

$$S = \left\{ \frac{-2 + a - 9b}{11}, \frac{10 - 5a + b}{11}, \ a, b \in \mathbb{R} \right\}.$$

14. Determine os coeficientes a, b, c e d da função polinomial $p(x) = ax^3 + bx^2 + cx+d$, cujo gráfico passa pelos pontos $P_1 = (0, 10)$, $P_2 = (1, 7)$, $P_3 = (3, -11)$ e $P_4 = (4, -14)$.

Resposta:

$$p(x) = x^3 - 6x^2 + 2x + 10.$$

15. Determine coeficientes a, b e c da equação do círculo, $x^2+y^2+ax+by+c = 0$, que passa pelos pontos $P_1 = (-2, 7)$, $P_2 = (-4, 5)$ e $P_3 = (4, -3)$.

Resposta:

$$b = 4 \qquad a = -2$$

16. Considere o sistema $(*)$ $AX = B$, com A uma matriz $m \times n$ e B uma matriz $m \times 1$.

   a) Mostre que: se Y_1 e Y_2 são soluções do sistema homogêneo associado $AX = \mathbf{0}$ e a e b são números reais então $Z = aY_1 + bY_2$ também é solução do homogêneo associado.

   b) Mostre que: Se X_1 e X_2 são soluções de $(*)$ então $Y = X_2 - X_1$ é solução do sistema homogêneo associado $AX = \mathbf{0}$.

c) Suponha que X_0 é uma solução particular de $(*)$ e mostre que qualquer solucão X de $(*)$ é da forma $X = X_0 + Y$, com Y solução do homogêneo associado.

OBS: Na verdade pode-se provar que para todo sistema homogêneo $(**)$ $AX = \mathbf{0}$, com A uma matriz $m \times n$, existem r soluções não nulas $Y_1, \cdots, Y_r$, $0 \leq r \leq n$, de $(**)$ tal que toda solução Y de $(**)$ se escreve na forma $Y = a_1Y_1 + a_2Y_2 + \cdots + a_rY_r$, com $a_1, \cdots, a_r$ números reais ($r = 0$ ocorre quando $(**)$ tem a solução nula como única solução) . Portanto, por c), se o sistema $(*)$ tem uma solução X_0 então toda solução X de $(*)$ é do tipo $X = X_0 + a_1Y_1 + a_2Y_2 + \cdots + a_rY_r$, com $a_1, \cdots, a_r$ números reais. A solução X_0 é comumente chamada de solução inicial (ou particular) de $(*)$ e o conjunto $\{Y_1, \cdots, Y_r\}$ é chamado de um conjunto de geradores do sistema $(*)$ (ou simplesmente de geradores de $(*)$) Observe ainda que X_0 é a única solução de $(*)$ somente quando $r = 0$.

17. Dada uma matriz $A = CD$ onde

$$C^{-1} = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}, \qquad D^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 3 & -2 \end{pmatrix},$$

resolva o sistema $AX = B$, sabendo-se que $B = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix}$.

Resposta:

$$X = \begin{pmatrix} -11 \\ -7 \end{pmatrix}$$

18. Determine se as afirmações abaixo são verdadeiras ou falsas

a) Seja A uma matriz quadrada e $A^2 = 0$ então $A = 0$ (0 é a matriz nula.) **Resposta:** (FALSO)

b) Seja A uma matriz quadrada que é simétrica e antisimétrica. Então $A = 0$. **Resposta:** (VERDADEIRO)

c) Toda matriz pode ser escrita como soma de uma matriz simétrica e uma antisimétrica. **Resposta:** (VERDADEIRO)

d) A única matriz quadrada tal que $A^2 = Id$ é $A = Id$. **Resposta:** (FALSO)

e) Se A, B são matrizes quadradas tais que $AB = BA$ então $A^kB^k = (AB)^k$ para todo $k \in \mathbb{N}$ **Resposta:** (VERDADEIRO)

f) Seja A uma matriz quadrada que satisfaz $A^2 + 3AB + 7I = 0$, onde B é uma matriz quadrada do tamanho apropriado, então A é invertível. **Resposta:** (VERDADEIRO)