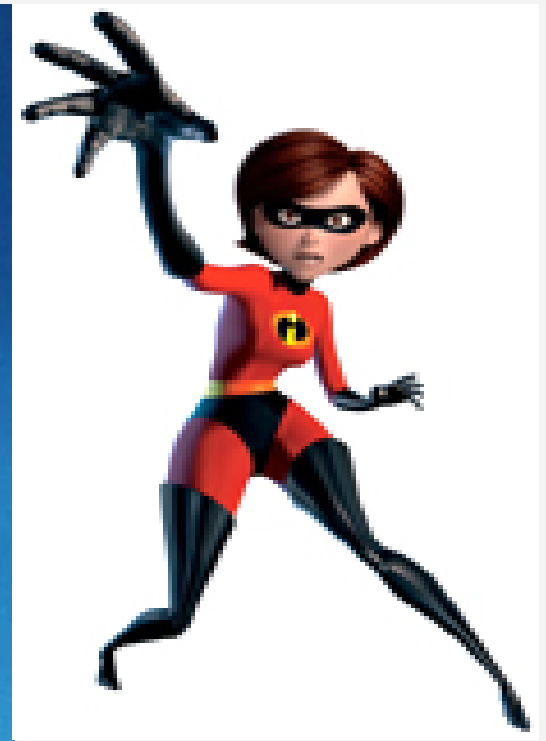
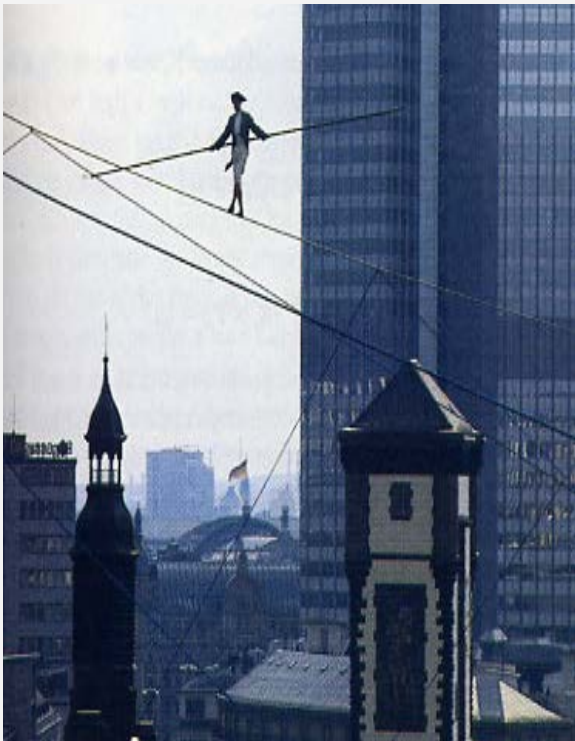


Aula-3

Equilíbrio, Elasticidade

Física Geral II - F 228

1º semestre, 2021



Condições para o equilíbrio (Geral)

- Um corpo rígido está em equilíbrio se:
 - O momento linear \mathbf{P} e o momento angular \mathbf{L} têm valor constante.

$$\vec{P} = m\vec{v} = \text{cte1.}$$

$$\vec{L} = m(\vec{r} \times \vec{v}) = \text{cte2.}$$

- Esta definição não exige que o corpo esteja em repouso, ou seja, \mathbf{P} e \mathbf{L} não são necessariamente zero.
- Se \mathbf{P} e \mathbf{L} valem zero então temos equilíbrio estático.

Equações de movimento para um corpo rígido

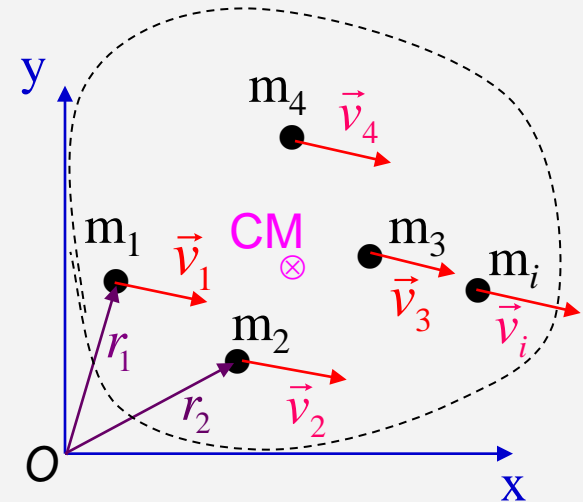
A translação do centro de massa (CM) :

$$\frac{d\vec{P}}{dt} = \frac{d}{dt} \left(\sum_i m_i \vec{v}_i \right) = \sum_i m_i \frac{d\vec{v}_i}{dt} = \sum_i \vec{F}_{i(ext)} = \vec{F}_{(ext)}$$

Pois:
$$\sum_i \vec{F}_{i(int)} = 0$$

A rotação em torno do ponto "O" :

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \sum_i m_i \frac{d}{dt} (\vec{r}_i \times \vec{v}_i) = \sum_i (\vec{r}_i \times \vec{F}_{i(ext)}) = \sum_i \vec{\tau}_{i(ext)} = \vec{\tau}_{(ext)}$$



$$\frac{d\vec{r}_i}{dt} \times \vec{v}_i = \vec{v}_i \times \vec{v}_i = 0$$

Estática para o corpo rígido

As condições de equilíbrio estático são:

$$\frac{d\vec{P}}{dt} = \vec{F}_{(ext)} = \sum_i \vec{F}_{i(ext)} = 0$$

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \vec{\tau}_{(ext)} = \sum_i \vec{\tau}_{i(ext)} = 0$$

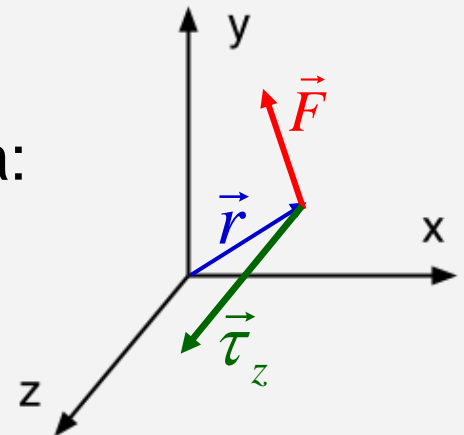
Cada vetor tem 3 componentes e as equações formam um sistema de 6 equações escalares simultâneas

Forças coplanares:

Forças no plano x - y têm versão simplificada:

$$\sum F_x = 0, \quad \sum F_y = 0, \quad \sum \tau_z = 0$$

$$\vec{\tau}_z = \vec{r} \times \vec{F}$$



Centro de Gravidade

- A força total que atua em um corpo rígido, devida à gravidade, pode ser substituída por uma **força única (peso) atuando no CM** do corpo de massa total M .

$$\sum \vec{F}_i = \sum m_i \vec{g} \quad \text{então:} \quad \sum \vec{F}_i = \vec{g} \sum m_i = M \vec{g}$$

- O torque da força peso em cada elemento de um corpo rígido é:

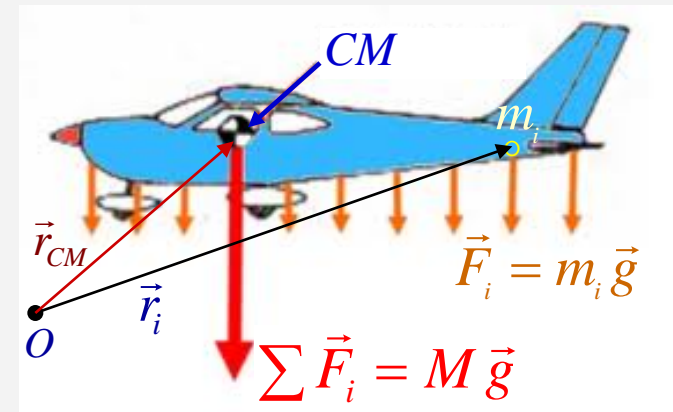
$$\sum \vec{\tau}_i = \sum (\vec{r}_i \times m_i \vec{g}) = \sum (m_i \vec{r}_i \times \vec{g})$$

Como g pode ser fatorado :

$$\sum \vec{\tau}_i = \sum (m_i \vec{r}_i) \times \vec{g} = M \vec{r}_{CM} \times \vec{g} = \vec{r}_{CM} \times M \vec{g}$$

$$\vec{r}_{CM} = \frac{\sum m_i \vec{r}_i}{M}$$

- O torque resultante é igual ao torque de uma única força resultante atuando no CM !



Exemplo 1

Barra de tamanho L e massa $m = 1,8 \text{ kg}$ se apoia em duas balanças. Um bloco de massa $M = 2,7 \text{ kg}$ se apoia na barra a um quarto de distância da balança esquerda. Quais as leituras nas balanças?

- As forças:

$$\sum F_y = F_l + F_r - Mg - mg = 0$$

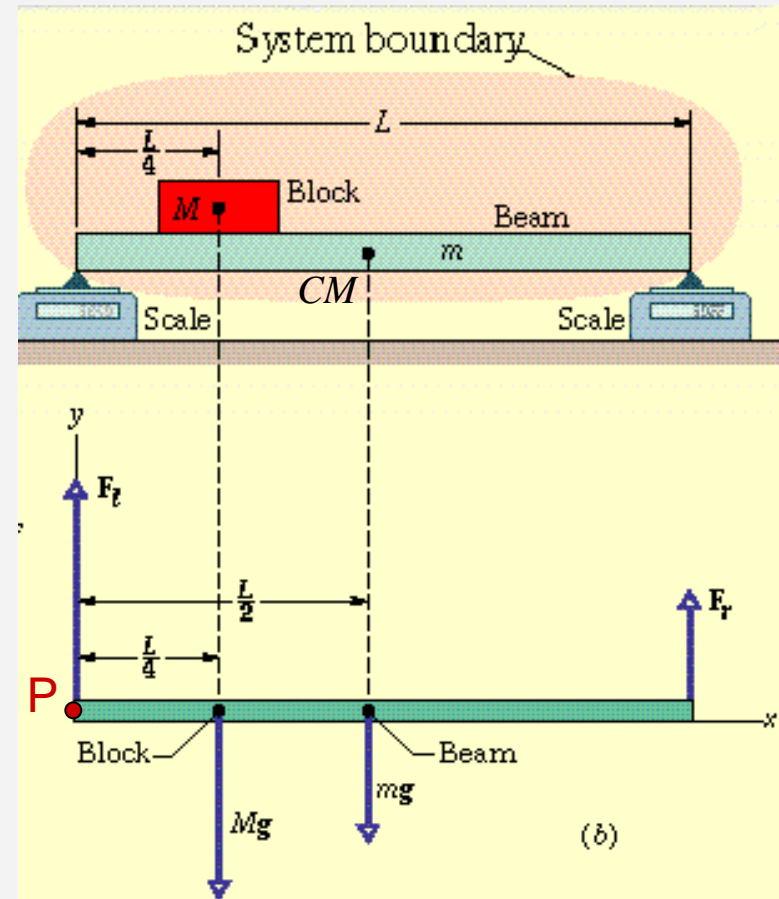
$$F_l = g(M + m) - F_r$$

- Os torques:

$$\sum \tau_z = F_l 0 + F_r L - Mg \left(\frac{L}{4} \right) - \frac{mgL}{2} = 0 \longrightarrow F_r = M \frac{g}{4} + m \frac{g}{2}$$

$$F_r = (g/4) (M + 2m)$$

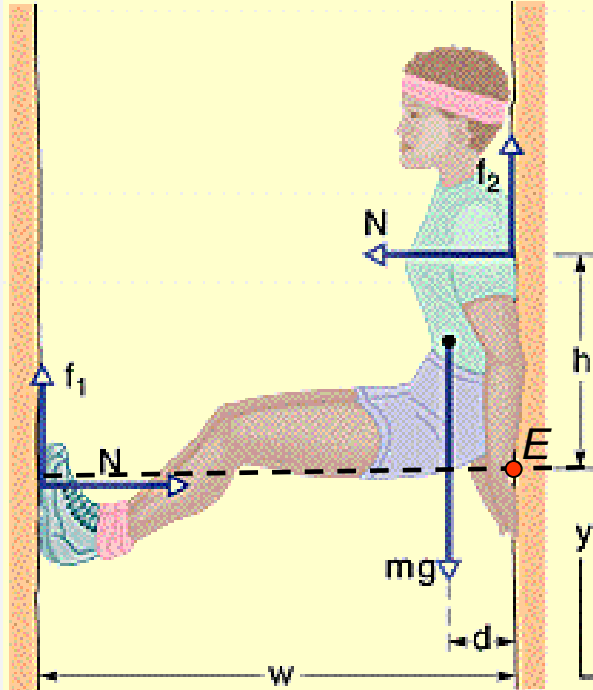
$$\text{daí: } \begin{cases} F_r = (9,83/4)(2,7 + 3,6) \approx 15,5 \text{ N} \\ F_l = 9,83(2,7 + 1,8) - 15,5 \approx 28,7 \text{ N} \end{cases}$$



Exemplo 2

$m = 55 \text{ kg}$; $w = 1,0 \text{ m}$; $d = 0,20 \text{ m}$;

$\mu_1 = 1,1$ e $\mu_2 = 0.70$; $N_{\min} = ?$ $h = ?$



$$\mu_1 N + \mu_2 N = mg,$$

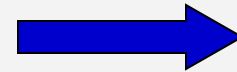
$$N = \frac{mg}{\mu_1 + \mu_2} = \frac{(55 \text{ kg})(9.8 \text{ m/s}^2)}{1.1 + 0.70} = 299 \text{ N} \approx 300 \text{ N}.$$

Eixo E: $\sum \tau = -f_1 w + Nh + mgd = 0.$

$$\begin{aligned} h &= \frac{f_1 w - mgd}{N} = \frac{\mu_1 N w - mgd}{N} = \mu_1 w - \frac{mgd}{N} \\ &= (1.1)(1.0 \text{ m}) - \frac{(55 \text{ kg})(9.8 \text{ m/s}^2)(0.20 \text{ m})}{299 \text{ N}} \\ &= 0.739 \text{ m} \approx 0.74 \text{ m}. \end{aligned}$$

Elasticidade

- A rigidez dos chamados corpos rígidos depende das forças interatômicas.
- Mesmo os chamados “corpos rígidos” podem ser deformados.
- Sólidos são formados por átomos, numa rede cristalina, ligados por forças similares às forças de uma mola.

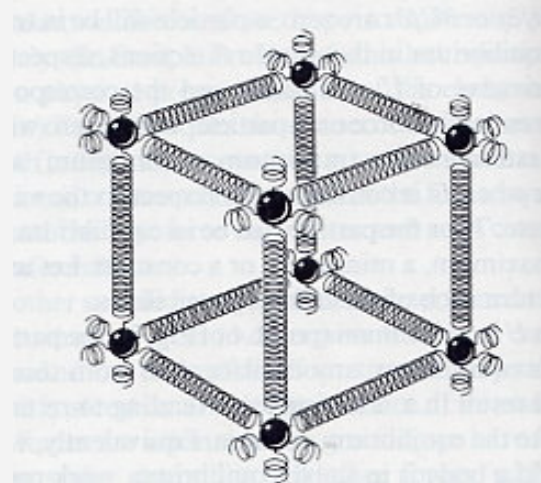


Elasticidade

sólido

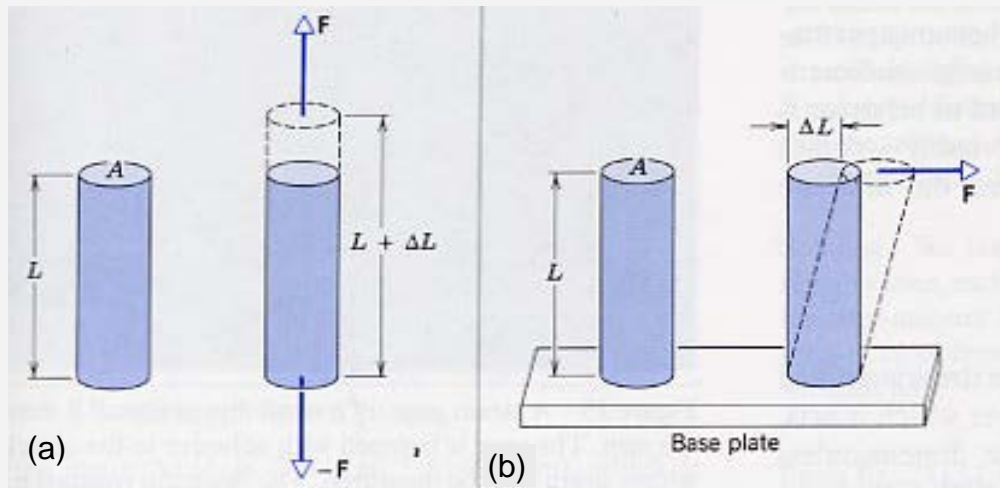


modelo massa - mola



- Cada átomo está em equilíbrio devido à interação (mola) com seus vizinhos.
- As constantes de mola efetivas são grandes.
- É necessário forças grandes para separar os átomos. **Daí a impressão de rigidez!**

Tensão (*stress*) e deformação (*strain*)

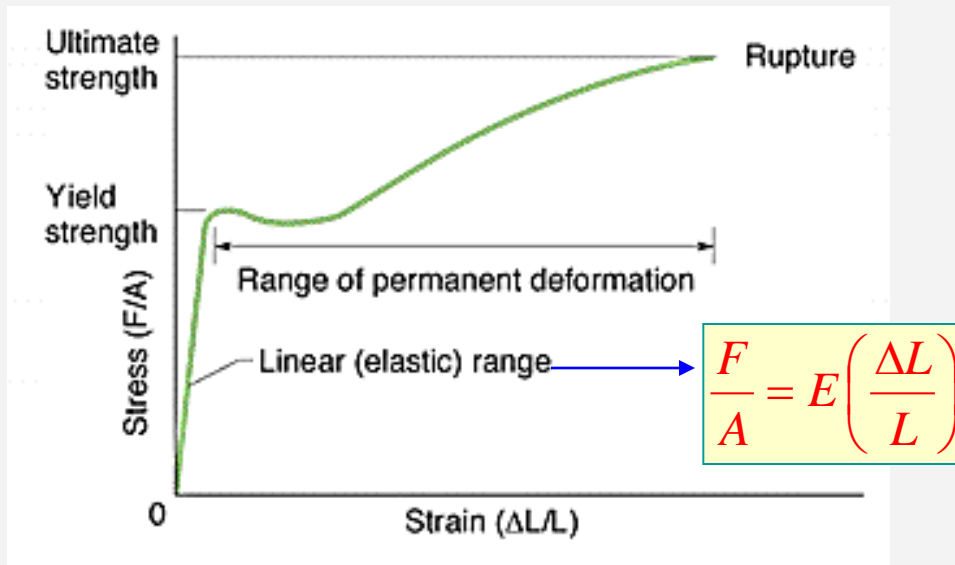



- Dois tipos principais de mudança de forma (*deformação*) de um sólido quando forças atuam sobre ele:
 - O cilindro é esticado pela *tensão de elongação* (a);
 - O cilindro é deformado pela *tensão de cisalhamento* (b);
- Um terceiro tipo é a *compressão uniforme (pressão hidrostática)* onde as forças são aplicadas uniformemente em todas as direções (c).

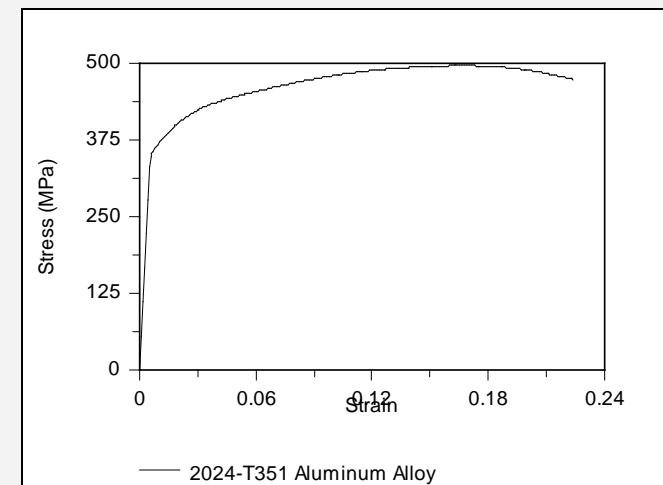
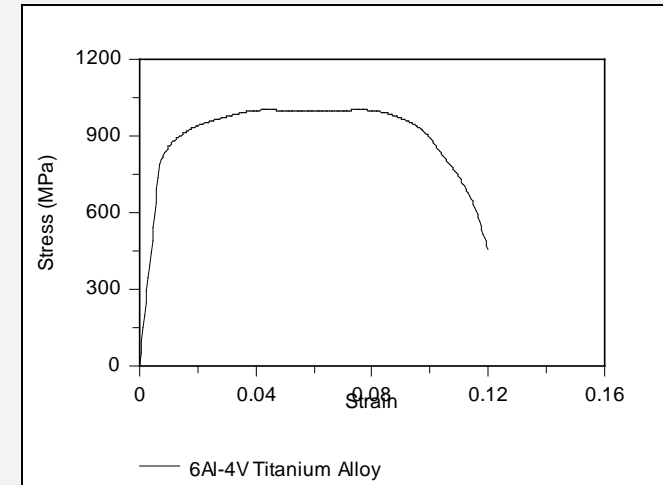
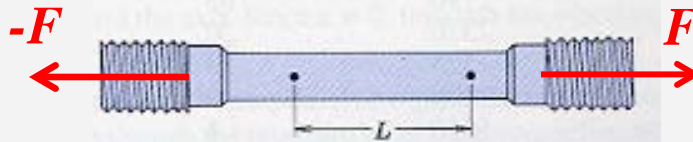
Tensão e deformação

No **regime elástico**, a **tensão** é proporcional à **deformação** e a constante de proporcionalidade é o **módulo de elasticidade**.

$$\text{Tensão} = \text{módulo de elasticidade} \times \text{deformação}$$



Corpo de prova 



Tensão e deformação

Tensão, ou compressão simples, se define como F/A , associada a uma **deformação específica** (ou de alongação) $\Delta L/L$ (ver figura).

Aqui, o módulo de elasticidade se chama **módulo de Young (E)**:

$$\frac{F}{A} = E \left(\frac{\Delta L}{L} \right)$$

TABLE 1 SOME ELASTIC PROPERTIES OF SELECTED MATERIALS OF ENGINEERING INTEREST

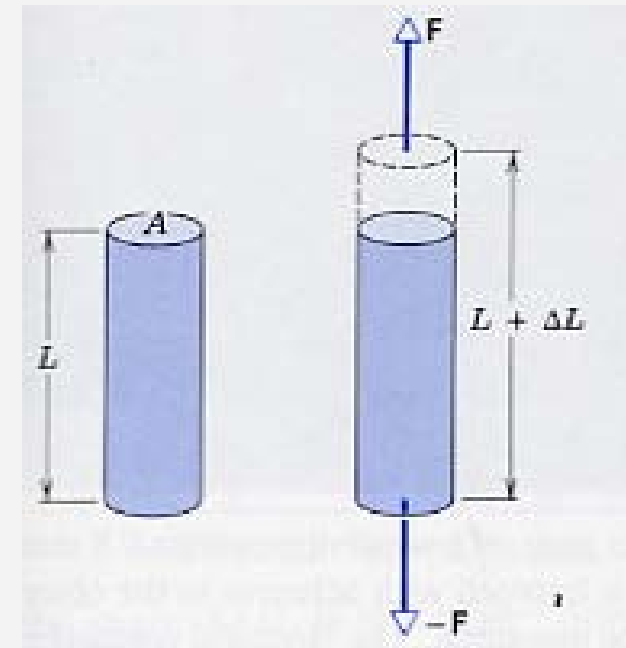
Material	Density (kg/m ³)	Young's Modulus (10 ⁹ N/m ²)	Ultimate Strength (10 ⁶ N/m ²)	Yield Strength (10 ⁶ N/m ²)
Steel ^a	7860	200	400	250
Aluminum	2710	70	110	95
Glass	2190	65	50 ^b	—
Concrete ^c	2320	30	40 ^b	—
Wood ^d	525	13	50 ^b	—
Bone	1900	9 ^b	170 ^b	—
Polystyrene	1050	3	48	—

^a Structural steel (ASTM-A36).

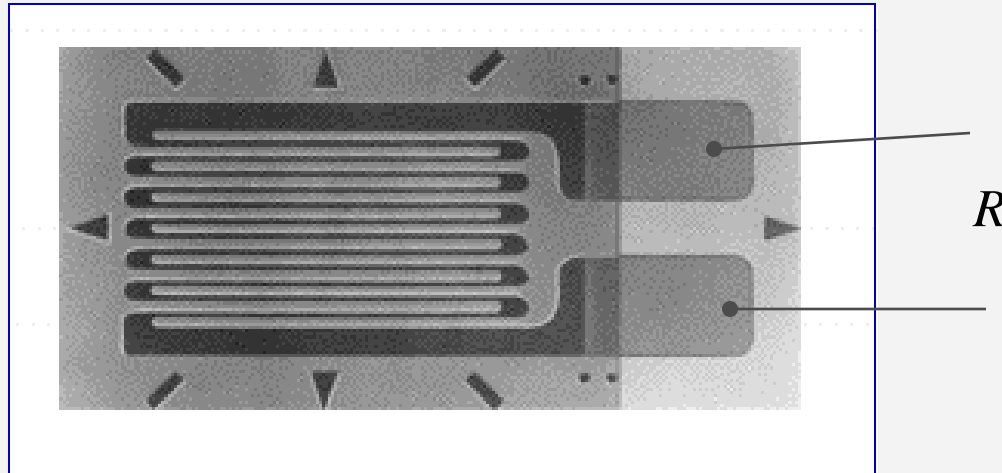
^b In compression.

^c High strength.

^d Douglas fir.



Medida da deformação



A deformação específica (até $\Delta L/L \sim 0,03$) pode ser medida com um **extensômetro**.

A resistência elétrica (R) do extensômetro varia com a deformação.

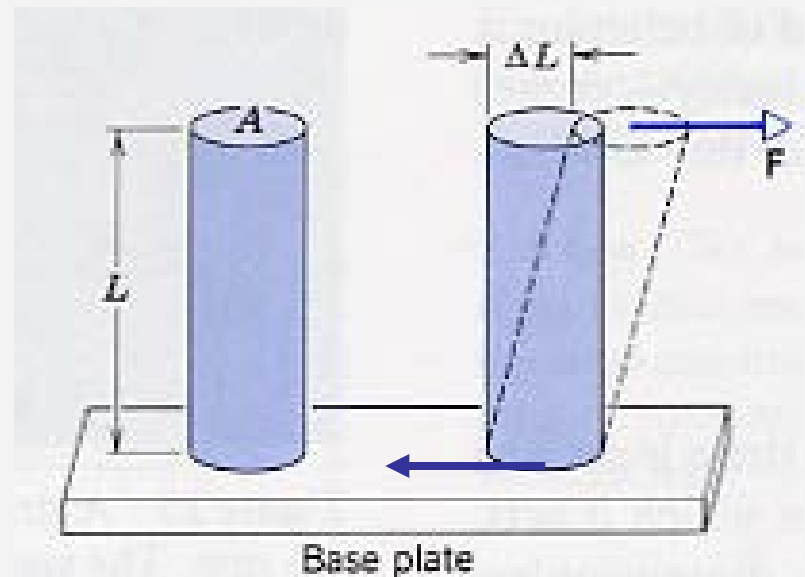
O extensômetro é colado ao objeto, cuja deformação específica se deseja medir, de tal forma que ele sofra a mesma deformação que o objeto.

Tensão de cisalhamento

Tensão de cisalhamento se define como F/A associada a uma deformação $\Delta L/L$, como na figura abaixo.

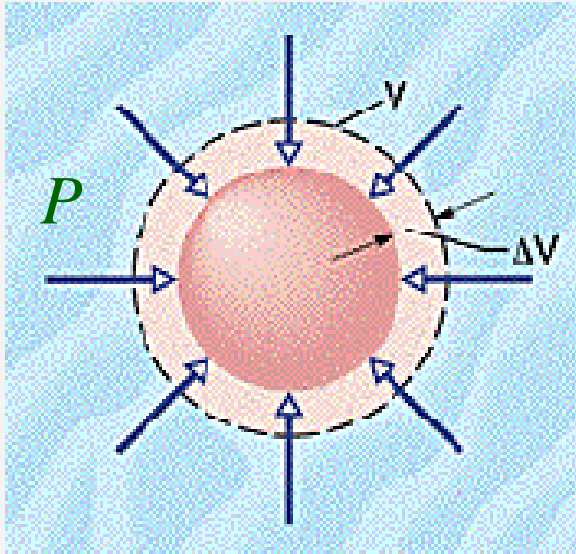
O módulo, neste caso, se chama **módulo de cisalhamento (G)**:

$$\frac{F}{A} = G \frac{\Delta L}{L}$$



A tensão de cisalhamento tem papel importante em fratura de ossos, devido a torções!

Tensão hidrostática (Pressão uniforme)



$$P = B \frac{\Delta V}{V}$$

- B é o módulo de elasticidade volumétrico (N/m^2)

Exemplo

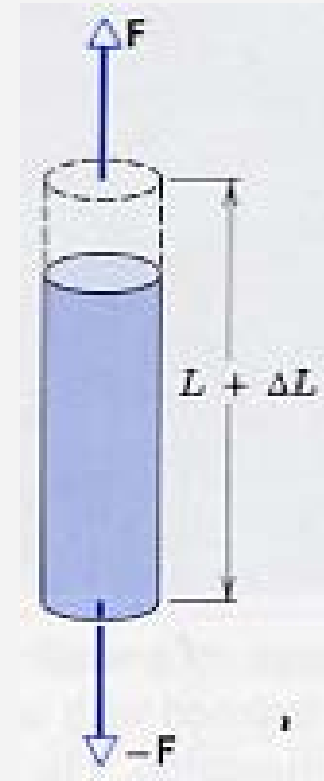
Uma haste de $R = 9,5$ mm e comprimento $L = 81$ cm é esticada ao longo do seu comprimento por uma força de módulo 6.2×10^4 N. Qual a tensão, o alongamento e a deformação específica? Dado: $E = 2.0 \times 10^{11}$ N/m².

$$\begin{aligned} \text{tensão} &= \frac{F}{A} = \frac{F}{\pi R^2} = \frac{6.2 \times 10^4 \text{ N}}{(\pi)(9.5 \times 10^{-3} \text{ m})^2} \\ &= 2.2 \times 10^8 \text{ N/m}^2. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Delta L &= \frac{(F/A)L}{E} = \frac{(2.2 \times 10^8 \text{ N/m}^2)(0.81 \text{ m})}{2.0 \times 10^{11} \text{ N/m}^2} \\ &= 8.9 \times 10^{-4} \text{ m} = 0.89 \text{ mm}. \end{aligned}$$

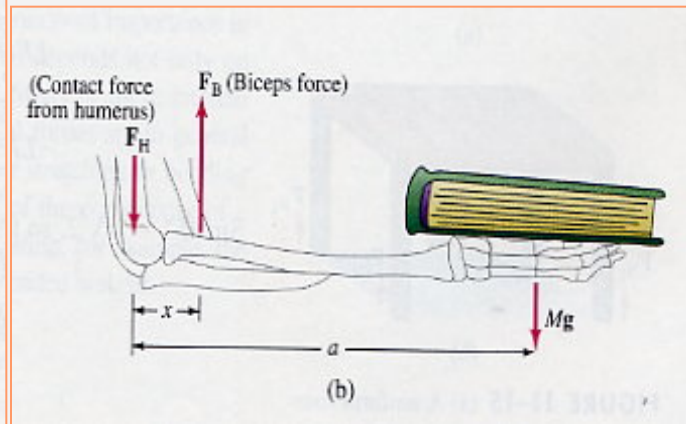
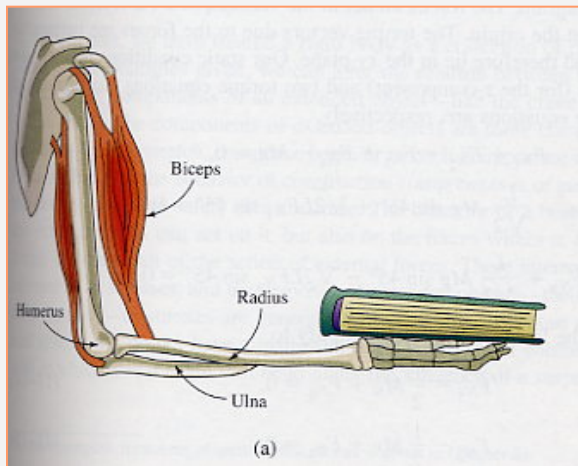
$$\begin{aligned} \frac{\Delta L}{L} &= \frac{8.9 \times 10^{-4} \text{ m}}{0.81 \text{ m}} \\ &= 1.1 \times 10^{-3} = 0.11\%. \end{aligned}$$

$$\frac{F}{A} = E \frac{\Delta L}{L}$$



Exemplo: Equilíbrio

O bíceps é responsável por dobrar o braço. É um sistema de alavanca como mostra a figura. Os valores típicos para o tamanho do braço, $a = 30$ cm, e a distância do bíceps ao cotovelo, $x = 4$ cm. Se uma massa M é sustentada pela mão qual a força feita pelo bíceps? (despreze o peso do braço!)



- Torque total com relação ao cotovelo:

$$0 = Mga - F_B x \quad \Rightarrow \quad F_B = Mg \left(\frac{a}{x} \right) = 7,5 \times Mg$$

A força feita pelo bíceps é muito maior que o peso na mão !

MAIS EXEMPLOS...

Curiosidade: Tensão x Deformação até a ruptura

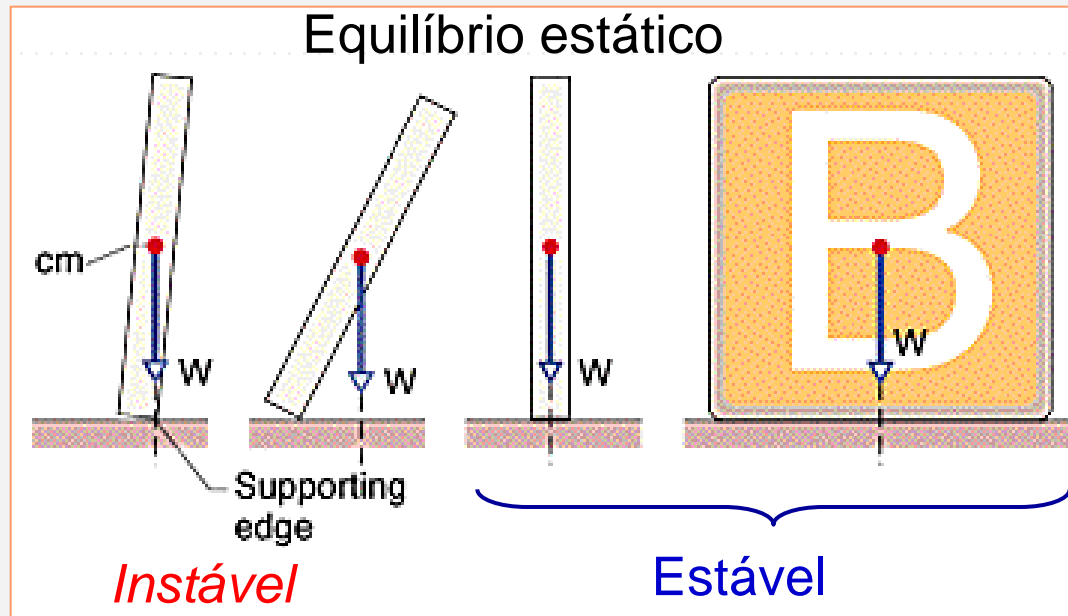
Washington's Tacoma Narrows suspension bridge collapsed on Nov.7, 1940



João Bobo ?



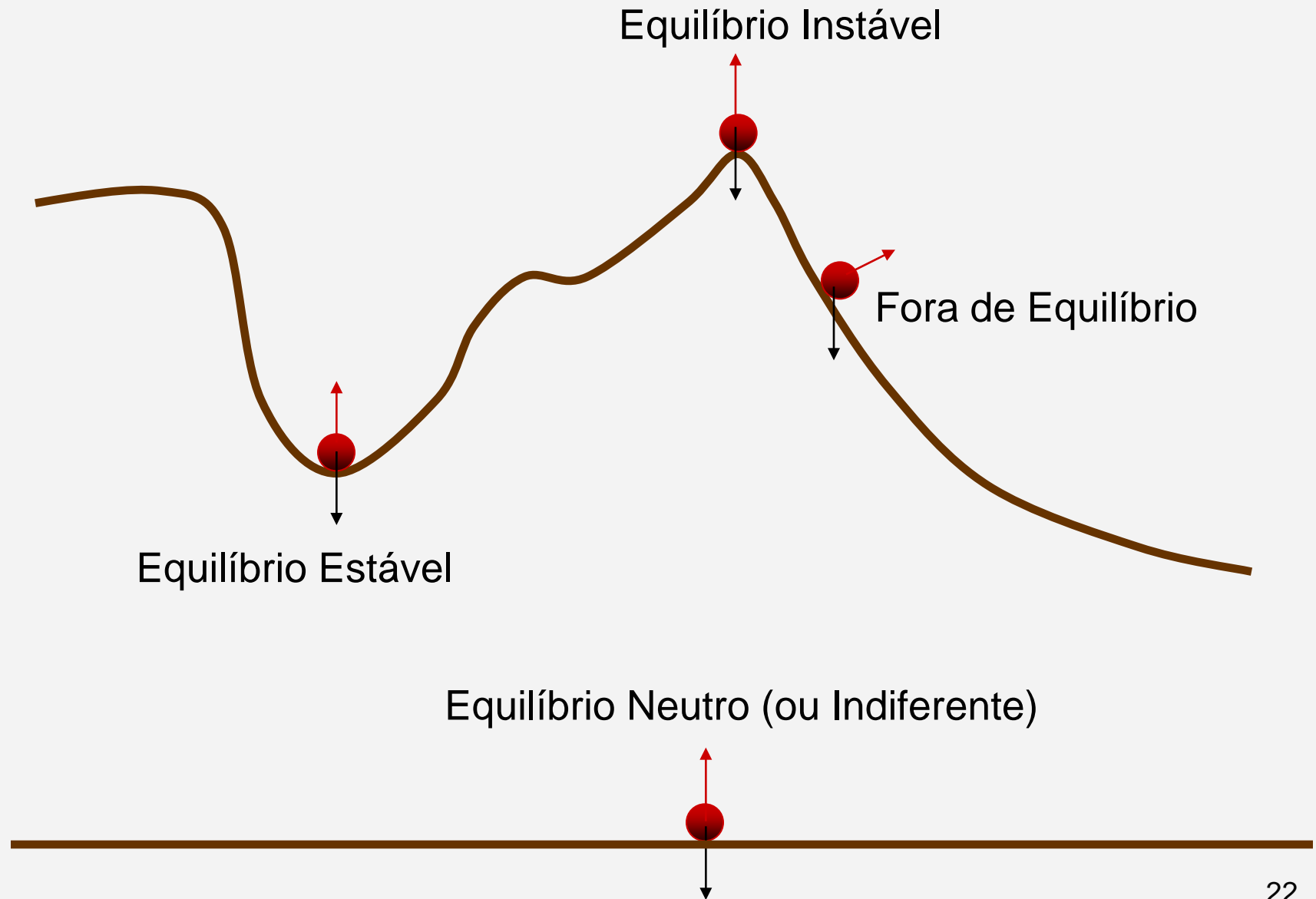
Equilíbrio sob a ação de g



X



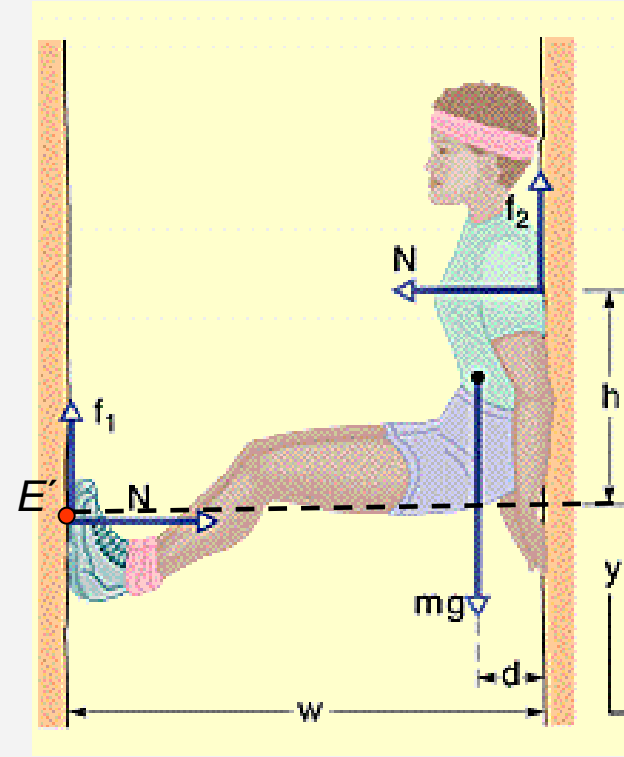
Tipos de Equilíbrio



Exemplo 2

$m = 55 \text{ kg}$; $w = 1,0 \text{ m}$; $d = 0,20 \text{ m}$;

$\mu_1 = 1,1$ e $\mu_2 = 0.70$; $N_{\min} = ?$ $h = ?$



$$\mu_1 N + \mu_2 N = mg,$$

$$N = \frac{mg}{\mu_1 + \mu_2} = \frac{(55 \text{ kg})(9.8 \text{ m/s}^2)}{1.1 + 0.70} = 299 \text{ N} \approx 300 \text{ N}.$$

Eixo E' : $\sum \tau' = f_2 w + Nh - mg(w - d) = 0$

$$h = \frac{mg(w - d) - \mu_2 N w}{N} = \frac{mg}{N}(w - d) - \mu_2 w$$

$$h = \frac{55 \times 9,8}{299}(0,8) - 0,7 \times 1,0 \approx 0,74 \text{ m}$$

Exemplo: Equilíbrio

- O fêmur, osso da coxa, tem o seu menor diâmetro em homem adulto de aproximadamente 2,8 cm, ou seção transversal de $A = 6 \times 10^{-4} \text{ m}^2$.
- Sabendo que a tensão de compressão que provoca ruptura do fêmur vale $S_f = 170 \times 10^6 \text{ N/m}^2$, calcule o valor da força compressiva correspondente.

$$F = S_f A \approx 1.0 \times 10^5 \text{ N} \approx 10 \times 10^3 \text{ kgf}$$

Isto é **~ 10 ton-força !** Esta força pode ser atingida, por ex., num salto de ginástica olímpica!!

PRÓXIMA AULA ...

FLUIDOS