

F 229 — Física Experimental II

Guia de Laboratório

Coordenador: Prof. Dr. Pierre-Louis de Assis

Atenção: Este é um documento em preliminar, ainda em fase de elaboração, destinado a todos os estudantes de F 229. Novas versões serão elaboradas ao longo do semestre.

Versão 0.4.6, abril de 2021

Sumário

Introdução 7

Agradecimentos 8

I

Conceitos básicos

1 Ferramentas matemáticas 11

1.1 Motivação 11

1.2 Linearização de funções 12

1.2.1 Variável independente no expoente 12

1.2.2 Constante no expoente 12

1.2.3 Casos mais gerais 13

1.2.4 Problemas 13

2 O planejamento 15

2.1 Estudando o modelo 15

2.1.1 Identificando variáveis dependentes e independentes 15

2.1.2 Regiões de interesse no modelo 16

2.2 Escolha do tipo de medição a ser feita 16

2.3 Resultados preliminares 17

3 O relatório 19

3.1 Estrutura geral 19

3.2 Escrita científica 21

3.3 Figuras: diagramas, ilustrações e gráficos 21

3.4 Análise de dados 22

3.5 Discutindo seus resultados 22

II

Ferramentas digitais

4 Tracker 25

4.1 Instalação 25

4.2 Princípios básicos 25

4.3 Exemplo passo-a-passo 27

4.3.1 Carregar o vídeo 27

4.3.2 Calibração de distância e definição dos eixos de coordenadas 27

5	SciDAVis	41
5.1	Configurações Básicas	41
5.1.1	Importando os Dados	42
5.1.2	Configurando as Colunas	42
5.2	Apresentação dos Dados	42
5.2.1	Dados Pontuais	43
5.2.2	Tratamento da Legenda	43
5.2.3	Formatação dos Eixo e do Título	45
5.2.4	Linhas de Grid	45
5.2.5	Resultado	46
5.3	Régressão Linear	46
5.3.1	Aplicação da Régressão	47
5.3.2	Valores dos Coeficientes	47
5.3.3	Resultado	48
5.4	Barras de Incerteza	48
5.4.1	Adicionando Colunas	48
5.4.2	Tipo das Novas Colunas	49
5.4.3	Resultados	49
5.5	Escala Logarítmica	50
5.5.1	Gráfico Log-Log	50
5.5.2	Gráfico Semi-Log	51
5.5.3	Régressão em Escala Logarítmica	52
5.6	Equação Característica	54
5.6.1	Encontrando os Coeficientes	54
5.6.2	Gráfico de Funções	54
5.6.3	Ajustes de Formatação	54
5.6.4	Resultado	54
5.7	Gráficos de Múltiplas Variáveis	54
5.7.1	Gráficos de Eixos Separados	56
5.7.2	Gráficos de Eixos em Conjunto	57
5.7.3	Gráficos com Apenas a Abscissa Comum	57
6	Python	61
6.1	Configurações Básicas	61
6.1.1	Bibliotecas de Python	61
6.1.2	Opções de Formatação	62
6.1.3	Importando Dados	62
6.1.4	Salvado os Gráficos	64
6.2	Apresentação dos Dados	65
6.2.1	Dados Pontuais	66
6.2.2	Texto dos Eixos e do Título	66
6.2.3	Resultado	67
6.3	Régressão Linear	67
6.3.1	Resultados Coletados	67
6.3.2	Aplicação da Régressão	68
6.3.3	Desenho da Régressão	69
6.3.4	Resultado	70

6.4	Barras de Incerteza	70
6.4.1	Dados Pontuais com Barras de Incerteza	71
6.4.2	Regressão Linear com Incertezas	71
6.4.3	Resultados	72
6.5	Escala Logarítmica	73
6.5.1	Gráfico Log-Log	73
6.5.2	Gráfico Semi-Log	75
6.5.3	Regressão em Escala Logarítmica	78
6.6	Equação Característica	79
6.6.1	Encontrando os Coeficientes	79
6.6.2	Resultado	82
6.6.3	Banda de Incerteza	82
6.7	Gráficos de Múltiplas Variáveis	84
6.7.1	Gráficos de Eixos Compartilhados	85
6.7.2	Gráficos com Apenas a Abscissa Comum	86
6.7.3	Gráficos de Eixos Separados	88
7	Phyphox	93

III	Experimentos	
8	A Máquina de Atwood	101
8.1	Introdução	101
8.2	Objetivos	102
8.3	Medições a partir de vídeos	103
8.4	Planejamento	104
8.5	Relatório	104
8.6	Bibliografia	104
9	Desvios sistemáticos em medições	105
9.1	Introdução	105
9.2	Desvios devidos a tempos de reação	105
9.3	Experimento virtual	108
10	O Pêndulo Físico	111
10.1	Introdução	111
10.2	O pêndulo simples	111
10.3	O pêndulo físico	112
10.3.1	Montando seu pêndulo	113
10.4	Objetivos	114
10.5	Planejamento	114
10.5.1	Antes de começar	114
10.5.2	Desvios sistemáticos	114
10.5.3	Escrevendo o planejamento	115

10.6 Relatório	115
10.7 Bibliografia	116
11 Acústica	117
11.1 Introdução	117
11.1.1 Ondas estacionárias em tubos	117
11.1.2 Resssoadores de Helmholtz	119
11.1.3 Geração e medição de ondas sonoras	120
11.2 Objetivos	121
11.3 Planejamento experimental	122
11.3.1 Antes de começar	122
11.3.2 Planejamento	122
11.4 No relatório	123
11.5 Preparando um seminário	124
11.6 Bibliografia	124
12 Tensão superficial e viscosidade	125
12.1 Introdução	125
12.2 Objetivos	126
12.3 Bibliografia	127
13 Resfriamento	129
13.1 Introdução	129
13.2 Resfriamento	129
13.3 Objetivos	130
13.4 Tratamento inicial dos dados e preparação dos gráficos	130
13.5 Ajustes não-lineares	131
13.6 Fazendo e comparando previsões de modelos	133
13.7 Bibliografia	133
Índice Remissivo	135

Introdução

A Física é uma ciência construída sobre bases empíricas, na busca de padrões e relações entre grandezas que podemos medir. O grande volume de conhecimento teórico que hoje temos se construiu a partir de observações e experimentos feitos ao longo de muitas gerações, como forma de satisfazer o desejo humano de entender a natureza que nos cerca e de conseguir prever seu comportamento.

A Teoria e o Experimento se conectam por meio de modelos, equações construídas a partir da teoria para prever como um dado sistema se comportará em condições específicas. Um modelo contém parâmetros que dizem respeito ao sistema, o ambiente em que ele está ou até mesmo a propriedades gerais da natureza. Por exemplo, a aceleração da gravidade é um parâmetro do modelo construído para descrever o comportamento de um pêndulo e que diz respeito ao ambiente em que ele se localiza. O mesmo pêndulo oscilará com períodos diferentes na superfície da Terra e da Lua. Já o modelo que permite prever o comprimento de onda da luz emitida por uma lâmpada de sódio tem como um de seus parâmetros a carga do elétron, que é uma propriedade geral.

Podemos fazer experimentos com diferentes tipos de objetivos. Alguns dos mais comuns são:

- caracterizar um novo fenômeno e expandir as fronteiras do conhecimento teórico;
- caracterizar o comportamento de um sistema para propor um modelo que o descreva, a partir da teoria já conhecida;
- testar um modelo ou hipóteses teóricas, ao contrastar suas previsões a dados experimentais;
- medir propriedades de um sistema ou material, a partir de modelos já consolidados;
- construir e testar protótipos de dispositivos.

É muito frequente que, ao construir o modelo, façamos suposições que simplificam a matemática necessária para descrever adequadamente o sistema. Quando preparar experimentos para os quais há um modelo que pretende usar para analisar os dados obtidos, você precisa sempre ter em mente quais são estas suposições e garantir que o sistema as respeite. Da mesma forma, se estiver realizando um experimento exploratório, sem ter certeza de qual modelo descreverá seu comportamento, é preciso ter muita clareza a respeito das condições em que o experimento foi feito para não usar aproximações indevidas ao construir seu modelo.

Mesmo com um bom modelo é sempre importante que você tenha em mente que o modelo é apenas uma forma aproximada de descrever a natureza e que, ao confrontarmos os dados experimentais às previsões, devemos pensar em termos do quanto bem as previsões se aproximam do que realmente aconteceu, em vez de quanto bem o experimento se aproximou da teoria.

Nesta disciplina você trabalhará em grupo e, juntos, farão cinco experimentos baseados em tópicos da Física II. Nossa objetivo, porém, é o de continuar o trabalho iniciado em Física Experimental I (F 129), reforçando o aprendizado de métodos experimentais e de uma forma de pensar científica, baseada na análise de dados experimentais para tirar conclusões sobre um fenômeno ou sistema físico.

Este guia se divide em três partes. Na parte I abordamos alguns conceitos básicos que são importantes para a disciplina. Na parte II apresentaremos ferramentas digitais para a extração e o tratamento de dados. Na parte III estão os roteiros dos experimentos que você realizará.

Ao longo do texto você encontrará alguns alertas, definições exemplos e exercícios:

- ! Os alertas serão indicados assim! É importante dar atenção aos alertas, que trazem avisos importantes sobre a realização dos experimentos ou uso das ferramentas digitais.

Definição 0.0.1 — Exemplo de definição. Definições aparecerão demarcadas no texto dessa forma, para chamar a sua atenção. Para que fique fácil encontrá-las, colocaremos as palavras chave no índice remissivo ao fim deste documento.

■ **Exemplo 0.1 — Este é um exemplo.** De um exemplo... Veja que o exemplo começa em um pequeno quadrado preto e termina em outro. ■

Exercício 0.1 Exercícios são indicados assim, dentro de caixas vermelhas. Aproveitando que estamos aqui, discuta com seus colegas e tentem elencar exemplos de experimentos que se encaixem na lista de casos apresentada acima. ■

Por fim, gostaríamos de lembrar que este é um texto ainda em elaboração. Algumas partes ainda não foram finalizadas e contamos com sua ajuda para torná-lo cada vez melhor. Você receberá um aviso via Moodle sempre que houver uma atualização.

Como usar este guia?

Em uma primeira leitura, recomendamos que você vá diretamente ao primeiro experimento, no capítulo 8 e, depois de ler o roteiro, leia os capítulos 2 e 3. Os capítulos da parte II podem ser consultados enquanto você estiver realizando a aquisição de dados a partir dos vídeos, no caso do capítulo 4, ou quando fizer a análise dos dados.



Conceitos básicos

1	Ferramentas matemáticas	11
1.1	Motivação	
1.2	Linearização de funções	
2	O planejamento	15
2.1	Estudando o modelo	
2.2	Escolha do tipo de medição a ser feita	
2.3	Resultados preliminares	
3	O relatório	19
3.1	Estrutura geral	
3.2	Escrita científica	
3.3	Figuras: diagramas, ilustrações e gráficos	
3.4	Análise de dados	
3.5	Discutindo seus resultados	

1. Ferramentas matemáticas

1.1 Motivação

Antes de discutirmos o que é a linearização de uma equação e relembrarmos o que é o ajuste linear por mínimos quadrados, as principais ferramentas matemáticas que utilizaremos em F 229, precisamos consolidar os conceitos que servem de motivação para o uso da linearização e do ajuste linear. O primeiro é o de variáveis independentes (VI) e variáveis dependentes (VD) em um experimento. O segundo é o conceito de modelo, como função $VD(VI, C_1, C_2, \dots)$ que descreve o comportamento do sistema e prevê um valor para a VD a dado o valor de VI e das constantes $\{C\}$.

Definição 1.1.1 — Variável independente e variável dependente. Chamamos de variável independente aquela propriedade do sistema sobre o qual temos controle direto, podendo alterar seu valor de forma arbitrária. Já a variável dependente é uma propriedade do sistema que se altera em função de mudanças na variável independente.

Por exemplo, em um experimento em que estudamos o alongamento de uma mola sujeita a uma força peso P em uma de suas extremidades, o módulo de P pode ser uma variável independente. Já o alongamento X da mola em resposta a P será o que chamamos de variável dependente, pois seu valor muda em função do valor que escolhemos para P . Neste caso, o modelo que descreve a mola nos diz que P e X estão relacionados por uma constante K .

A realização de um experimento consiste na definição de um conjunto de valores para VI e a medição dos valores de VD correspondentes. Quantos e quais valores diferentes definir para VI e quantas vezes o experimento será realizado para medir um dado VD, mantendo VI constante, são escolhas muito importantes que devem ser feitas por quem planeja e realiza o experimento. Veremos mais adiante como fazer essas escolhas.

Definição 1.1.2 — Dados experimentais. Chamaremos de dados experimentais o conjunto formado por N pares (VI_n, VD_n) com $n \in \{0, N\}$, obtidos no experimento. É importante notar que N não é o número de valores diferentes escolhidos para VI, já que podemos realizar medições repetidas de VD para um mesmo valor de VI.

Como dito acima, existem outras propriedades do sistema que não se alteram quando mudamos a variável independente. São constantes, cujos valores podem ter sido determinados a partir de outros experimentos, estimados a partir de previsões teóricas ou então definidos como base para unidades do Sistema Internacional (S.I.). Utilizaremos os dados experimentais para determinar o valor destas constantes em nosso sistema por meio de um processo chamado análise (ou tratamento) de dados.

O comportamento dos sistemas que estudamos em nossos experimentos são descritos por modelos:

Definição 1.1.3 — Modelo. Modelos são equações que descrevem o comportamento de um sistema físico. São construídos com base em teorias físicas ou em um grande conjunto de dados empíricos. Na maioria das vezes, não estabelecem uma relação linear entre as grandezas que podemos variar e aquelas que podemos usar como variáveis dependentes. Ou seja, a variação de VD não será necessariamente proporcional à variação de VI a menos da adição ou subtração de uma constante. É comum encontrarmos dependências quadráticas ou exponenciais, por exemplo.

Na maioria dos experimentos de F 229 pediremos que vocês encontrem o valor de uma ou mais constantes do modelo a partir dos dados experimentais. Nas situações que vocês encontrarão em F 229, a melhor forma de estimar os valores de parâmetros do modelo a partir de um conjunto de dados experimentais é através do Método dos Mínimos Quadrados (MMQ), já visto em F 129. Entretanto, apenas para funções lineares ou polinomiais o MMQ nos dá, com certeza, o melhor valor dos parâmetros do modelo¹.

Como os modelos geralmente não são lineares, é necessário encontrar uma forma de escrever funções lineares a partir do modelo. A seguir mostraremos alguns exemplos de como fazer a linearização de funções.

1.2 Linearização de funções

Linearizar uma função não-linear $y(x, \{C\})$ é encontrar uma forma de escrever uma função afim

$$Y(x, y) = A(\{C\})X(x, y) + B(\{C\}), \quad (1.1)$$

em que Y e X são funções apenas das variáveis da função original e os coeficientes angular A e linear B são funções apenas das constantes $\{C\}$.

Há várias estratégias para definir como escrever estas quatro funções (Y, X, A e B), que dependem da forma da função original. Veremos a seguir algumas delas.

1.2.1 Variável independente no expoente

Quando a função não-linear é do tipo

$$y = C_1 e^{C_2 x}, \quad (1.2)$$

o logaritmo é a melhor forma de chegar à função linearizada. Neste caso, podemos escrever

$$Y = \ln y, \quad (1.3)$$

$$X = x, \quad (1.4)$$

$$A = C_2, \quad (1.5)$$

$$B = \ln C_1. \quad (1.6)$$

- ! É importante perceber que a estratégia acima não pode ser usada caso a função tenha um coeficiente somado ao termo da Eq. 1.2, ou seja, $y = Ae^{Bx} + C$. Nesse caso aplicar o logaritmo dos dois lados da equação não lineariza a função!

1.2.2 Constante no expoente

Caso a função tenha um dos parâmetros que se deseja conhecer no expoente da variável independente,

$$y = C_1 x^{C_2}, \quad (1.7)$$

novamente podemos utilizar o logaritmo como estratégia para chegar à linearização:

$$Y = \ln y, \quad (1.8)$$

$$X = \ln x, \quad (1.9)$$

$$A = C_2, \quad (1.10)$$

$$B = \ln C_1. \quad (1.11)$$

¹Os melhores parâmetros para o MMQ são aqueles que minimizam a soma dos quadrados das diferenças entre as previsões do modelo (que dependem dos valores dos parâmetros) e os dados experimentais.

! É importante perceber que a estratégia acima não pode ser usada caso a função tenha um coeficiente somado ao termo da Eq. 1.2, ou seja, $y = Ae^{Bx} + C$. Nesse caso aplicar o logaritmo dos dois lados da equação não lineariza a função!

1.2.3 Casos mais gerais

Em muitos casos é possível linearizar a função, contudo o logaritmo, sozinho, não é suficiente para que as funções Y, X, A e B fiquem claras. Para estes casos, é preciso trabalhar com manipulações algébricas e procurar transformar o termo que contém a variável independente em uma função que não contenha parâmetros que pretendemos determinar a partir do ajuste, como nos exemplos a seguir:

■ **Exemplo 1.1**

$$y = C_1 x^n + C_2 \quad (1.12)$$

Aqui a solução é simplesmente considerar $X = x^n$ e as demais funções são triviais. ■

■ **Exemplo 1.2**

$$y = C_1 e^{(C_2 x^n)} \quad (1.13)$$

Neste caso, o logaritmo nos leva a

$$\log y = \log C_1 + C_2 x^n,$$

nos trazendo de volta ao caso do exemplo anterior. ■

■ **Exemplo 1.3**

$$y = C_1 e^{Dx} + C_2, \quad (1.14)$$

em que D é uma constante conhecida, sem conter parâmetros que desejamos determinar experimentalmente. Esta relação pode ser linearizada fazendo $X = e^{Dx}$, de forma que as funções sejam $Y = y$, $A = C_1$ e $B = C_2$. ■

■ **Exemplo 1.4**

$$y = C_1 x^n + C_2 x^m \quad (1.15)$$

Podemos fazer duas linearizações:

$$Y = y x^{-n}$$

$$X = x^{m-n}$$

$$A = C_2$$

$$B = C_1$$

e

$$Y = y x^{-m}$$

$$X = x^{n-m}$$

$$A = C_1$$

$$B = C_2$$

1.2.4 Problemas

2. O planejamento

Após um primeiro contato com o experimento que deverão realizar, você e seu grupo deverão escrever um planejamento e enviá-lo para que possamos ver o que o grupo entendeu da proposta feita, quais dúvidas surgiram, qual procedimento experimental decidiram seguir, como vão analisar os dados e, principalmente, o que observaram a partir do procedimento escolhido.

Fazer um bom planejamento é muito importante para que os Professores e PEDs possam dar um bom retorno e o grupo possa corrigir eventuais problemas em seu procedimento ou análise, garantindo que o Relatório será escrito a partir de uma boa base. Neste capítulo, apresentaremos algumas etapas da elaboração de um bom planejamento experimental.

2.1 Estudando o modelo

Em muitas situações, a investigação experimental do comportamento de um sistema é feita utilizando um modelo matemático que prevê o valor de uma propriedade do sistema em função de outras propriedades. Os modelos são construídos a partir de teorias físicas, com o auxílio de aproximações e simplificações feitas com base em algumas suposições sobre o comportamento do sistema.

■ **Exemplo 2.1 — O pêndulo simples.** Queremos construir um modelo para prever o comportamento de um sistema formado por uma pequena esfera de metal, de massa m e raio R , ligada por uma linha de costura de comprimento L a um prego. O objetivo é que nossa equação seja capaz de prever a posição do centro de massa da esfera em um dado tempo t após ela ter sido solta de um ângulo de partida θ_0 entre a linha de costura e a vertical e também o tempo T necessário para que o pêndulo execute uma oscilação completa, voltando a ter sua posição e velocidade iniciais. **A primeira suposição que fazemos é que a esfera se moverá apenas em um plano definido pelos vetores \hat{x} e \hat{y} .** Outros tipos de movimento podem ser possíveis, mas não estamos interessados em estudá-los. Veja que esta suposição, por si só, já restringe a validade do modelo que vamos desenvolver a experimentos em que possamos garantir que o movimento ocorre em um único plano ou que a componente de deslocamento para fora do plano seja muito pequena em comparação ao deslocamento no plano.

Sabemos que as forças que agem sobre a esfera são a sua força peso, $F_p = -mg\hat{y}$ e a força de tensão gerada pela linha de costura. Esta força estará orientada sempre na direção do prego. Suas componentes em \hat{x} e \hat{y} serão funções do ângulo θ . **Veja que aqui estamos supondo que a linha estará sempre tensionada e manterá a esfera a uma distância constante L do prego.** Assim, θ é uma boa escolha de coordenada para descrever a posição do centro de massa. ■

Utilizaremos o exemplo de modelo construído acima nas seções a seguir para explicar como estudar o modelo de forma a planejar um experimento.

2.1.1 Identificando variáveis dependentes e independentes

Quando fazemos um experimento, variamos alguma propriedade do sistema estudado ou do aparato experimental, de forma a registrar como o comportamento do sistema muda em resposta a essa variação. Por exemplo, podemos variar a altura inicial h de uma esfera metálica numa rampa de lançamento e observar como o seu alcance varia, ou mudar o ângulo de incidência θ de raios X sobre um cristal e observar a variação na intensidade medida em um detector de raios X em função de θ .

A propriedade que variamos de forma controlada e deliberada é chamada de variável independente do experimento (VI), enquanto a propriedade que monitoramos é chamada de variável dependente (VD). Como dito na introdução, nem sempre temos um modelo para descrever o comportamento do sistema e fazer previsões. Contudo, em experimentos sempre observamos como uma variável dependente muda em função das alterações que fazemos.

Em alguns casos, fazemos observações em vez de experimentos, monitorando como uma grandeza varia de forma espontânea, geralmente com o passar do tempo. Neste caso, a variável independente será o tempo.

■ **Exemplo 2.2 — O pêndulo simples.** Após estudar o modelo que descreve o pêndulo simples, o grupo identificou que a variável independente no experimento é o comprimento da linha de costura, que pode ser variado de forma controlada pelo grupo em um conjunto de valores que permita uma boa análise. A variável dependente é o período do pêndulo, que deve aumentar à medida que o comprimento da linha aumenta. ■

2.1.2 Regiões de interesse no modelo

Gráficos são uma boa ferramenta para identificar regiões de interesse em um modelo. Por exemplo, permitem identificar faixas de valores para as quais a variação da VI leva a mudanças mais significativas na VD. Regiões mais sensíveis são úteis para minimizar a influência das flutuações aleatórias sobre a qualidade dos dados. Também podemos ver como o modelo prevê que o comportamento da VD em função de VI muda se alterarmos um parâmetro P do modelo, cujo valor queremos descobrir. Ao variar o valor de P em torno de um valor esperado (tipicamente obtido por outros experimentos ou previsões teóricas) podemos identificar faixas de valores da VI para as quais os valores da VD são mais sensíveis à mudança de P.

■ **Exemplo 2.3 — O pêndulo simples.** Na Fig. ?? podemos ver a curva de T em função de L para três diferentes valores de g: 9.4 m/s^2 (linha vermelha), 9.8 m/s^2 (linha preta) e 10.2 m/s^2 (linha azul). Pode-se perceber que os valores de T previstos para cada valor de g se tornam mais distinguíveis à medida que L aumenta, indicando que medições usando comprimentos maiores de L podem levar a uma melhor estimativa do valor de g. A partir do gráfico também podemos estimar qual a resolução da medição do período necessária para podermos estimar g com uma dada incerteza. ■

2.2 Escolha do tipo de medição a ser feita

Após ter completado o estudo do modelo, identificando a VI, a VD e qual faixa de valores da VI deve ser explorada para observar o comportamento mais interessante da VD, respeitando as suposições do modelo, você e seu grupo poderão escolher o tipo de medição a ser feita, em função dos objetivos do experimento.

■ **Exemplo 2.4 — O pêndulo simples.** O estudo do pêndulo simples terá dois objetivos:

1. estimar um valor para a aceleração da gravidade (g) a partir dos dados experimentais e do modelo construído para descrever o pêndulo simples,

2. identificar desvios no comportamento do pêndulo em relação à previsão do modelo, mesmo quando as suposições de pequenas oscilações em um único plano, com $R \ll L$ são obedecidas.

Para atingir o primeiro objetivo, o grupo lançará mão da linearização da equação para o período do pêndulo, para poder fazer um ajuste por MMQ da função linearizada $T^2 = L/g$ aos dados, devidamente tratados para se adequar à linearização — ou seja, usando pares (T^2, L) em vez de (T, L) . Assim, deverão realizar medições de período em função de diferentes comprimentos do fio.

Na etapa de identificação de regiões de interesse, o grupo decidiu usar os comprimentos mais longos possíveis, colocando o ponto de fixação do pêndulo próximo ao teto da sala. O grupo

decidiu utilizar a análise do vídeo do movimento do pêndulo, gravado em um celular com taxa de 30 qps, correspondendo a uma resolução temporal de 0.03 s. Como perceberam que uma resolução de 0.01 s é necessária para ter uma incerteza em g da ordem de 0.08 m/s^2 , decidiram medir T dividindo por 3 o tempo necessário para que o pêndulo complete 3 oscilações e, para reduzir a incerteza do período, decidiram repetir o experimento 5 vezes para cada valor de L . ■

2.3 Resultados preliminares

É fundamental que o planejamento contenha alguns resultados preliminares. No caso do exemplo do pêndulo simples, não basta trazer apenas o valor de dois períodos do pêndulo, medidos para dois valores diferentes de L , em uma tabela. Primeiro porque, como lembramos no capítulo ??, dois pontos não são um conjunto de dados suficiente para realizar um ajuste por mínimos quadrados de uma função linear.

Como um objetivo do experimento é encontrar o valor de g a partir do movimento do pêndulo, é preciso completar a análise dos dados e chegar a um valor de g obtido a partir dos dados preliminares. Só assim podemos avaliar se o procedimento escolhido é realmente adequado e se a sua execução aconteceu sem erros por parte dos experimentadores.

3. O relatório

A principal forma de avaliarmos o trabalho experimental feito pelos grupos é através de relatórios. Um relatório de experimento é um texto feito para explicar o quê foi feito pelo grupo, quais foram os dados obtidos e como foram analisados, seguido de uma discussão do significado da análise, a partir de um contexto dado pelos objetivos propostos para o experimento em seu roteiro.

Seguir uma formatação rígida não é necessário em F 229, mas esperamos que os relatórios contenham alguns itens, explicados abaixo na seção 3.1. São informações sobre o conteúdo esperado, para garantir que o essencial sobre o trabalho feito no experimento esteja no relatório e possa ser avaliado.

3.1 Estrutura geral

Após terminarem a coleta e análise dos dados vocês deverão redigir, utilizando linguagem científica clara e objetiva, **um relatório em PDF de, no máximo, cinco páginas**. Além das cinco páginas de relatório também são permitidos apêndices¹ com informações suplementares (em número razoável de páginas). É importante mencionar a existência das informações suplementares no texto principal (cinco primeiras páginas).

De forma geral, o relatório deve conter:

1. Um resumo de um parágrafo, explicando qual fenômeno foi estudado, qual era o objetivo do experimento, como os dados foram coletados, quais os resultados obtidos (incluindo suas incertezas) e que julgamento o grupo faz a respeito dos resultados em contraste com o modelo usado (se estão de acordo com o esperado pelo modelo ou não).
2. Uma breve explicação a respeito do sistema ou fenômeno físico que está sendo estudado.
 - (a) Não copie a introdução do roteiro. Façam um texto breve com alguns parágrafos mostrando o que vocês entenderam a respeito do sistema. Incluem a equação modelo. Uma demonstração de como obtê-la não é necessária, mas pode ser incluída como apêndice.
 - (b) Se vocês consultarem livros ou artigos para preparar a explicação, lembrem-se de fazer a citação adequadamente e colocar a referência ao final do texto principal.
3. Um diagrama ou foto do aparato experimental, identificando todas as suas partes.
 - (a) Neste caso vocês não montaram o aparato, então podem usar uma foto retirada de um dos vídeos. Pedimos isto para que vocês pratiquem a elaboração de diagramas, que serão fundamentais quando forem apresentar aparelhos montados por vocês.
 - (b) Toda parte do aparelho que é mencionada no texto deve estar indicada no diagrama.
4. A identificação clara das suposições feitas pela equação modelo utilizada pelo grupo para descrever o comportamento do sistema.
 - (a) Embora seja importante escrever um texto que possa ser lido de forma fluida, também é fundamental que fique claro para a equipe de F 229 que vocês entenderam quais são as suposições utilizadas.
 - (b) Um exemplo de como ser claro é escrever “As suposições utilizadas para chegar a esta equação modelo foram”.

¹Apêndices são textos ou outros materiais (fotos, vídeos, tabelas) produzidos pelos autores, mas que não são essenciais ao entendimento do texto principal, trazendo informações suplementares. Anexos são textos ou outros materiais produzidos por terceiros e incluídos para melhorar o entendimento do texto principal.

- (c) Se as suposições são válidas para apenas parte das medições, isso deve ser dito claramente e o possível impacto sobre os resultados deve ser discutido.
5. Um relato do que fizeram para obter os dados (procedimento experimental, ou métodos).
 - (a) O relato deve ser detalhado o suficiente para que uma pessoa que tenha experiência no uso dos programas utilizados por vocês seja capaz de repetir a mesma coleta de dados.
 - (b) É importante deixar claras as precauções tomadas para minimizar a ação das fontes de incerteza (outras que não as incertezas dos instrumentos de medição).
 6. Uma explicação sobre como os dados foram tratados.
 - (a) Detalhamentos de cálculo para linearização de funções, por exemplo, podem ser coloados nos apêndices.
 7. Explicação sobre como estimaram incertezas, incluindo uma tabela de orçamento de incertezas.
 - (a) Lembrem-se que as incertezas instrumentais são apenas parte das fontes de incerteza. Vocês são livres para estimar outras fontes e atribuir a elas valores com bases em distribuições de probabilidades que tenham um significado adequado à forma como fizeram a estimativa. Para relembrar as distribuições de probabilidade mais comuns, consultem o documento Introdução à Incerteza de Medições.
 8. Gráficos representando os dados e o tratamento numérico.
 - (a) Gráficos são uma forma importante de comunicar informação. Portanto devem ter letras e números legíveis, devem apresentar barras de incertezas e os pontos experimentais não devem estar unidos por traços.
 - (b) Linhas representando ajustes numéricos ou funções devem ser coloridas e identificadas na legenda, colocada abaixo do gráfico e começando por "Figura #", onde # é substituído pelo número da figura no texto.
 - (c) É importante que haja referências no texto a todas as figuras que forem inseridas. Figuras não são elementos isolados e fazem parte do texto.
 9. Uma discussão a respeito dos resultados obtidos para I e a via cronometragem e via o rastreamento de objetos do programa Tracker. A discussão deve levar em conta a análise de desvios sistemáticos nos tempos medidos via cronometragem.
 - (a) Ao escrever a discussão dos resultados, levem em conta os objetivos apresentados no roteiro. Queremos que vocês façam a discussão focada não em "(não) atingimos os objetivos", mas mostrando como os temas que apresentamos se manifestaram no experimento e afetaram a qualidade dos resultados.
 10. Uma conclusão a respeito do trabalho de vocês, tendo em conta os objetivos deste roteiro.
 - (a) A conclusão é o momento de dizer concretamente o que vocês aprenderam sobre o sistema e sobre os conceitos de Física Experimental apresentados no roteiro ao fazer o experimento. Vocês também podem fazer comentários e sugestões sobre como melhorariam o aparato experimental.

Nas próximas sessões vamos aprofundar mais alguns dos aspectos listados acima, falando sobre como escrever um texto em linguagem científica, como fazer bons gráficos, como descrever sua análise de dados e, por fim, como fazer uma boa discussão dos resultados.



ATENÇÃO: O relatório será corrigido utilizando uma rubrica disponível no Moodle da disciplina. Antes de enviar sua versão final para avaliação, certifiquem-se de que todos os critérios da rubrica foram atendidos de forma clara.

3.2 Escrita científica

Ao escrever um texto científico, a principal meta deve ser garantir que este seja o mais claro possível para um leitor que não acompanhou o trabalho realizado. É comum confundir a linguagem científica com uma linguagem mais rebuscada, mas muitas vezes o uso de frases rebuscadas acaba reduzindo a clareza do texto e pode gerar ambiguidades. Da mesma forma, a linguagem informal também pode levar a ambiguidades e é geralmente imprecisa demais para relatar de forma adequada um experimento. Um conselho frequente é tentar usar frases curtas e diretas, agrupadas em parágrafos que girem em torno de uma mesma ideia ou assunto. Quando começarem a falar de outro assunto, mude de parágrafo.

Um equívoco que todos cometemos ao começar a escrever relatórios é assumir que estamos escrevendo apenas para a pessoa que irá corrigí-lo. É importante também garantir que todas as informações necessárias para que uma pessoa que esteja cursando uma graduação em Ciências Exatas mas não sabe nada do experimento possa entender o que foi feito.

Para melhorar sua escrita científica, as duas melhores estratégias são ler e escrever textos científicos com frequência. Para dar a você a oportunidade de ler alguns artigos científicos, fizemos uma seleção de textos da Revista Brasileira de Ensino de Física e dos Cadernos Brasileiros de Ensino de Física. Os textos estão disponíveis no Moodle da disciplina. Já a escrita científica será praticada ao longo da disciplina, por meio dos relatórios e do caderno de laboratório. Mesmo que as atividades não sejam feitas de forma presencial e o caderno padrão do IFGW não esteja disponível, é importante ter um caderno onde você possa manter anotações organizadas a respeito dos experimentos. Neste caso, seu caderno deve ter anotações claras e detalhadas o suficiente para que você consiga entender ao lê-lo meses ou até mesmo anos depois do experimento ter sido realizado.

3.3 Figuras: diagramas, ilustrações e gráficos

Em seu relatório, além do texto vocês também deverão incluir figuras, que serão tipicamente de três tipos: diagramas, ilustrações e gráficos. Figuras são sempre numeradas e acompanhadas de legendas explicativas.

Os diagramas são desenhos esquemáticos, por exemplo do aparato experimental, que indicam claramente todos os componentes importantes para que o aparato possa ser reproduzido por outra pessoa que queira repetir seu experimento, geralmente utilizando setas e rótulos, na forma de letras ou números, que serão devidamente identificados na legenda. Um bom diagrama deve ser claro e fácil de entender, mas não precisa ser um desenho realista do aparato. De fato, desenhos realistas geralmente acabam introduzindo elementos que confundem o leitor e dificultam o entendimento do que realmente importa no aparato.

Uma ilustração é uma representação do sistema físico ou de um fenômeno, por exemplo para mostrar um processo físico de forma muito mais eficaz que uma descrição por texto. Assim como no caso do diagrama, a legenda da ilustração deve explicar suas partes de forma clara.

Os gráficos são uma forma visual de transmitir uma grande quantidade de informações que não seriam facilmente transmitidas por escrito, por exemplo por meio de tabelas ou de uma descrição do comportamento do sistema. Você pode encontrar mais informações sobre como gerar bons gráficos, em diferentes softwares, no capítulo ?? e em um vídeo sobre o assunto, disponível no Moodle da disciplina.

- ! Os números e letras em uma figura devem ser legíveis, de preferência ajustados para ter o mesmo tamanho da fonte usada no texto. Isso não significa, necessariamente, utilizar o mesmo tamanho de fonte diretamente no programa em que você gerou a figura. Às vezes é preciso fazer alguns testes até encontrar o valor de tamanho de fonte correto para que tudo fique legível quando a figura for colocada no texto.

Embora sejam imagens, as figuras são também parte do seu texto. Assim, você deve garantir que o texto mencione todas as figuras utilizadas e que elas apareçam em uma ordem que faça sentido no texto. Nunca fale da figura 2 antes de ter apresentado a figura 1. Se você sentir a necessidade de falar sobre a figura 2 primeiro, considere mudar a ordem das figuras.

3.4 Análise de dados

Ao falar sobre como foi feita a análise dos dados experimentais, é importante ter a mesma preocupação que guia a escrita dos procedimentos experimentais: devemos garantir que alguém que leia o relatório seja capaz de repetí-lo. Assim, vocês devem sempre deixar claras todas as manipulações feitas com os dados brutos.

Ao ler a explicação sobre a análise de dados, deve ser possível utilizar os dados brutos para chegar às mesmas figuras e aos mesmos valores para os parâmetros obtidos por MMQ e para as grandezas físicas deles derivadas. No caso do resultado de um ajuste por MMQ, é importante apresentar os valores obtidos para os parâmetros, permitindo que o leitor tire conclusões a respeito da qualidade do ajuste.



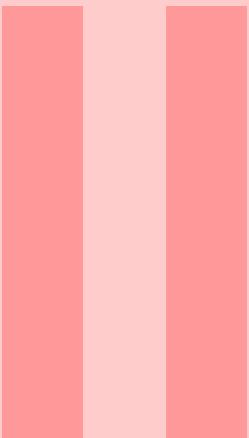
Todos os valores devem sempre ser apresentados com suas respectivas incertezas. Por exemplo, um valor de 0,001 para um coeficiente será interpretado diferentemente se for apresentado como $0,0010 \pm 0,0003$ ou como $0,001 \pm 0,003$. No primeiro caso, o coeficiente é significativo, enquanto no segundo não.

3.5 Discutindo seus resultados

A escrita do relatório é um trabalho a ser feito por todo o grupo. Embora algumas partes possam ser divididas entre os integrantes para agilizar a redação, a discussão, que é o coração do relatório, deve ser feita por todos. Discutir os resultados significa interpretar o que foi obtido durante a análise de dados dentro do contexto dos objetivos do experimento. Esta não é uma tarefa simples e é preciso muita prática para aprender a fazer boas discussões.

Nos roteiros de F 229 apresentaremos alguns questionamentos, para guiar a discussão do grupo. Estes servem para guiar a discussão, mas não devem ser apresentados na forma de perguntas e respostas. Trabalhem para escrever um texto que apresente o raciocínio de vocês na construção da resposta a partir dos dados.

Toda a discussão e as conclusões que o grupo tirar, sejam provocadas pelas questões propostas ou então por ideias que tenham surgido no grupo, devem ser corroboradas pelos dados experimentais e sua análise. Não é correto escrever uma discussão que vá na direção contrária do que os dados indicam — por exemplo dizendo que duas grandezas são diretamente proporcionais quando os dados apontam para uma relação quadrática. Quando o grupo quiser discutir suposições, devem deixar claro sua natureza especulativa e dizer por quais motivos o grupo acredita que as suposições sejam verdadeiras.



Ferramentas digitais

4	Tracker	25
4.1	Instalação	
4.2	Princípios básicos	
4.3	Exemplo passo-a-passo	
5	SciDAVis	41
5.1	Configurações Básicas	
5.2	Apresentação dos Dados	
5.3	Régressão Linear	
5.4	Barras de Incerteza	
5.5	Escala Logarítmica	
5.6	Equação Característica	
5.7	Gráficos de Múltiplas Variáveis	
6	Python	61
6.1	Configurações Básicas	
6.2	Apresentação dos Dados	
6.3	Régressão Linear	
6.4	Barras de Incerteza	
6.5	Escala Logarítmica	
6.6	Equação Característica	
6.7	Gráficos de Múltiplas Variáveis	
7	Phyphox	93

4. Tracker

Com o aumento da capacidade dos processadores dos computadores pessoais desde o início dos anos 2000, tornou-se possível realizar a extração de dados a partir da análise de vídeos de experimentos em disciplinas de Física experimental básica. Um exemplo de programa que permite extrair dados do movimento de objetos a partir de vídeos é o Tracker, que é gratuito e implementado em java. Em F 229 utilizaremos o Tracker nos experimentos 1, 2 e 4, cujos roteiros se encontram respectivamente nos capítulos 8, 10 e 12.

O Tracker possui uma documentação bastante completa, incluindo guias em vídeo. Daremos aqui alguns conselhos básicos sobre o programa e detalhes mais específicos podem ser encontrados diretamente em seus arquivos de Ajuda.

4.1 Instalação

Para instalar o Tracker, baixe o instalador em <https://phslets.org/tracker/>. Há versões para Windows, Mac OS e Linux. Além do programa você também pode instalar uma série de exemplos que são úteis para mostrar as capacidades do programa e o funcionamento de suas funções.

4.2 Princípios básicos

EM F 229 o nosso interesse principal é utilizar o Tracker para rastrear a posição de objetos e obter tabelas de posição em função do tempo. O programa também oferece outras funções para processamento de vídeos, que você pode explorar livremente mesmo que não sejam solicitadas durante a disciplina. Você pode até mesmo decidir usá-las durante algum dos experimentos, caso julgue que poderá obter resultados interessantes. Na figura 4.1 mostramos a tela inicial do Tracker, que é dividida em três grandes regiões de interesse: em vermelho destacamos a janela onde será exibido o vídeo, em verde a janela em que são exibidos gráficos e em azul a janela onde são mostrados os dados para as grandezas medidas usando o rastreamento. Abaixo da janela do vídeo fica a barra de controle, destacada na figura 4.2. Nela é possível definir o trecho do vídeo que deve ser analisado pelo programa, avançar o vídeo de um número definido de quadros e acompanhar o tempo decorrido correspondente a um dado quadro.

O programa abre os vídeos permitindo acesso a todos os seus quadros e permite procurar a posição de um padrão, definido pelo usuário em um quadro inicial, nos quadros do vídeo. Este padrão é um pedaço da imagem, geralmente selecionado por conter um objeto (ou parte dele) cuja posição se deseja conhecer em função do tempo. A busca pelo padrão selecionado pode ser feita manualmente, com o usuário selecionando a posição do centro do padrão em cada quadro, ou automaticamente. Neste último caso é preciso configurar os parâmetros da busca para ter bons resultados.



O processo de análise dos vídeos pode ser pesado para alguns computadores. Embora o ideal seja que todos os integrantes do grupo participem desta análise, nem sempre será possível. Você não sofrerá penalidades se não conseguir rodar o Tracker em seu computador.

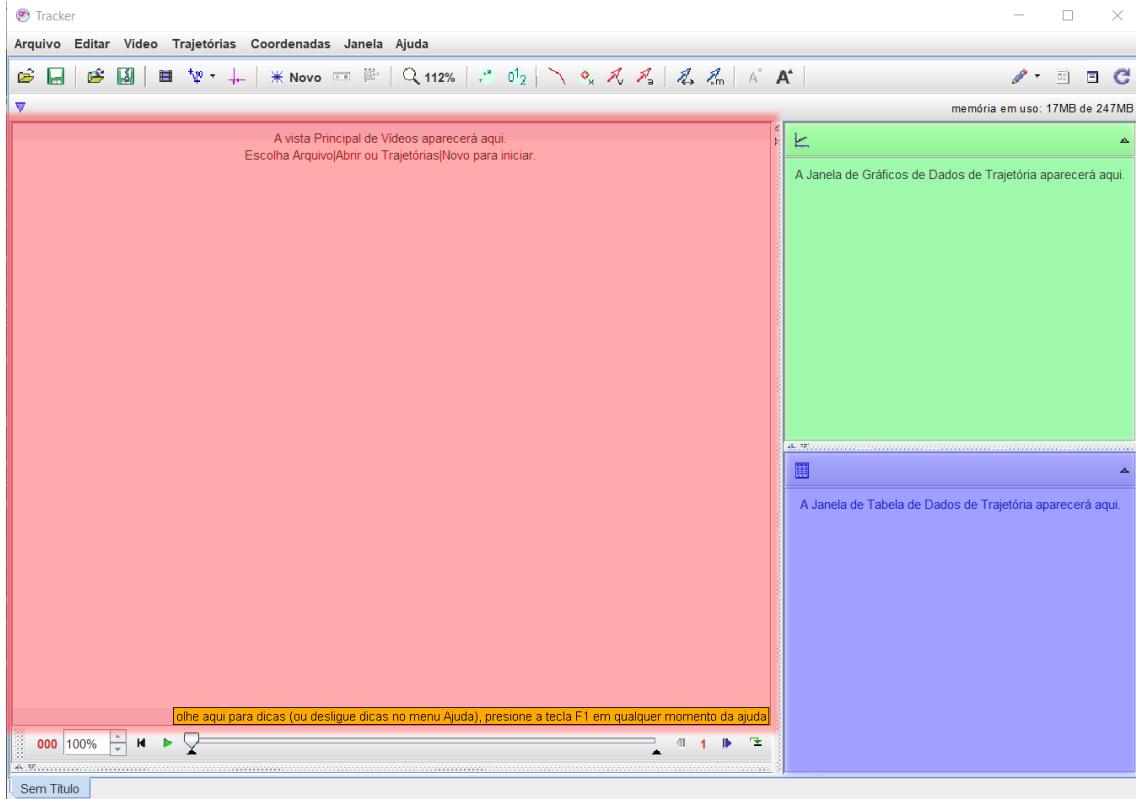


Figura 4.1: Tela inicial do Tracker, antes de carregar um vídeo. Em vermelho destacamos a região onde é exibido o vídeo. Em verde a área onde, nas definições padrão, são exibidos gráficos. A área azul, nas definições padrão, contém as tabelas com dados obtidos a partir do rastreamento.

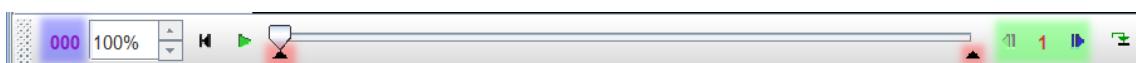


Figura 4.2: Barra de controle de vídeos. Em vermelho estão destacados os marcadores de início e fim da parte do vídeo a ser analisada durante o rastreamento de objetos. Em verde os botões para retroceder ou avançar um número de quadros definido pelo usuário (para definir, basta clicar no número 1). Em azul indicamos o contador de quadros, que pode ser alterado para indicar o tempo decorrido desde o início do vídeo ou do clipe selecionado pelos marcadores.

4.3 Exemplo passo-a-passo

Vamos agora apresentar um exemplo de rastreamento, utilizando o vídeo Pendulum.mov incluído como exemplo na instalação do Tracker. Seguindo a instalação padrão, você encontrará o vídeo no caminho Documentos/Tracker/videos. Recomendamos que vocês sigam este exemplo para ver como o Tracker funciona.

4.3.1 Carregar o vídeo

Para carregar o vídeo, assim como qualquer outro que você for analisar, vá ao menu Arquivo e selecione a opção Abrir, como indicada na figura 4.3. O carregamento pode demorar algum tempo, enquanto o vídeo é decomposto em seus quadros. É possível que ao final do processo você receba um aviso sobre problemas para abrir alguns quadros. Leia com atenção os avisos que receber.

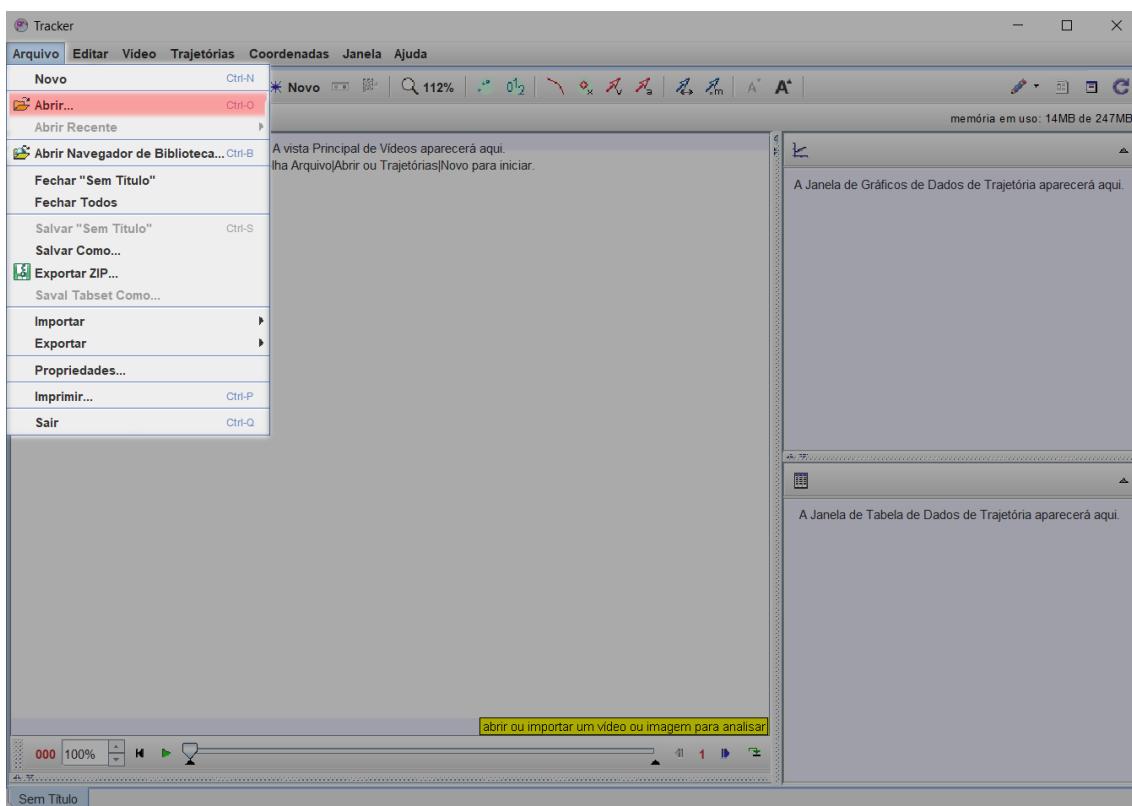


Figura 4.3: Localização da opção para abrir arquivos de vídeo, destacada em vermelho.

4.3.2 Calibração de distância e definição dos eixos de coordenadas

Após abrir o arquivo, você deverá dar algumas informações ao Tracker que não estão disponíveis automaticamente via metadados¹ do vídeo. É preciso primeiro definir uma escala, dizendo quantos pixels do vídeo correspondem a um dado comprimento conhecido. Caso a escala não seja definida, os valores obtidos pelo rastreamento serão incorretos e levarão a erros na análise dos dados. Na figura 4.4 destacamos onde encontrar o botão e a opção de incluir uma fita de calibração.

¹Os metadados são um conjunto de informações que acompanha o arquivo e contém, entre outras, a informação de quantos quadros foram gravados por segundo.

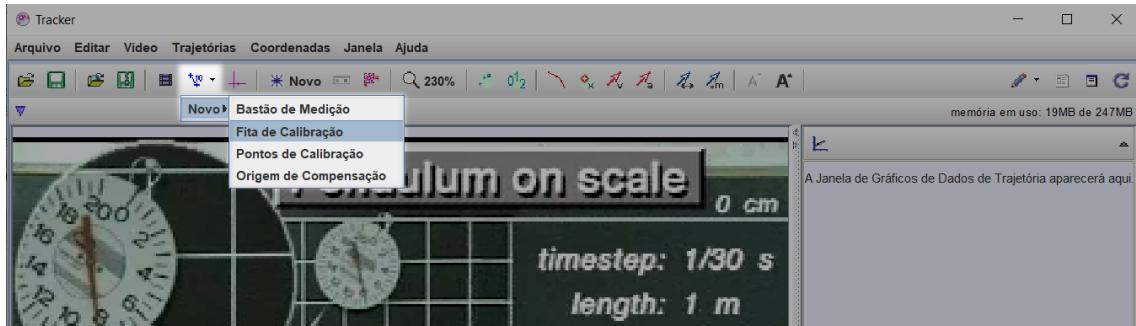


Figura 4.4: Localização do botão e menu para definir uma fita de calibração, que definirá a escala de conversão no vídeo, de pixels para distância.

Na figura 4.5 destacamos a fita de calibração no vídeo. Veja que é possível dizer ao programa a qual comprimento corresponde aquela fita. No caso, o quadro negro do vídeo tinha marcações de distância indicando distâncias em relação a um referencial. Para este exemplo, selecionamos um comprimento equivalente a 1 m.

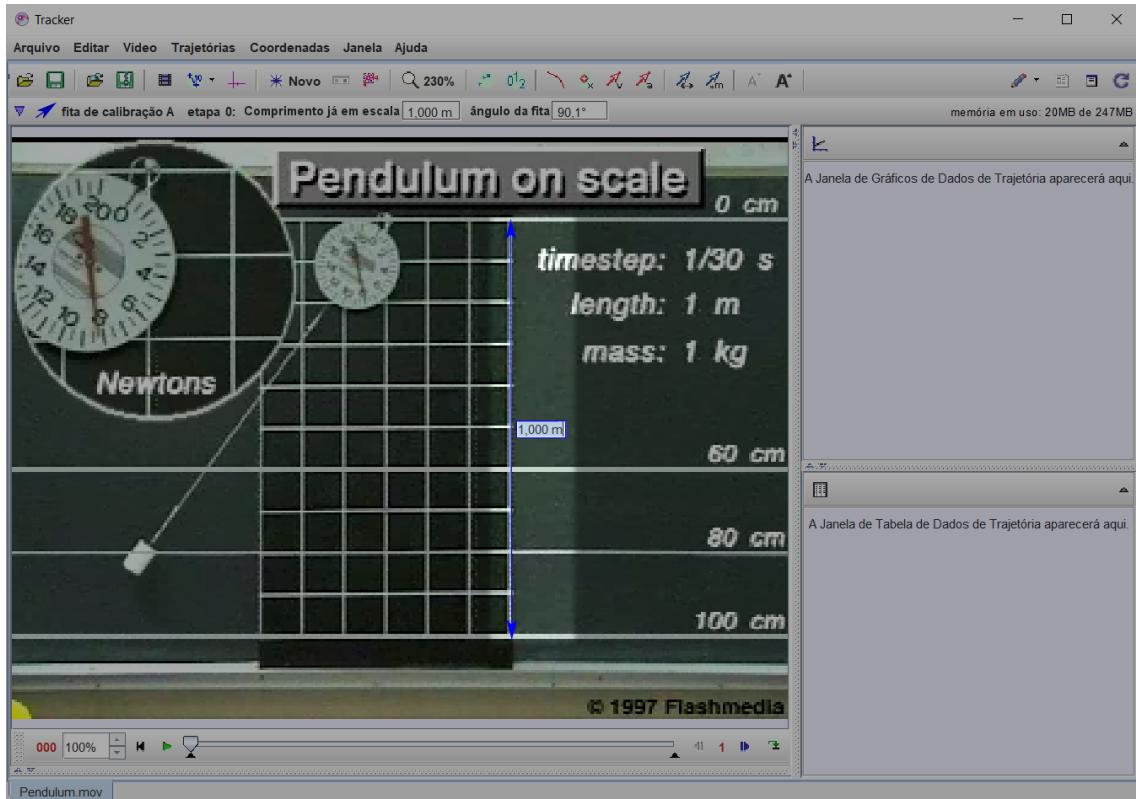


Figura 4.5: Fita de calibração, definida em um intervalo marcado no vídeo como correspondendo a 1 m.

Exercício 4.1 A definição da fita de calibração é feita com o mouse e, mesmo com o recurso do zoom, há um limite para a sua precisão. Tente estimar a incerteza na posição que é gerada por este processo. ■

O próximo passo é definir a origem do sistema de coordenadas xy . Este eixo pode ser posicionado onde você achar melhor e você também pode girá-lo, se o seu vídeo tiver uma pequena

rotação. Neste exemplo, como mostra a figura 4.6, colocamos a origem no ponto de apoio do dinamômetro. Não foi necessário definir um ângulo.

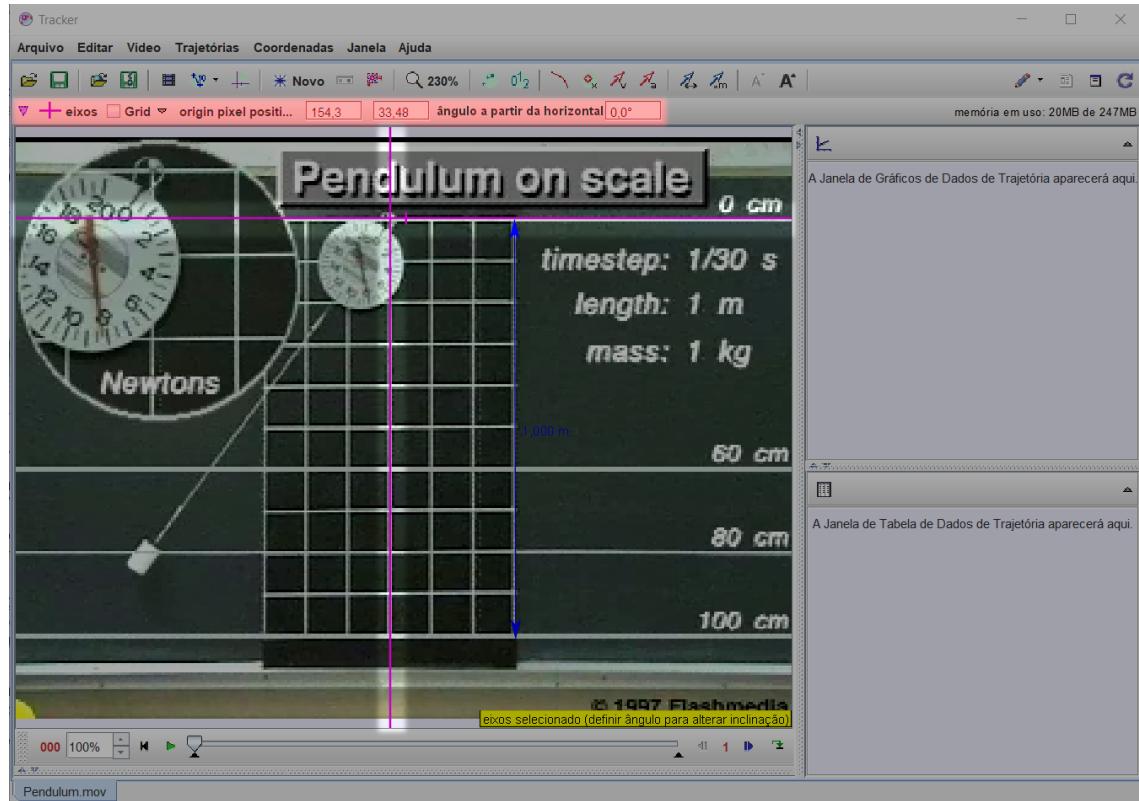


Figura 4.6: Em destaque, os eixos de coordenadas inserido no quadro de referência. Em vermelho destacamos a barra de controle dos parâmetros dos eixos, onde é possível definir sua posição (em pixels) e seu ângulo de rotação.

Com a configuração básica feita, é hora de criar um ponto de massa, que é o objeto que o Tracker associa ao padrão que será rastreado. Na figura 4.7 indicamos o botão que abre o menu de adição de pontos de massa e destacamos, em vermelho, a sua opção.

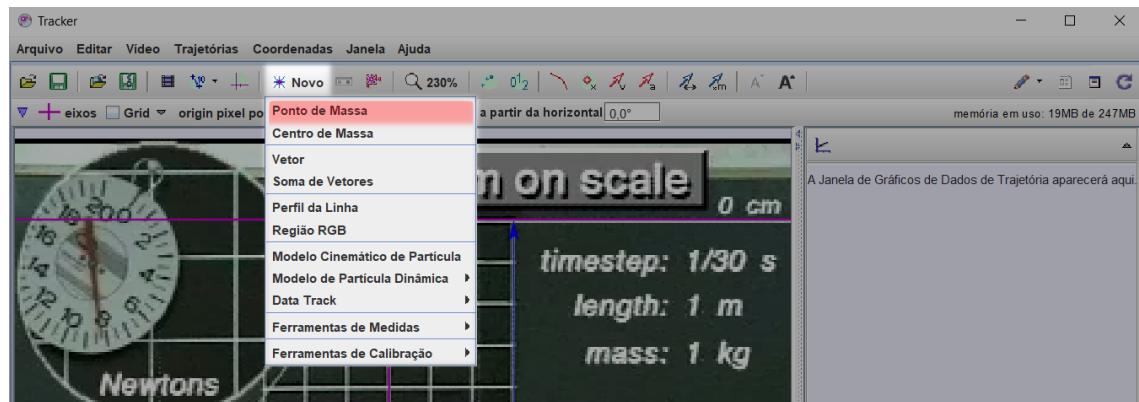


Figura 4.7: Botão para adição de pontos de massa (opção destacada em vermelho no menu) e outras opções.

Uma vez selecionada a opção de criação de ponto de massa, a tela será modificada da forma

mostrada na figura 4.8. Como indicado em vermelho na figura, é possível definir a massa do objeto, caso seja conhecida e caso seja relevante para a análise, por exemplo no cálculo da energia cinética ou quantidade de movimento do objeto. Na parte inferior da tela há um aviso (em amarelo) para utilizar o comando shift+click para marcar a posição do ponto de massa no quadro.

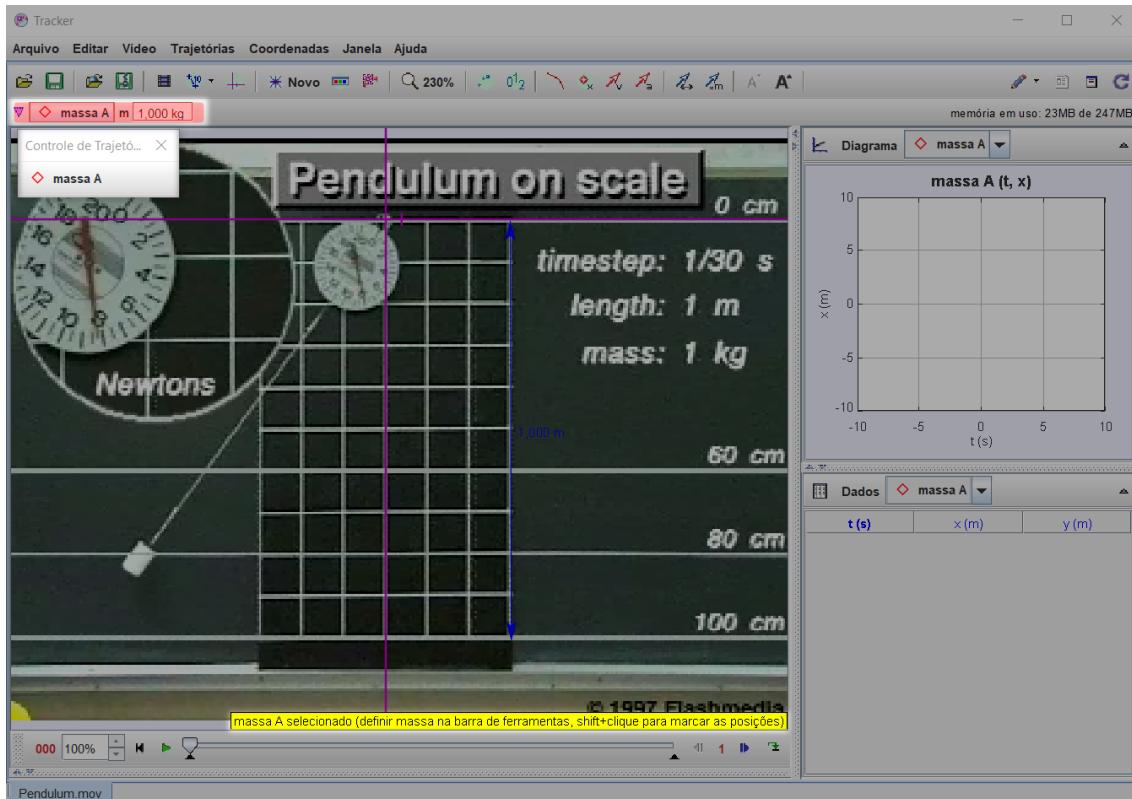


Figura 4.8: Em destaque no canto superior esquerdo, sobre a tela do vídeo, a janela de seleção de pontos de massa. Caso haja mais de um, eles aparecerão com símbolos diferentes nesta janela. Em vermelho indicamos a barra de configuração onde é possível definir a massa correspondente ao ponto que será adicionado e, no canto inferior direito da tela destacamos o aviso explicando como adicionar o ponto de massa.

- ! Ao marcar a posição inicial do ponto de massa, certifique-se de que você está no primeiro quadro do vídeo a ser analisado. Caso contrário, o Tracker fará um rastreamento incompleto do objeto.

Para fazer o rastreamento automático, contudo, é melhor não marcar imediatamente a posição do ponto de massa. Clique no botão do ponto de massa A, indicado em vermelho na figura 4.9, e selecione a opção Trajetória automática, também destacada em vermelho.

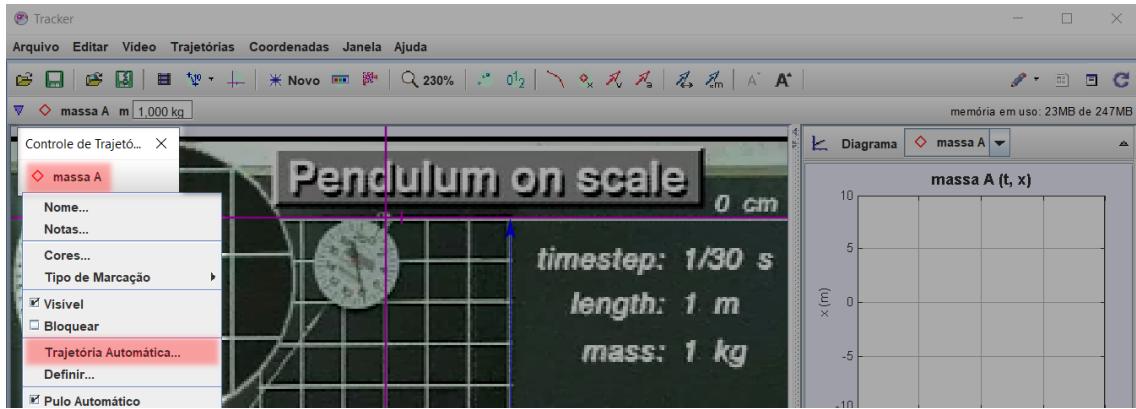


Figura 4.9: Ao clicar no botão do ponto de massa (destacado em vermelho) abre-se um menu com diversas opções, entre as quais a de Trajetória automática (também destacada em vermelho). Esta é a opção que utilizaremos para fazer o rastreamento automático da ponta do pêndulo.

A janela do rastreamento automático de posição é apresentada na figura 4.10. O modelo de imagem a ser rastreada ainda não é exibido porque o ponto de massa não foi adicionado. Os dois parâmetros de busca que podemos configurar são a Taxa de evolução e a nota de Auto marcação. A primeira é a taxa com que esperamos que o padrão mude de um quadro ao outro. Aumentar a taxa de evolução pode ajudar a detectar um padrão que muda muito de um quadro a outro (por exemplo um objeto em rotação) mas pode levar a um “atraso” entre a posição do ponto de massa e a posição real do objeto com o passar dos quadros. A segunda é uma nota dada pelo programa a quanto bem o padrão detectado no quadro corresponde ao modelo de imagem, vindo do quadro anterior. Notas maiores tornam o programa mais exigente e evitam erros, mas podem gerar mais solicitações de identificação manual.

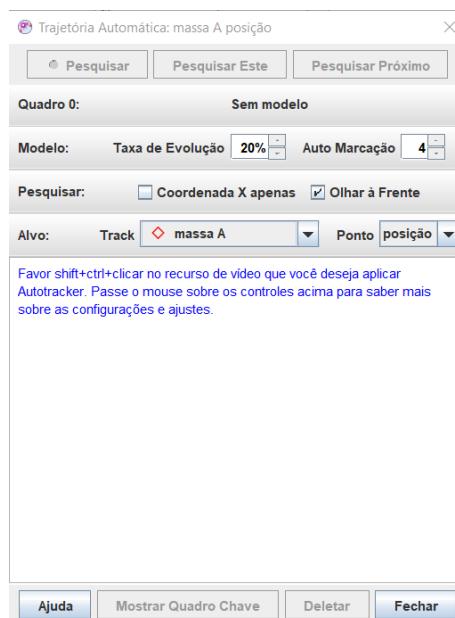


Figura 4.10: Janela para configuração da busca automática pelo padrão definido como correspondente ao ponto de massa na imagem.

Ao indicar a posição inicial do ponto de massa, a janela passará a mostrar mais informações, como indicado na figura 4.11, em que podemos ver o botão Pesquisar habilitado (ponto verde ao

lado) e a imagem do modelo e sua correspondência. Você pode alterar manualmente o tamanho do círculo que contém o modelo do objeto e também o tamanho da área de busca (retângulo vermelho destacado na imagem).

! Áreas de busca ou de padrão muito grandes podem fazer o programa demorar muito tempo em cada passo e consumir muita memória. Faça o Tracker procurar apenas o necessário para garantir que corresponda à posição do objeto.

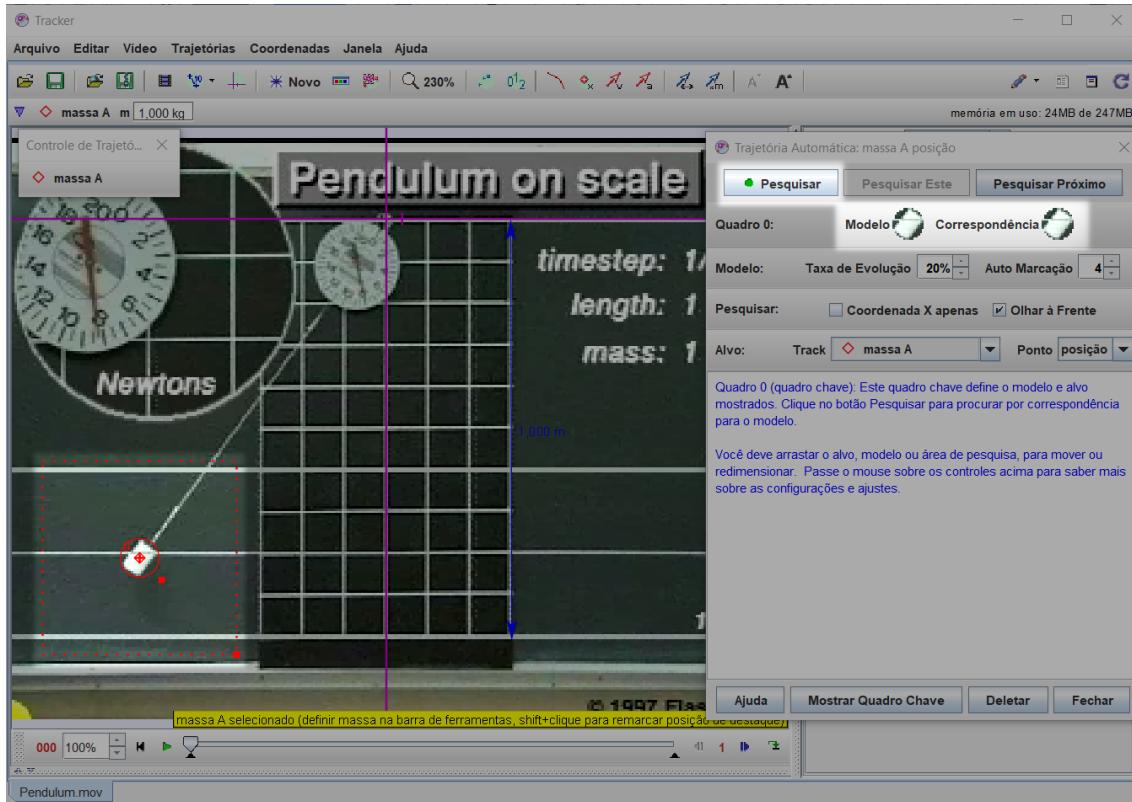


Figura 4.11: Visualização da janela completa do programa após o ponto de massa ser definido e antes do início do rastreamento. A região alvo está destacada, na parte inferior esquerda da figura. O retângulo vermelho é a área na qual o Tracker realizará a busca pela imagem contida no círculo vermelho (modelo) no próximo quadro. Caso a encontre, a posição do ponto de massa será atualizada, levando consigo o centro do círculo que define o modelo e do retângulo da região de busca. Na janela de trajetória automática estão destacados o botão de início da pesquisa e as imagens do modelo e da melhor correspondência encontrada no quadro atual.

Como o processo automático também se passa quadro a quadro e mostra a posição identificada pelo programa, é possível (e desejável) supervisionar o programa para garantir que o rastreamento não se perde gradualmente, ao longo dos quadros. É comum, em movimentos mais rápidos, que aparecem borrados em alguns quadros, que o programa comece a progressivamente perder a localização do centro (efeito colateral da alta taxa de evolução), gerando um atraso entre a posição real e a posição detectada, levando a um erro na coleta de dados.

Caso para um dado quadro a melhor nota atribuída a uma possível correspondência com o modelo seja menor que o valor estabelecido como nota de auto marcação, a busca é interrompida e o programa oferecerá a você algumas opções na janela de trajetória automática, como apresentamos na figura 4.12.

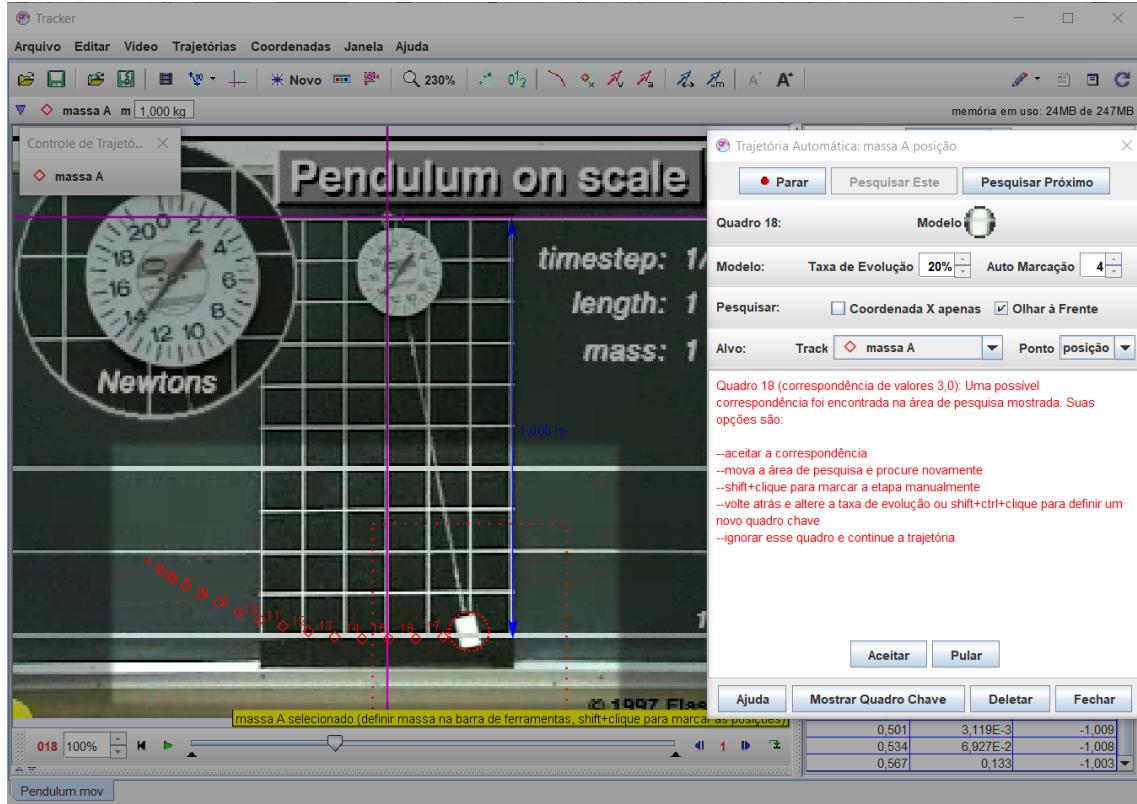


Figura 4.12: Caso em que a nota de marcação mais alta encontrada na área de busca é 3, enquanto a nota mínima configurada é 4. O programa oferece algumas opções, listadas na janela, dentre as quais a de aceitar a marcação, indicada pelo círculo em torno da região provável, marcar manualmente usando shift+click no ponto central do modelo ou então interromper a busca.

O resultado do rastreamento da posição é a construção de uma tabela de dados de posição em x e y em função do tempo. A partir destes dados o programa calcula outras grandezas, como velocidade e aceleração lineares e também grandezas em coordenadas polares. Os dados são representados nas janelas laterais, como mostra a figura 4.13. Uma vez terminado o rastreamento é possível fechar a janela de Trajetória automática sem problemas. Valores de velocidade e aceleração são calculados pelo método de diferenças finitas, e mais explicações podem ser encontradas na ajuda on-line do Tracker. A seção de ajuda sobre pontos de massa pode ser encontrada [neste link](#).

Podemos ver nas figuras 4.13c e 4.13d que os valores de grandezas derivadas dos dados principais começam a ficar mais ruidosos quanto maior a ordem da derivada temporal. Este é um efeito das diferenças finitas, que tornam mais significativas as pequenas flutuações nos dados. Em muitos casos é melhor fazer um ajuste sobre os dados brutos e calcular as derivadas do modelo ajustado.

Para tratar os dados obtidos pelo Tracker é preciso exportá-los na forma de um arquivo. A forma mais simples é copiar os dados a partir da tabela. Após selecionar as colunas de interesse na tabela, um clique com o botão direito do mouse abre o menu mostrado na figura 4.14. Após copiar os dados você pode colá-los em um arquivo de texto e salvá-lo, seja como .txt ou .csv.

A segunda opção é abrir a ferramenta de análise de dados, que pode ser acessada a partir da opção indicada em vermelho na figura 4.14. Uma nova janela, como a da figura 4.15 será aberta para que você faça uma pré-análise dos seus resultados, como indicada na figura 4.16.

É importante perceber, como destacado na figura 4.17, que o ajuste feito pelo Tracker não retorna as incertezas dos parâmetros. Esta limitação impede que os resultados sejam utilizados

diretamente para calcular o valor de grandezas em experimentos. Contudo, podem ser aproveitados como valores iniciais para ajustes feitos em outros programas, quando for possível definí-los, como no caso de ajustes não-lineares.

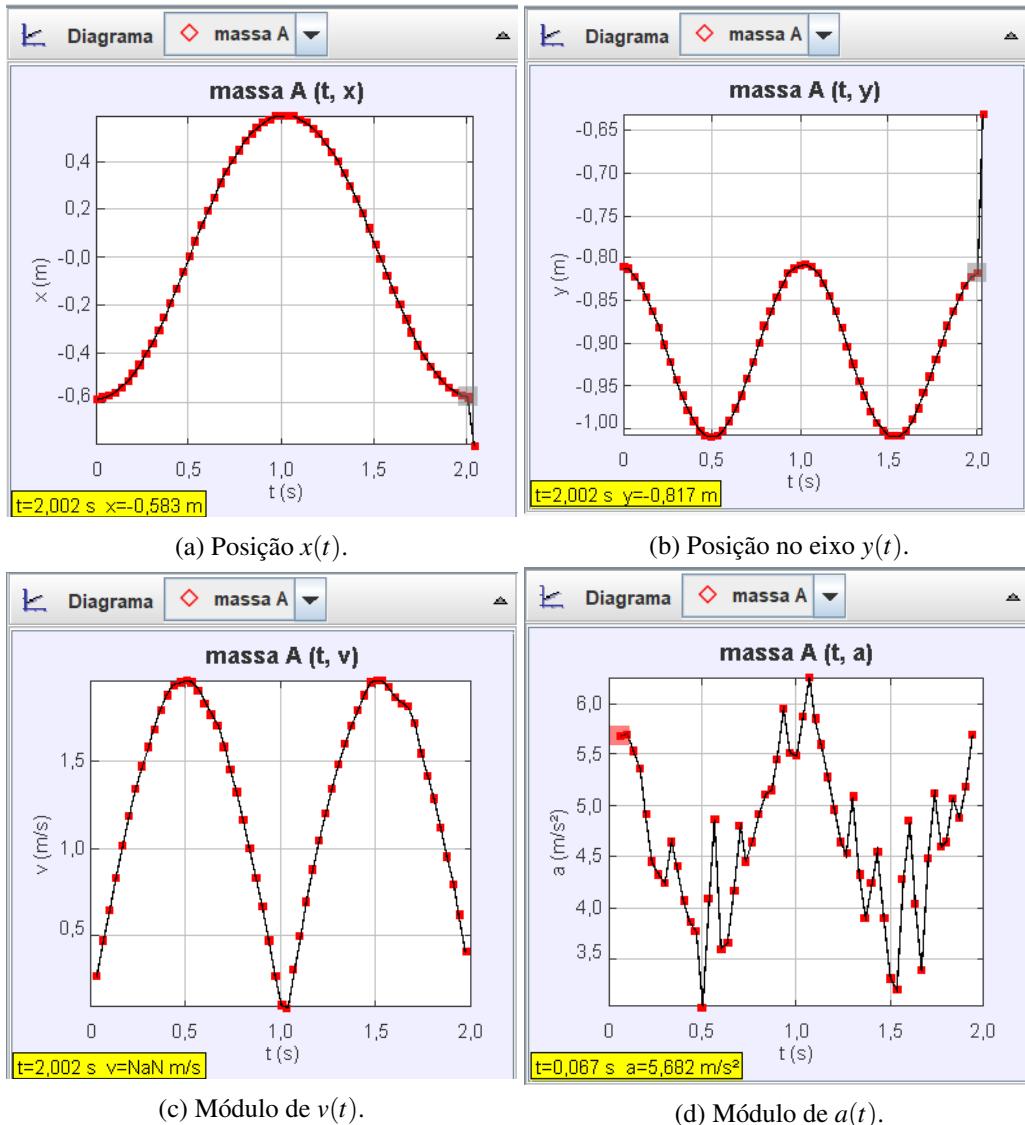


Figura 4.13: Janelas com os gráficos dos dados obtidos a partir do rastreamento da posição do pêndulo. É importante perceber que os dados de velocidade só começam a ser calculados a partir do segundo instante de tempo e os dados de aceleração a partir do terceiro. Também é importante perceber que os dados de aceleração são muito mais ruidosos que os dados de velocidade.

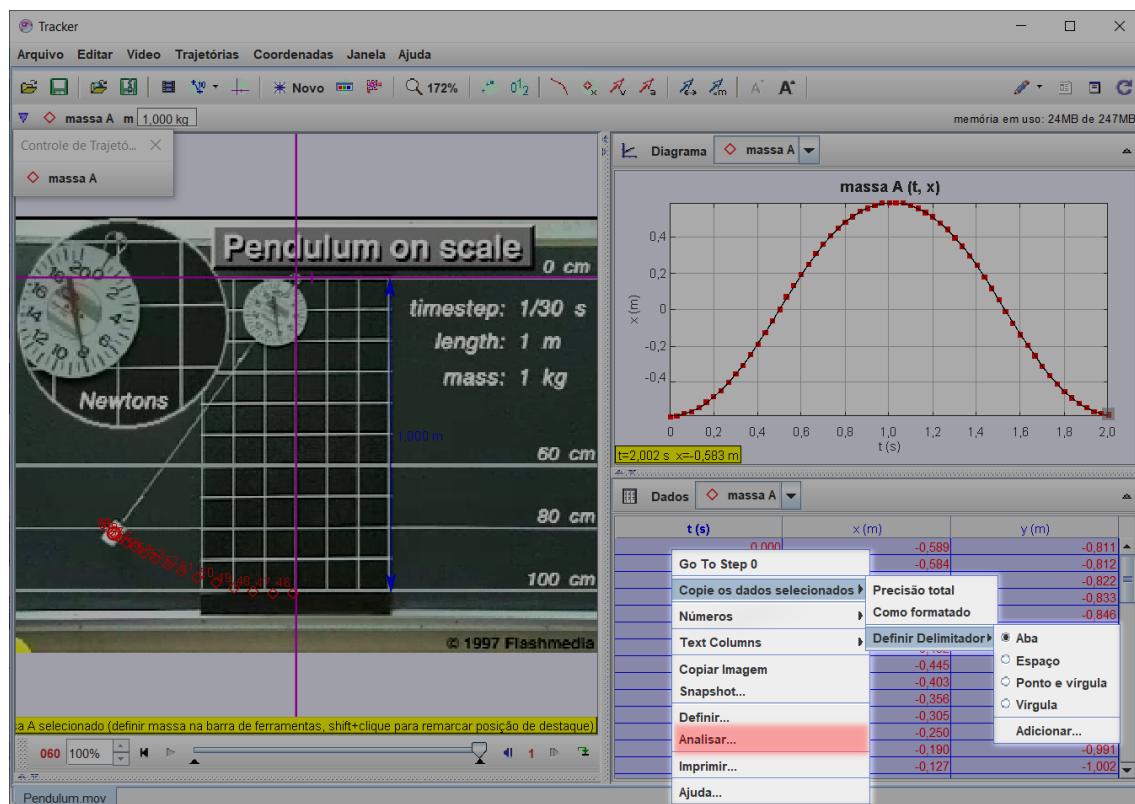


Figura 4.14: Menu para cópia de dados das tabelas geradas pelo rastreamento automático. Note que há um erro na tradução das opções de caractere de espaçamento. A opção “Aba” na verdade significa o caractere “Tab”. Você também pode escolher se o programa exportará os dados com todas as casas ou só as mostradas na tabela.

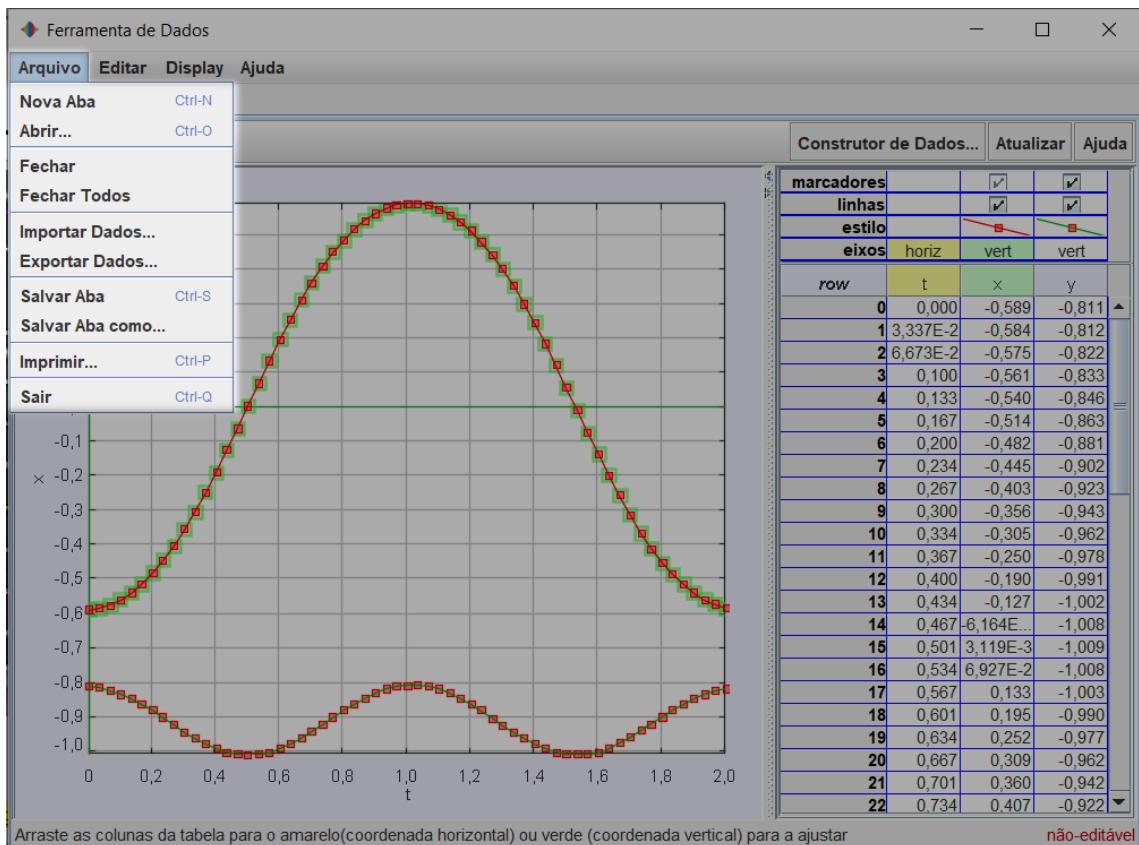


Figura 4.15: Menu para cópia de dados das tabelas geradas pelo rastreamento automático. Note que há um erro na tradução das opções de caractere de espaçamento. A opção “Aba” na verdade significa o caractere “Tab”. Você também pode escolher se o programa exportará os dados com todas as casas ou máximo de casas decimais ou apenas as mostradas na tabela.

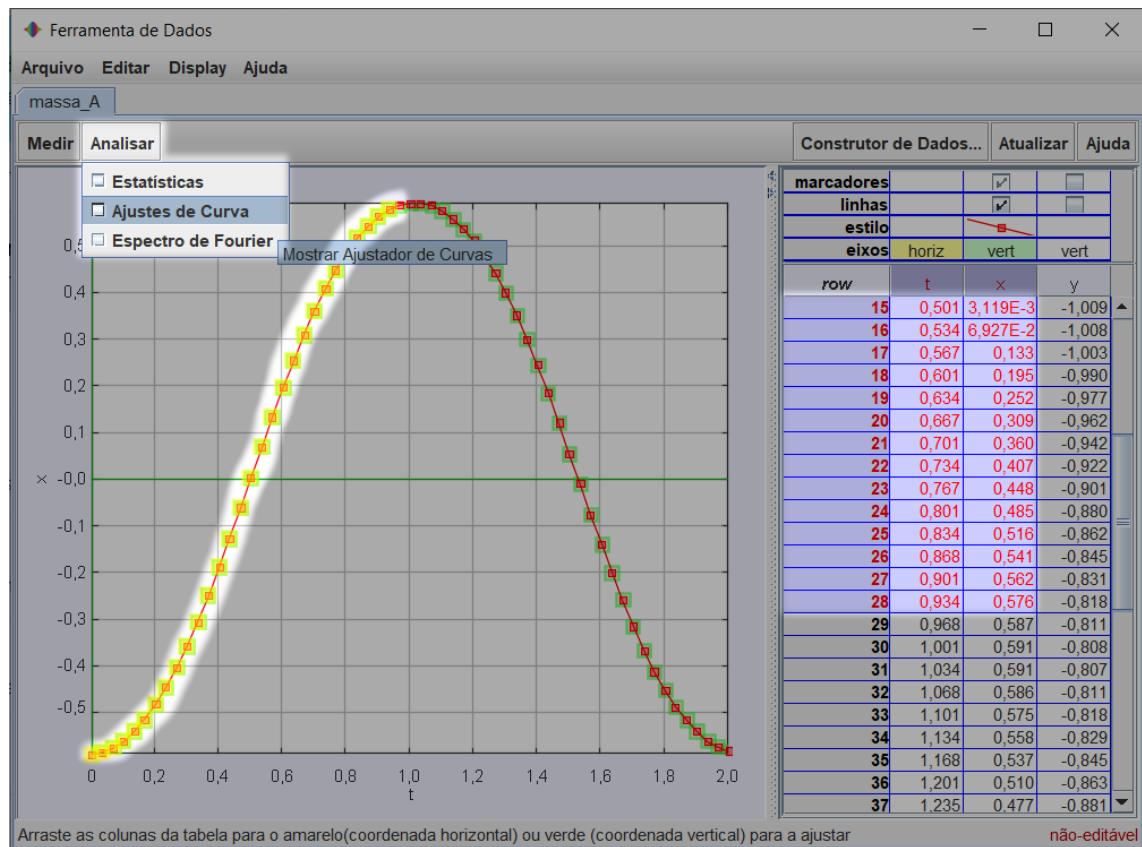


Figura 4.16: Ao selecionar dados na tabela os pontos correspondentes são iluminados em amarelo. Você pode dar início a uma análise a partir do botão Análise e da opção Ajustes de Curva, destacada na imagem.

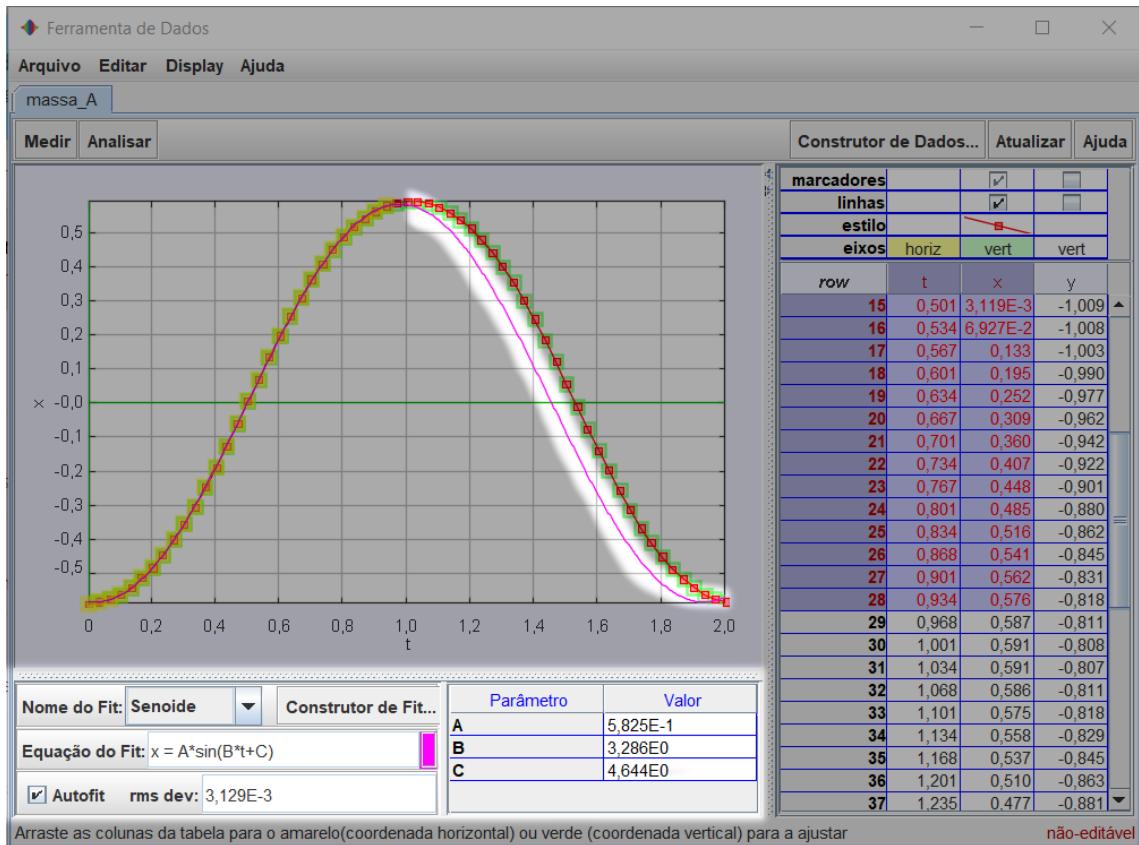


Figura 4.17: Aqui destacamos o ajuste automático de uma função senóide feito sobre os dados da oscilação do pêndulo. É possível selecionar outras funções e também construir a sua própria. Destacamos no gráfico uma parte da linha violeta da equação ajustada. Note que o ajuste difere bastante dos dados experimentais quando apenas uma parte dos dados está selecionada. Ao selecionar todos os dados você perceberá que a curva se aproxima cada vez mais dos dados.

5. SciDAVis

No começo dos anos 2000, houve um crescimento de sistemas operacionais baseados em Linux e daí surgiram várias tentativas de criar um *software* de análise gráfica de dados para a plataforma, como os que existiam para Windows. Uma dessas aplicações de maior sucesso foi o [QtIPot](#), um clone *open source* do Origin feito em Python. Em 2007, no entanto, houve um grande desentendimento na equipe de desenvolvedores e uma parte dissidente continuou o código em um novo projeto chamado SciDAVis. Atualmente, o projeto é um dos maiores da área e também pode ser utilizado em Windows e Mac OS.

Ao longo dos anos, o software acumulou várias ferramentas desenvolvidas e testadas por várias pessoas do mundo todo. Porém, nesse material será explorado apenas as funcionalidades importantes no curso de Física Experimental 2 (F 229). A divisão das seções é feita para começar com as técnicas mais básicas ([Configurações Básicas](#) e [Apresentação dos Dados](#)), seguida das intermediárias ([Regressão Linear](#) e [Barras de Incerteza](#)) e, por fim, as mais específicas ([Escala Logarítmica](#), [Equação Característica](#) e [Gráficos de Múltiplas Variáveis](#)).

5.1 Configurações Básicas

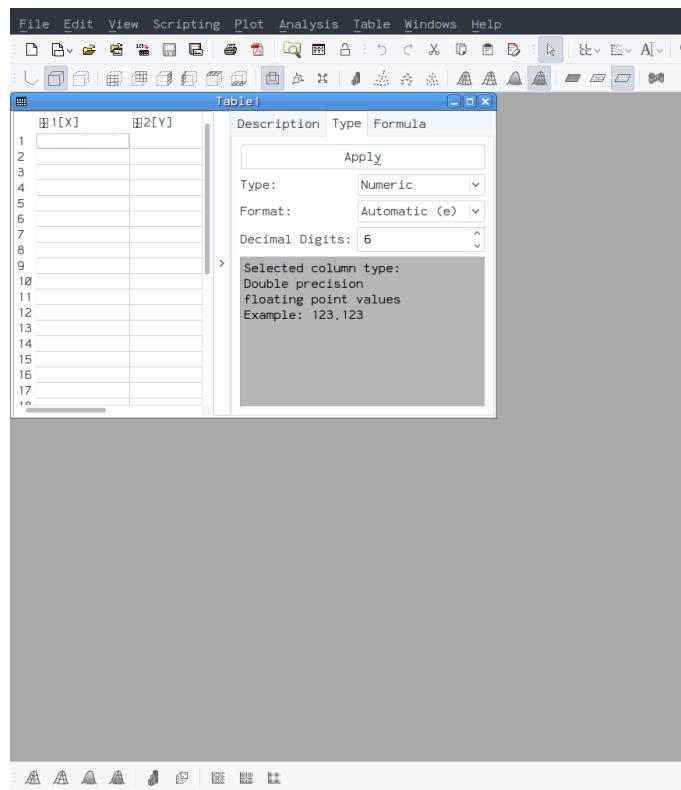


Figura 5.1: Tela inicial do software

5.1.1 Importando os Dados

Assim como no Origin, o software tem um gerenciador de tabelas próprio, apesar de simplificado, onde os dados podem ser apenas copiados e colados de outra tabela do Excel, Google Planilhas, LibreOffice Calc ou outra ferramenta do tipo. Quando os dados são importados assim, a formatação das linhas e colunas se matém. Outra opção é importar de arquivos de texto de campos separados, como o CSV e suas variações.

- ! Cuidado com o separador decimal. Em português e outras línguas europeias é mais comum encontrar a vírgula [,] como separador da parte decimal do número, enquanto nos países anglofônicos é o ponto final [.] que define a parte fracionária e a vírgula serve para separar os milhares. Dependendo da configuração do software e da formatação original dos dados, isso pode causar problemas de importação e os dados serão tratados como tipo Text.

5.1.2 Configurando as Colunas

Por padrão, as colunas são criadas com números. Para mudar isso, basta alterar as propriedades da coluna, que fica na parte direita da janela da tabela, como na figura 5.2a. Além disso, se você importar os dados de um arquivo .csv, é possível utilizar a primeira linha como nome da coluna, o *header*.

Outra coisa importante é o tipo de dado da coluna. Para a construção dos gráficos, o desejado normalmente são dados de tipos numéricos ou, às vezes, datas. Porém, é possível que os dados estejam sendo tratados como texto, como quando o programa não reconhece o separador decimal utilizado. Por isso, deve se ter o cuidado de escolher o tipo certo, seguindo a figura 5.2b, antes e depois de importar os valores.

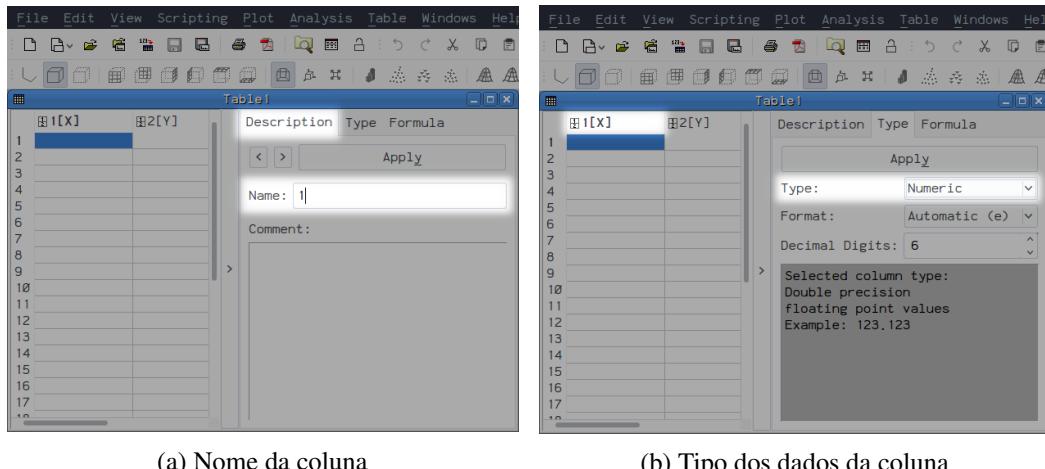


Figura 5.2: Configuração da coluna selecionada

- ! Lembre-se de pressionar o botão **Apply** sempre que alterar alguma propriedade da coluna, para realizar as alterações.

5.2 Apresentação dos Dados

Nesta seção, será tomado como exemplo a relação de corrente e tensão em um resistor, dado de forma teórica pela relação (5.1). Por mais que os dados usados aqui sejam os da figura 5.3, essa

V[X]	I[Y]
1 -3.07	-34.38
2 -2.7	-27.96
3 -1.69	-15.83
4 -1.47	-10.79
5 -0.62	-7.94
6 -0.04	-0.05
7 0.72	7.43
8 1.25	13.37
9 2.35	21.56
10 2.48	31.34
11 3.38	33.32
12	
13	

Figura 5.3: Dados de corrente por tensão, gerados por computador

parte de apresentação de dados é importante para todos os tipos de análise, em especial, para dados coletados manualmente, como é o caso da maioria dos experimentos da disciplina de F 329.

$$I = \frac{1}{R} V \quad (5.1)$$

5.2.1 Dados Pontuais

Normalmente, quando se trata de dados pontuais, às vezes é importante mostrar esses dados, além de em alguma tabela, no gráfico também. O modo de se fazer isso no software é com a funcionalidade Scatter (figura 5.4).

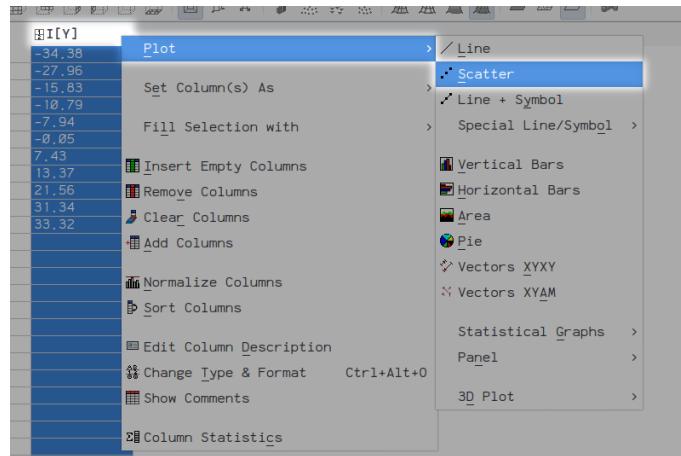


Figura 5.4: Scatter

5.2.2 Tratamento da Legenda

O software gera uma legenda padrão para os elementos desenhados no gráfico. O ideal é alterá-las para serem mais informativas. As legendas também podem ser reposicionadas apenas arrastando-as. Por padrão, o plano de fundo da legenda é transparente, mas é recomendável mudar para um plano de fundo preenchido em branco ou qualquer que seja a cor de fundo do gráfico.

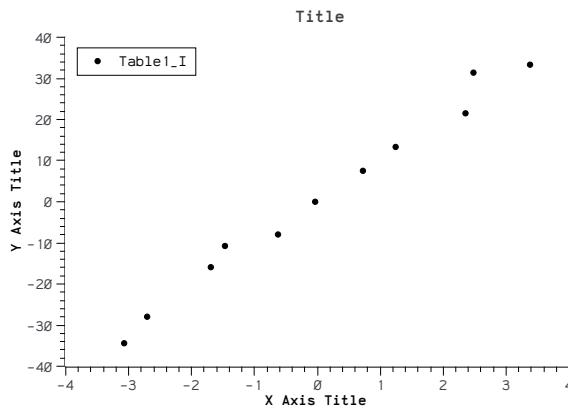


Figura 5.5: Resultado do Scatter

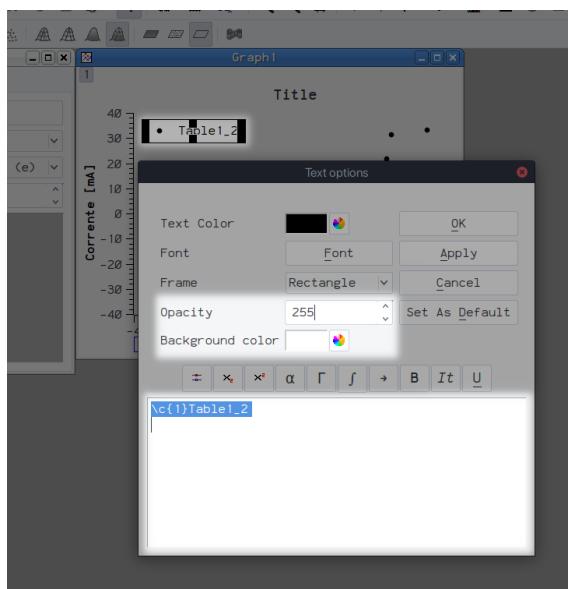


Figura 5.6: Alterando o texto da legenda

5.2.3 Formatação dos Eixo e do Título

Diferente do Origin, o software não coloca nada nos texto do gráfico, então isso deve ser feito manualmente, como é visto nas figuras 5.7a e 5.7b.

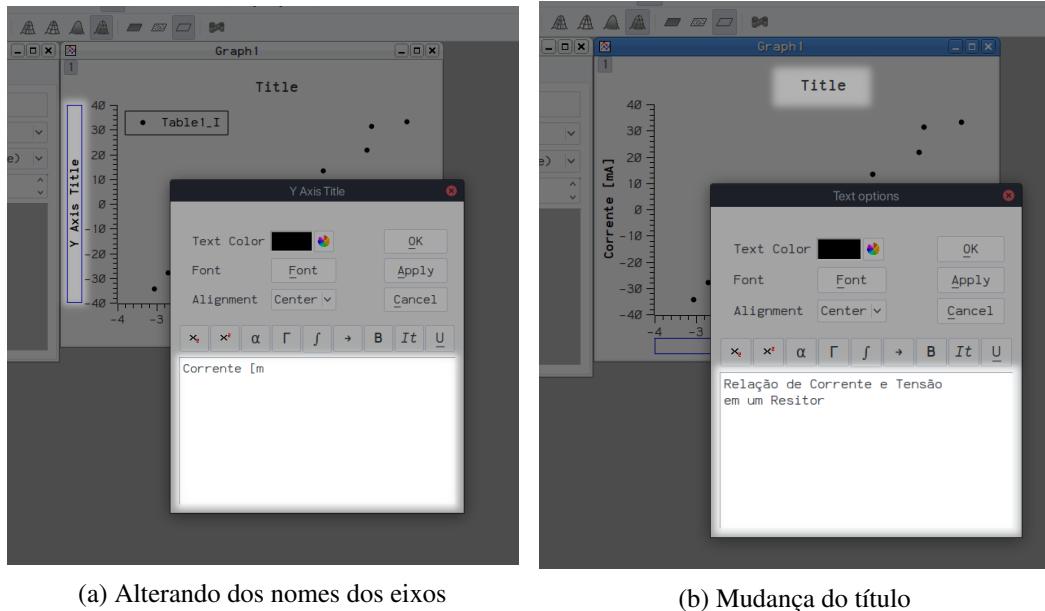


Figura 5.7: Opções dos textos principais do gráfico

5.2.4 Linhas de Grid

Para ler melhor os eixos do gráfico, é possível colocar linhas de *grid* acompanhando os valores principais.

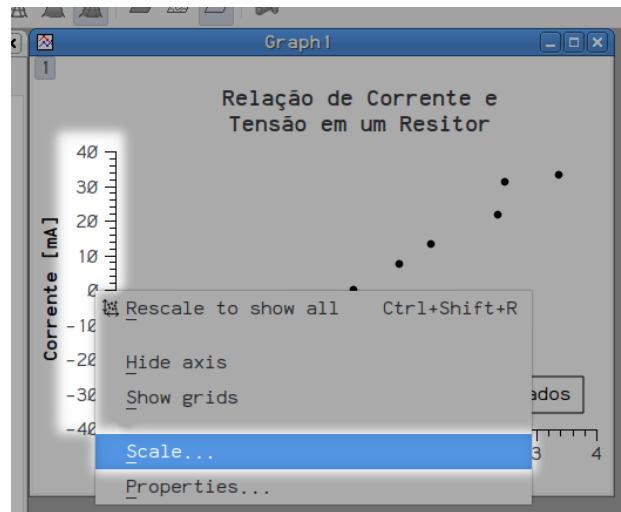
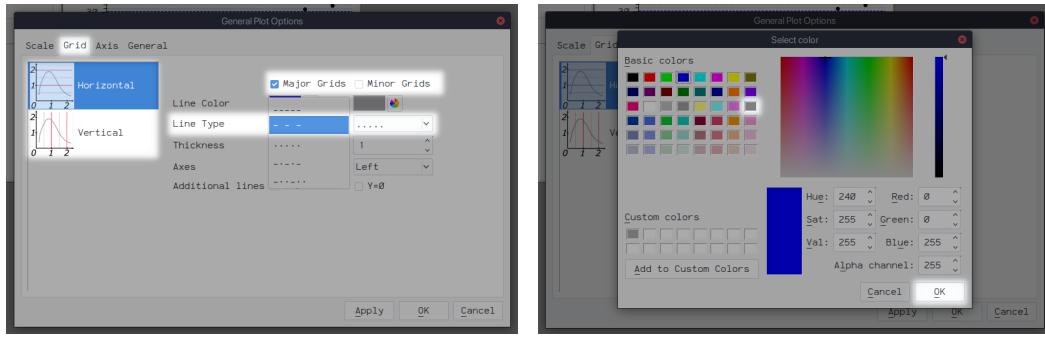


Figura 5.8: Acesso as opções de formatação de linha de acompanhamento dos eixos

No material, serão utilizadas linhas principais horizontais e verticais, que serão em tracejados em cinza escuro, sem linhas secundárias. Essas configurações podem e devem ser alteradas para cada gráfico, dependendo da facilidade e da importância da leitura dos valores.



(a) Opções dos eixos (aba Grid)

(b) Mudança de cor das linhas

Figura 5.9: Opções de linhas de *grid*

5.2.5 Resultado

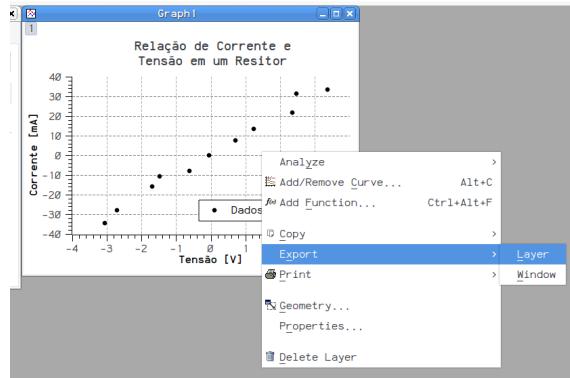


Figura 5.10: Salvando o gráfico resultante

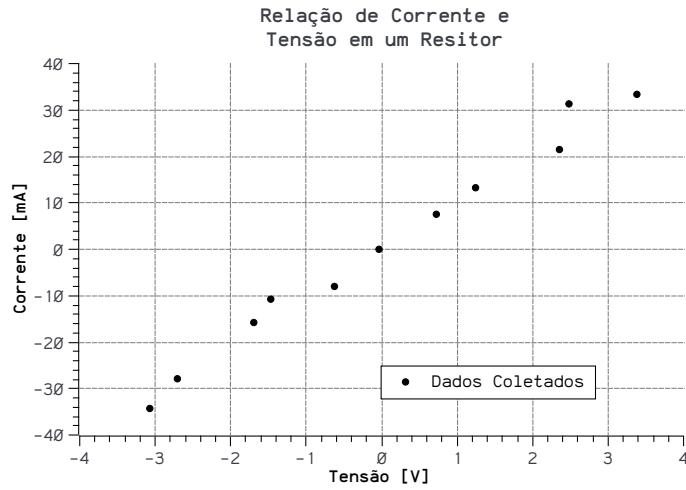


Figura 5.11: Gráfico de exemplo de formatação

5.3 Regressão Linear

É muito comum aparecer algum tipo de relação linear entre os dados. Nesse tipo de relação costuma-se aplicar técnicas de regressão, normalmente mínimos quadrados, para encontrar a melhor

reta que representa esses dados.

Pelo alinhamento dos pontos da seção [Apresentação dos Dados](#) e pela equação teórica [5.1](#), fica clara a possibilidade de se aplicar uma regressão linear e, portanto, os dados continuarão os mesmos nessa seção.

5.3.1 Aplicação da Regressão

A regressão normalmente é feita pelas opções **Analyze: Fit Linear** em cima de um Scatter dos pontos, como na figura [5.12](#). Existem outras formas de regressão além da linear, mas elas não serão necessárias nesta matéria.

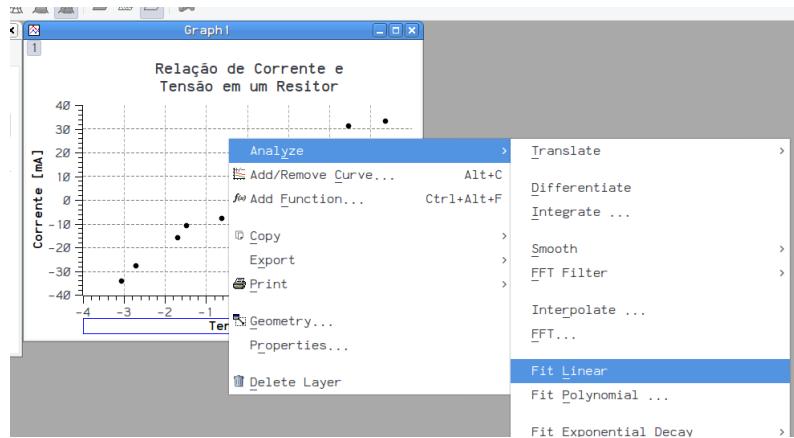


Figura 5.12: Aplicando a regressão linear nos gráfico de exemplo (figura [5.11](#))

5.3.2 Valores dos Coeficientes

Os valores dos coeficientes encontrados com a regressão aparecem em um *log* sobre a janela da tabela e do gráfico dentro do software.

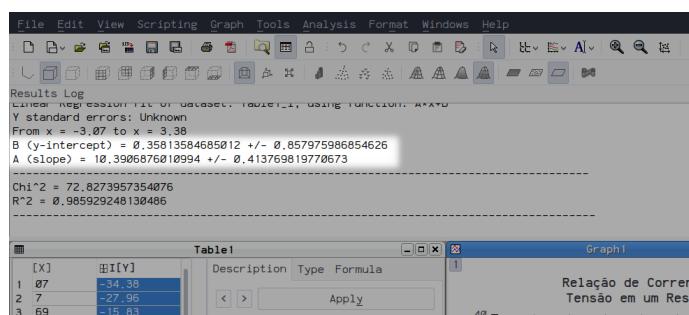


Figura 5.13: Resultado com os coeficientes encontrados para a regressão

5.3.3 Resultado

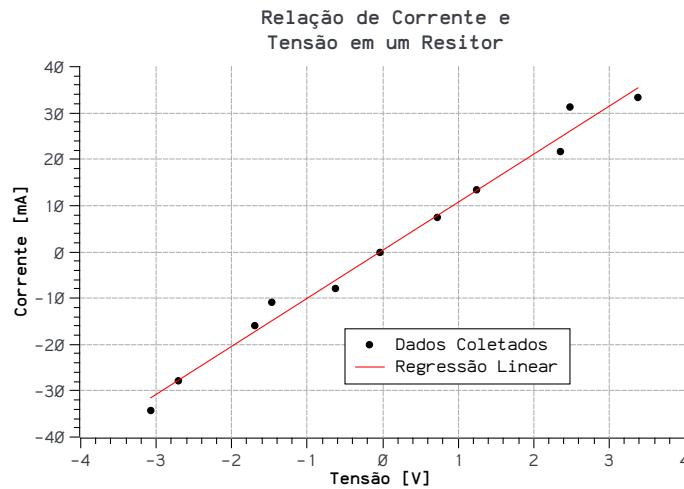


Figura 5.14: Exemplo de regressão linear

5.4 Barras de Incerteza

Como exemplo para a aplicação de barras de incerteza, continuaremos com os mesmos dados da seção [Apresentação dos Dados](#), porém agora com as incertezas associadas a cada medida, que foram criadas, novamente, com o auxílio de um computador, e podem ser vistas na figura [5.16](#).

5.4.1 Adicionando Colunas

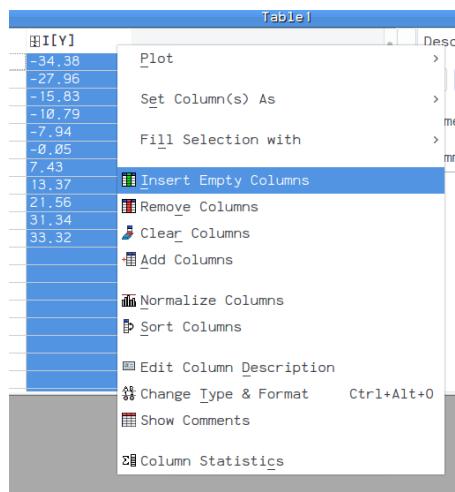


Figura 5.15: Inserindo novas colunas

Para adicionar a incerteza, é preciso gerar novas colunas nas tabelas, como mostra a figura [5.15](#), lembrando sempre de formatá-las como na seção [Configurando as Colunas](#). A tabela com os dados de incerteza deve ficar algo parecido com a figura [5.16](#).

	$dV[X]$	$dI[Y]$	$I[Y]$	$dI[Y]$
1	-3.07	0.29	-34.38	3.16
2	-2.7	0.27	-27.96	3.07
3	-1.69	0.18	-15.83	1.65
4	-1.47	0.16	-10.79	0.94
5	-0.62	0.06	-7.94	0.72
6	-0.04	0.02	-0.05	0.11
7	0.72	0.08	7.43	0.72
8	1.25	0.13	13.37	1.36
9	2.35	0.2	21.56	2.16
10	2.48	0.27	31.34	2.9
11	3.38	0.36	33.32	3.33
12				
13				

Figura 5.16: Dados atualizados com as incertezas

5.4.2 Tipo das Novas Colunas

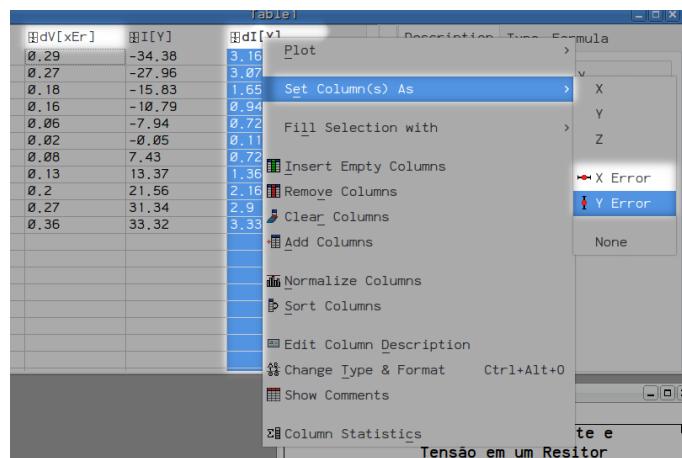


Figura 5.17: Mudando o tipo das novas colunas para relacionar com os valores das medidas

5.4.3 Resultados

A funcionalidade Scatter, quando selecionada com as colunas de incerteza, gera o gráfico da figura 5.18.

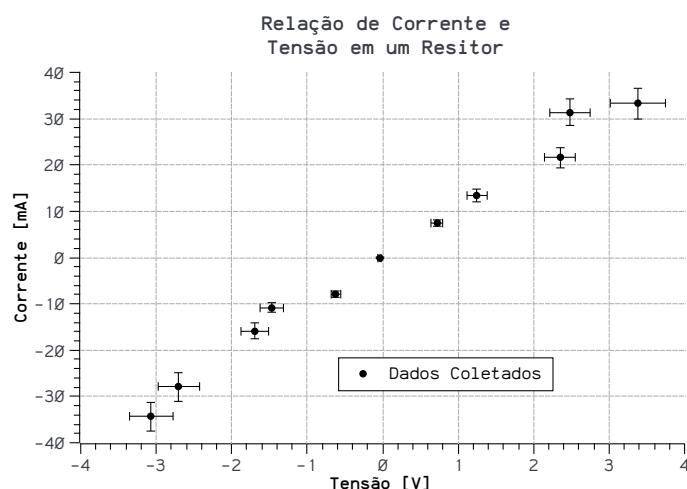


Figura 5.18: Gráfico de corrente por tensão com as incertezas de cada medida

Entretanto, se for aplicada a formatação da seção [Apresentação dos Dados](#) e a regressão linear, como na seção [Regressão Linear](#), o resultado deveria ficar semelhante a figura 5.19, cujos coeficientes são $B = 0.34 \pm 0.11$ e $A = 9.8 \pm 0.3$.

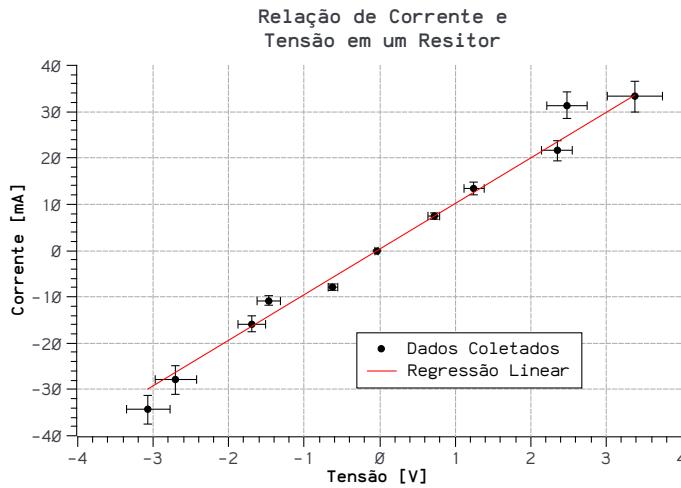


Figura 5.19: Gráfico formatado, com barras de incerteza e regressão linear

- ! Note que os coeficientes A e B da regressão em 5.19, tanto em seus valores quanto nas suas incertezas, são levemente diferentes dos da figura 5.13, mesmo com os dados numéricos idênticos. A diferença aqui se deve as incertezas dos dados, que agora estão sendo levadas em conta no cálculo da regressão.

5.5 Escala Logarítmica

Várias vezes, no entanto, os dados não apresentam relação linear. Nesses casos, é importante encontrar alguma técnica de linearização que transforma os dados para novos valores dependentes, mas que se relacionam de maneira linear. Algo como a relação 5.2.

$$f(x,y) = a + b g(x,y) \quad (5.2)$$

Dentre as técnicas mais comuns, muitas envolvem a aplicação de logaritmos para linearizar alguma relação de potência de x , isto é, nos casos de $y \propto x^k$, ou alguma relação exponencial, $y \propto k^x$. Para esses casos, é comum a utilização de escala logarítmica na intenção de se observar melhor os dados, em que $f(x,y) = \log(y)$ e $g(x,y) = \log(x)$.

5.5.1 Gráfico Log-Log

$$R_x = \frac{R_1 R_2}{R_d} \quad (5.3)$$

Se imaginarmos os dados do gráfico 5.20 como parte de um caso da ponte de Wheatstone dado pela equação 5.3, sendo R_d a resistência da década e R_x a resistência desconhecida, podemos aplicar a seguinte técnica de linearização:

$$\begin{aligned} \log(R_x) &= \log(R_1 R_2 (R_d)^{-1}) \\ &= \log(R_1 R_2) + \log((R_d)^{-1}) \\ &= \log(R_1 R_2) - \log(R_d) \end{aligned}$$

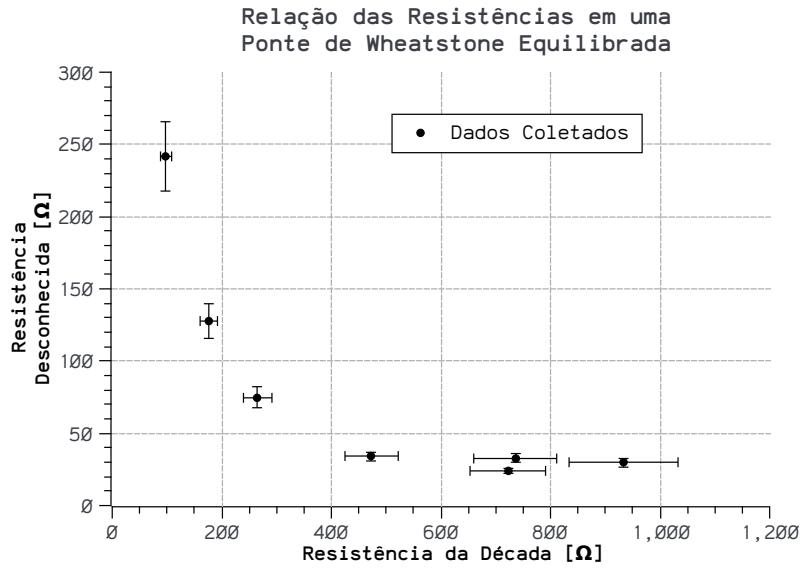


Figura 5.20: Gráfico da relação da ponte de Wheatstone (5.3)

Portanto, podemos montar um gráfico log-log de R_x por R_d , cujo coeficiente angular deveria resultar em -1 .

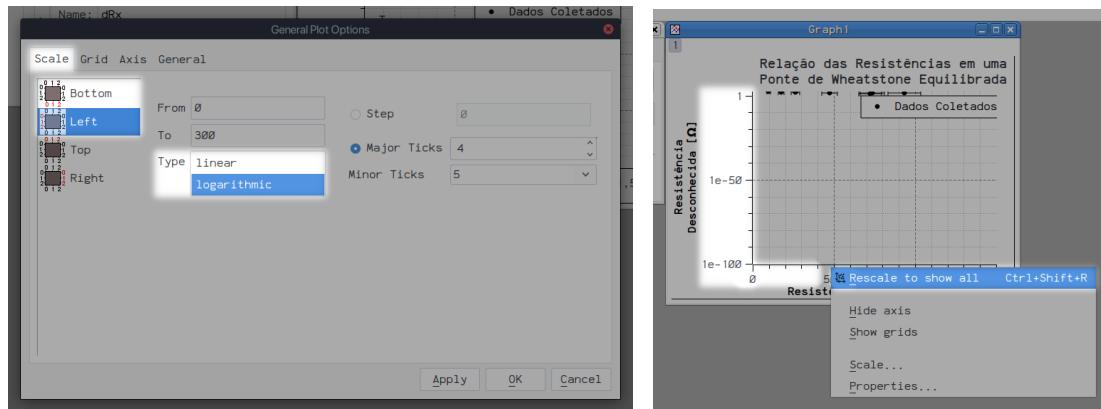


Figura 5.21: Mudança para a escala logarítmica

- ! Para os gráficos com escala logarítmica, foram usadas linhas de *grid* secundárias com um cinza mais claro para ajudar na visualização.

5.5.2 Gráfico Semi-Log

$$R = A \exp(B T^{-1}) \quad (5.4)$$

Agora com os dados da figura 5.23 e a relação (5.4), com R como a resistência e T^{-1} o inverso da temperatura, a linearização se torna:

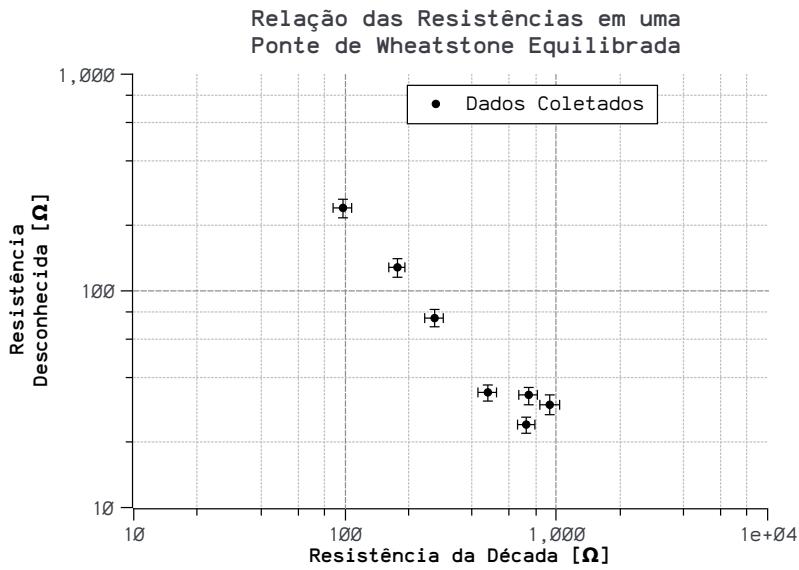


Figura 5.22: Gráfico log-log dos dados da figura 5.20

$$\begin{aligned}\ln(R) &= \ln(A \exp(B T^{-1})) \\ &= \ln(A) + \ln(\exp(B T^{-1})) \\ &= \ln(A) + B T^{-1}\end{aligned}$$

Que pode ser usada em um gráfico semi-log de $R \times T^{-1}$, aplicando a escala logarítmica apenas no eixo da esquerda.

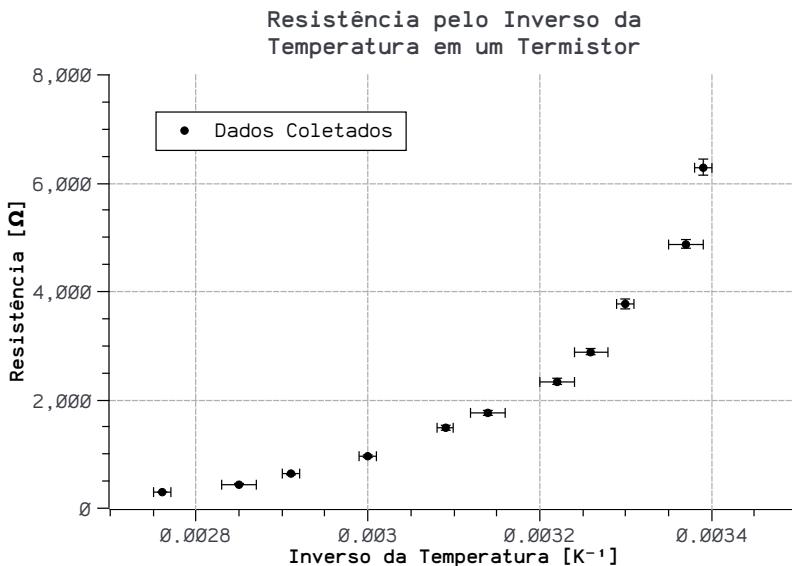


Figura 5.23: Gráfico da relação do termistor (5.4)

5.5.3 Regressão em Escala Logarítmica

A regressão de uma curva de potência ou exponencial é possível com técnicas de regressão não-linear, só que essas técnicas não cabem no escopo dessa matéria. Uma outra opção muito utilizada é

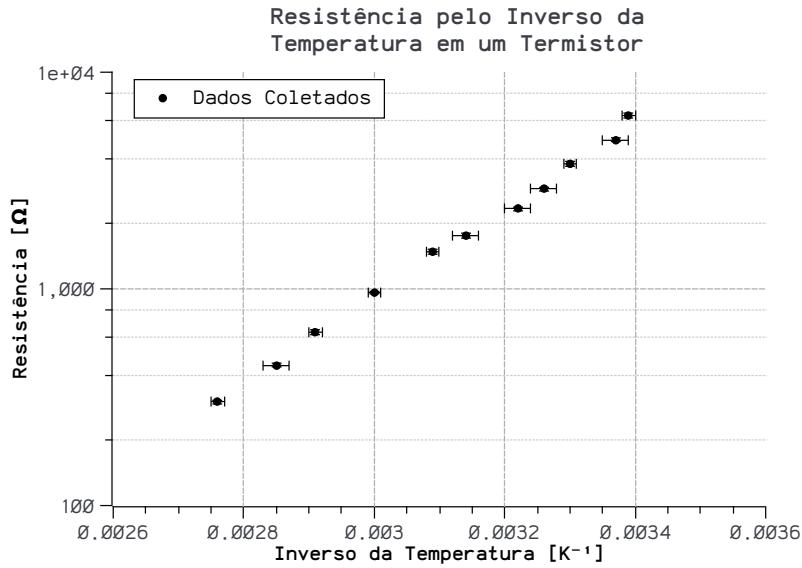
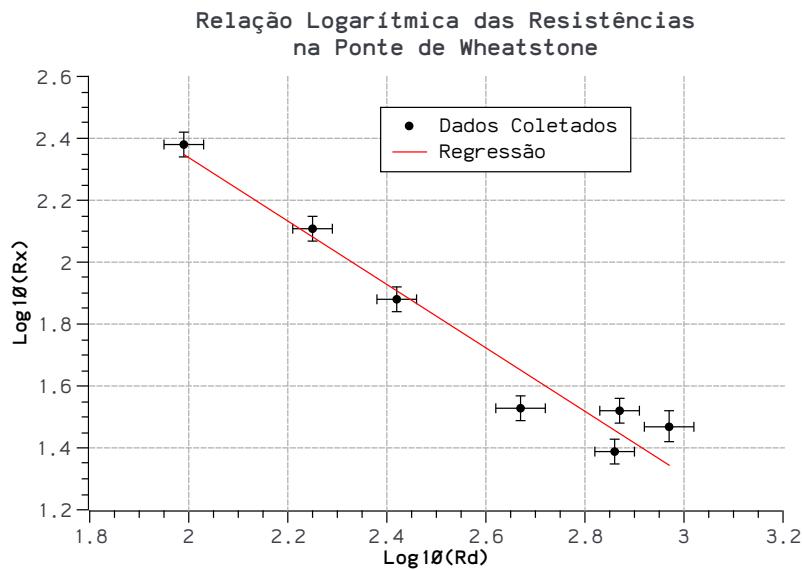


Figura 5.24: Gráfico semi-log dos dados da figura 5.23

encontrar uma linearização, como na equação (5.2), e, com a nova relação linear de $f(x,y) \times g(x,y)$, aplicar a regressão linear como da seção [Regressão Linear](#). O único detalhe é que é preciso encontrar os valores de $f(x,y)$ e $g(x,y)$ e suas incertezas para cada par (x,y) dos dados e só com esses valores pode-se encontrar os coeficientes a e b , como foi feito na figura 5.25, com os dados da seção [Gráfico Log-Log](#).

Figura 5.25: Gráfico da regressão da relação (5.3). Nesse caso, $b = -1.03 \pm 0.05$, o que seviria para mostrar que $b \approx -1$, por exemplo.

A mudança dos dados de (x,y) para $(f(x,y), g(x,y))$ ajuda nos cálculos, só que normalmente causa um distanciamento do sentido físico dos dados. Então, é importante decidir qual dos gráficos utilizar ou se cabe usar os dois gráficos.

5.6 Equação Característica

Um exemplo de equação característica é a equação (??), do termistor, que será utilizada nesta seção. Os dados gerados para o gráfico 5.23 continuarão os mesmos aqui.

5.6.1 Encontrando os Coeficientes

O primeiro passo normalmente é encontrar os coeficientes da equação característica. Se for uma equação de reta, uma simples regressão linear é bastante para encontrar esses coeficientes e para mostrar a equação esperada.

Para os outros caso, no entanto, é preciso linearizar a equação, como feito na seção [Escala Logarítmica](#), encontrar os coeficientes da linearização e transformar para os coeficientes da equação inicial.

No caso dos dados do termistor, a regressão é aplicada como na figura 5.26. Logo, os coeficientes se tornam $A = \exp(-7.095) \approx 0.0008293$ e $B = 4643.029$.

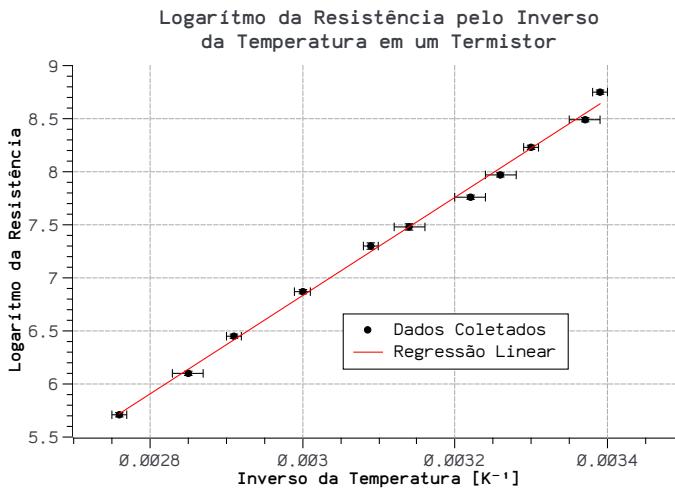


Figura 5.26: Gráfico da linearização da equação (??)

5.6.2 Gráfico de Funções

Voltando para os dados originais, de R por T , podemos desenhar a equação característica, agora com os valores dos coeficientes, sobre o Scatter dos dados, como mostra a figura 5.27.

5.6.3 Ajustes de Formatação

Por padrão, a cor da nova curva do gráfico é escolhida como preto, mas isso pode ser mudado com um duplo clique sobre a curva. Neste exemplo a cor decidida foi vermelho, que acompanha o padrão de regressão dos exemplos anteriores.

Além da cor, é importante lembrar de tratar da curva na legenda do gráfico.

5.6.4 Resultado

5.7 Gráficos de Múltiplas Variáveis

Para os casos em que é necessário apresentar dados com mais de uma variável dependente de um mesmo dado X, existe a opção de gráficos múltiplos. Eles servem para comparar as relações do tipo $y_1 = f(x)$ e $y_2 = g(x)$, quando x , y_1 e y_2 são medidos em conjunto.

Em experimentos com circuitos, esse tipo de dado aparece, por exemplo, na medição de tensão em nós diferentes para a comparação de seus comportamentos no tempo. É o caso do circuito da

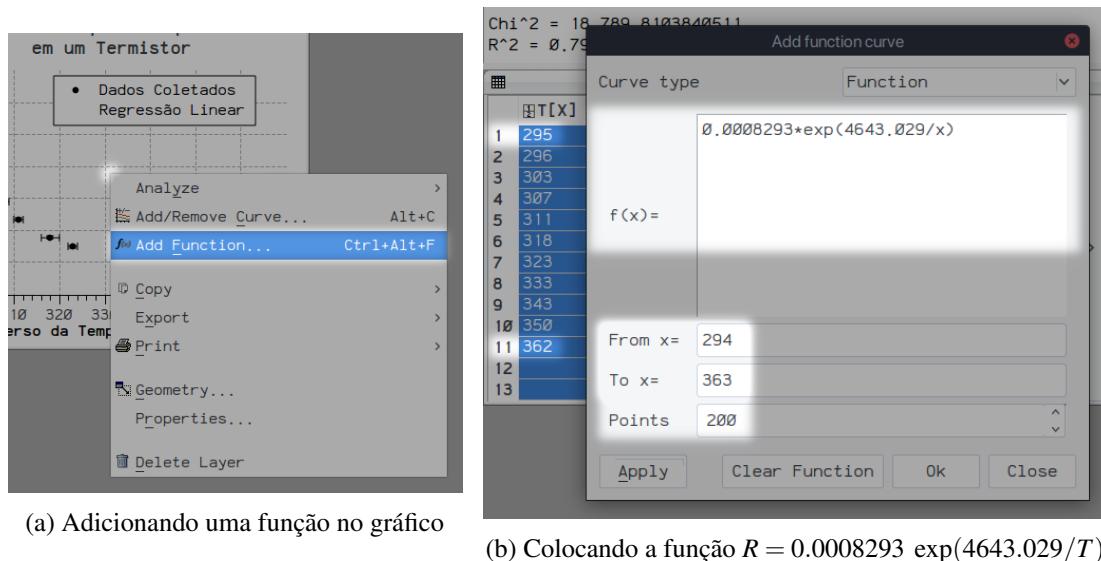


Figura 5.27: Desenhando uma função no gráfico

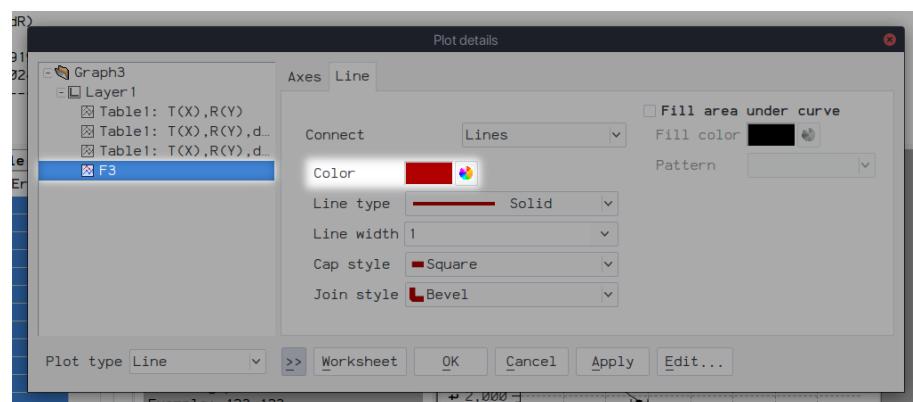


Figura 5.28: Mudança da cor da nova curva

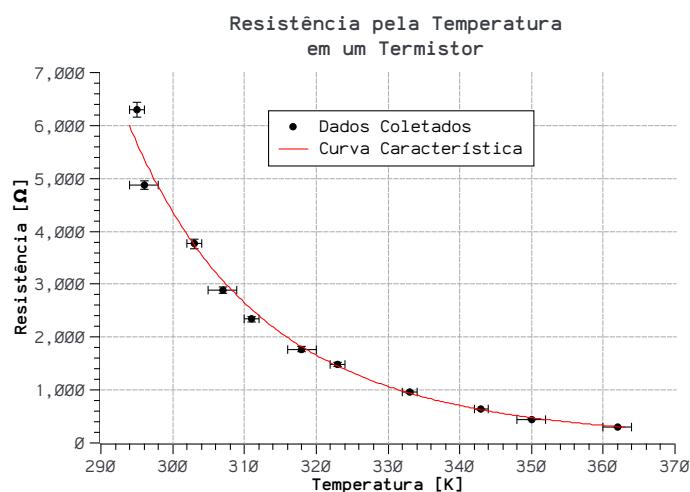


Figura 5.29: Gráfico com a curva característica do termistor

figura 5.31, cujos dados foram colocados como na figura 5.30.

	t[X]	V1[Y]	V2[Y]
1	0	0	1.99
2	0.4	1.95	2.28
3	0.8	3.59	2.21
4	1.2	4.66	1.79
5	1.6	5	1.09
6	2	4.55	0.22
7	2.4	3.38	-0.69
8	2.8	1.67	-1.49
9	3.2	-0.29	-2.06

Figura 5.30: Dados gerados com simulador

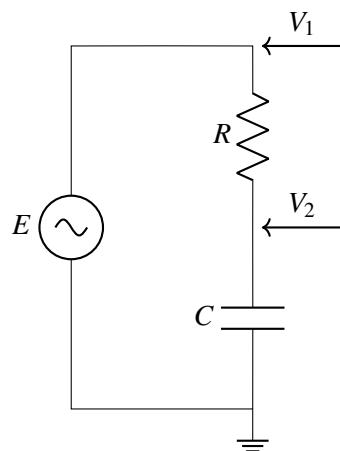


Figura 5.31: Circuito de defasagem de tensão por um capacitor

5.7.1 Gráficos de Eixos Separados

Uma opção para mostrar os dois canais ao mesmo tempo é colocar cada um em seu próprio gráfico com seus próprios eixos. No software, isso é feito como na figura 5.32, mas pode ser feito em duas imagens separadas também. O problema com essa abordagem é que as escalas diferentes não mostram muito bem as proporções entre os canais de entrada e saída.

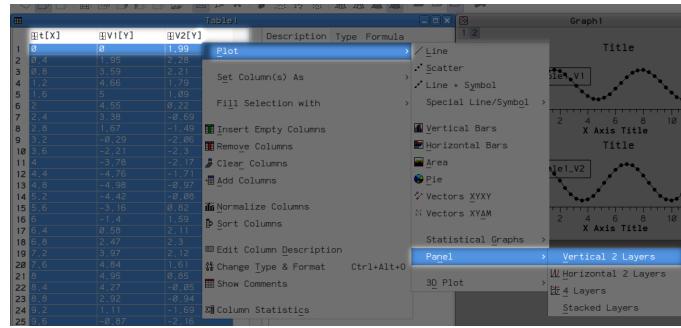


Figura 5.32: Criando os gráficos separados

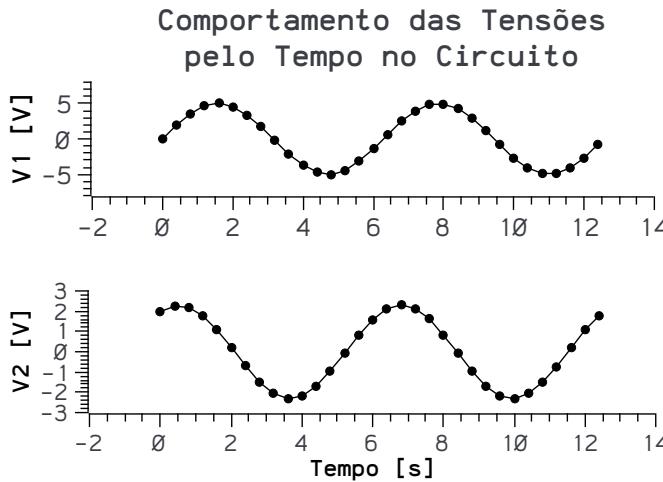


Figura 5.33: Gráficos das tensões de entrada e saída do circuito

5.7.2 Gráficos de Eixos em Conjunto

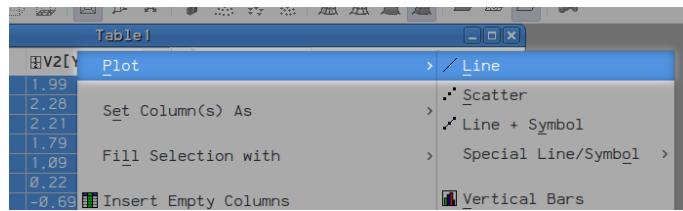


Figura 5.34: Criando o gráfico com as duas curvas

Esse método é melhor para visualizar a diferença de escala entre os dados, mas, se algum dos dados tem uma escala muito diferente, o gráfico pode acabar perdendo na percepção dos dados. Um dos maiores limites para esse método, no entanto, é que as variáveis dependentes precisam ter a mesma motivação física e, por causa disso, a mesma gradeza, caso contrário, o eixo compartilhado entre elas perde completamente o sentido.

5.7.3 Gráficos com Apenas a Abscissa Comum

Imagine agora o caso em que queremos mostrar a defasagem entre a corrente a tensão no capacitor da figura 5.31. A única grandeza comum agora é o tempo, então vamos precisar de gráficos de três eixos. No software, isso é feito como na seção **Gráficos de Eixos Compartilhados**, com as

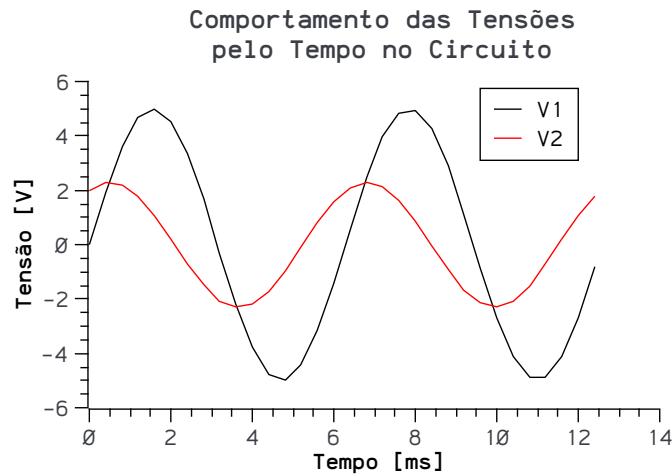
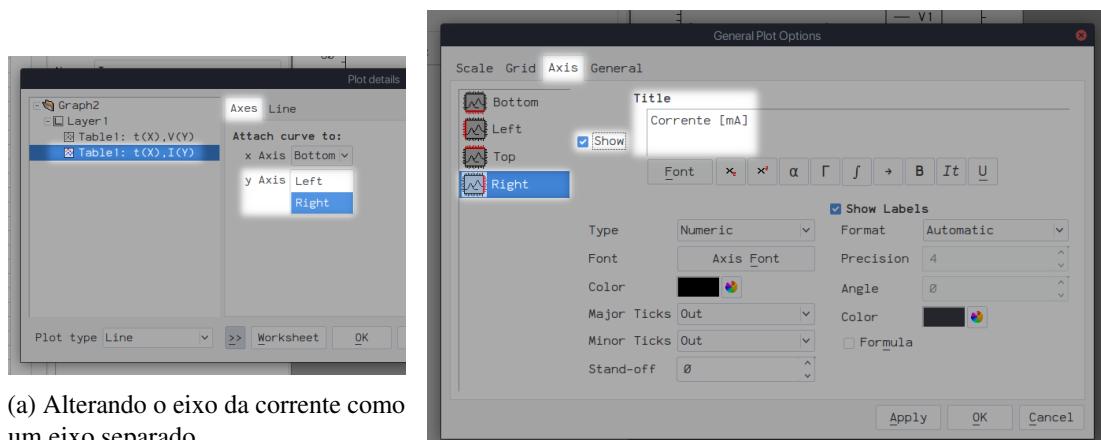


Figura 5.35: Gráfico em conjunto das tensões V_1 e V_2 do circuito



(a) Alterando o eixo da corrente como um eixo separado

(b) Mostrando o novo eixo da corrente

Figura 5.36: Criando o gráfico com três eixos

alterações mostradas nas imagens 5.36a e 5.36b. Normalmente, é melhor alterar as cores para melhor representar cada dado.

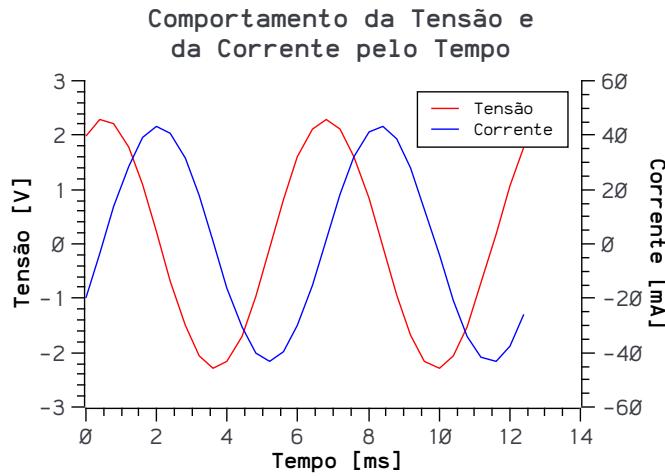


Figura 5.37: Gráfico de corrente e tensão por tempo no capacitor (círculo 5.31)

- ! As vezes, os gráficos com múltiplas curvas podem ficar sobrecarregados de informação. Quando isso acontece, o melhor é separar os dados em gráficos distintos pra manter a legibilidade. Gráficos de três eixos podem ficar complicados com facilidade.

6. Python

O Python apareceu pela primeira vez da década de 90 como uma tentativa de uma linguagem de programação com uma sintaxe simplificada que favorecia a legibilidade do código, enforçando construções explícitas e menos complicadas. Na época a linguagem cresceu apenas em um nicho próprio, mas começou a deslanchar em popularidade na década seguinte com a segunda versão da linguagem. Atualmente, o Python é uma das linguagens de programação mais utilizadas, já na sua terceira iteração, e é mantido como código aberto por uma comunidade de desenvolvedores própria.

Uma das áreas em que a linguagem Python mais tem destaque na atualidade é com análise de dados, sendo comparável a linguagens mais tradicionais da área, como R. No entanto, boa parte do crescimento na área se deve às bibliotecas e às ferramentas criadas pela comunidade, em especial ao ecossistema [SciPy](#). Isso envolve projetos como a biblioteca [SciPy](#), [NumPy](#), [Matplotlib](#) e [Pandas](#), que serão utilizadas neste material. Além dessas bibliotecas, pode ser interessante utilizar a biblioteca [Seaborn](#) e a ferramenta de *notebooks* do [Jupyter](#).

! Atualmente é possível trabalhar com programas Python utilizando ambientes na nuvem, sem a necessidade de instalar uma distribuição ou um ambiente de desenvolvimento (IDE). Uma boa opção é utilizar o Google Colab: <https://colab.research.google.com>.

Caso deseje instalar uma distribuição, recomendamos baixar o pacote Anaconda em <https://www.anaconda.com/products/individual>. **Atenção:** trata-se de um download grande e computadores mais antigos podem ter dificuldades com alguns ambientes de desenvolvimento, como o Spyder.

O número de ferramentas e maneiras diferentes para se fazer qualquer coisa em Python é absurdamente grande, portanto, nesse material, serão exploradas apenas as funcionalidades importantes no curso de Física Experimental 3 (F 329). A divisão das seções é feita para começar com as técnicas mais básicas ([Configurações Básicas](#) e [Apresentação dos Dados](#)), seguida das intermediárias ([Regressão Linear](#) e [Barras de Incerteza](#)) e, por fim, as mais específicas ([Escala Logarítmica](#), [Equação Característica](#) e [Gráficos de Múltiplas Variáveis](#)).

6.1 Configurações Básicas

6.1.1 Bibliotecas de Python

Para os gráficos desse material, as bibliotecas Pandas e Matplotlib serão necessárias em todos os exemplos, enquanto a NumPy e alguns pacotes do SciPy aparecerão em boa parte deles. Essas bibliotecas serão usadas aqui com nomes reduzidos, como no código 6.1.1.

Código 6.1.1.: Importando as bibliotecas principais

```
import numpy as np
import pandas as pd
from matplotlib import pyplot as plt

# -- configurações e o resto do código -- #
```

6.1.2 Opções de Formatação

Todos os gráficos serão feitos com a interface pyplot do Matplotlib , o que ajuda muito na confecção das figuras. Essa bibliotecas de gráficos bem com uma imensa variedade de estilos que podem ser combinados na hora de criar os seus gráficos.

Em todos os exemplos deste material serão usados os estilos '`'seaborn-whitegrid'`', '`'seaborn-paper'` e '`'seaborn-muted'`', nessa ordem, além de algumas configurações adicionais. Tudo está presente no código 6.1.2.

Código 6.1.2.: Exemplo de customização de formatação

```
# -- bibliotecas -- #

config = {
    'axes.spines.right': False,
    'axes.spines.top': False,
    'axes.edgecolor': '.4',
    'axes.labelcolor': '.0',
    'axes.titlesize': 'large',
    'axes.labelsize': 'medium',
    'figure.autolayout': True,
    'figure.figsize': (4.5, 3.5),
    'font.family': ['serif'],
    'font.size': 10.0,
    'grid.linestyle': '--',
    'legend.facecolor': '.9',
    'legend.frameon': True,
    'savefig.transparent': True,
    'text.color': '.0',
    'xtick.labelsize': 'small',
    'ytick.labelsize': 'small',
}
plt.style.use(['seaborn-whitegrid', 'seaborn-paper', 'seaborn-muted',
    config])

# -- resto do código -- #
```

6.1.3 Importando Dados

Em Python , a melhor forma de ser representar os dados para análise gráfica costuma ser com as ferramentas do Pandas . Nessa biblioteca os dados são tratados na forma de um DataFrame , um tipo de representação em tabelas com as abstrações tradicionais de linhas e colunas. Essa tabela pode ser construída manualmente ou gerada de um arquivo de texto ou binário seguindo algumas especificações. As colunas do DataFrame são acessadas por nome, similar ao acesso por chave em um dicionário.

No caso dos dados de um gerenciador de tabelas, como o Excel, o Google Planilhas ou o LibreOffice Calc, é preciso organizar os valores em colunas, como na figura 6.1, em uma folha de planilha própria com apenas estes dados. É recomendável, também, colocar estes dados no começo da folha, começando na primeira linha e na primeira coluna, e deixar a primeira linha dos

dados com o nome da coluna que será usado para acesso no DataFrame .

	A	B	C	D	E	
1	V	dV	A	dA		
2	1.916	0.004	19.12	0.07		
3	3.826	0.008	38.2	0.1		
4	5.69	0.01	56.8	0.2		
5	7.60	0.02	76.0	0.5		
6	9.41	0.03	94.0	0.6		
7	10.39	0.03	103.7	0.7		
8	10.88	0.03	108.5	0.7		
9	11.29	0.03	112.5	0.7		
10	11.82	0.03	117.8	0.7		
11	11.98	0.03	119.3	0.7		
12						
13						
14						

Figura 6.1: Organização dos dados para importar em Python

Arquivos CSV

Arquivos CSV (*Comma Separated Values*) são os mais típicos para armazenamento de dados para análises. Eles são basicamente arquivos de textos, então podem ser visualizados e editados em qualquer editor de texto, mas os valores são separados por algum carácter específico, normalmente a vírgula (,), e as primeiras linhas podem ser utilizadas como *header* dos dados.

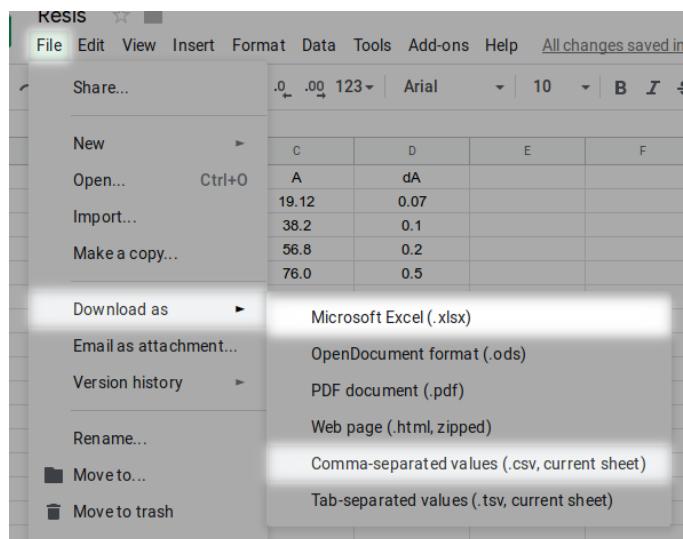


Figura 6.2: Recuperando os valores de uma folha de planilha no Google Planilhas

Apesar de o exemplo da figura 6.2 ser apenas no Google Planilhas, qualquer outro gerenciador de tabelas atual terá uma opção similar como parte do programa também. Uma vez que o CSV esteja pronto, ele pode ser transformado em um DataFrame com a função `read_csv` do Pandas .

O argumento `decimal` da função representa qual o carácter a ser entendido como separador decimal. No exemplo do código 6.1.3, é usado a vírgula como separador, mas se por acaso estiver usando o ponto final para isso, lembre-se de mudar para `'.'`. Se o separador estiver diferente, o Pandas vai entender o valor como texto, o que não servirá para a montagem do gráfico depois.

Código 6.1.3.: Leitura de um DataFrame a partir de um CSV

```
# -- bibliotecas e configurações -- #

dados = pd.read_csv('dados.csv', decimal=',')
```

Arquivos do Excel

Também é possível ler diretamente arquivos do Excel ou arquivos do mesmo tipo (.xlsx) extraído de outro programa, como na figura 6.2. Para isso, além de especificar o nome do arquivo, é necessário dizer qual a folha da planilha a ser usada com o argumento `sheet_name`, como no código 6.1.4, tudo com a função `read_excel`. Para este tipo de arquivo, não precisa preocupar com o separador de decimal, pois a representação interna do dado já é numérica, em vez de textual, como era no CSV.

Código 6.1.4.: Leitura de um DataFrame a partir de um arquivo de Excel

```
# -- bibliotecas e configurações -- #

dados = pd.read_excel('dados.xlsx', sheet_name='Resistor')
```

6.1.4 Salvando os Gráficos

A interface `pyplot` também ajuda na hora de salvar os gráficos em imagens, com a função `savefig`. Essa função reconhece o tipo do arquivo pela extensão e já vem com várias opções de fábrica. Os tipos mais importantes normalmente são PNG e PDF, que podem ser criados seguindo os códigos 6.1.5 e 6.1.6. Para o PNG, também existe a opção de controlar a resolução pelo DPI da imagem, com o argumento `dpi`.

Código 6.1.5.: Salvando o gráfico em um arquivo PNG

```
# -- depois do gráfico pronto -- #

plt.savefig('grafico.png', dpi=200)
```

Código 6.1.6.: Salvando o gráfico em um arquivo PDF

```
# -- depois do gráfico pronto -- #

plt.savefig('grafico.pdf')
```

Para gráficos vetorizados, a opção mais usada é o SVG, que também é resolvido por padrão com o `Matplotlib`, fazendo como no código 6.1.7. No entanto, quando se quer usar o gráfico

em um documento de L^AT_EX, uma opção muito útil é o PGF, que não passa de um arquivo de texto com comandos do pacote pgf para ser inserido em uma figura com um comando do tipo `\input{grafico.pgf}`, mas cuidado com as configurações.

Código 6.1.7.: Salvando o gráfico em um arquivo SVG ou PGF

```
# -- depois do gráfico pronto -- #

plt.savefig('grafico.svg')
# -- ou --
plt.savefig('grafico.pgf')
```

6.2 Apresentação dos Dados

Tensão	Corrente
-3.07 V	-34.38 mA
-2.70 V	-27.96 mA
-1.69 V	-15.83 mA
-1.47 V	-10.79 mA
-0.62 V	-7.94 mA
-0.04 V	-0.05 mA
0.72 V	7.43 mA
1.25 V	13.37 mA
2.35 V	21.56 mA
2.48 V	31.34 mA
3.38 V	33.32 mA

Tabela 6.1: Dados de corrente para cada tensão, gerados por computador

Nesta seção, será tomado como exemplo a relação de corrente e tensão em um resistor, dado de forma teórica pela relação (6.1). Por mais que os dados usados aqui sejam os da tabela 6.1, essa parte de apresentação de dados é importante para todos os tipos de análise, em especial, para dados coletados manualmente, como é o caso da maioria dos experimentos da disciplina de F 329.

$$I = \frac{1}{R} V \tag{6.1}$$

6.2.1 Dados Pontuais

Código 6.2.1.: Gerando um gráfico de dispersão

```
# -- recupera os dados antes -- #  
  
plt.scatter(dados['Tensão'], dados['Corrente'])  
  
# -- depois salva o gráfico -- #
```

Para apresentar os dados coletados, a melhor opção é a função `scatter` do `pyplot`, que recebe uma lista de valores de x e outra lista de y como argumentos.

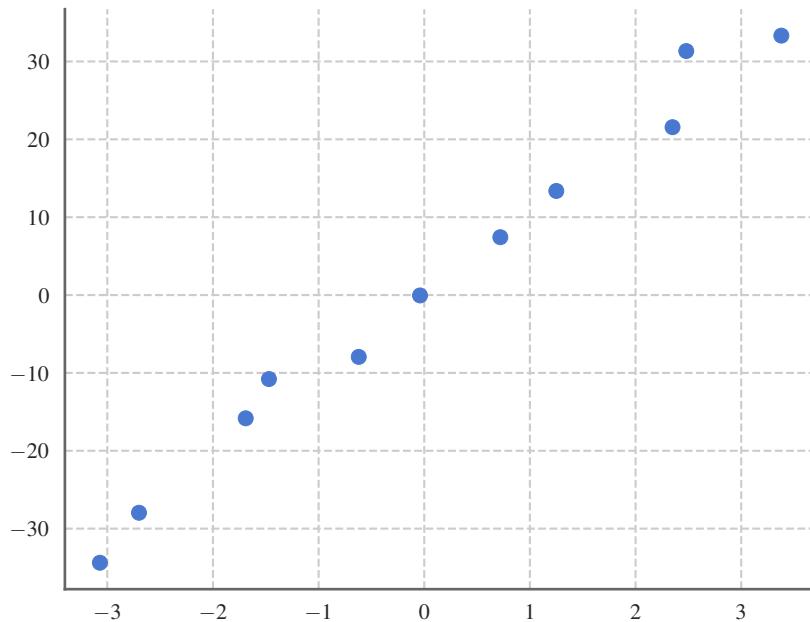


Figura 6.3: Gráfico de dispersão dos pontos

6.2.2 Texto dos Eixos e do Título

Em um gráfico como este, é necessário colocar texto no título e nos rótulos (*label*) dos eixos.

Código 6.2.2.: Montagem dos textos do gráfico

```
# -- desenha os dados no gráfico antes --
plt.xlabel('Tensão [V]')
plt.ylabel('Corrente [mA]')
plt.title('Relação da Corrente pela Tensão em um Resistor')

# -- depois salva o gráfico -- #

```

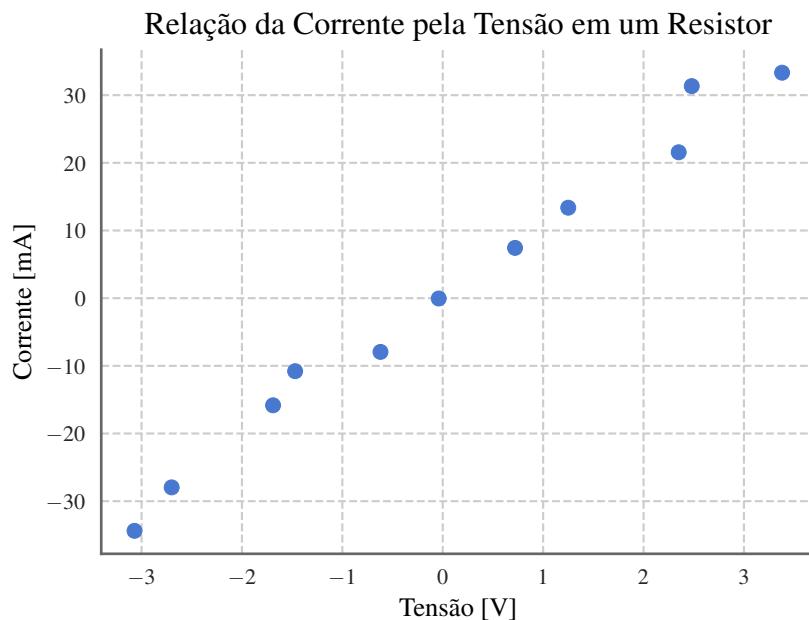
6.2.3 Resultado

Figura 6.4: Exemplo de um gráfico com pontos para os dados

6.3 Regressão Linear

É muito comum aparecer algum tipo de relação linear entre os dados. Nesse tipo de relação costuma-se aplicar técnicas de regressão para encontrar a melhor reta que representa esses dados.

Pelo alinhamento dos pontos da seção [Apresentação dos Dados](#) e pela equação teórica ??, fica clara a possibilidade de se aplicar uma regressão linear e, portanto, os dados continuarão os mesmos nessa seção.

6.3.1 Resultados Coletados

A primeira coisa é pegar os dados e mostrar cada ponto coletado, como na seção [Apresentação dos Dados](#). Só que como vamos precisar dos dados depois, o melhor é separar as colunas dos dados em suas próprias variáveis para facilitar a análise dos dados depois, apesar disso não ser necessário.

Para este gráfico, como teremos dois tipos de figuras, os dados realmente coletados e a reta resultante da regressão, vamos precisar colocar a legenda. É possível já colocar o texto da legenda na construção do gráfico com o argumento `label`. Isso pode ser visto no código 6.3.1, mas lá também tem um argumento extra, `zorder`, que controla a ordem dos desenhos e que foi usado aqui para colocar os pontos acima da reta que será feita depois.

Código 6.3.1.: Separando e desenhandando os dados pontuais

```
# -- recupera os dados antes -- #

# guarda as colunas em variáveis novas
x, y = dados['Tensão'], dados['Corrente']

# e coloca os dados pontuais no gráfico
plt.scatter(x, y, zorder=10, label='Dados Coletados')

# -- para fazer a regressão depois -- #
```

6.3.2 Aplicação da Regressão

Existem muitas maneiras diferentes em Python de se realizar um regressão linear. Uma das formas mais abrangentes de se fazer isso é com a biblioteca `odr` do SciPy , feita para regressão por distância ortogonal dos dados, mas pode ser utilizada com mínimos quadrados, mudando apenas seu tipo, como no código 6.3.3.

Código 6.3.2.: Importando o pacote odr da biblioteca SciPy

```
# -- outras bibliotecas -- #
from scipy import odr

# -- resto do código -- #
```

Para tanto, é preciso montar organizar os dados em uma instância de `RealData` e usar isso para criar uma instância da `ODR` com o modelo da regressão, que em todos os exemplos desse material será o `odr.models.unilinear`. Para usar o método dos mínimos quadrados é só chamar o método `set_job` com argumento `fit_type=2`. Depois é só rodar a regressão com o `run`, que retorna um objeto `Output` com várias informações, entre elas os coeficientes e suas incertezas, nos atributos `beta` e `sd_beta`.

Código 6.3.3.: Regressão Linear com Mínimos Quadrados

```
# regressão linear
data = odr.RealData(x, y)
odreg = odr.ODR(data, odr.models.unilinear)
odreg.set_job(fit_type=2) # muda para mínimos quadrados
ans = odreg.run()

a, b = ans.beta      # y = ax + b
da, db = ans.sd_beta # incertezas de a e b

# mostrando os coeficientes e suas incertezas
print(f'coef. angular = ({a}+-{da}) [mA/V -> kOhm^-1 -> kS]')
print(f'coef. linear   = ({b}+-{db}) [mA]')

# -- desenha a reta resultante da regressão e completa o gráfico -- #
```

As últimas linhas do código 6.3.3 servem para que os valores dos coeficientes sejam mostrados no terminal ou no *notebook* do Jupyter, quando executado.

6.3.3 Desenho da Regressão

Desenhar a reta da regressão é com a função `plot`, mas antes precisamos montar o rótulo que irá na legenda do gráfico. No código 6.3.4 têm dois exemplos para o rótulo, um apenas textual e outro com os coeficientes da regressão.

Código 6.3.4.: Desenho da reta encontrada

```
# -- depois da regressão -- #

rotulo = 'Regressão Linear'
# ou
rotulo =
    f'Regressão: $y = ({a:.1f} \pm {da:.1f})x + ({b:.1f} \pm {db:.1f})$'

# monta os limites para desenho da reta
X = np.linspace(min(x), max(x), num=200)
Y = a * X + b
# e faz o gráfico dela atrá dos pontos
plt.plot(X, Y, color='red', alpha=0.4, label=rotulo)

# para exibir as legendas do gráfico
plt.legend()

# -- depois completa a formatação do gráfico e salva em uma imagem -- #
```

Qualquer tipo de curva no Matplotlib é feito com pontos que são ligados entre si, ou seja, são apenas segmentos de reta conectados. Para simular a continuidade em outras curvas, costuma-se fazer vários pontos na região em que se deseja desenhar. Podemos fazer isso com a função `linspace` do NumPy , em que o primeiro argumento é o começo dos pontos, o segundo é o final do intervalo e o argumento `num` é a quantidade de pontos igualmente espaçados nessa região.

Por mais que isso não seja muito importante nesse caso, no código tem um exemplo de como fazer esse intervalo com 200 pontos igualmente espaçados, armazenado em `X`. Com esses pontos, é possível aplicar a função da curva nesse intervalo para encontrar a imagem desse intervalo, mas devido às técnicas de `vetorização` do NumPy , isso é feito como se fosse aplicar a operação em apenas um valor, mas a biblioteca realiza o laço implicitamente e retorna outro vetor em `Y`.

Além disso, para diferenciar a regressão dos valores, ela foi desenhada em vermelho, com `color='red'`, e com 40% de transparência, com `alpha=0.4`. Depois do gráfico já desenhado, foi usado ainda a função `legend` para desenhar a legenda. Depois disso, é só colocar os nomes dos eixos e o título, como na seção 6.2.

6.3.4 Resultado

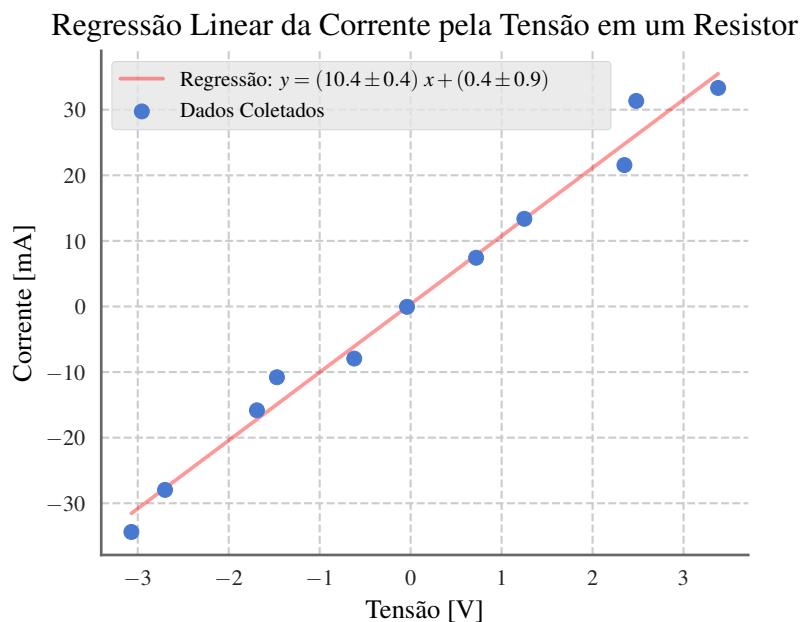


Figura 6.5: Exemplo de regressão linear

6.4 Barras de Incerteza

Como exemplo para a aplicação de barras de incerteza, continuaremos com os mesmos dados da seção [Apresentação dos Dados](#), porém agora com as incertezas associadas a cada medida, que foram criadas, novamente, com o auxílio de um computador, e podem ser vistas na tabela 6.2.

Tensão [V]	Corrente [mA]
-3.07 ± 0.29	-34.38 ± 3.16
-2.70 ± 0.27	-27.96 ± 3.07
-1.69 ± 0.18	-15.83 ± 1.65
-1.47 ± 0.16	-10.79 ± 0.94
-0.62 ± 0.06	-7.94 ± 0.72
-0.04 ± 0.02	-0.05 ± 0.11
0.72 ± 0.08	7.43 ± 0.72
1.25 ± 0.13	13.37 ± 1.36
2.35 ± 0.20	21.56 ± 2.16
2.48 ± 0.27	31.34 ± 2.90
3.38 ± 0.36	33.32 ± 3.33

Tabela 6.2: Dados de corrente por tensão com suas incertezas

6.4.1 Dados Pontuais com Barras de Incerteza

Código 6.4.1.: Separação das colunas e gráfico com barras de incerteza

```
# -- recupera os dados antes -- #

# guarda as colunas em variáveis novas
x, dx = dados['V'], dados['dV']
y, dy = dados['I'], dados['dI']

# e coloca os dados pontuais com barras de incerteza
plt.errorbar(
    x, y, xerr=dx, yerr=dy,
    fmt='o', elinewidth=2/3, capsized=2, capthick=2/3, color='black',
    zorder=10, label='Dados Coletados'
)

# -- para fazer a regressão depois -- #
```

Para facilitar, as colunas foram separadas em `x` e `y`, com suas incertezas `dx` e `dy` em cada ponto. Agora, para desenhar as barras de incerteza, basta utilizar a função `errorbar` com os argumentos `xerr=dx` e `yerr=dy`. O argumento `fmt` foi usado para fazer com que os dados fossem desenhados como pontos, que é o formato '`o`'.

Além disso, os argumentos `elinewidth`, `capsize` e `capthick` controlam a grossura da barra de incerteza, o comprimento do topo da barra e a grossura desse topo, respectivamente. A cor dos pontos e das barras foi alterado para preto com `color='black'`. Novamente, esses desenhos foram colocados com ordem alta de desenho e com um rótulo para a legenda.

6.4.2 Regressão Linear com Incertezas

A regressão com incertezas fica bem parecida com a da seção [Regressão Linear](#), utilizando o pacote `odr`. A primeira diferença é que o `RealData` agora tem as incertezas de `x` e `y` em `sx` e `sy`. O

problema com a regressão da seção anterior é que o método dos mínimos quadrados não é capaz de analisar as incertezas em x , então vamos deixar a ODR aplicar a regressão por distância ortogonal, como no código 6.4.2.

Código 6.4.2.: Regressão Linear com Inceretzas

```
# regressão linear com incertezas
data = odr.RealData(x, y, sx=dx, sy=dy)
odreg = odr.ODR(data, odr.models.unilinear)
#odreg.set_job(fit_type=2) # mínimos quadrados não suporta incertezas em
#→ x
ans = odreg.run()

a, b = ans.beta      #  $y = ax + b$ 
da, db = ans.sd_beta # incertezas de a e b

# mostrando os coeficientes e suas incertezas
print(f'coef. angular = ({a}+-{da}) [mA/V -> kOhm^-1 -> kS]')
print(f'coef. linear   = ({b}+-{db}) [mA]')

# -- desenha a reta resultante da regressão e completa o gráfico -- #
```

6.4.3 Resultados

- ! Note que os coeficientes a e b da regressão em 6.6, tanto em seus valores quanto nas suas incertezas, são levemente diferentes dos da figura 6.5, mesmo com os dados numéricos idênticos. A diferença aqui se deve ao método de regressão diferente, mas mesmo utilizando a regressão ortogonal na seção Apresentação dos Dados, o valor difiria já que agora as incertezas dos dados estão sendo levadas em conta.

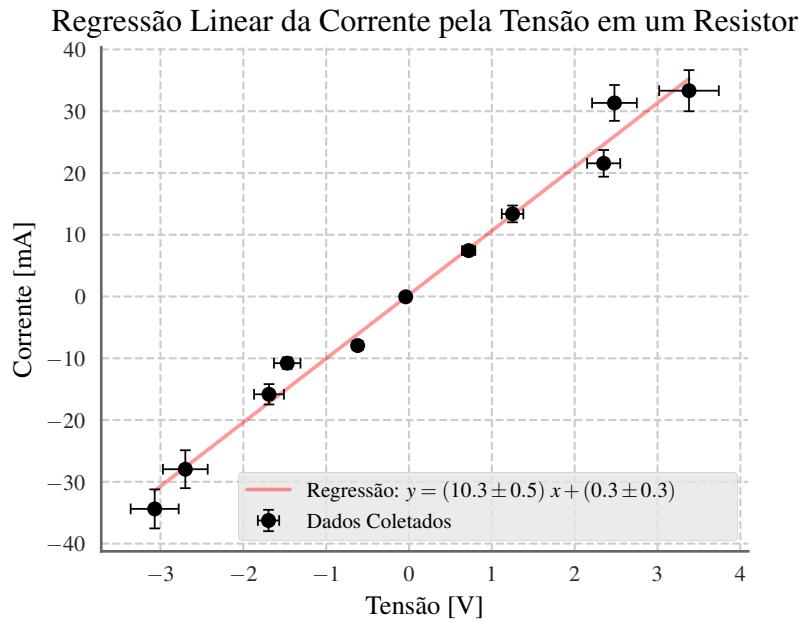


Figura 6.6: Exemplo de baras de incerteza

6.5 Escala Logarítmica

Várias vezes, no entanto, os dados não apresentam relação linear. Nesses casos, é importante encontrar alguma técnica de linearização que transforma os dados para novos valores dependentes, mas que se relacionam de maneira linear. Algo como a relação 6.2.

$$f(x, y) = a + b g(x, y) \quad (6.2)$$

Dentre as técnicas mais comuns, muitas envolvem a aplicação de logaritmos para linearizar algum monômio, isto é, nos casos de $y \propto x^k$, ou alguma relação exponencial, $y \propto k^x$. Para esses casos, é comum a utilização de escala logarítmica na intenção de se observar melhor os dados, em que $f(x, y) = \log(y)$ e $g(x, y) = \log(x)$.

6.5.1 Gráfico Log-Log

$$R_d = \frac{R_1 R_2}{R_x} \quad (6.3)$$

Se imaginarmos os dados do gráfico 6.7 como parte de um caso da ponte de Wheatstone dado pela equação 6.3, sendo R_x a resistência desconhecida e R_d a resistência da década, podemos aplicar a seguinte técnica de linearização:

$$\begin{aligned} \log(R_d) &= \log(R_1 R_2 (R_x)^{-1}) \\ &= \log(R_1 R_2) + \log((R_x)^{-1}) \\ &= \log(R_1 R_2) - \log(R_x) \end{aligned}$$

Portanto, podemos montar um gráfico log-log de R_d por R_x , que pode ser feito como em 6.5.1. O pyplot tem as funções `xscale` e `yscale` para mudar as escalas dos eixos, que podem receber

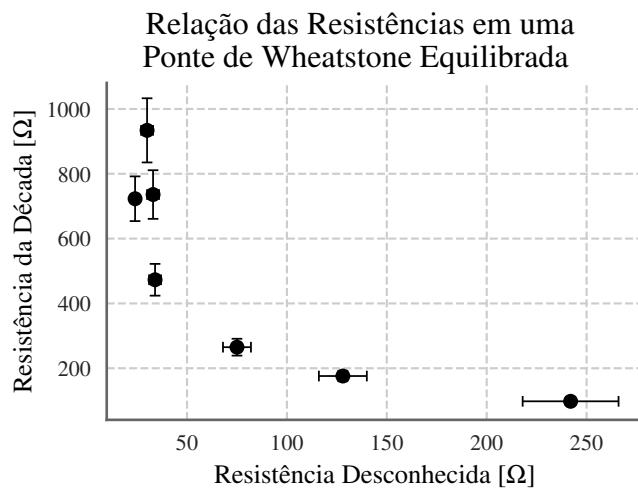


Figura 6.7: Gráfico da ponte de Wheatstone (eq. 6.3)

como argumento `'linear'` e `'log'` por padrão, além de algumas outras opções, mas é possível adicionar **escalas customizadas** no Matplotlib .

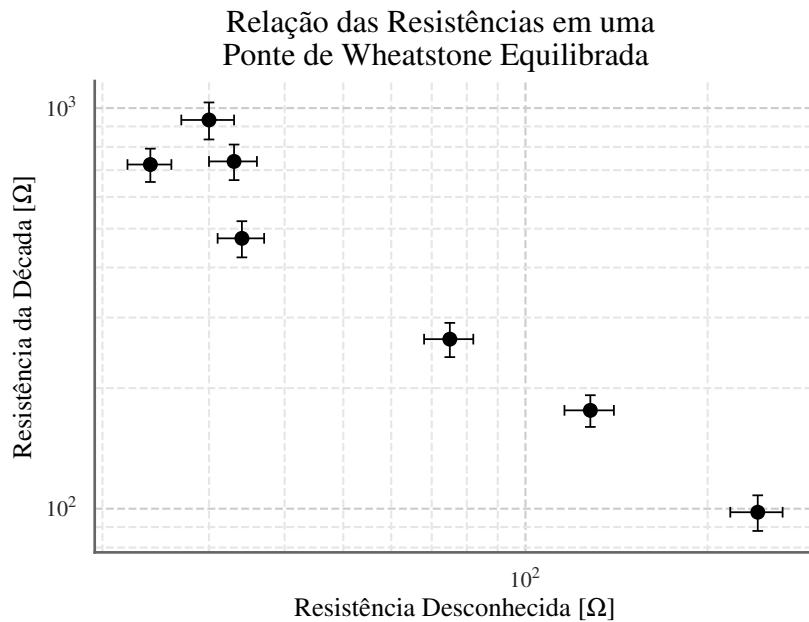


Figura 6.8: Gráfico log-log da Ponte de Whetstone (6.3)

Como as linhas de *grid* ficaram bem espaçadas, foram colocadas linhas internas com a função `grid` do `pyplot` e os argumentos `True`, para mostrar as linhas, e `which='minor'`, para desenhar entre as linhas principais. Elas também foram colocadas em ambos os eixos e com cor 90% branca, com as opções `axis='both'` e `color='0.9'`.

Código 6.5.1.: Construção de um gráfico log-log com barras de incerteza

```
# -- recupera os dados antes -- #

x, dx = dados['Rx'], dados['dRx']
y, dy = dados['Rd'], dados['dRd']

plt.errorbar(
    x, y, xerr=dx, yerr=dy,
    fmt='o', elinewidth=2/3, capsized=2, capthick=2/3, color='black',
    zorder=10, label='Dados Coletados'
)

# escala log-log
plt.xscale('log')
plt.yscale('log')

# linhas de grid internas
plt.grid(True, which='minor', axis='both', color='0.9')

# -- depois completa os textos e salva a imagem -- #
```

6.5.2 Gráfico Semi-Log

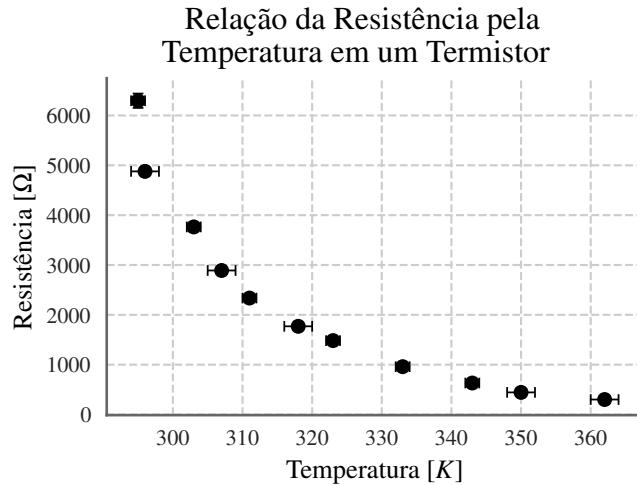


Figura 6.9: Gráfico do Termistor (eq. 6.4)

$$R = A \exp(B T^{-1}) \quad (6.4)$$

Agora com os dados da figura 6.9 e a relação (6.4), com R como a resistência e T^{-1} o inverso da temperatura, a linearização se torna:

$$\begin{aligned}
 \ln(R) &= \ln(A \exp(B T^{-1})) \\
 &= \ln(A) + \ln(\exp(B T^{-1})) \\
 &= \ln(A) + B T^{-1}
 \end{aligned}$$

Que pode ser usada em um gráfico semi-log de $R \times T^{-1}$, feito similar à seção [Gráfico Log-Log](#), que pode ser visto no código 6.5.2 com a figura 6.10 como resultado. Uma das diferenças específicas da equação (6.4) é a transformação do eixo x da temperatura para T^{-1} .

Código 6.5.2.: Construção de um gráfico semi-log com barras de incerteza

```

# -- recupera os dados antes -- #

T, dT = dados['T'], dados['dT']
y, dy = dados['R'], dados['dR']

# transformação do eixo x
x = 1/T
dx = dT/T**2

plt.errorbar(
    x, y, xerr=dx, yerr=dy,
    fmt='o', elinewidth=2/3, capsized=2, capthick=2/3,
    color='black', zorder=10,
)

# escala logarítmica
plt.yscale('log')

# linhas de grid internas no eixo y
plt.grid(True, which='minor', axis='y', color='0.9')

# -- depois completa os textos e salva a imagem -- #

```

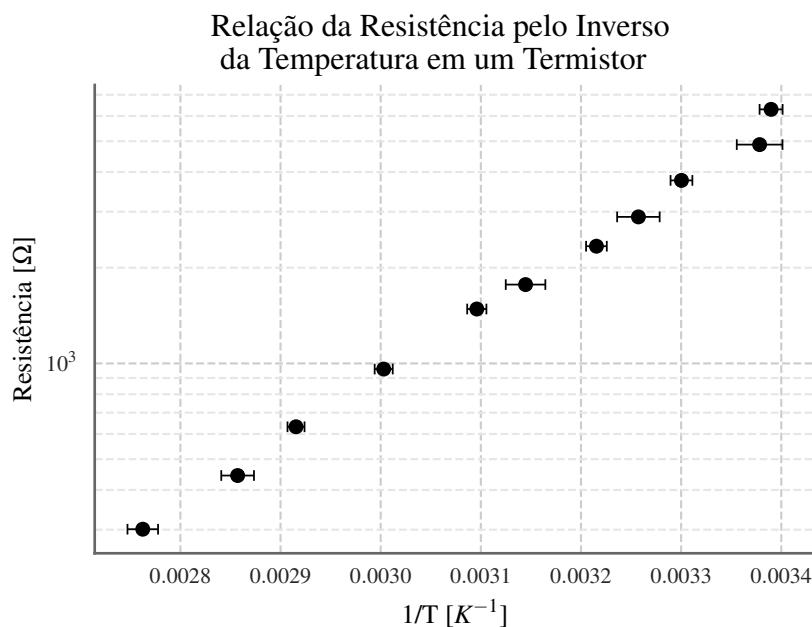


Figura 6.10: Gráfico semi-log do Termistor (eq. 6.4)

- ! A escolha de transformar o eixo, como no eixo x da figura 6.10, ou mudar a escala, que foi feito no eixo y , é uma parte importante da montagem dos gráficos. Normalmente, é preferível mexer na escala quando é uma escala conhecida ou quando se busca explicitar os valores originais do eixo. Nos casos em que isso não é necessário ou não é possível, a transformação dos eixos acaba sendo uma opção menos confusa.

6.5.3 Regressão em Escala Logarítmica

Código 6.5.3.: Aplicando a regressão ortogonal depois de uma transformação numérica dos eixos

```
# transforma os dados para a linearização
logx = np.log10(x)
logy = np.log10(y)

dlogx = dx / (x * np.log(10))
dlogy = dy / (y * np.log(10))

# regressão linear com incertezas
data = odr.RealData(logx, logy, sx=dlogx, sy=dlogy)
odreg = odr.ODR(data, odr.models.unilinear)
ans = odreg.run()

a, b = ans.beta      # logy = a logx + b
da, db = ans.sd_beta # incertezas de a e b

# mostrando os coeficientes e suas incertezas
print(f'coef. angular = {a}+-{da}')
print(f'coef. linear   = {b}+-{db}')

# -- desenha a reta resultante da regressão e completa o gráfico -- #
```

A regressão de uma curva de um monômio ou de uma exponencial é possível com técnicas de regressão não-linear, só que essas técnicas não cabem no escopo dessa matéria. Uma outra opção muito utilizada é encontrar uma linearização, como na equação (6.2), e, com a nova relação linear de $f(x,y) \times g(x,y)$, aplicar a regressão como da seção [Regressão Linear](#).

O único detalhe é que é preciso encontrar os valores de $f(x,y)$ e $g(x,y)$ e suas incertezas para cada par (x,y) dos dados e só com esses valores pode-se encontrar os coeficientes a e b , como foi feito no código 6.5.3. No caso, como a transformação é $f(x,y) = \log_{10}(x)$, a incerteza fica $\sigma_{\log x} = \frac{1}{\ln(10)} \frac{\sigma_x}{x}$, sendo que para o eixo y a transformação é igual.

As funções matemáticas foram utilizadas pelo NumPy, pelas técnicas de vetorização oferecidas, sendo elas `log` e `log10`, que equivalem a $\ln(x)$ e $\log_{10}(x)$.

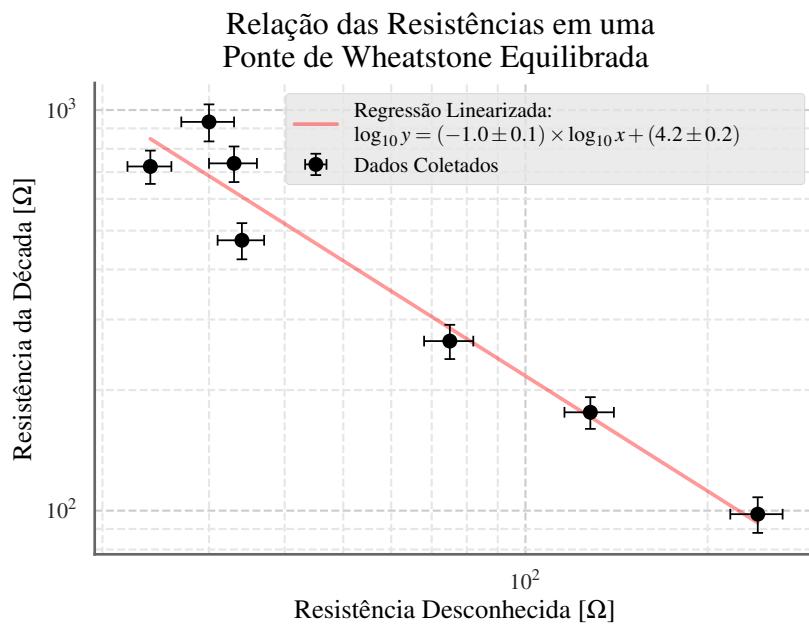


Figura 6.11: Exemplo de regressão em escala log-log

Perceba que a regressão obteve coeficiente angular próximo de -1 , como era o esperado pela equação inicial (6.3).

6.6 Equação Característica

Um bom exemplo de equação característica a ser encontrada é relação do termistor (eq. 6.4). Então, os dados serão os mesmo da seção [Gráfico Semi-Log](#).

6.6.1 Encontrando os Coeficientes

Para encontrar os coeficientes da equação característica, o primeiro passo normalmente é conseguir uma relação de linearização para poder aplicar alguma técnica de regressão linear e coeficientes dessa relação. Isso pode ser feito como na seção [Regressão em Escala Logarítmica](#).

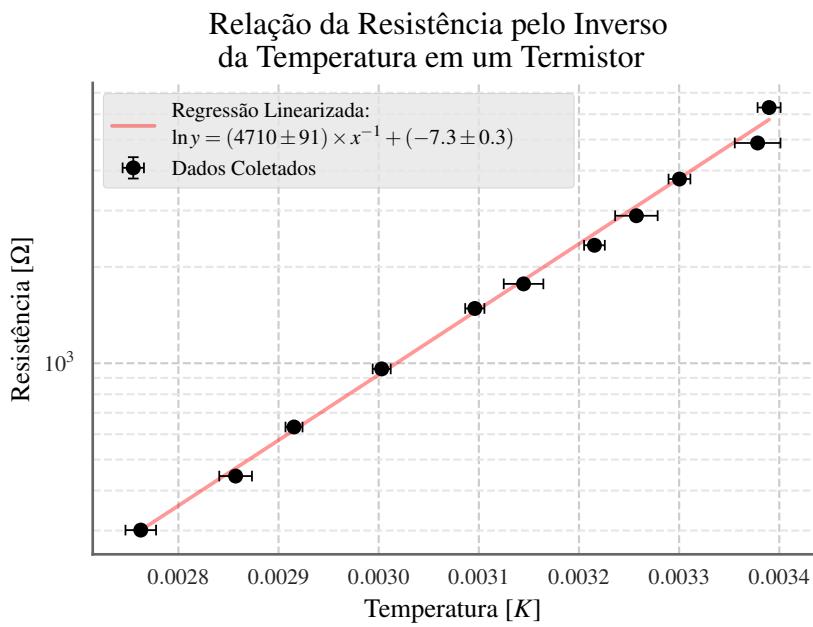


Figura 6.12: Regressão da equação linearizada do termistor

Código 6.6.1.: Código completo para encontrar a equação característica no exemplo do termistor (1^a parte)

```
# -- importa as bibliotecas -- #

# coletando os dados
dados = pd.read_csv('termistor.tsv', decimal=',', sep='\t')

T, dT = dados['T'], dados['dT']
R, dR = dados['R'], dados['dR']

# valores medidos
plt.errorbar(
    R, T, xerr=dR, yerr=dT,
    fmt='o', elinewidth=2/3, capsize=2, capthick=2/3, color='black',
    zorder=10, label='Dados Coletados'
)

# transformação dos eixos
logR = np.log(R)
dlogR = dR / R
```

Código 6.6.2.: Código completo para encontrar a equação característica no exemplo do termistor (2^a parte)

```

Tinv = 1/T      # inverso da temperatura
dTinv = dT/T**2

# regressão linear com incertezas
data = odr.RealData(Tinv, logR, sx=dTinv, sy=dlogR)
odreg = odr.ODR(data, odr.models.unilinear)
ans = odreg.run()

# coeficientes: lnR = a T^-1 + b
a, b = ans.beta
da, db = ans.sd_beta

# transforma para R = A e^(B/T)
A = np.exp(b)
dA = db * np.exp(b)

B = a
dB = da

# mostra os coeficientes da eq. característica
print(f'valor inicial    = {A}+-{dA}')
print(f'fator de cresc. = {B}+-{dB}')

# desenha a eq. característica
rotulo = f'''Equação Característica:
$T = \frac{\ln(R) - \ln(A)}{B} + {B}'''
Rs = np.linspace(min(R) - 2*min(dR), max(R) + 2*max(dR), num=200)
# então T = B/ln(R/A) = B/(lnR-lnA)
Ts = B/(np.log(Rs) - np.log(A))
plt.plot(Rs, Ts, color='red', alpha=0.4, label=rotulo)

# formatações do gráfico
plt.xlabel('Resistência [Ω]')
plt.ylabel('Temperatura [K]')
plt.title(f'''Relação da Temperatura pela
Resistência em um Termistor''')
plt.legend()

# -- salva o gráfico -- #

```

Depois que os coeficientes da reta foram encontrados, é preciso transformar os coeficientes para a forma inicial da equação. No caso do termistor, isso seria $A = e^b$ e $B = a$, com incertezas $\sigma_A = e^b \sigma_b$ e $\sigma_B = \sigma_a$. Em 6.6.1, todas as transformações, juntamente com a regressão, são feitas

diretamente no código, como exemplo. No exemplo também é usada a função `exp`, que é apenas $\exp(x) := e^x$.

Note que para este exemplo, no entanto, faz mais sentido tratar a equação característica da forma inversa (eq. 6.5). Por causa disso, os eixos do gráfico 6.13 estão invertidos em relação à figura 6.12.

$$T = \frac{B}{\ln(R) - \ln(A)} \quad (6.5)$$

6.6.2 Resultado

O código 6.6.1 produz como resultado a figura 6.13.

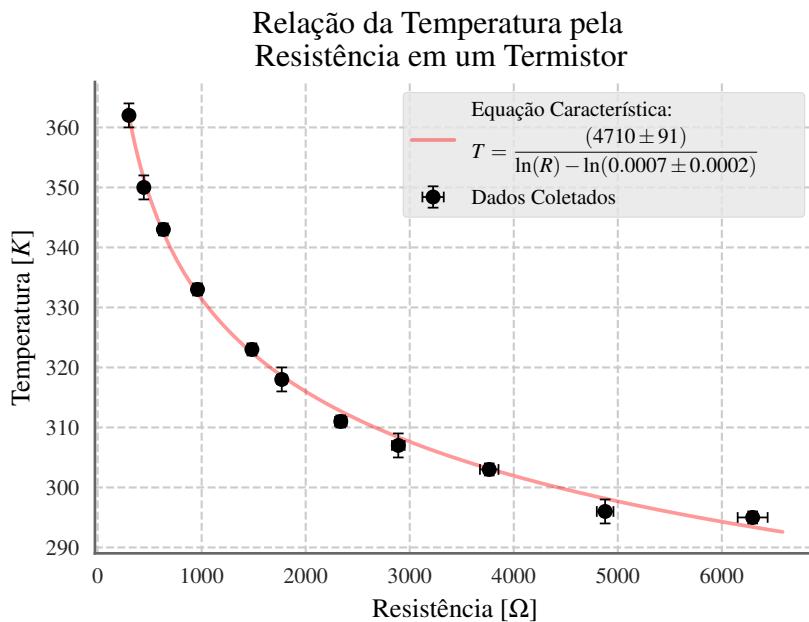


Figura 6.13: Exemplo de Equação Característica do Termistor

6.6.3 Banda de Incerteza

Para a equação 6.5, como A e B são constantes, bem como suas incertezas, σ_A e σ_B , a equação da incerteza σ_T de T fica como:

$$\sigma_T = \sigma_T(R, \sigma_R) = \frac{\sqrt{(\ln(R) - \ln(A))^2 \sigma_B^2 + \left(\frac{\sigma_A}{A}\right)^2 + \left(\frac{\sigma_R}{R}\right)^2}}{(\ln(R) - \ln(A))^2} \quad (6.6)$$

Se a equação característica for usada com um equipamento já pré-estabelecido, é possível assumir que a incerteza da medida, no caso a resistência, vai seguir uma função $\sigma_R = \sigma_R(R)$ conhecida para cada R . Dependendo da situação, é possível assumir que σ_R é constante ou que a incerteza relativa $\frac{\sigma_R}{R}$ é constante. Para este exemplo, vamos assumir as equações (6.7), (6.8) e (6.9).

$$\text{resolução}(R) = \begin{cases} 0.1\Omega, & \text{se } 0\Omega \leq R \leq 600\Omega \\ 1\Omega, & \text{se } 600\Omega < R \leq 6k\Omega \\ 10\Omega, & \text{se } 6k\Omega < R \leq 60k\Omega \\ \text{indefinido}, & \text{caso contrário} \end{cases} \quad (6.7)$$

$$\mu_{\text{calibração}}(R) = \begin{cases} 1\%R + 3 \times \text{resolução}(R), & \text{se } 0\Omega \leq R \leq 600\Omega \\ 0.5\%R + 2 \times \text{resolução}(R), & \text{se } 600\Omega < R \leq 60k\Omega \\ \text{indefinido}, & \text{caso contrário} \end{cases} \quad (6.8)$$

$$\sigma_R(R) = \sqrt{\left(\frac{\text{resolução}(R)}{2\sqrt{3}}\right)^2 + \left(\frac{\mu_{\text{calibração}}(R)}{\sqrt{3}}\right)^2} \quad (6.9)$$

No código 6.6.3 foi necessário utilizar a função `sqrt`, que é apenas a raiz quadrada: $\text{sqrt}(x) := \sqrt{x}$. Para facilitar o código, foi utilizada também a função `vectorize` como decorador, que transforma uma função qualquer de Python em uma função vetorizada como as funções de NumPy . Isso poderia ser feito com um simples `for` também: `dRs = [dR_total(R) for R in Rs]`; mas isso retorna uma lista, que às vezes pode causar problemas com os `vetores` de NumPy .

O código 6.6.4 é similar aos outros códigos de montagem de gráfico, só que com uma nova função, `fill_between`, que desenha uma região delimitada por duas curvas y_1 e y_2 , que aqui foram $y_1 = T - \sigma_T$ e $y_2 = T + \sigma_T$, formando a faixa de incerteza. Essa região foi montada com a mesma cor da curva característica, com uma opacidade menor (`alpha=0.15`), o que pode ser visto na figura 6.14.

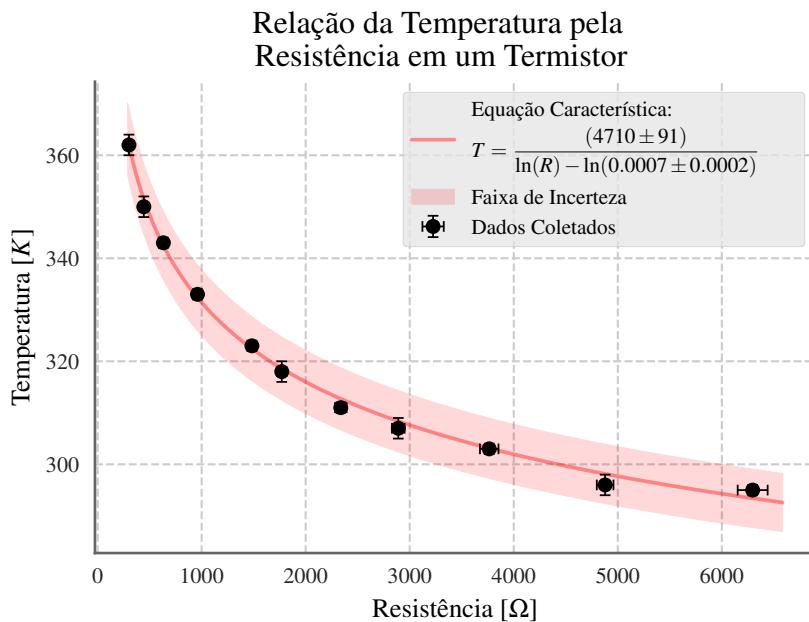


Figura 6.14: Exemplo de Equação Característica com Banda de Incerteza

! Normalmente não é possível assumir uma incerteza determinística $\sigma_y(x, \sigma_x) = \sigma_y(x)$, como foi feito com a incerteza da temperatura nessa seção. Para esses casos, é possível desconsiderar a incerteza em x , $\sigma_x = 0$, que serviria para mostrar a menor incerteza que a equação

característica encontrada consegue alcançar. No entanto, se esse for o caso, pode ser que a banda de incerteza acabe não sendo muito útil e apenas deixe a leitura do gráfico mais complicada.

6.7 Gráficos de Múltiplas Variáveis

Para os casos em que é necessário apresentar dados com mais de uma variável dependente de um mesmo dado x , existe a opção de gráficos múltiplos. Eles servem para comparar as relações do tipo $y_1 = f(x)$ e $y_2 = g(x)$, quando x , y_1 e y_2 são medidos em conjunto.

Em experimentos com circuitos, esse tipo de dado aparece, por exemplo, na medição de tensão em nós diferentes para a comparação de seus comportamentos no tempo. É o caso do circuito da figura 6.15, cujos dados foram os da tabela 6.3.

Tempo	V_1	V_2	Corrente
0.0 ms	0.0 V	2.0 V	-20 mA
0.4 ms	1.9 V	2.3 V	-3 mA
0.8 ms	3.6 V	2.2 V	14 mA
1.2 ms	4.7 V	1.8 V	29 mA
1.6 ms	5.0 V	1.1 V	39 mA
2.0 ms	4.5 V	0.2 V	43 mA
...			

Tabela 6.3: Dados gerados com simulador. Primeiros 6 valores.

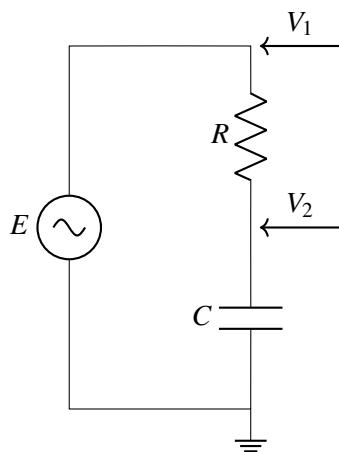


Figura 6.15: Circuito de defasagem da tensão por um capacitor

6.7.1 Gráficos de Eixos Compartilhados

Código 6.7.1.: Montagem completa do gráfico de duas variáveis com eixos compartilhados

```
# -- importa os dados antes -- #

# separando os dados
t = dados['t']
V1 = dados['V1']
V2 = dados['V2']
I = dados['I']

# desenha os gráficos
plt.plot(t, V1, color='red', alpha=0.6, label='Tensão de Entrada')
plt.plot(t, V2, color='blue', alpha=0.6, label='Tensão de Saída')

# coloca legenda e os textos
plt.legend()
plt.xlabel('Tempo [ms]')
plt.ylabel('Tensão [V]')
plt.title('Comportamento da Tensão em um Circuito RC')

# -- depois salva a figura -- #
```

Esse método é melhor para visualizar a diferença de escala entre os dados, mas, se algum dos dados tem uma escala muito diferente, o gráfico pode acabar pecando na percepção dos dados. Um dos maiores limites para esse método, no entanto, é que as variáveis dependentes precisam ter a mesma motivação física e, por causa disso, a mesma gradeza, caso contrário, o eixo compartilhado entre elas perde completamente o sentido.

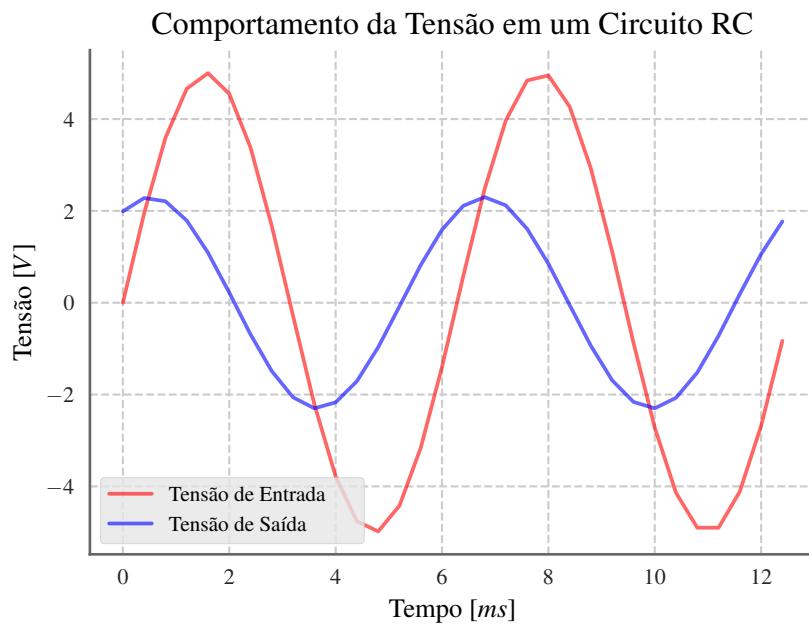


Figura 6.16: Exemplo de gráfico com as curvas das duas tensões V_1 e V_2

6.7.2 Gráficos com Apenas a Abscissa Comum

Se as escalas entre y_1 e y_2 forem muito diferentes ou se forem grandezas diferentes, uma opção viável é montar um gráfico de três eixos. Pra fazer isso Matplotlib, é preciso tratar diretamente dos *eixos* do gráfico, que são instâncias da classe `Axes`. Normalmente, a interface pyplot gera esse objetos automaticamente, quando necessário, mas aqui vamos precisar tratar da construção deles também, que pode ser feito com a função `subplot`, como no código 6.7.2.

O outro objeto, com o terceiro eixo, é um tipo de eixo chamado de *gêmeo*, já que o eixo x dele é o mesmo que o do primeiro. Para criar um eixo gêmeo em x é com o método `twinx`. Para desenhar em cada eixo, as `funções` são parecidas com as do pyplot, como função `plot`, mas aqui se deve tomar cuidado com qual eixo se deseja desenhar.

Código 6.7.2.: Montagem completa do gráfico de duas variáveis com abscissa compartilhada

```
# -- importa e separa os dados antes -- #

# criação dos eixos
eixo_esq = plt.subplot()
eixo_dir = eixo_esq.twinx()

# desenho e formatações do eixo esquerdo
eixo_esq.plot(t, V2, color='red', alpha=0.6, label='Tensão')
eixo_esq.set_ylabel('Tensão [V]')
eixo_esq.grid(False)

# mesmo para o eixo direito
eixo_dir.plot(t, I, color='blue', alpha=0.6, label='Corrente')
eixo_dir.set_ylabel('Corrente [mA]')
eixo_dir.grid(False)

# título e rótulo do eixo compartilhado
eixo_esq.set_title('Relação de Corrente e Tensão em um Capacitor')
eixo_esq.set_xlabel('Tempo [ms]')

# coluna do eixo da direita
eixo_dir.spines['right'].set_visible(True)
# e tira a coluna sobreposta
eixo_dir.spines['left'].set_visible(False)

# cores das colunas dos eixos
eixo_esq.spines['left'].set_color('red')
eixo_esq.spines['left'].set_alpha(0.6)
eixo_dir.spines['right'].set_color('blue')
eixo_dir.spines['right'].set_alpha(0.6)

# -- salva a figura -- #
```

Os métodos de formatação dos Axes também são semelhantes às funções de formatação do `pyplot`, como `grid` e `set_ylabel`. Os métodos `set_xlabel` e `set_title` também são idênticos aos do `pyplot`, mas nesse gráfico tem um detalhe a mais: como o segundo eixo é um gêmeo em x do primeiro eixo, o título e o rótulo do eixo x não podem ser modificados pelo eixo gêmeo.

Apesar de ter gerado o eixo gêmeo, o Matplotlib está configurado para não mostrar a coluna (*spine*) na parte direita do gráfico. Isso pode ser alterado mexendo diretamente com as instâncias da classe `Spine`, que pode ser acessado pelo eixo, através de um dicionário que relaciona o nome da coluna com o objeto dela. No caso, vamos acessar a coluna de nome '`right`' e mudar sua visibilidade com `set_visible`.

Para deixar os eixos mais reconhecíveis, é possível colocar legenda nos eixos, mas elas seriam redundantes aqui. Um outra opção, é o reconhecimento por cor, que pode ser feito na coluna do eixo com os métodos `set_color` e `set_alpha`. Também foi removido a coluna esquerda do eixo gêmeo para evitar sobreposição visual das colunas.

- ! As vezes, os gráficos com múltiplas curvas podem ficar sobrecarregado de informação. Quando isso acontece, o melhor é separar os dados em gráficos distintos pra manter a legibilidade. Gráficos de três eixos pdem ficar complicados com facilidade.

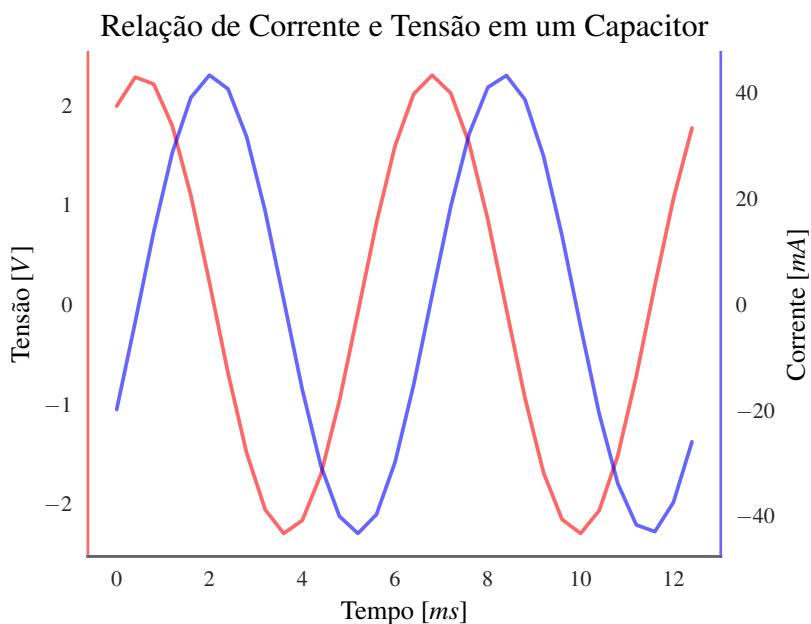


Figura 6.17: Exemplo de gráfico de três eixos para a corrente e a tensão em cada tempo

6.7.3 Gráficos de Eixos Separados

A opção mais genérica para mostrar os dois canais ao mesmo tempo é colocar cada um em seu próprio gráfico com seus próprios eixos. Normalmente, isso é feito com duas imagens diferentes, mas para facilitar a comparação entre os gráficos, eles podem ser feitos em uma mesma figura. No `matplotlib`, isso pode ser feito com a ideia de *subplots*.

A função do `pyplot` para isso é `subplots`, que retorna a instância da figura, um objeto `Figure`, e as instâncias dos eixos, montados em uma matriz de eixos dada pelo número de linhas e de colunas, que no código 6.7.3 é `nrows=2` e `ncols=1`. No exemplo, os eixos *x* de cada gráfico são os mesmos, então faz sentido eles serem representados do mesmo jeito, que foi pra isso o argumento `sharex=True`.

Além disso, os eixos foram separados em superior e inferior, sendo que o título foi colocado apenas no superior e o rótulo do eixo *x*, só no inferior.

Código 6.7.3.: Montagem completa do gráfico de duas variáveis com abscissa compartilhada

```
# -- importa e separa os dados antes -- #

_, eixos = plt.subplots(nrows=2, ncols=1, sharex=True)
eixo_sup = eixos[0]
eixo_inf = eixos[1]

# eixo superior
eixo_sup.plot(t, V2, color='red', alpha=0.6)
eixo_sup.set_ylabel('Tensão [V]')

# eixo inferior
eixo_inf.plot(t, I, color='blue', alpha=0.6)
eixo_inf.set_ylabel('Corrente [mA]')

# formatações gerais
eixo_sup.set_title('Relação de Corrente e Tensão em um Capacitor')
eixo_inf.set_xlabel('Tempo [ms]')

# -- depois salva a figura -- #
```

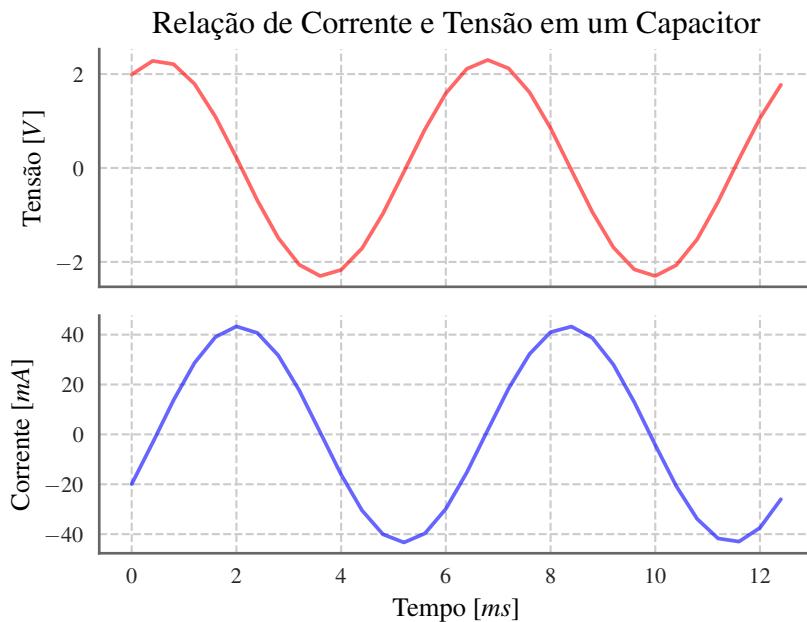


Figura 6.18: Exemplo de imagem com dois gráficos

Código 6.6.3.: Implementação das funções para o cálculo da incerteza

```
# -- funções de cálculo de incerteza -- #

def resolucao(R):
    if      0 <= R <= 600:
        return 0.1
    elif   600 < R <= 6_000:
        return 1
    elif 6_000 < R <= 60_000:
        return 10
    else:
        raise ValueError

def dR_calibracao(R):
    d = resolucao(R)
    if      0 <= R <= 600:
        return 0.010 * R + 3 * d
    elif 600 < R <= 60_000:
        return 0.005 * R + 2 * d
    else:
        raise ValueError

def dist_retangular(a):
    return a / (2 * np.sqrt(3))

@np.vectorize
def dR_total(R):
    dR_calib = dist_retangular(2 * dR_calibracao(R))
    dR_leitura = dist_retangular(resolucao(R))

    return np.sqrt(dR_calib**2 + dR_leitura**2)

# -- #
```

Código 6.6.4.: Cálculo da incerteza e desenho da banda de incerteza

```
# -- depois de mostrar a eq. característica -- #

# incerteza de cada R mostrado na reta
dRs = dR_total(Rs)

# e a incerteza de cada T
lnRmlnA = np.log(Rs) - np.log(A)
dTs = np.sqrt((lnRmlnA * dB)**2 + (dA/A)**2 + (dRs/Rs)**2)/lnRmlnA**2

# desenho da banda de incerteza
plt.fill_between(
    Rs, Ts-dTs, Ts+dTs,
    color='red', alpha=0.15,
    label='Faixa de Incerteza'
)

# -- coloca os textos e a legenda, depois salva o gráfico -- #
```


7. Phyphox

O Phyphox é um aplicativo que usa os sensores presentes nos celulares para a realização de experimentos. Ele também realiza a exportação dos dados coletados para compartilhamento e para serem analisados no seu programa de preferência. Para mais informações sobre o funcionamento do Phyphox, consulte o site www.phyphox.org.

Para instalar o Phyphox escaneie o código QR da figura 7.1 correspondente ao sistema operacional do seu aparelho móvel.



Android



iOS

Figura 7.1: Códigos QR para instalação do Phyphox para Android e iOS.

Para adicionar o experimento a ser utilizado no experimento de acústica (capítulo 11), clique no botão com sinal "+", conforme indicado na figura 7.2 a. Em seguida clique na opção "Adicionar experimento com código QR"(figura 7.2 b).

Uma tela para escaneamento de código QR será aberta. Escaneie o código da figura 7.3. Você também pode utilizar o código da figura 7.4, o que o direcionará para uma versão mais antiga do experimento. Ao iniciá-lo você verá a tela do experimento "Acoustic Resonance", como a da figura 7.5. Este experimento extra foi desenvolvido por F. Bouquet e está disponível no [fórum do Phyphox](#).

Na figura 7.5 está representada a tela do experimento "Acoustic Resonance". Os ícones presentes na figura representam:

- A: indicador da frequência que está sendo emitida pelo alto-falante no momento.
- B: Gráfico que mostra a intensidade do sinal medido pelo microfone (amp(a.u.), onde a.u. significa unidades arbitrárias em inglês) em função da frequência (freq (Hz)).
- C: item para escolha da frequência do sinal de varredura.
- D: item para escolha do incremento a ser aplicado à frequência a cada 1 segundo.

É importante notar que a tela do aplicativo na versão 5.3 (recomendada) não possui mais a aba de Debug e nem a opção de Frequency factor. Ambas eram desnecessárias ao experimento.

Após configurar os parâmetros do experimento, aperte o ícone da lixeira para garantir que as novas configurações foram aplicadas. Em seguida, aperte o ícone "play" para iniciar a varredura. Ambos os ícones ficam na parte superior direita da tela, como destacado na figura 7.5. Conforme a

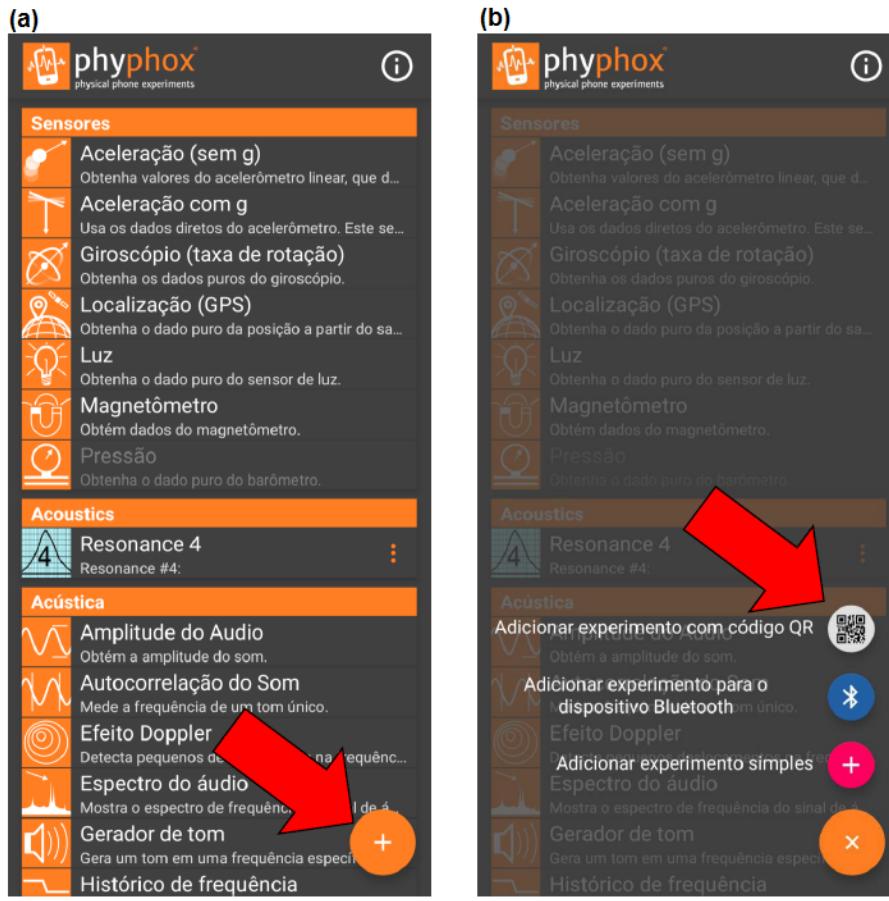


Figura 7.2: Indicações para abertura de um novo experimento no Phyphox através de código QR.

varredura é realizada, os pontos no gráfico serão atualizados em tempo real.

Quando a varredura for finalizada, exporte os seus dados clicando primeiramente no ícone com três pontos, e em seguida em "Exportar Dados", como apresentado na figura 7.6.



Figura 7.3: Código QR para abertura do experimento "Acoustic Resonance v. 5.3" no Phyphox. Experimento desenvolvido por F. Bouquet.



Figura 7.4: Código QR para abertura do experimento "Acoustic Resonance" no Phyphox, em sua versão mais antiga. Experimento desenvolvido por F. Bouquet. Baixe esta versão apenas se você tiver problemas com a versão 5.3. Existem também outras versões intermediárias no fórum do Phyphox.

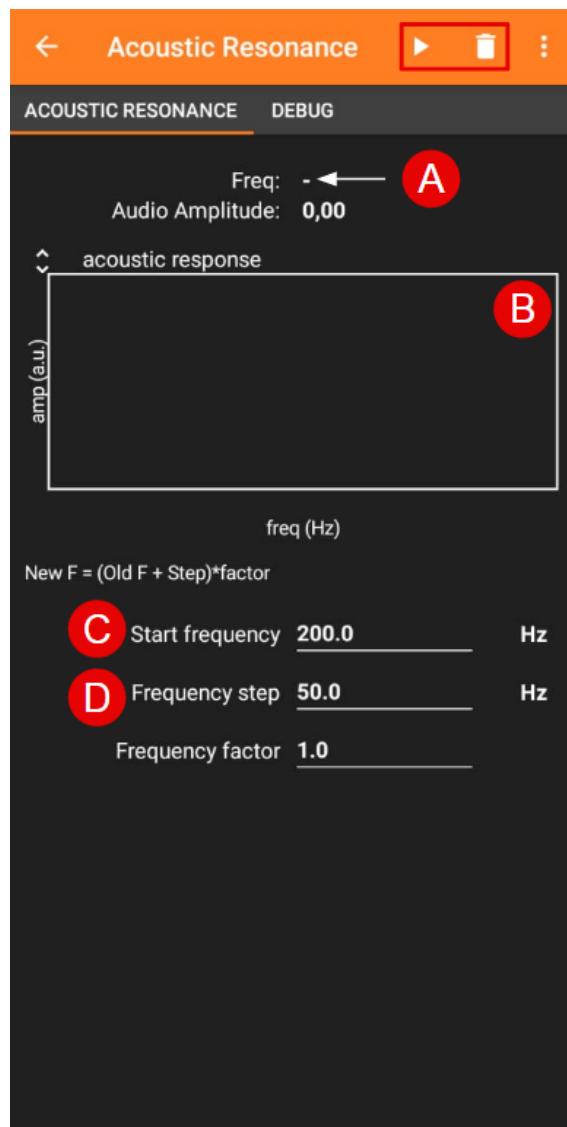


Figura 7.5: Parâmetros do experimento "Acoustic Resonance" no Phyphox.

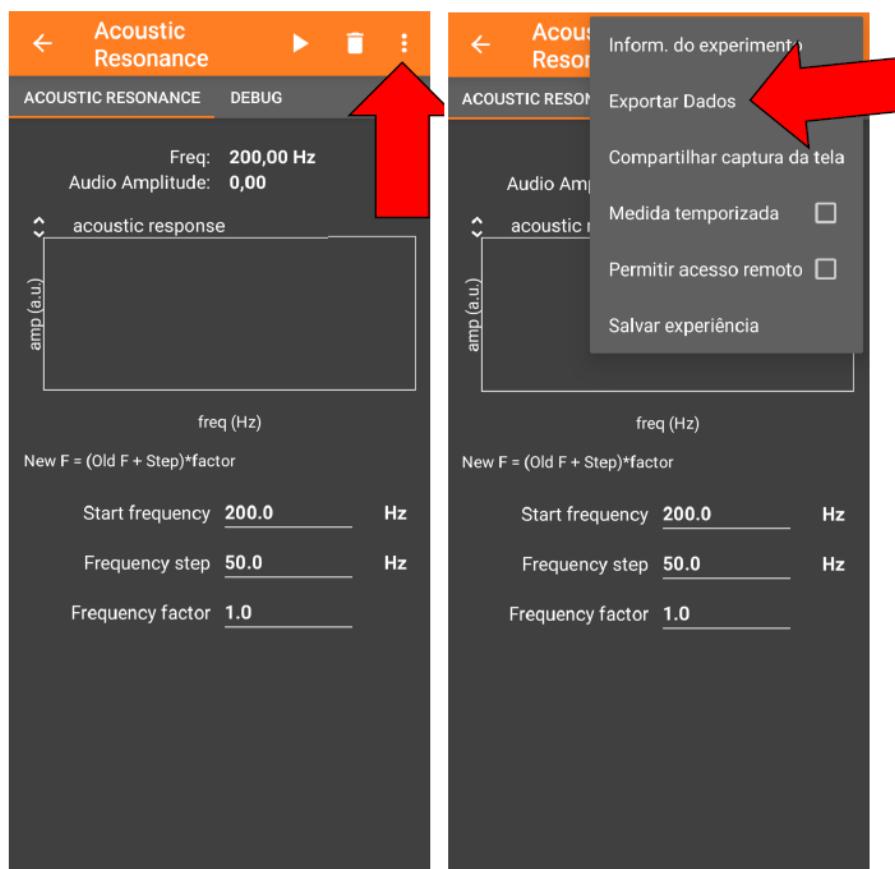


Figura 7.6: Instruções para exportar dados no Phyphox. A tela do programa na versão 5.3 não conta mais com a aba de Debug e nem com a opção Frequency factor.

Experimentos

8	A Máquina de Atwood	101
8.1	Introdução	
8.2	Objetivos	
8.3	Medições a partir de vídeos	
8.4	Planejamento	
8.5	Relatório	
8.6	Bibliografia	
9	Desvios sistemáticos em medições ..	105
9.1	Introdução	
9.2	Desvios devidos a tempos de reação	
9.3	Experimento virtual	
10	O Pêndulo Físico	111
10.1	Introdução	
10.2	O pêndulo simples	
10.3	O pêndulo físico	
10.4	Objetivos	
10.5	Planejamento	
10.6	Relatório	
10.7	Bibliografia	
11	Acústica	117
11.1	Introdução	
11.2	Objetivos	
11.3	Planejamento experimental	
11.4	No relatório	
11.5	Preparando um seminário	
11.6	Bibliografia	
12	Tensão superficial e viscosidade ..	125
12.1	Introdução	
12.2	Objetivos	
12.3	Bibliografia	
13	Resfriamento	129
13.1	Introdução	
13.2	Resfriamento	
13.3	Objetivos	
13.4	Tratamento inicial dos dados e preparação dos gráficos	
13.5	Ajustes não-lineares	
13.6	Fazendo e comparando previsões de modelos	
13.7	Bibliografia	
	Índice Remissivo	135

8. A Máquina de Atwood

8.1 Introdução

Em 1784 o matemático inglês George Atwood inventou uma máquina simples com a qual é possível estudar o movimento uniformemente acelerado de corpos. O aparato, mostrado na Fig. 8.1, consiste em uma polia livre para girar em torno de um eixo fixo e dois corpos, de massas m_1 e m_2 pendurados na polia por meio de um fio leve e inextensível. A diferença entre os pesos dos dois corpos é responsável por um torque não nulo sobre a polia, que gira com aceleração angular constante.

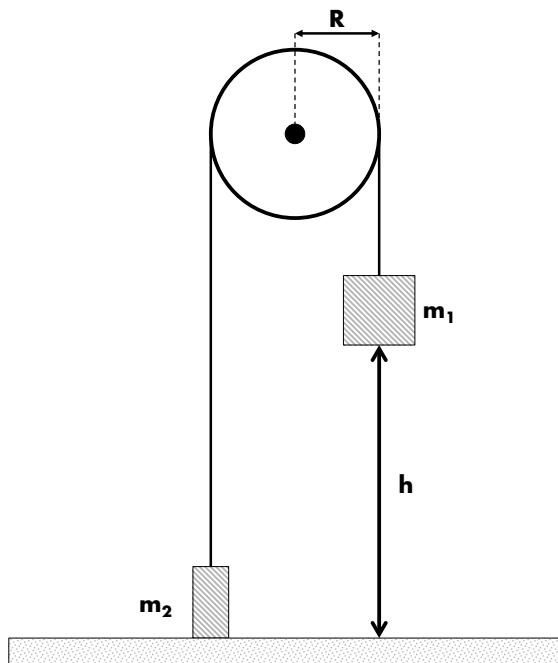


Figura 8.1: Diagrama de uma máquina de Atwood, formada por uma polia de raio R , e duas massas, m_1 e m_2 ligadas por um fio inextensível de massa desprezível. A polia gira em torno de um eixo paralelo à mesa, utilizando dois rolamentos, que produzem um pequeno torque de atrito total τ_a contrário à rotação.

Se o fio não escorrega no cilindro de latão e se m_1 for maior que m_2 (ver desenho), quando o sistema for abandonado sem velocidade inicial a equação-modelo que descreve a relação entre a diferença de massa dos corpos e o tempo de queda de uma altura h é:

$$\Delta m = \frac{2}{gR^2} (I + MR^2) \frac{h}{t^2} + \frac{\tau_a}{gR} \quad (8.1)$$

onde $\Delta m = m_1 - m_2$, $M = m_1 + m_2$, h é a altura inicial, t é o tempo em que os corpos se deslocam de h , I e R são respectivamente o momento de inércia do cilindro de latão e seu raio, τ_a é o **torque da força de atrito que existe nos rolamentos utilizados para que a polia possa girar livremente**, e g é a aceleração da gravidade. Notem que em um movimento de queda uniformemente acelerado, a aceleração será dada por $a = 2h/t^2$.

Assim, podemos escrever a equação-modelo também como

$$\Delta m = \frac{a}{gR^2}(I + MR^2) + \frac{\tau_a}{gR}, \quad (8.2)$$

ou

$$a = \Delta m \frac{gR^2}{I + MR^2} - \frac{\tau_a R}{I + MR^2}. \quad (8.3)$$

Exercício 8.1 Para chegar à equação modelo, comece montando o diagrama de forças do problema e em seguida escreva as leis de força para os dois contrapesos. Note que a **condição de fio inextensível** pode significar que a aceleração dos dois contrapesos deve ser igual em módulo, mas com sinais opostos, já que um contrapeso cai acelerado e o outro sobe acelerado.

Em seguida escreva a lei de Newton para a rotação da polia sujeita aos torques aplicados pelas tensões geradas na corda pelos dois contrapesos. Para encontrar a aceleração angular da polia você deverá escrever a equação horária para um movimento de rotação uniformemente acelerado. Aqui é importante perceber que a **suposição de que não há deslizamento do fio sobre a polia** significa que se os contrapesos se deslocam verticalmente de h a polia deve girar de um ângulo $\theta = \frac{h}{R}$.

Por fim escreva a equação horária para o movimento uniformemente acelerado na vertical. ■

8.2 Objetivos

Neste primeiro trabalho, temos dois objetivos:

1. fazer uma comparação entre duas formas de coletar dados, que serão analisados usando o mesmo modelo,
2. analisar os dados coletados para estimar os valores de I e τ_a e suas respectivas incertezas.

Para fazer a comparação proposta no objetivo 1, vocês deverão obter a aceleração da queda do contrapeso por dois caminhos:

- medição do tempo total de queda e aplicação à equação da aceleração média, $a = 2h/t^2$;
- ajuste dos dados de posição em função do tempo a uma equação quadrática $y = (y_0 + at_0^2/2) - at_0t + at^2/2$, sendo y_0 a posição inicial do contrapeso, t_0 o instante em que o peso começa a cair e a a aceleração.



Veja que a equação no segundo método de obtenção da aceleração assume que seu rastreamento de posição não começa exatamente no instante em que o contrapeso sai do repouso, então ele já andou uma certa distância e já possui uma certa velocidade. É possível chegar a esta equação partindo de $y = y_0 + a(t - t_0)^2/2$ e expandindo o produto notável. Lembre-se que estamos interessados apenas na aceleração do contrapeso, a .

O ajuste proposto para a posição, a fim de obter a aceleração, é um **ajuste polinomial**, que é um tipo de ajuste linear por MMQ no sentido de que o problema pode ser escrito como uma equação linear de matrizes e vetores:

$$\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ \vdots \\ y_N \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1^0 & x_1^1 & x_1^2 & \dots & x_1^m \\ x_2^0 & x_2^1 & x_2^2 & \dots & x_2^m \\ x_3^0 & x_3^1 & x_3^2 & \dots & x_3^m \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x_N^0 & x_N^1 & x_N^2 & \dots & x_N^m \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A_0 \\ A_1 \\ A_2 \\ \vdots \\ A_m \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \Delta_1 \\ \Delta_2 \\ \Delta_3 \\ \vdots \\ \Delta_N \end{bmatrix}, \quad (8.4)$$

em que N é o número de medições feitas para a VD y em função da VI x e m é o grau do polinômio. O fato do ajuste ser linear (por ser uma equação matricial linear) é importante porque nesse caso o MMQ sempre leva ao vetor de parâmetros \mathbf{A} que de fato minimizam o quadrado das diferenças Δ_k entre os dados experimentais e o modelo.

Você não precisa se preocupar em resolver a equação 8.4, pois o programa de tratamento de dados já é programado para fazê-lo, através de um ajuste polinomial. No SciDAVis ele pode ser acessado da mesma forma que o ajuste linear, selecionando a opção **Fit Polynomial...** que fica logo abaixo do ajuste de funções lineares, no mesmo menu, como mostrado na figura 5.12.

- ! Cada ajuste polinomial dirá o valor de uma aceleração! Nos modelos 8.2 e 8.3 os parâmetros I e τ_a que desejamos conhecer não podem ser obtidos a partir de uma única aceleração. Você deverá linearizar o modelo e fazer um ajuste de uma reta aos dados, calculando I e τ_a a partir dos valores dos coeficientes A e B da reta.

Para satisfazer o objetivo 2 vocês deverão utilizar os dados obtidos e as técnicas de análise que apresentaremos abaixo para encontrar um valor para o momento de inércia I da polia utilizada e para o torque de atrito τ_a nos rolamentos e compará-los aos valores esperados, considerando uma polia ideal e os dados de torque de atrito dados pelo fabricante¹.

Exercício 8.2 Para atingir o objetivo científico deste experimento, será preciso fazer um ajuste do um modelo linearizado aos dados experimentais utilizando o MMQ. Faça a linearização dos modelos 8.2 e 8.3. A troca do papel de variável independente (VI) e variável dependente (VD) nas equações leva a uma diferença com relação a como I e τ_a serão obtidos a partir dos parâmetros A e B do ajuste.

Você consegue perceber qual é? Pensando em termos de propagação de incertezas, qual parece ser a melhor opção? ■

8.3 Medições a partir de vídeos

Utilizando a câmera do celular é possível gravar as realizações de um experimento para que sejam analisadas em um computador. Em F 229 utilizaremos o Tracker para realizar a análise do vídeo. O programa pode ser baixado em <https://physlets.org/tracker/>, e há um breve tutorial no capítulo 4.

O Tracker permite importar arquivos de vídeo e analisar o movimento dos objetos filmados a partir do seu rastreamento quadro a quadro, seja de forma automatizada ou indicando manualmente a posição de um ponto de referência em cada quadro do vídeo. Uma série de materiais suplementares explicando como utilizar o Tracker estão disponíveis no Moodle da disciplina.

A resolução temporal do Tracker depende de quantas imagens diferentes (quadros) foram gravados em um segundo. Na maioria dos telefones os vídeos são gravados a 30 quadros por segundo. Para os próximos experimentos, verifiquem se há a possibilidade de gravar vídeos com maior velocidade em seu telefone e como funciona esta função. Em alguns casos apenas parte do vídeo é gravada em alta velocidade!

- ! Os vídeos deste experimento foram gravados utilizando a função de vídeo de uma câmera fotográfica, a 24 quadros por segundo. Certifique-se de que esta informação está corretamente configurada no Tracker.

¹Uma explicação sobre qual o modelo de rolamento usado e como consultar o site do fabricante está disponível no Moodle da disciplina.

Exercício 8.3 No caso deste experimento, vocês deverão escolher quais vídeos analisar e, em cada um rastrear a posição de um dos contrapesos durante sua queda. Pensem em como utilizar a curva de posição em função do tempo para definir o intervalo de tempo que dura a queda do contrapeso. No Planejamento e no Relatório é preciso deixar claro os critérios utilizados por vocês para marcar o começo e o final da queda.

■

8.4 Planejamento

Ao final da primeira semana de trabalho vocês deverão enviar pelo Moodle um planejamento experimental. Neste caso, como trabalharão analisando vídeos, devem apenas explicar como estão fazendo a coleta de dados e a sua análise para atingir os objetivos propostos.

Fazer um planejamento é importante para que a equipe didática possa avaliar em quais pontos o grupo apresenta dificuldades e fazer recomendações de mudanças e melhorias. Esta é uma etapa muito importante para garantir um bom relatório e um planejamento rico em análises de dados preliminares permitirá que forneçamos um diagnóstico mais completo do que precisa melhorar.

No planejamento deste experimento vocês devem explicar como fizeram a coleta de dados a partir dos vídeos, listar quais vídeos escolheram analisar, apresentar uma tabela com os dados preliminares coletados, gráficos e os valores preliminares de I e τ_a encontrados. Todas estas informações são fundamentais para que possamos dar um bom retorno, sugerir correções e, se já estiverem boas, poderão ser aproveitadas no Relatório.



ATENÇÃO: O envio de um arquivo PDF de planejamento é obrigatório para liberar o acesso ao link de envio do relatório.

8.5 Relatório

Ao final do prazo estipulado no Moodle o grupo deverá enviar para avaliação um relatório, em PDF, com no máximo 5 páginas (sem contar capa e apêndices), feito seguindo as recomendações dadas na seção 3.1.

Vocês deverão fazer uma discussão dos resultados com base nos objetivos apresentados na seção 8.2, ou seja: deverão falar dos valores de I e τ_a encontrados utilizando cada tipo de medição e fazer uma comparação entre eles, focada na discussão sobre qual método de obtenção da aceleração leva a resultados mais próximos do esperado e qual produz a menor incerteza.

Testem tanto a Eq. 8.2 quanto a 8.3 e verifiquem se os resultados obtidos são consistentes ou se há diferenças significativas entre eles (maiores que suas incertezas padrão). Lembrem-se de fazer corretamente as propagações de incertezas.

8.6 Bibliografia

- M. Alonso e E. J. Finn, Física – Um curso universitário, Vol. 1, seção 10.4.
- D. Halliday e R. Resnick, Fundamentos de Física, Vol. 1, caps. 11 e 12.
- F. W. Sears e M. Zemansky, Física, Vol. 1, cap. 9.
- P. A. Tipler, Física, Vol. 1, cap. 12.
- O. Helene, Método dos Mínimos Quadrados com Formalismo Matricial, Editora Livraria da Física, 2^a Ed.

9. Desvios sistemáticos em medições

9.1 Introdução

Quando discutimos incertezas em medições, geralmente assumimos que o instrumento utilizado para medir introduz flutuações aleatórias δ no valor do mensurando, que são caracterizadas por um desvio padrão σ_δ e com média $\bar{\delta} = 0$. Ao fazermos medições repetidas, $\bar{\delta} = 0$ nos permite assumir que o valor médio do mensurando se aproximará progressivamente do seu valor verdadeiro. Contudo, nem sempre esta suposição é verdadeira. Em algumas situações podemos ter $|\bar{\delta}| > \sigma_\delta$, de forma que o valor médio do mensurando será desviado do seu valor real de uma quantidade $\bar{\delta}$. Podemos, então, chegar a um resultado muito preciso, porém não exato.

Definição 9.1.1 Desvios sistemáticos são tendências do aparato de medição que levam a um deslocamento da média da função densidade de probabilidade (f.d.p) associada a uma medição para longe do valor real do mensurando, seja para valores maiores ou menores. Em alguns casos o desvio sistemático afeta todos os valores obtidos por meio destas medições, como por exemplo no caso de uma balança digital que não esteja nivelada paralela ao solo. Em outros, este desvio sistemático surge porque as flutuações aleatórias associadas ao processo de medição não têm média zero. Assim, além de influenciar a medição aumentando o desvio padrão da f.d.p., também introduzirá um desvio do valor médio do mensurando.

Nos dois casos, o desvio sistemático é prejudicial à análise dos dados experimentais. Por exemplo, pode levar a estimativas incorretas dos parâmetros em ajustes de modelos aos dados. Caso seja possível caracterizar corretamente o desvio sistemático, é possível subtraí-lo dos dados experimentais, com o devido cuidado de aplicar uma propagação de incertezas para levar em conta as incerteza do desvio sistemático no novo valor da grandeza medida.

Em alguns casos σ_δ pode ser muito pequeno. Pode ser o caso de uma régua que foi feita para que seus intervalos correspondam a milímetros quando sua temperatura for de 20 °C. Caso a régua esteja em equilíbrio térmico com um ambiente a uma temperatura diferente, o desvio sistemático causado pelo coeficiente de dilatação do material deslocará todos os intervalos para valores maiores ou menores de uma quantidade com desvio padrão muito pequeno. Em outros casos, como o de tempos de reação de acionadores — sejam eles humanos ou aparelhos — pode haver grande σ_δ , ao ponto de a principal contribuição da reação ser para a incerteza da medição e não para um desvio sistemático.

Neste experimento virtual vocês estudarão o segundo caso, medindo intervalos de tempo marcados pelo acionamento e parada de um cronômetro por um operador humano, pode levar a um desvio sistemático nos intervalos medidos, caso o operador tenha um atraso ou adiantamento médio δt maior que seu desvio padrão $\sigma_{\delta t}$.

Sendo assim, é importante conhecer as fontes de desvios sistemáticos no experimento e quantificá-las. Ao quantificar uma fonte de desvio sistemático e corrigir o seu efeito sobre os dados medidos estamos efetivamente calibrando o experimento. Como a quantificação também é uma medição, terá sua própria incerteza, que será acrescentada às incertezas vindas de flutuações.

9.2 Desvios devidos a tempos de reação

Quando realizamos uma medição do intervalo de tempo entre dois instantes, que em geral para o Laboratório de Física correspondem a dois eventos em um experimento, utilizamos além do

cronômetro algum outro dispositivo para iniciar e parar a medição realizada com o cronômetro. Em alguns casos, o processo é feito automaticamente, utilizando um sensor como o photogate, ou um sensor de impacto. Contudo, em alguns experimentos o acionamento e parada do cronômetro são realizados por um operador humano.

Tanto no caso de um sensor quanto no caso do operador há um tempo de reação para que seja detectado o evento que marca o início ou o fim do intervalo de tempo que desejamos medir. No caso do sensor, esse tempo é muito pequeno comparado à resolução do cronômetro inteligente do IFGW, de forma a não ser perceptível. Já no caso humano, o tempo de reação passa a ser significativo em relação ao intervalo de tempo que desejamos medir e maior que a resolução do cronômetro inteligente e do cronômetro manual. Dessa forma, podemos montar um experimento para caracterizar os efeitos desse tempo de reação em um experimento que envolva a medição de intervalos de tempo, como é o caso da Máquina de Atwood.

Para caracterizar o efeito da reação, montamos uma Máquina de Atwood na qual adicionamos um photogate¹ alinhado logo abaixo do peso quando está prestes a cair, para medir o começo da queda do peso, e uma placa de impacto, com a qual detectamos o momento em que a queda do peso se encerra. Realizamos a medição de tempo de queda de forma automática (T_a) usando o modo “Two Gates” do cronômetro inteligente do IFGW², que inicia uma cronometragem ao receber um sinal em sua primeira entrada e termina ao receber um sinal na segunda entrada. Ao mesmo tempo, um operador era responsável por soltar o peso e medir o seu tempo de queda (T_m) usando um cronômetro de acionamento manual. Os dois tempos foram anotados e analisamos a diferença de tempo $T_m - T_a$, mostrada nas Figs. 9.1 e 9.2 para dois operadores diferentes.

Ao analisar os resultados, podemos notar nas Figuras 1 e 2 há dois tipos de comportamento diferentes. No primeiro caso, onde foram feitas 25 medições, o valor médio foi de 0,15 s e o desvio padrão do conjunto de dados é de 0,07 s. Assim, a diferença do tempo medido pelo Observador 1 e o tempo medido pelo cronômetro automático é de $(0,15 \pm 0,01)$ s. Já no segundo caso, com 10 medições realizadas, esse valor é de $(0,00 \pm 0,06)$ s para o Observador 2, sendo o valor médio do conjunto de dados $-0,0123$ s e o desvio padrão do conjunto de dados 0,2 s.

Podemos agora dizer que ao realizar o experimento, o Observador 1 tende a medir tempos de queda $(0,15 \pm 0,01)$ s mais longos que o tempo de queda real, se assumirmos que os tempos de reação para o sistema automático são muito pequenos e que o sistema foi bem ajustado inicialmente. Nessa situação, quando o valor médio do tempo de reação é diferente de zero, podemos afirmar que há um efeito sistemático nos tempos medidos, que são todos aumentados, em média, de 0,15 s. Como realizamos um experimento para caracterizar o efeito sistemático, ele pode ser corrigido nos dados de um experimento de Máquina de Atwood fazendo $T' = T - T_R$, onde T_R é o valor médio do efeito sistemático que chamaremos de tempo de reação.

É importante notar que ao medirmos o tempo de reação também obtivemos uma incerteza! Essa nova fonte de incerteza deverá ser adicionada à incerteza instrumental da medição do tempo, utilizando a propagação de incertezas que neste caso será uma combinação de incertezas.

Analizando agora o Observador 2, vemos que não há efeito sistemático, já que o valor médio das diferenças de tempo medido é menor que seu desvio padrão. Contudo, não podemos ignorar o grande desvio padrão introduzido pelo tempo de reação deste observador! Nesse caso, embora $T_R = 0$ e $T' = T$, ainda devemos realizar um cálculo de incertezas combinadas. A incerteza introduzida pelo Observador 2 é seis vezes maior que a introduzida pelo Observador 1. Em comparação à incerteza instrumental, a incerteza introduzida pelo Observador 2 é vinte vezes maior, enquanto a do Observador 1 é apenas três vezes maior. Mesmo assim, podemos dizer que o tempo

¹O photogate é um sensor que emite um pulso de tensão elétrica quando a luminosidade incidente sobre ele é alterada.

²O cronômetro inteligente do IFGW é um aparelho utilizado nas aulas presenciais de F 129 e F 229 para cronometrar tempos de forma automática, utilizando sinais de entrada (*gates*) para indicar quando começar ou parar uma medição, dependendo do modo de operação selecionado.

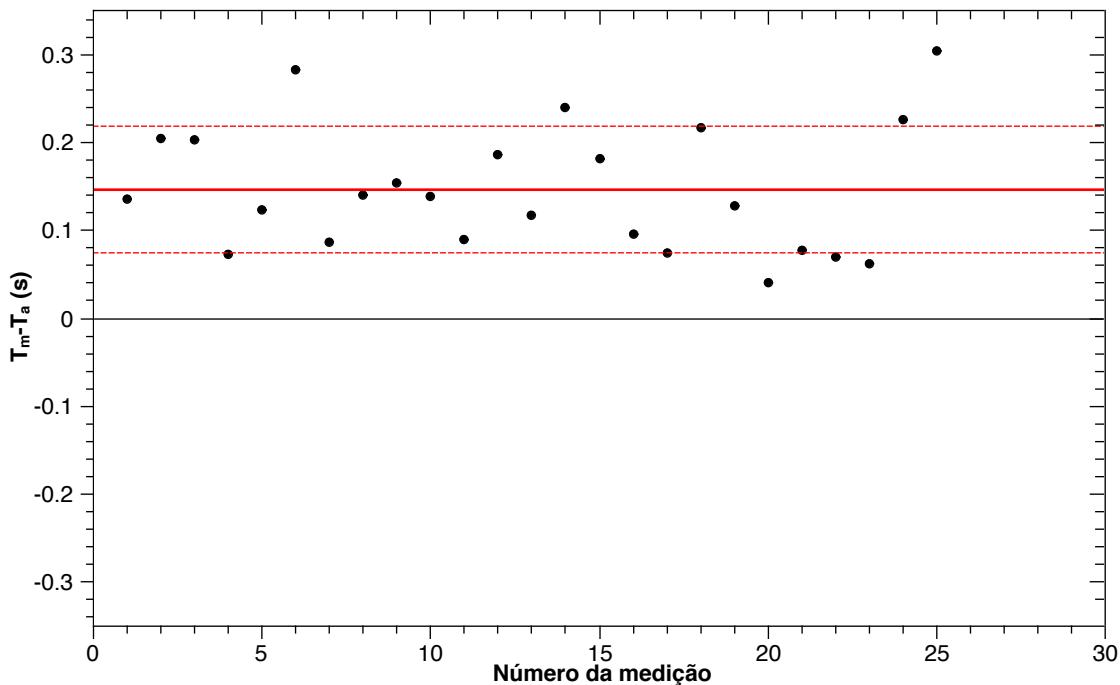


Figura 9.1: Diferença de tempos medidos para diferentes realizações de quedas na Máquina de Atwood pelo Operador 1. A média é indicada pela linha vermelha contínua e os desvios padrão pelas linhas vermelhas tracejadas. N = 25 medições.

de reação é a principal fonte de incertezas para a medição do tempo.

! Note que as medições discutidas acima introduzem uma incerteza devido à flutuação do tempo de reação de uma realização a outra e que, se o tempo medido for corrigido pelo tempo de reação médio T_R , a sua incerteza deve ser acrescentada à incerteza de $T' = T - T_R$, seguindo a regra de propagação de incertezas.

Podemos agora nos perguntar: Qual a origem do desvio sistemático em uma medição desse tipo? Para começar a entender como surge o desvio sistemático, é conveniente decompor a queda em dois eventos: o momento em que o peso é solto para começar a cair (T_i) e o momento em que ele atinge o chão (T_f). O processo de medição também é decomposto em dois eventos: o momento em que o Observador aciona o cronômetro (T'_i) e o momento em que o cronômetro é parado pelo Observador (T'_f). As diferenças surgirão quando os pares de eventos (T_i, T'_i) e (T_f, T'_f) não acontecerem simultaneamente.

Por fim, devemos ver que cada ponto nas Figs 9.1 e 9.2 corresponde a uma realização do experimento, ou seja, a um dos quatro possíveis casos de atrasos ou adiantamentos no início e fim da cronometragem, com valores de T'_i e T'_f diferentes. Podemos considerar que o tempo de reação de cada realização do experimento flutua de forma aproximadamente aleatória em torno de seu valor médio e associar a T'_i e T'_f funções densidade de probabilidade gaussianas, que serão caracterizadas por um valor médio e um desvio padrão.

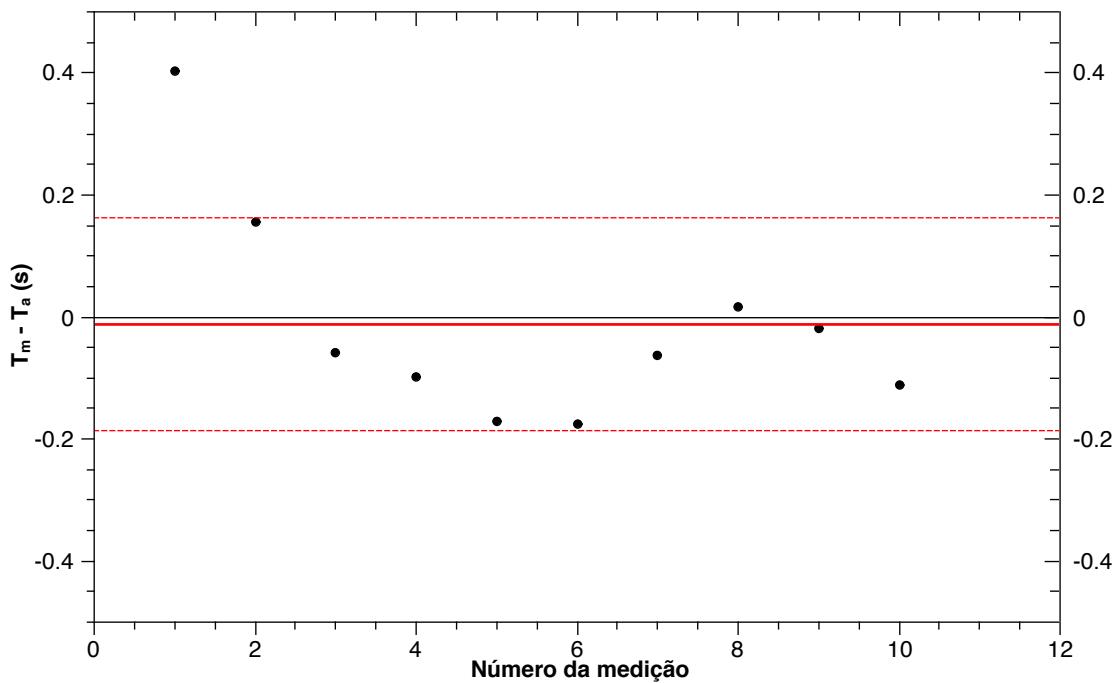


Figura 9.2: Diferença de tempos medidos para diferentes realizações de quedas na Máquina de Atwood pelo Operador 2. A média é indicada pela linha vermelha contínua e os desvios padrão pelas linhas vermelhas tracejadas. N = 10 medições.

Exercício 9.1 Com base na descrição do parágrafo anterior, monte uma linha do tempo para cada combinação de eventos, mostrando as quatro situações possíveis. Em seguida, utilize o programa em Python disponibilizado no Moodle para testar seu comportamento na medição do tempo de queda de uma bolinha virtual. Em qual das quatro possíveis combinações de atrasos e adiantamentos você se encaixa? ■

Quando o Observador mede valores de T' maiores ou menores que os seus correspondentes T com igual probabilidade, o valor médio da f.d.p. associada se aproximará de 0. Caso contrário, haverá uma tendência aos tempos variarem aleatoriamente em torno de outro valor médio. Se o Observador tende a acionar o cronômetro um pouco antes de soltar o peso, por exemplo, teremos um T'_i médio maior que zero. É desse tipo de tendência que surge o desvio sistemático. Já o desvio padrão da f.d.p. associada dará origem à incerteza associada ao tempo de reação.

9.3 Experimento virtual

O principal desafio experimental da caracterização do tempo de reação é a dificuldade de relacionar o tempo do acionamento e parada do cronômetro aos eventos de início e fim da queda do objeto. Mesmo com o auxílio de vídeos ou de sensores, seria preciso gravar de forma sincronizada a queda e a manipulação do cronômetro.

Este problema é resolvido pelo experimento virtual que propomos a vocês e que foi desenvolvido pelo Dr. Lucas Paixão na forma de um código Python. Como o código gera uma interface gráfica, é preciso que seja executado localmente, não sendo compatível com máquinas virtuais como o

Google Colab.

O código está disponível em <https://github.com/paixaols/tempo-de-reacao> e uma explicação de como usar o código, apresentada pelo próprio autor, está em <https://www.youtube.com/watch?v=XovVxMyCUr8>.

Exercício 9.2 Execute o programa e faça um número grande de repetições, para que as distribuições de tempos de reação para o início e o fim da cronometragem fiquem bem caracterizadas. Exporte os dados e identifique qual a média e o desvio padrão para cada um dos eventos. Você introduziu algum desvio sistemático significativo em suas medições? Como há dois eventos, é possível que um cancele o outro e o desvio sistemático do tempo de queda seja menor que seu desvio padrão, mesmo que isso não seja verdade para os tempos de reação de início e fim da cronometragem.

Qual é o seu caso? Compare com seus colegas de grupo, turma e também com colegas de outras turmas, ou até mesmo fazer o com outras pessoas que morem com você. Testem se a média dos desvios sistemáticos de todos que participaram tende a zero ou se mesmo o grupo de pessoas apresenta algum desvio sistemático significativo. ■

10. O Pêndulo Físico

10.1 Introdução

Neste experimento utilizaremos o estudo do comportamento de um pêndulo físico como base para discutir a comparação entre diferentes modelos que podem ser usados para descrever um dado sistema físico. A escolha de um modelo com as simplificações e suposições adequadas é parte fundamental do planejamento de um experimento, coleta de dados, análise e interpretação de resultados.

Veremos que a resolução da medição do período, o menor intervalo de tempo que podemos medir no experimento, é importante para ser sensível aos desvios do modelo mais simples que fazem necessário o uso do modelo do pêndulo físico. Também buscaremos identificar, por meio de uma análise qualitativa, aspectos observados no comportamento do pêndulo que não sejam descritos por nenhum dos dois modelos apresentados.

10.2 O pêndulo simples

Como queremos comparar dois modelos, que descrevem o comportamento do pêndulo com graus diferentes de simplificação, quanto à qualidade da sua descrição do comportamento observado, é necessário entender melhor as suposições feitas para chegar a cada um. Em sua forma mais geral, o comportamento de um objeto de massa m restrito a se mover em torno de um ponto fixo mantendo uma distância D entre este e o seu centro de massa, sob a ação aceleração da gravidade g e na ausência de dissipação de energia, pode ser descrito pela seguinte equação para o ângulo θ que a linha que liga o centro de massa ao ponto fixo faz com a vertical:

$$I\ddot{\theta} = - (mgD) \operatorname{sen}(\theta), \quad (10.1)$$

onde usamos os dois pontos sobre o ângulo para representar a segunda derivada em relação ao tempo. Na equação indicamos o momento de inércia do pêndulo por I . A solução desta equação não é simples e requer o uso de métodos numéricos.

Assim, a primeira aproximação feita para permitir uma solução analítica da equação de movimento do pêndulo é restringir a descrição do seu movimento ao caso em de pequenas oscilações em torno da posição de repouso, ou seja, pequenos ângulos. Assim, a projeção da força peso na direção tangencial ao movimento, $mgsen(\theta)$, que age como força restauradora, pode ser aproximada por $-mg\theta$, simplificando a solução da equação de movimento que se torna a de um oscilador harmônico simples:

$$I\ddot{\theta} = - (mgD) \theta, \quad (10.2)$$

que prevê um movimento de oscilação $\theta(t) = \theta_{max}\cos(\omega t)$ cujo período $T = 2\pi/\omega$ é dado por

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{I}{mgD}}. \quad (10.3)$$

O pêndulo simples é aquele formado por uma partícula puntiforme de massa m , suspensa por um fio inextensível, de massa desprezível e de comprimento D . Nessas condições, o momento de

inérgia do sistema será $I = mD^2$. O modelo que descreve o período de oscilação do pêndulo simples é:

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{D}{g}}. \quad (10.4)$$

O modelo de pêndulo simples, embora muito útil, nem sempre é uma boa aproximação para pêndulos reais, já que ao igualar o momento de inérgia ao de um ponto material, ignora o efeito que a distribuição de massa ao longo do pêndulo pode ter sobre seu período. Mais especificamente, ignora a possibilidade de o corpo girar, mesmo que parcialmente, em torno de seu próprio centro de massa (CM) durante o movimento pendular.

Exercício 10.1 Liste as suposições que o modelo do pêndulo simples faz a respeito do sistema físico que ele pretende descrever. Tente encontrar situações em que a suposição é razoável e quando ela pode ser violada. Em vez de falar apenas que uma determinada grandeza deve ser “muito grande” ou “muito pequena”, tente encontrar razões entre grandezas, de forma que a aproximação seja válida se esta razão for muito menor ou muito maior que 1. ■

10.3 O pêndulo físico

Um pêndulo físico é aquele cujo comportamento não pode ser bem descrito se aproximarmos a distribuição de massa como estando toda concentrada em seu CM. De forma geral, é um **corpo rígido** de forma arbitrária, como mostrado na figura 10.1a que oscila em torno de um eixo fixo pela ação da força gravitacional (10.1b). Neste modelo, a forma como a massa do objeto está distribuída ao longo de sua extensão precisa ser levada em conta no momento de inérgia do pêndulo, I.

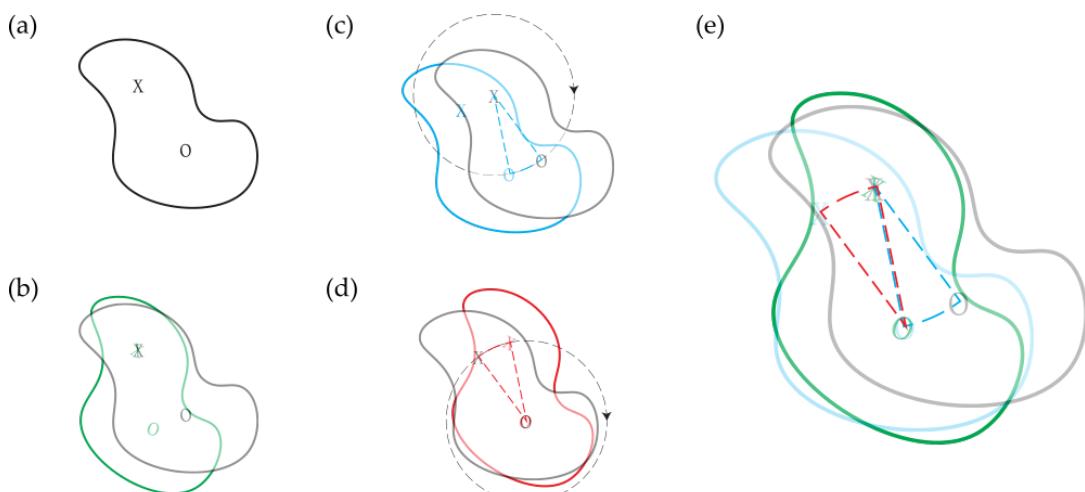


Figura 10.1: Ilustração de um objeto de forma arbitrária (a), com centro de massa no ponto O, que está livre para girar em torno de um eixo perpendicular ao plano de folha, que passa pelo ponto X, como mostrado em (b). A distância entre o ponto X e o ponto O é D. Este movimento pode ser decomposto em uma translação do centro de massa em torno do ponto X sobre um círculo de raio D (c) e uma rotação do objeto em torno do seu próprio centro de massa (d). Vemos em (e) que a combinação dos dois movimentos é equivalente a fazer o objeto girar em torno do ponto X, como acontece no caso dos pêndulos físicos. É importante notar que o raio de giração **não** está indicado na imagem. Os círculos foram desenhados apenas como forma de indicar o movimento.

Utilizando o **teorema dos eixos paralelos**, podemos escrever $I = I_F + I_{CM}$. A primeira parte corresponde ao movimento de **translação** do centro de massa do pêndulo em torno do seu ponto

de fixação (10.1c), $I_F = mD^2$. Na translação o centro de massa se move em torno do ponto de fixação mas quaisquer segmentos de reta que liguem dois pontos do objeto continuam paralelos aos mesmos segmentos na posição origina. Isso significa que o pêndulo não gira em torno do próprio centro de massa. Veja que

A segunda parte, I_{CM} , surge justamente do fato de que o movimento de oscilação do pêndulo é uma combinação da translação com uma **rotação** do corpo do pêndulo em torno de seu próprio centro de massa (10.1d), como indicado na figura 10.1e.

Definição 10.3.1 — Raio de giração. O momento de inércia de um corpo é proporcional à sua massa, ou seja, podemos escrever $I_{CM} = mK$ sendo K uma constante de proporcionalidade que dependerá da geometria do objeto, da forma como a massa está distribuída nessa geometria (a densidade pode não ser uniforme) e do eixo de rotação. Em muitos casos não há uma forma simples de calcular K, mas podemos fazer $K = k^2$ e reescrever o momento de inércia como $I_{CM} = mk^2$, para que tenha a mesma forma que o momento de inércia de um ponto com a mesma massa total m, se movendo em um círculo de raio k. Por isso chamamos k de **raio de giração**. Trata-se de um parâmetro com dimensão de comprimento, que pode ser estimado se soubermos calcular o valor de I_{CM} .

! Em outros contextos, como por exemplo na Engenharia Civil, o termo “raio de giração” pode possuir definições diferentes. É preciso tomar cuidado para não se confundir!

Chegamos assim à equação-modelo que usaremos para descrever o comportamento do pêndulo neste experimento:

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{D + \frac{k^2}{D}}{g}}. \quad (10.5)$$

Exercício 10.2 Assim como você fez para o modelo do pêndulo simples, identifique quais são as suposições necessárias para chegar à equação 10.5. Tente identificar para quais condições dos parâmetros D e k elas são válidas. Busque também identificar quando o modelo do pêndulo simples descreve bem um pêndulo físico. Você não deve se contentar apenas com a solução trivial $k = 0$, já que sabemos que $k \neq 0$ para qualquer objeto! ■

10.3.1 Montando seu pêndulo

Você realizará este experimento em casa. Cada integrante do seu grupo deverá montar seu próprio pêndulo, tendo como base a lista de materiais abaixo:

- 1 rolo de papelão usado em papel toalha, filme plástico ou folha de alumínio, ou 3 tubos de papelão de rolos de papel higiênico (de mesmo diâmetro), para compor um único cilindro longo;
- 1 caneta esferográfica;
- 1 clipe de papel, arame para amarrar saco de pão de forma ou outro tipo de arame fino e rígido;
- Fita adesiva (caso precise ligar rolos menores para formar o pêndulo).

Você utilizará o programa Tracker para analisar o comportamento do pêndulo, portanto as oscilações deverão ser gravadas. Caso você não possua um tripé para o smartphone ou câmera, é possível definir o sistema de coordenadas do vídeo como fixo em um ponto rastreado, de forma que fique estável e permita a análise (ver vídeos disponibilizados no Moodle da disciplina).

Dicas de montagem:

1. Use a caneta esferográfica para furar o tubo em pares de pontos diametralmente opostos.
 2. Use o arame como um eixo para apoiar o pêndulo e permitir que oscile com pouco atrito.
- Além do material listado, você precisará de uma régua ou trena milimetrada para fazer medições das dimensões do seu pêndulo.

10.4 Objetivos

Neste experimento queremos que você:

- obtenha valores, a partir da análise dos dados experimentais, para a aceleração da gravidade (g) e para o raio de giração (k) de um pêndulo feito em casa;
- aprenda a identificar sinais de desvios sistemáticos nos dados a partir do gráfico da função linearizada;
- aprenda a estudar um modelo para identificar regiões de interesse no modelo e planejar seu experimento para coletar dados nesta região;
- discuta comportamentos observados que vão além do previsto para o modelo, tendo como base as suposições e seus limites de validade.

10.5 Planejamento

10.5.1 Antes de começar

1. Faça um gráfico de T em função de D a partir da equação 10.5, para ver seu comportamento. Use o valor adequado de g para a cidade onde você estiver e escolha $k = 10\text{ cm}$.
 - (a) Refaça o gráfico do item 1 e trace, junto com ele, um gráfico para o modelo de pêndulo simples. Compare as previsões feitas pelos dois modelos. Varie k entre 0 e 10 cm e investigue como a diferença entre os modelos muda em função de k .
 - (b) Utilizando o gráfico proposto no item anterior, identifique qual região de valores de D é mais interessante para garantir que o comportamento do pêndulo físico estará bem caracterizado.
 - (c) Verifique analiticamente se há mínimos ou máximos nesta equação. Em caso positivo, que informações podem ser extraídas do ponto extremo?
2. Identifiquem as suposições/hipóteses feitas nos modelos de pêndulo simples e pêndulo físico utilizado para descrever o comportamento do pêndulo, como pedido nos exercícios 10.1 e 10.2. Saber identificar as suposições dos modelos que usamos é uma habilidade muito importante, que influencia nossas decisões a respeito de como montar o experimento.
3. Quais grandezas das equações-modelo 10.4 e 10.5 podem ser medidas diretamente? Qual dessas grandezas pode ser variada experimentalmente de forma independente?
4. Linearize as equações modelo: escreva Y e X como funções das variáveis do sistema e A e B como funções das constantes conhecidas e dos parâmetros que queremos determinar, de forma que $Y = AX+B$ e os parâmetros g e k possam ser obtidos a partir de um ajuste por MMQ dos dados experimentais.
5. Calcule o valor esperado para o raio de giração do pêndulo que você está utilizando e procure qual deve ser o valor da aceleração da gravidade onde você está. Estes valores serão comparados aos obtidos experimentalmente.

10.5.2 Desvios sistemáticos

É possível que seu experimento seja afetado por desvios sistemáticos na medição da distância D , dependendo de como você estimar a posição do centro de massa do cilindro e também de como você medir a distância entre o ponto fixo do pêndulo e o centro de massa.

Exercício 10.3 Pense em uma forma experimental de identificar onde está o centro de massa do seu pêndulo.

Observe de perto os furos do seu pêndulo e tente identificar qual a forma de medir a distância entre o centro de massa e o ponto de fixação para que não apareçam desvios sistemáticos devido a um erro na definição da posição do ponto de fixação. ■

Uma forma de identificar a presença de desvios sistemáticos é observando o comportamento dos dados em um gráfico da função linearizada. Como o desvio modificará todos os valores de D de uma quantidade com valor médio diferente de zero, os dados experimentais não estarão mais linearizados.

Exercício 10.4 Como teste, faça um gráfico da equação 10.4 linearizada e, no mesmo gráfico, trace também a função da mesma linearização, mas substituindo D por $D + \delta D$, onde $\delta D = 3\text{ mm}$. O gráfico continua uma reta? Alguma região do gráfico desvia mais do comportamento linear que outras? ■

10.5.3 Escrevendo o planejamento

Até a data marcada no Moodle da disciplina o grupo deverá apresentar um planejamento, explicando como os pêndulos serão montados, o que será medido e como serão feitas as medições. A partir dos itens da seção “Antes de começar”, o grupo deverá dizer o que espera observar em suas medições (resultados esperados) com base nos dois modelos (pêndulo simples e físico) bem como um conjunto mínimo de dados preliminares, contendo ao menos cinco pontos experimentais, o resultado de seu ajuste linear e os valores de g e k correspondentes, para que seja possível discutir a viabilidade do pêndulo montado.

10.6 Relatório



Não se esqueçam de começar o relatório com um resumo de um parágrafo, que contenha os principais resultados do seu experimento, um comentário sobre a qualidade destes resultados e uma breve discussão de por quê estes foram os valores obtidos.

Embora o resumo seja a primeira parte do relatório, deve ser a última a ser escrita, depois que tudo mais estiver pronto. Este parágrafo deve ser completo o suficiente para que um leitor possa ler apenas o resumo, os gráficos do relatório e a conclusão e, ainda assim, entender bem o que foi feito. Não é uma tarefa fácil e a melhor forma de aprender a escrever bons resumos é praticar!

Após o resumo, comecem o relatório dizendo qual é o objetivo do experimento e apresentando o arranjo experimental utilizado por vocês, incluindo um diagrama ou foto do aparato, indicando o nome de cada peça (usem setas para ligar o nome à peça). A explicação da metodologia de coleta de dados pode ser curta, desde que seja completa o suficiente para que um leitor consiga repetir o procedimento. Isso significa que parâmetros importantes do arranjo, como as dimensões do pêndulo e o ângulo de partida (e suas respectivas incertezas) devem estar bem indicadas, assim como detalhes do procedimento de gravação dos vídeos. Por exemplo, qual a taxa de quadros usada e se foram feitas repetições (e quantas foram) para cada valor de D .

Obtenham os valores de g e k para as montagens experimentais do grupo a partir dos parâmetros A e B do ajuste por mínimos quadrados dos dados experimentais linearizados, apresentando o(s) gráfico(s) correspondente(s) a essa análise. Embora cada integrante do grupo deva preparar e medir seu próprio pêndulo, vocês podem selecionar os dados mais interessantes para o corpo do relatório e deixar os outros nos apêndices, desde que discutam todos os dados e mencionem adequadamente o apêndice.

Discutam se os valores obtidos estão de acordo com o esperado, usando o valor de referência para g e calculando o valor de k esperado a partir do momento de inércia do pêndulo usado. Comparem os resultados obtidos pelos integrantes do grupo, sobretudo se houver diferenças no procedimento que possam explicar diferenças nos resultados.

Incluem no texto principal um gráfico contendo:

- os dados experimentais brutos, sem linearização, com suas barras de incerteza;
- um traço da equação-modelo do pêndulo simples, usando o valor de g esperado para o local onde foi realizado o experimento;
- um traço da equação-modelo do pêndulo físico, usando o valor de g esperado para o local onde foi realizado o experimento e o valor de k esperado para o pêndulo utilizado, dada a sua geometria.

A partir deste gráfico, discutam a validade dos dois modelos para descrever o comportamento do sistema investigado. Existem regiões do gráfico onde os dois modelos descrevem bem o comportamento? A resolução temporal dos vídeos usados para coletar os dados de período e a incerteza dos dados coletados são suficientes para permitir que se observe de forma conclusiva a discordância entre o modelo do pêndulo simples e os dados experimentais?

Por fim, apresentem também um gráfico da posição angular em função do tempo. Façam uma análise qualitativa desse gráfico, sobrepondo aos dados experimentais uma curva da função $\theta(t) = \theta_{max}\cos(\omega t)$. O valor de θ_{max} corresponde ao ângulo de partida do pêndulo e ω é a frequência angular, que pode ser obtida a partir da primeira oscilação do pêndulo no vídeo.

Há comportamentos que não são descritos pelo modelo? Qual (ou quais) suposição do modelo do pêndulo físico é violada no experimento levando a esse comportamento? Tentem fazer uma correlação entre a amplitude das oscilações e o período medido. Caso haja uma correlação, formulem uma hipótese para sua causa.



Como foram pedidos três gráficos diferentes, cada um com uma discussão associada, em um relatório de cinco páginas, planejem para que cada gráfico não ocupe mais que metade da página correspondente à sua discussão. Assim vocês terão três páginas para resultados e discussão, restando duas páginas para o resumo, apresentação do arranjo experimental e metodologia. Ao final do texto principal coloquem as conclusões do grupo a respeito do experimento realizado, tendo em conta os objetivos propostos e os resultados obtidos.



Lembrem-se que vocês podem detalhar mais algumas discussões nos apêndices, desde que indiquem no texto principal que a discussão estará lá. Se houver apêndices sobre assuntos diferentes, identifiquem cada apêndice por uma letra e dêem um título a cada um. Por exemplo, “Apêndice A: Cálculos de incertezas”.

10.7 Bibliografia

1. Richard P. Feynman, Robert B. Leighton, Matthew Sands, Feynman Lições de Física, Vol. 1, Seção I-19.
2. M. Alonso e E.J. Finn, Física - Um Curso Universitário, Vol. 1, seções 12.5 e 12.6.
3. C. Kittel, Curso de Física de Berkeley – Mecânica, Vol. 1, cap. 8. (Biblioteca IFGW no. 531.K652.m).
4. D. Halliday, R. Resnick, Fundamentos de Física, Vol. 2, cap. 14.6.
5. P. Lucie, Física Básica, Vol. 2, pp. 166-167.
6. K. Laws, The Physics of Dance, Physics Today, Vol. 38, p. 24 (1985).

11. Acústica

11.1 Introdução

As ondas sonoras são perturbações que variam de forma periódica no tempo e que se propagam em um meio material (sólido, líquido ou gasoso). Um deslocamento de partículas do material uma dada região do espaço causa uma variação local de sua densidade e, consequentemente, uma variação local da pressão, que por sua vez age sobre a posição das partículas na vizinhança da perturbação e realimenta o processo. A conexão dessas três grandezas faz com que a perturbação na posição das partículas se propague a partir do seu ponto de origem, carregando energia, com uma velocidade definida por propriedades do material como sua densidade, elasticidade (no caso de sólidos) e temperatura.

O comportamento dessa perturbação da pressão será determinado por uma equação de onda, que associa variações no tempo a variações no espaço da seguinte forma, para uma dimensão:

$$\frac{\partial^2 p}{\partial x^2} = \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 p}{\partial t^2}, \quad (11.1)$$

sendo $p(x, t)$ a variação de pressão em torno da pressão atmosférica e v a velocidade de propagação da onda.

As soluções da Eq. 11.1 são chamadas de ondas planas e são descritas por funções de onda do tipo

$$p(x, t) = A \sin(kx + \omega t) + B \cos(kx + \omega t), \quad (11.2)$$

sendo k o número de onda dado por $|k| = 2\pi/\lambda$ e $\omega = 2\pi f$ a frequência angular. Neste texto trabalharemos com ondas senoidais e, portanto, $B = 0$ na Eq. 11.2. Essa escolha equivale a definir que escolhemos como instante $t = 0$ um instante em que a variação de pressão é nula no ponto $x = 0$ que definimos como sendo a origem.

A velocidade de propagação v que aparece na equação de onda se relaciona com k e ω na forma $v = \omega/k$, que pode ser reescrita como $v = \lambda f$. É importante notar que definimos apenas o valor do módulo do número de onda, mas k pode também ser negativo. Nesse caso, o sinal do número de onda nos indica o sentido de propagação da onda e leva a uma velocidade negativa.

Em todas as discussões a seguir, assumiremos que as ondas sonoras foram produzidas por uma fonte que oscila de forma periódica no tempo com uma frequência escolhida pelo operador. Em termos práticos, utilizaremos alto-falantes para gerar as ondas sonoras com as quais estudaremos os fenômenos de ressonâncias em tubos longos e em gargalos.

11.1.1 Ondas estacionárias em tubos

Quando ondas sonoras se propagam em tubos cujas dimensões são comparáveis ao seu comprimento de onda, podemos aproximá-las por ondas planas. Podemos considerar que essas ondas se propagam apenas na direção definida pelo eixo do tubo e seu comportamento dependerá da configuração das extremidades do tubo.

Em $x = 0$ e $x = L$ as soluções da equação de onda deverão obedecer às condições de fronteira, que serão de dois tipos:

- Caso a extremidade esteja fechada, o ar não tem como fluir para fora do tubo por aquela região e teremos ali um máximo para a pressão. Essa condição de máximo significa que a derivada da função de onda naquele ponto deve ser nula para todo tempo t .

- Caso a extremidade esteja aberta, o ar pode fluir livremente e, em contrapartida, assumimos que a pressão estará sempre em equilíbrio com a pressão fora do tubo. Isso significa que a função de onda, que descreve a variação de pressão naquele ponto, deve ser nula para todo tempo t .

Ao encontrar uma das extremidades, a onda sonora poderá ser refletida parcial ou totalmente (no caso de uma extremidade fechada e muito rígida). Assim, dentro do tubo teremos ondas se propagando nos dois sentidos, mesmo que a princípio elas se originem de um emissor posicionado em uma das extremidades do tubo e se propaguem para dentro do tubo em um único sentido. A superposição de ondas de mesma frequência se propagando em sentidos opostos pode dar origem a ondas estacionárias descritas por

$$p_e(x, t) = A \cos(kx) \sin(\omega t), \quad (11.3)$$

caso a onda refletida tenha a mesma fase da que incide, ou

$$p_e(x, t) = A \sin(kx) \cos(\omega t), \quad (11.4)$$

caso as ondas tenham fases opostas. A formação de ondas estacionárias requer que as ondas satisfaçam exatamente as condições de fronteira nas extremidades. Caso isso não aconteça, teremos apenas uma onda parcialmente transmitida através do tubo. Vemos então que as ondas estacionárias acontecerão para valores específicos de k . Aplicando as condições de fronteira à solução de onda estacionária, encontramos as seguintes possibilidades, que chamaremos de condições de ressonância:

1. Tubo aberto – aberto: A condição de que a função de onda seja nula em $x = 0$ exclui as ondas estacionárias descritas pela Eq. 11.3. As ondas estacionárias serão descritas pela Eq. 11.4 e deverão seguir a condição $kL = n\pi$, com n inteiro.
2. Tubo aberto – fechado: A condição de que a função de onda seja nula em $x = 0$ exclui as ondas estacionárias descritas pela Eq. 11.3. Assim, as ondas estacionárias serão descritas pela Eq. 11.4. A condição de que a derivada da função de onda seja nula em $x = L$ significa que as ondas estacionárias deverão seguir a condição $kL = n\pi/2$, com n inteiro e ímpar.
3. Tubo fechado – aberto: A condição de que a derivada função de onda seja nula em $x = 0$ exclui as ondas estacionárias descritas pela Eq. 11.4. Assim, as ondas estacionárias serão descritas pela Eq. 11.3. A condição de que a função de onda seja nula em $x = L$ significa que as ondas estacionárias deverão seguir a condição $kL = n\pi/2$, com n inteiro e ímpar.
4. Tubo fechado – fechado: A condição de que a derivada seja nula em $x = 0$ exclui as ondas estacionárias descritas pela Eq. 11.4. Assim, as ondas estacionárias serão descritas pela Eq. 11.3 e deverão seguir a condição $kL = n\pi$, com n inteiro.

A primeira onda estacionária formada, quando $n = 1$, é chamada de modo fundamental, ou harmônico fundamental. A onda estacionária que se forma para $n = 2$ é chamada de segundo harmônico e assim sucessivamente.

Com a exceção do caso 4, as relações entre L e λ não são exatas, já que as ondas sonoras não são refletidas exatamente pela terminação do tubo. Assim, para as ondas, o tubo possui um comprimento efetivo $L' = L + 0,6mr$ para um tubo de raio r com m terminações abertas. Esta correção de terminação é obtida empiricamente e é válida quando $\lambda \gg r$.

As ondas estacionárias, como o nome indica, não se propagam no espaço. Embora não tenhamos incluído dissipação de energia no modelo, podemos perceber que a ausência de dissipação leva a um problema grave: a energia que é colocada na onda estacionária ficaria armazenada eternamente. Em sistemas reais, a energia que entra na região do espaço onde se formam essas ondas fica estocada lá até se dissipar. No caso das ondas em tubos, há dois mecanismos principais para a dissipação da energia:

- a absorção de energia pelo ar e pelas paredes do tubo,

- a “fuga” de som para fora do tubo, seja pela flexibilidade das paredes ou pela existência de uma terminação aberta, que naturalmente permite que parte do som saia da região onde se formou a onda estacionária.

Assim, devido ao processo de dissipação de energia na onda estacionária, esta estocará a energia da fonte sonora até que chegue a um estado estacionário, em que a quantidade de energia que é dissipada é a mesma que é acrescentada à onda pela fonte. A dissipação de energia também afeta as ondas estacionárias em sistemas reais de outra maneira. Ao contrário do previsto pelo modelo apresentado, no qual as ressonâncias ocorrem apenas para comprimentos de onda bem definidos (com precisão infinita), as ressonâncias reais são observadas ao longo de uma faixa de λ . Na prática, como podemos variar diretamente a frequência da onda sonora emitida pela fonte e também realizar uma análise do sinal medido por um microfone em termos de frequências, os resultados relatados por vocês serão dados em termos de frequências e não de comprimentos de onda.

Um cálculo mais detalhado permite ver que a quantidade de energia armazenada pela onda estacionária em ressonância varia em função da frequência da fonte segundo uma **função Lorentziana**. Embora essa função se assemelhe visualmente a uma Gaussian, ela **não possui nem média e nem desvio padrão bem definidos**. Em vez disso, costumamos caracterizá-la pelo seu valor central ω_0 , para o qual a função atinge seu máximo, e pela sua **largura a meia altura**, dada ela diferença entre $\omega_{-1/2}$ e $\omega_{+1/2}$, as frequências em torno de ω_0 para as quais a energia armazenada é metade da energia máxima.

No cotidiano, nosso contato mais frequente com as ressonâncias em tubos é por meio dos instrumentos de sopro. Os instrumentos de palheta, como a clarineta, por exemplo, são bem aproximados por tubos fechados em uma extremidade e abertos na outra, enquanto flautas são tubos abertos em ambas as extremidades. Mais informações a respeito da acústica de instrumentos de sopro podem ser encontradas no site da Leitura Suplementar A (texto em inglês).

11.1.2 Resssoadores de Helmholtz

Em um recipiente de volume V com um gargalo cilíndrico de dimensões L e r muito menores que λ , o ar contido no gargalo se comportará como um corpo rígido, oscilando em torno da sua posição de equilíbrio como se fosse um oscilador harmônico simples.

A força restauradora, análoga à da mola no sistema massa-mola, vem do ar contido no recipiente. Quando a massa de ar no gargalo se desloca para dentro, a pressão do gás no recipiente aumenta e força o ar do gargalo para fora. Ao contrário, se o ar no gargalo se move para fora a pressão no recipiente diminui, puxando o ar de volta. Assim, o comportamento do sistema pode ser previsto de forma simples, em termos de parâmetros da sua geometria e da velocidade do som no ar:

$$\omega = v \sqrt{\frac{\pi r^2}{VL}}. \quad (11.5)$$

Para gargalos que não sejam cilíndricos, podemos substituir πr^2 pela área da seção reta do gargalo.

Novamente devemos considerar a necessidade de correções de terminação, já que o gargalo é aberto em suas duas extremidades e, na extremidade interior encontra a superfície da garrafa. A correção nesse caso será dada aproximadamente por $L' = L + 1,45r$, sendo a diferença entre 1,45 e 1,2 (para o caso de duas extremidades abertas em um tubo) causada pela presença da parede interna da garrafa próximo à extremidade do gargalo.

Como utilizaremos uma fonte de ondas acústicas para fornecer energia ao sistema, este se comportará como um oscilador harmônico forçado e amortecido, com dissipação dada por efeitos térmicos, de viscosidade e pela emissão de som pelo próprio deslocamento do ar no gargalo. O oscilador harmônico forçado é um oscilador harmônico simples sobre o qual age uma força externa F_e periódica e com frequência bem definida, por exemplo (ω_{et}). A presença de dissipação, assim

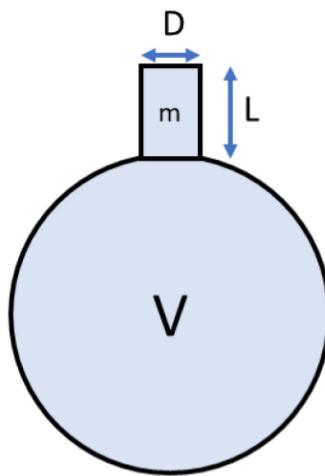


Figura 11.1: Desenho esquemático de um Resssoador de Helmholtz, composto por um recipiente de volume V , com um gargalo de comprimento L e diâmetro D . A massa de ar contida no gargalo é função da densidade do ar, de L e da área do gargalo, dada por $S = \pi D^2/4$. Se λ for muito maior que as dimensões do recipiente, a massa de ar no gargalo se comporta como um corpo rígido que oscila devido a uma força restauradora gerada pelo volume de ar confinado na garrafa.

como no caso das ondas estacionárias fará com que a energia armazenada em um oscilador forçado e amortecido, em função da frequência ω_e , seja dada por uma função Lorentziana. Uma das fontes de dissipação é a atuação do ar no gargalo como um pistão que, ao oscilar, funciona ele próprio como um emissor de ondas sonoras. São as ondas emitidas pelo ar no gargalo que ouvimos ao soprar sobre o bocal da garrafa.

A amplitude e a fase do movimento do oscilador serão funções de ω_e . Quando ω_e é menor que a frequência de oscilação natural do sistema, ω_0 , a posição do centro de massa varia em fase com a força externa. Quando $\omega_e = \omega_0$, a fase entre a posição e a força é de $\pi/2$, ou seja, F_e se anula quando o deslocamento em relação à posição de equilíbrio é máximo e vice-versa. Finalmente, quando $\omega_e > \omega_0$, a posição do oscilador varia com uma fase de π em relação à força, de forma que agora a força externa atua no sentido contrário do movimento e cresce à medida que o oscilador se aproxima do seu deslocamento máximo. Essa variação de fase não é abrupta, mas acontece em uma faixa de frequências relacionada à largura a meia altura da ressonância.

Uma observação importante é que a frequência de ressoador de Helmholtz depende do volume do recipiente, mas não do seu formato. O ar dentro da garrafa se comporta apenas como a mola do oscilador harmônico.

É interessante notar também que o ar no gargalo, que para $\lambda \gg L$ se comporta como um corpo rígido, também pode se comportar como o ar contido em um tubo aberto em ambas as extremidades e formar ondas estacionárias quando a frequência da fonte de sinal satisfizer a condição de ressonância. Como vimos anteriormente, essa condição significa que λ será da ordem de L' .

11.1.3 Geração e medição de ondas sonoras

Para realizar os estudos propostos, vocês precisarão do aplicativo Phyphox, disponível gratuitamente para Android e iOS em suas respectivas lojas de aplicativos. Trata-se de uma plataforma que utiliza os sensores de um smartphone ou tablet para permitir a realização de medições em experimentos de Física, permitindo que os dados coletados sejam exportados para análise em um programa adequado.

Utilizaremos o aplicativo tanto para emitir sons quanto para medi-los e obter dados quantitativos. Recomendamos que utilizem um fone de ouvido com microfone, mas outros arranjos são possíveis. Por exemplo, uma caixa de som Bluetooth pode ser utilizada como fonte de sinal e o microfone do telefone como detector.



Atenção: Para evitar danos aos alto-falantes ou fones de ouvido, não utilizem o volume máximo para realizar seus experimentos. Os microfones de smartphones e fones de ouvido são bastante sensíveis e não é necessário usar um volume muito alto para que o som seja detectado de forma adequada. De fato, para evitar resultados espúrios é recomendado que os experimentos sejam feitos em um ambiente silencioso.

Após instalar o Phyphox, será necessário instalar um experimento adicional. Para realizar o download, siga as instruções disponíveis no Moodle da disciplina. O mesmo arquivo PDF também contém instruções para utilizar o programa.

Este experimento foi programado para emitir ondas sonoras em uma dada frequência usando um alto-falante e captar um sinal de resposta usando um microfone, ambos conectados ao smartphone. A frequência é variada de uma quantidade selecionável uma vez a cada segundo e o sinal detectado pelo microfone é transformado em uma quantidade proporcional à potência da onda medida.

É importante saber que cada fonte de som tem características próprias quanto à sua resposta em frequência. Isso significa que a intensidade das ondas sonoras emitidas por um dado alto-falante não é a mesma para todas as frequências. Da mesma forma, os microfones também não captam todas as frequências com a mesma eficiência. Por isso é fundamental realizar medições para conhecer qual é a resposta em frequência dos pares fonte-microfone que serão utilizados.

11.2 Objetivos

Neste experimento vocês investigarão diferentes aspectos de ondas acústicas se propagando no ar, buscando **medir experimentalmente a velocidade do som no ar** para o local onde você realizar o experimento. É importante ter em mente que a velocidade do som depende de uma série de parâmetros ambientais, como temperatura, pressão e umidade do ar, podendo variar de lugar para lugar e até mesmo de uma hora do dia para outra, no mesmo ambiente.

Serão abordados os fenômenos de ressonância em recipientes com um gargalo, chamados de ressoadores de Helmholtz, e de formação de ondas estacionárias em tubos. Os principais conceitos físicos associados ao experimento são:

- Osciladores harmônicos forçados e amortecidos,
- Ressonância,
- Fase e interferência de ondas,
- Formação de ondas estacionárias.

Temos como objetivos principais introduzir e praticar as seguintes habilidades científicas:

- Calibração de um equipamento de medição e avaliação da relação sinal/ruído,
- Análise de dados em escala linear e logarítmica,
- Proposição de hipóteses a respeito de fenômenos observados,
- Preparação de um seminário para comunicar seus resultados.

Este trabalho experimental será utilizado em duas avaliações. O relatório produzido pelo grupo será avaliado normalmente, contando como o relatório 3 da disciplina. Em seguida, o grupo deverá apresentar um seminário curto, que será explicado na seção 11.5.

11.3 Planejamento experimental

11.3.1 Antes de começar

Estude as equações modelo apresentadas na Introdução e defina quais parâmetros podem ser variados em um experimento, quais podem ser variados alterando o objeto estudado e como a velocidade do som no ar pode ser encontrada a partir de experimentos em que ressonâncias são observadas variando a frequência de uma fonte externa de ondas acústicas. Verifique quais são as suposições feitas para chegar às equações apresentadas.

Em seguida, selecione os objetos que vai estudar em seus experimentos. Você precisará de garrafas e tubos, com dimensões variadas. Identifique nas equações-modelo quais são as dimensões relevantes para seus experimentos e busque ter materiais suficientes para investigar variações dos parâmetros dos modelos.

Em seus experimentos, a velocidade do som será a grandeza a ser medida experimentalmente. Para estimar a velocidade do som em seu experimento, de forma a ter um valor com o qual comparar os resultados obtidos, utilize o site Wolfram Alpha fazendo uma busca por:

speed of sound elevation A m temperature B degrees Celsius humidity C%

substituindo A pela altitude da cidade onde você se encontra, B pela temperatura no local e C pela umidade do ar. B e C podem ser estimados usando um aplicativo de meteorologia.

Ao variar a frequência do som emitido pelo fone de ouvido em uma faixa de 100 Hz a 10 kHz, haverá uma variação muito grande no comprimento de onda. Considerando os valores de comprimento L e raio r de um dos tubos no qual serão observadas ondas estacionárias, trace as funções λ/L e λ/D para os comprimentos de onda λ em função da frequência da onda, usando $v = \lambda f$, sendo v a velocidade do som esperada.

Identifiquem nesse gráfico três regiões: a região I, em que o comprimento de onda é muito maior que as dimensões do tubo, a região II em que λ é comparável às dimensões relevantes no problema e a região III, em que λ é menor que as dimensões do tubo. Aproveitando o mesmo gráfico, indiquem também as posições esperadas para as frequências de ressonância, no caso de um tubo aberto em ambos os lados e do tubo aberto apenas em um lado.

Como vimos na Introdução, as ondas estacionárias que se formam em tubos possuem nós e anti-nós, regiões em que a amplitude da variação de pressão será praticamente nula ou máxima, respectivamente. Sabendo que o microfone funciona transformando variações de pressão em um sinal de tensão elétrica, como a presença dos nós e anti-nós deve ser levada em conta na hora de decidir o posicionamento do microfone, para que as medições feitas usando o Phyphox captem a formação das ondas estacionárias quando se varia a frequência do sinal enviado ao alto-falante?

No caso dos ressoadores, que possuem apenas uma ressonância, vocês deverão encontrar um procedimento experimental que permita obter o valor da velocidade do som a partir do ajuste linear, usando um conjunto de dados. Como fazer para variar a frequência de ressonância do ressoador? Há algum parâmetro na equação 11.5 que possa ser variado?

Calculem a frequência do harmônico fundamental que deve se formar no gargalo de ao menos um dos ressoadores de Helmholtz que serão utilizados pelo grupo, considerando o gargalo como um tubo aberto-aberto. É possível atingir essa frequência utilizando o equipamento disponível?

11.3.2 Planejamento

Até a data marcada no Moodle da disciplina o grupo deverá apresentar um planejamento experimental, explicando como pretende medir a velocidade do som usando os objetos propostos, quais são as expectativas do grupo em relação às frequências para as quais observarão ressonâncias ou ondas estacionárias.

O primeiro passo é apresentar uma tabela com o valor previsto para as frequências de ressonância, com base na velocidade do som encontrada pelo Wolfram Alpha e na geometria dos objetos

que vocês escolheram. É importante ter valores esperados para as frequências para saber em que faixa de frequências fazer a varredura com o Phyphox.

Apresentem uma curva de calibração do experimento, feita a partir do sinal medido pelo microfone colocado a uma distância do alto-falante igual àquela em que está nas medições de ressonâncias, mas sem a presença dos objetos estudados. Caso o microfone fique em posições diferentes para medições distintas, cada posição deve ter sua calibração. Indiquem se há regiões do espectro de calibração em que a intensidade medida é mais alta ou mais baixa que a média. Essas regiões se encontram próximas de ressonâncias dos objetos? Quais cuidados vocês pretendem tomar, nesse caso?

Variem o posicionamento do microfone em relação aos objetos sendo estudados. Comparem os sinais medidos e proponham hipóteses para explicar as diferenças. Essas hipóteses serão discutidas juntamente com os professores para guiar a análise a ser apresentada no relatório. Lembrem-se: as hipóteses devem ser explicações que gerem previsões testáveis experimentalmente, por exemplo com a variação de parâmetros dos objetos testados.

Apresentem valores preliminares para a velocidade do som obtida a partir de experimentos em ao menos um ressoador de Helmholtz e um tubo.

11.4 No relatório

Incluem uma descrição precisa das dimensões relevantes de todos os objetos utilizados e das configurações experimentais nas quais foram feitas as medições, ou seja, especifiquem o posicionamento do(s) alto-falante(s) e do microfone em relação aos objetos. Vocês devem usar ao menos dois tubos e dois ressoadores de Helmholtz com dimensões diferentes.

Apresentem gráficos das medições em escala linear e em escala de decibéis a partir de uma intensidade de referência, por exemplo a intensidade média longe das ressonâncias. A transformação de intensidade linear para decibéis é feita pela equação

$$I_{dB} = 10 \log_{10} \left(\frac{I}{I_{Ref}} \right) \quad (11.6)$$

No caso das suas medições, a intensidade de referência I_{Ref} será a intensidade medida durante a calibração do par microfone/alto-falante. Intensidades menores que a de referência serão transformadas em valores negativos em dB e intensidades maiores que a de referência em valores positivos. É útil saber que -3 dB corresponde aproximadamente a um sinal que é metade da referência. Da mesma forma, a meia altura de um pico Lorentziano estará 3 dB abaixo do seu valor máximo.

Existem características das ressonâncias que ficam mais evidentes ao ver os dados em decibéis? Valores positivos em dB representam um ganho em relação à intensidade média e valores negativos representam uma atenuação. Que razões físicas podem estar associadas a ganhos ou atenuações no sinal?

Ao medir as frequências de ressonância, procurem localizar a frequência de máximo da Lorentziana. As frequências dos sucessivos modos de ondas estacionárias de um dado objeto seguem a razão esperada entre elas, dadas as condições de fronteira do objeto?

Apresentem os valores obtidos para a velocidade do som em cada objeto estudado. Comparem os resultados, com suas respectivas incertezas.

Discutam se há objetos que permitem medir velocidades mais próximas do esperado ou, ao contrário, há objetos em que a velocidade do som ficou significativamente mais distante do esperado? Caso exista, há alguma dimensão característica do objeto (comprimento, raio, volume) que seja diferente daquelas dos demais objetos? Verifique se todos os objetos satisfazem as suposições dos modelos.

As correções de terminação apresentadas na Introdução são valores empíricos, que valem bem para tubos cilíndricos bastante rígidos. Verifiquem que mudanças seriam necessárias nas correções

para que as velocidades do som medidas se aproximem mais da velocidade esperada. Em termos percentuais, vocês julgam ser mudanças razoáveis?

11.5 Preparando um seminário

Os resultados obtidos por vocês deverão ser apresentados também em um seminário com 5 minutos de duração. A apresentação deve conter:

- Um ou dois slides de introdução, explicando os pontos principais dos modelos usados para descrever os sistemas,
- Fotos e desenhos esquemáticos do aparato experimental,
- Gráficos em escala linear e de decibéis,
- Os valores obtidos para v em cada medição,
- Uma discussão dos resultados, incluindo hipóteses levantadas para explicar diferenças entre as previsões dos modelos e os dados experimentais.

É importante que um ouvinte saia do seu seminário com um entendimento geral do que foi feito, mesmo que não tenha lido o relatório. Idealmente, o ouvinte sairá do seminário com vontade de ler o relatório para aprender mais sobre o experimento!

Após a apresentação, sortearemos alunos do grupo para responder a perguntas sobre o trabalho.

11.6 Bibliografia

Bibliografia recomendada:

1. D. Halliday, R. Resnick, J. Walker, “Fundamentos de Física”, Vol. 2, Cap. 17 (10^a Ed.)
2. H. M. Nussenzveig, “Curso de Física Básica”, Vol. 2, Cap. 4 e 6 (5^a Ed.)

Leitura suplementar:

1. <https://newt.phys.unsw.edu.au/jw/flutes.v.clarinets.html>
2. Richard P. Feynman, Robert B. Leighton, Matthew Sands, “Feynman Lições de Física”, Vol. 1, Seção I-47.

12. Tensão superficial e viscosidade

12.1 Introdução

Na região de interface entre um líquido e outro ou entre um líquido e um gás, as moléculas do líquido estão sujeitas a interações diferentes daquelas para uma molécula que se encontra no interior do líquido, longe da superfície. Essa diferença, que geraria um desequilíbrio nas forças que agem sobre as moléculas localizadas na interface, é balanceada pelo surgimento de uma força paralela à interface. Essa força faz com que a superfície se comporte como se fosse uma membrana elástica permanentemente esticada, dando origem à tensão superficial, representada por γ e medida em unidades de N/m.

Outra forma de entender como surge a tensão superficial é associando às interações entre moléculas uma energia potencial. As moléculas dentro do líquido estão em um ambiente isotrópico, isto é, todas as direções são iguais. Assim, elas têm energia potencial menor que as moléculas na superfície, fazendo com que é necessário realizar trabalho para aumentar a área de uma interface. Essa energia por unidade de área também pode ser entendida como a tensão superficial, lembrando que J/m² e N/m são dimensionalmente equivalentes.

Podemos visualizar as duas descrições dadas para a tensão superficial a partir de dois exemplos simples:

1. Ao colocar delicadamente uma agulha, um clipe de papel ou outro objeto similar sobre a superfície da água em um copo ou bacia, este não afunda, mesmo sendo mais denso que a água. Ao contrário, fica sobre a superfície e causa uma deformação ao seu redor, como se estivesse sobre uma membrana de borracha esticada.
2. Ao fazer bolhas de sabão é preciso soprar a interface fina que se forma no aro mergulhado na mistura de água e sabão. A bolha formada terá forma esférica, já que a esfera contém o maior volume com a menor superfície, e seu tamanho será mantido através do equilíbrio entre a pressão ar contido na bolha, que tende a expandir a superfície, e a tensão superficial combinada à pressão atmosférica externa, que tendem a diminuí-la.

Ao introduzir um surfactante (como sabão líquido, por exemplo) na superfície, é possível reduzir localmente a tensão superficial da água. O gradiente de tensão superficial gerado produzirá um fluxo na superfície do líquido, já que na fronteira entre as regiões com e sem surfactante há uma força resultante diferente de zero, como ilustrado na Fig. 12.1. Esse fluxo pode ser visualizado utilizando pequenas partículas em suspensão, como flocos de pimenta do reino, orégano, pó de canela ou gotículas de óleo. Chamamos esse fenômeno de Efeito Marangoni.

Demonstrações do Efeito Marangoni se tornaram populares no começo de 2020 em vídeos voltados para o público infantil que explicavam a ação do sabão para limpar as mãos, uma ação de higiene ainda mais importante devido à pandemia de COVID 19. Há uma coincidência interessante no fato de que esse fenômeno é estudado há muitas décadas devido à sua importância no entendimento dos mecanismos de interação de partículas de aerossol com o tecido dos alvéolos pulmonares, que são revestidos por água contendo um surfactante natural.

Além da força gerada pela diferença entre as tensões superficiais, devemos nos lembrar da viscosidade da água, η . Ao se mover, a camada de água na superfície provocará movimento também na camada imediatamente abaixo e assim sucessivamente até o fundo do recipiente —consideraremos que a última camada ficará sempre estática — em um processo que gera uma força de atrito viscoso, proporcional a η e ao gradiente da velocidade.

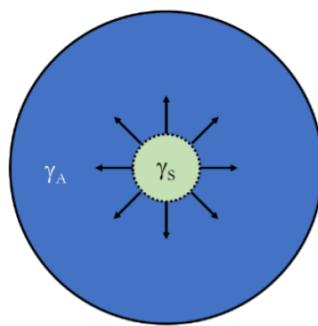


Figura 12.1: Ilustração de uma superfície de água (A) na qual foi adicionada uma gota de sabão (S). A diferença entre as tensões superficiais nos dois lados do círculo de raio r que delimita a região com sabão gera uma força que faz com que a região S se expanda. Embora a descrição completa do fenômeno seja muito complexa, em termos simples podemos ver que haverá um fluxo de água na superfície, para longe da região onde foi introduzido o sabão. Chamamos esse deslocamento de Efeito Marangoni.

12.2 Objetivos

Neste experimento, o principal objetivo científico é apresentar a vocês a tensão superficial γ na interface entre água e ar e o efeito que gradientes de γ geram sobre a superfície de um fluido, bem como a ação da viscosidade da água na dissipaçāo de energia cinética.

Para observar o Efeito Marangoni, sugerimos que realizem experimentos dispersando pequenos flocos ou um pó fino sobre água, como descrito na introdução, ou então que fabriquem pequenos barcos movidos a sabão, utilizando isopor ou papelão impermeável recortado no formato da Fig. 12.2 abaixo.



Figura 12.2: Modelo de barco movido a sabão. O recorte triangular na parte traseira (oposta ao bico) serve como um reservatório para o sabão.

Temos como objetivos didáticos do experimento praticar as seguintes habilidades científicas:

1. planejar um procedimento experimental a partir de conhecimentos prévios,
2. fazer um registro sistemático de suas observações e coletar dados,
3. tratar os dados experimentais e procurar por padrões,
4. levantar hipóteses e testá-las,
5. discutir se os resultados do experimento confirmam ou não suas hipóteses,

6. tirar conclusões e propor novos experimentos.

As habilidades 3, 4 e 5 serão exercitadas pela primeira vez, enquanto as outras já vêm sendo desenvolvidas ao longo da disciplina. As novas habilidades se assemelham àquelas já utilizadas anteriormente, quando um modelo e uma pergunta explícita, na forma de uma grandeza a ser determinada, foi feita a vocês.

Dessa forma, neste experimento vocês deverão identificar quais propriedades do sistema podem ser observadas de forma quantitativa e quais parâmetros do experimento podem ser variados. Por exemplo, decidam se medirão as posições de objetos em função do tempo para diferentes parâmetros do sistema, onde o parâmetro pode ser o tamanho do objeto, a profundidade da lâmina de água, o tipo de surfactante ou outras variáveis que vocês identificarem como relevantes.

Planejem suas medições para que forneçam dados que permitam investigar se os parâmetros identificados afetam as propriedades observadas e de que forma. Se as propriedades observadas variam no tempo, elaborem medições que permitam avaliar como acontece essa variação, de forma a obter velocidades e acelerações.

Utilizem todas as ferramentas que vocês já conhecem, tanto de F 229 quanto de F 129, para fazer a análise dos dados à procura de padrões como, por exemplo, relações lineares ou quadráticas entre parâmetros independentes e dependentes, decaimentos exponenciais ou leis de potência. Caso percebam através de gráficos que a variação de uma grandeza não é linear, verifiquem como é o seu comportamento em um gráfico log-log — que apresenta leis de potência $y = Ax^n$ como retas — ou em um gráfico semi-log — $\log(Y)$ em função de X, que lineariza comportamentos exponenciais. Lembrem-se que para decidir com confiança se uma variação é linear, é preciso ter vários pontos experimentais.

A partir da análise dos dados vocês deverão elaborar hipóteses para explicar o que observaram, baseadas nos dados, na análise feita e em conhecimentos prévios ou pesquisas bibliográficas. **Suas hipóteses não precisam estar corretas, mas devem fazer sentido do ponto de vista físico, ser consistentes com os dados apresentados e devem ser testáveis.**

Como este experimento tem objetivos didáticos bastante diferentes dos três primeiros, a rubrica de correção também será diferente e está listada nas páginas a seguir. Lembrem-se de consultar a rubrica durante os trabalhos e durante a elaboração do relatório, para saber como serão avaliados.

12.3 Bibliografia

Leituras adicionais sobre a tensão superficial e fluxos viscosos podem ser encontradas em:

1. http://lilith.fisica.ufmg.br/~labexp/novosite/Tensao_Superficial.pdf
2. https://edisciplinas.usp.br/pluginfile.php/371635/mod_resource/content/1/TENS%C3%83O%20SUPERFICIAL%20E%20CAPILARIDADE.pdf
3. H. Moysés Nussenzveig, Curso de Física Básica, Vol. 2: Fluidos, Oscilações e ondas, Calor – 3^a Edição, Editora Edgard Blücher (1996), pp. 33 a 37

13. Resfriamento

13.1 Introdução

Quando corpos a temperaturas diferentes entram em contato, ocorre uma troca de energia entre eles até que a temperatura dos dois sistemas se iguale e o equilíbrio térmico seja atingido. Chamamos a energia trocada dessa forma de calor. A nova temperatura T_F dos corpos será definida pelas suas temperaturas iniciais, T_1 e T_2 , e por suas respectivas capacidades térmicas, C_1 e C_2 . A capacidade térmica é a propriedade de um corpo que nos diz quanto calor deve ser transferido para que sua temperatura varie de 1 K. Quando o calor é absorvido pelo corpo, sua temperatura aumenta. Quando ele é cedido pelo corpo, sua temperatura diminui. Podemos relacionar o calor Q e a variação de temperatura por $Q = C(T_f - T_i)$.

Em um sistema isolado, a variação total de energia deve ser nula e temos:

$$C_1(T_F - T_1) + C_2(T_F - T_2) = 0. \quad (13.1)$$

Caso o corpo 1 tenha $C_1 \gg C_2$ e T_2 não seja muito maior ou muito menor que T_1 , de forma a compensar a diferença de capacidades térmicas, podemos considerar que o corpo 1 funcionará como um reservatório térmico. Nesse caso, ele absorve (cede) calor do corpo 2 sem que sua temperatura varie apreciavelmente e o objeto 2 perde (ganhá) calor até atingir a mesma temperatura do reservatório.

Esse é o caso, por exemplo, de uma xícara de café deixada sobre a mesa da sala. Embora localmente a superfície da mesa e o ar em volta da xícara tenham um aumento de temperatura, a temperatura da sala como um todo não varia de forma apreciável por causa da xícara. Contudo, com o passar do tempo o café e a xícara terão esfriado e estarão a uma temperatura cada vez mais próxima da temperatura da sala.

O tempo necessário para que o equilíbrio térmico seja atingido e a forma como a temperatura de cada corpo variará em função do tempo depende dos processos físicos envolvidos nas trocas de energia. Macroscopicamente, podemos definir três grandes categorias:

- Condução: A troca de energia acontece pelo contato direto entre os corpos, sem que haja transporte de matéria dentro dos objetos ou entre eles.
- Convecção: A troca de energia envolve transporte de matéria. Um exemplo é a convecção da água em uma panela, com a massa de água mais quente, com menor densidade, subindo e fazendo com que água mais fria desça para o fundo e se aqueça.
- Radiação: A energia é trocada por meio da emissão e absorção de ondas eletromagnéticas.

13.2 Resfriamento

Processos de resfriamento possuem grande importância tecnológica em áreas tão diferentes quanto a de alimentos e a eletrônica. Neste experimento vamos lidar com o caso relativamente simples de corpos mais quentes que o ambiente resfriando de forma espontânea. Os modelos apresentados assumem que o ambiente é um reservatório térmico, ou seja, não varia de forma apreciável sua temperatura durante o resfriamento do objeto.

Uma grandeza importante para o modelo de transferência de calor é o coeficiente de transferência de calor \bar{h} . No caso de transferências de calor por condução térmica ou por convecção forçada — caso em que sopramos de forma contínua ar à temperatura ambiente sobre o objeto — em que as

diferenças de temperatura não sejam muito grandes¹, consideramos que o coeficiente independe da temperatura e temos como modelo um decaimento exponencial da temperatura:

$$T - T_{\infty} = (T_0 - T_{\infty}) \exp(-\gamma t), \quad (13.2)$$

sendo γ um coeficiente que depende de \bar{h} e de outras propriedades do objeto que está resfriando, como sua densidade, calor específico e geometria. A temperatura ambiente é representada por T , já que a rigor o corpo só entrará em equilíbrio com a temperatura ambiente quando $t \rightarrow \infty$.

Quando o resfriamento acontece por convecção natural, gerada pelo movimento do ar (ou outro fluido) ao redor do objeto causado pela diferença de densidade entre o fluido à temperatura ambiente e o fluido aquecido ao absorver energia do corpo quente (ou resfriado após ceder energia para um corpo mais frio), temos um coeficiente \bar{h} que dependerá da temperatura de forma proporcional a T^n . Há diferentes modelos para calcular o expoente n , mas tipicamente terá valores entre 1/6 e 1/3.

Essa dependência muda a equação diferencial, que agora terá soluções da forma

$$\Delta T(t) = \frac{A}{(B + Ct)^m} \quad (13.3)$$

para $\Delta T = T - T_{\infty}$ e $m = 1/n$.

13.3 Objetivos

Neste Experimento vocês trabalharão com a análise de vídeos e processos de resfriamento. Os objetivos são aprender novas técnicas de análise de dados, utilizar os parâmetros do modelo para fazer previsões a respeito do comportamento do sistema e comparar as previsões feitas por modelos diferentes. Façam a análise com todos os sete vídeos.

Na pasta chamada “Termopar” as medições foram feitas usando um termopar tipo J. O valor indicado no aparelho é a tensão em mV medida entre uma extremidade em contato com o ambiente e outra em contato com água quente dentro de calorímetros ou garrafas térmicas. Mais informações sobre o funcionamento do termopar e a estrutura do calorímetro e da garrafa térmica estão disponíveis nas leituras complementares “O termopar” e “Ilustração de corte transversal do calorímetro e da garrafa térmica”.

A tabela de calibração do termopar pode ser utilizada para converter as tensões medidas em diferenças de temperatura, mesmo que uma das pontas não esteja na referência a 0°C. Você pode confirmar esta suposição calculando a tensão indicada na tabela para duas temperaturas e comparando à tensão prevista para a temperatura equivalente à diferença.

Para ler a tabela, cada linha corresponde a uma década de temperaturas e cada coluna a um incremento de +1 (ou -1 para temperaturas negativas) em relação à temperatura da década.

Na pasta “Termômetro de cozinha” temos vídeos gravados usando um termômetro digital próprio para medir a temperatura de carnes. Há vídeos de dois experimentos: um medindo o resfriamento espontâneo de uma forma de alumínio de massa $m = (62,0 \pm 0,5)$ g e outro medindo o resfriamento do próprio termômetro, apoiado sobre um bocal de vidro. A temperatura ambiente durante o experimento foi de $(26,5 \pm 0,5)$ °C.

13.4 Tratamento inicial dos dados e preparação dos gráficos

A partir dos dados brutos extraídos dos vídeos, vocês deverão construir gráficos de $\Delta T(t)$ e fazer ajustes lineares para os modelos das Eqs. 13.2 e 13.3. Façam ajustes para $n = 1/3$, $1/4$ e $1/6$.

¹Como sempre, a definição de “grande” ou “pequeno” não é absoluta e dependerá de como as propriedades do sistema, por exemplo a condutividade térmica dos sólidos envolvidos varia com a temperatura.

Os dados extraídos por vocês possuem uma característica particular em comparação aos que foram trabalhados em outros experimentos. São dados obtidos em função do tempo, a partir de um aparelho digital, na medição de um fenômeno que ocorre muito mais lentamente que a resolução temporal do experimento. Isto significa que o termômetro indica a mesma leitura durante um longo intervalo de tempo, especialmente para a fase final do resfriamento.

Embora esta seja a leitura do aparelho digital, é importante lembrar que a temperatura varia de forma contínua ao longo do tempo, embora não possamos perceber, por causa do limite de resolução do termômetro usado. É possível saber, apenas, em que instante de tempo a temperatura entrou na faixa que é arredondada para um dado valor e quando saiu dessa faixa. Por exemplo: no segundo 62 a temperatura mudou de 75°C para 74°C e no segundo 85 a temperatura indicada mudou para 73°C. Podemos dizer que entre o segundo 62 e o segundo 85 a temperatura esteve no intervalo (74,5°C , 73,5°C]. Não podemos, contudo, representar essa informação no gráfico por uma série de 23 pontos com a mesma temperatura, o que significaria afirmar que a temperatura ficou constante durante este intervalo.

Se essa é toda a informação que temos sobre o sistema, então o melhor que podemos fazer é um tratamento usando funções densidade de probabilidade retangulares. Temos uma f.d.p. retangular para a temperatura e outra para o tempo. É razoável supor que o sistema tinha a temperatura de 74°C no centro da faixa de tempo, ou seja, no segundo 73,5. O ponto correspondente a toda essa faixa de tempo em que medimos a temperatura de 74°C estará em (73,5s, 74°C) com as respectivas barras de incerteza no tempo e na temperatura.

Considerando o que discutimos acima, não é adequado utilizar a última temperatura mostrada no vídeo, já que não temos certeza de por quanto tempo o termômetro apresentou aquela leitura.

13.5 Ajustes não-lineares

Antes de realizar os ajustes não-lineares, separem o último ponto de cada conjunto de dados. Não utilizem estes pontos no ajuste, mas para comparar previsões feitas a partir dos parâmetros obtidos.

Para realizar o ajuste exponencial, no menu de Análise onde normalmente escolhem o ajuste linear, selecionem “Fit exponential decay > First order”. Para os demais ajustes será necessário definir as funções a serem ajustadas. Para isso, selecionem “Fit wizard” e preencham a janela como no exemplo abaixo, lembrando que é importante declarar todos os parâmetros que aparecerão na equação:

- ! Atenção: antes de realizar o ajuste linear, salve o seu trabalho! Erros de sintaxe ao escrever a função podem levar a falhas no SciDAVis, que precisará ser fechado.

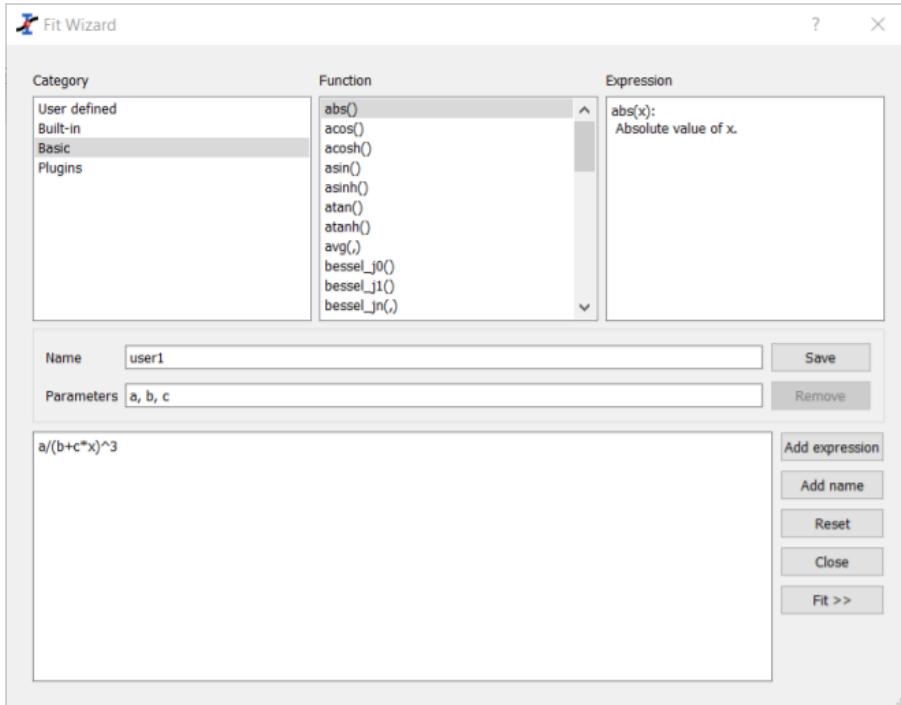


Figura 13.1: Exemplo de como inserir uma função não-linear no Fit Wizard do SciDAVis.

Após definir a função, cliquem no botão “Fit»” para prosseguir à próxima etapa do ajuste:

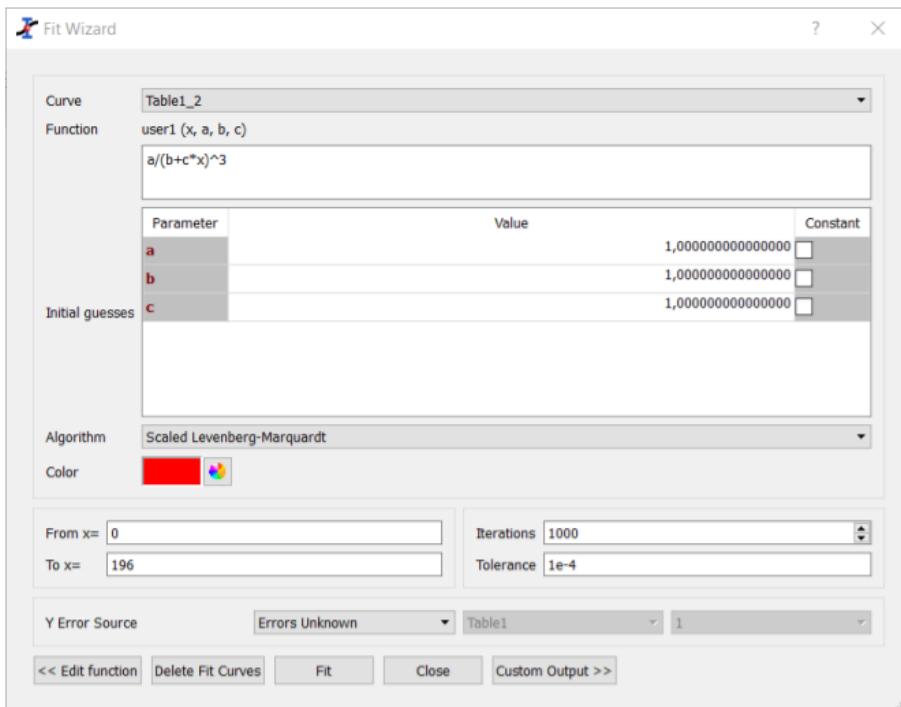


Figura 13.2: Tela de definição dos valores iniciais para os parâmetros a serem otimizados.

Ao contrário do ajuste linear, que sempre encontra o mínimo global da soma dos quadrados dos resíduos em função dos parâmetros A e B, neste caso é possível que o SciDAVis encontre valores ruins para o ajuste ou não consiga convergir caso os valores iniciais dos parâmetros não estejam

bem escolhidos. Sugerimos que deixem os valores de a e b em 1.0 mas mudem o valor de c para que seja menor que 0.1. Também é interessante testar outros valores iniciais para os parâmetros, de forma a verificar que de fato nem sempre o ajuste retorna bons valores.

Após fazer este ajuste, repitam o procedimento modificando a Eq. 13.3 para que tenha apenas dois parâmetros livres. Há alguma mudança na qualidade do ajuste?

Finalmente, linearizem os dois modelos e façam ajustes lineares para cada conjunto de dados aplicando as duas linearizações. Comparem os valores obtidos para os coeficientes do modelo usando o ajuste não-linear aos obtidos com o ajuste linear.

13.6 Fazendo e comparando previsões de modelos

Após ter feito os ajustes, vocês deverão utilizar os modelos, com os parâmetros encontrados, para fazer previsões. Calculem, para cada modelo, qual deveria ser a temperatura no instante de tempo em que foi medido o último valor de temperatura (aquele que não foi utilizado no ajuste) e qual o quadrado da diferença entre a previsão e o valor medido.

Discutam se há diferenças significativas entre as previsões feitas por cada modelo, tendo em conta as incertezas.

Por fim, façam uma previsão do instante de tempo em que a diferença de temperatura será menor que 0,5°C, de forma que o termômetro passará a indicar a temperatura ambiente. As previsões são compatíveis entre si, quando consideramos as incertezas?

13.7 Bibliografia

1. John H. Lienhard, IV and John H. Lienhard, V “A Heat Transfer Textbook” 5th Edition (2019). Disponível em <https://ahtt.mit.edu/wp-content/uploads/2019/08/AHTTv500.pdf>
2. F. W. Sears e M. Zemansky, Física, Vol. 2, cap. 17, Ed. Universidade de Brasília.
3. H. M. Nussenzveig, Curso de Física Básica, Vol. 2, cap. 7 e 8, Ed. Blucher.
4. American Society for Testing and Materials – ASTM (ed.), Manual on the Use of Thermocouples in Temperature Measurements. (Biblioteca IFGW #R536.5a512m).

Índice Remissivo

D

Discussão dos resultados	22
-----------------------------------	----

R

Resultados Discussão dos	<i>veja Discussão</i>
preliminares	17

V

Variável dependente	15
independente	15
VD	16
VI	16