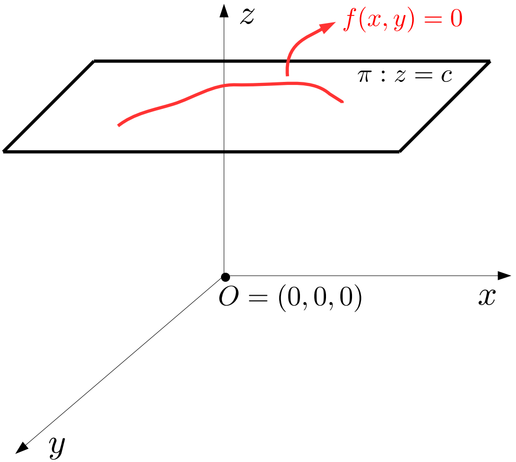
Superfícies Cônicas e Coordenadas Cilíndricas/Esféricas

Lucas E. A. Simões

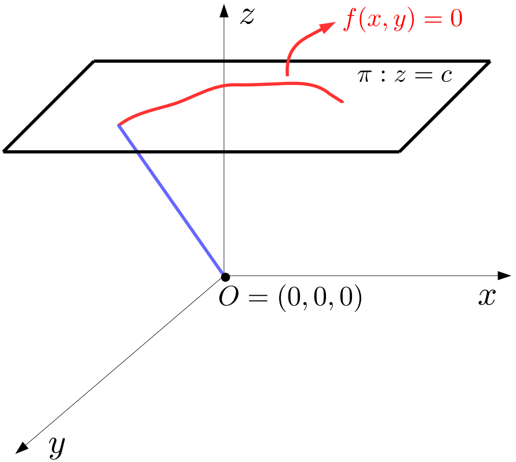
Departamento de Matemática Aplicada
UNICAMP

11 de junho de 2019

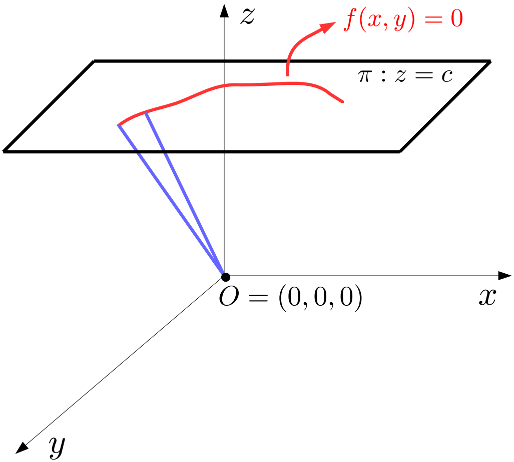
Superfícies Cônicas



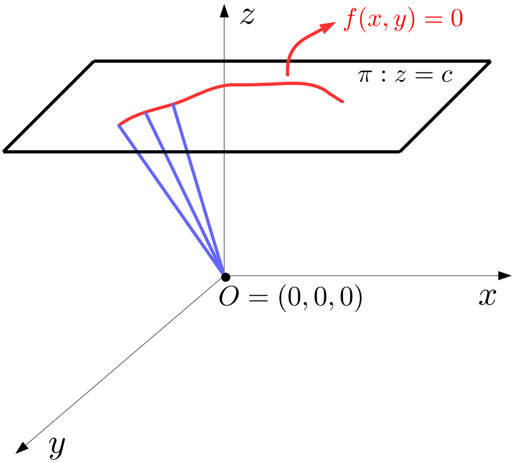
Superfícies Cônicas



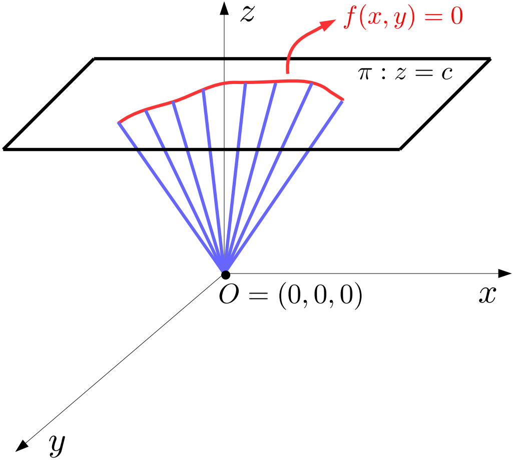
Superfícies Cônicas



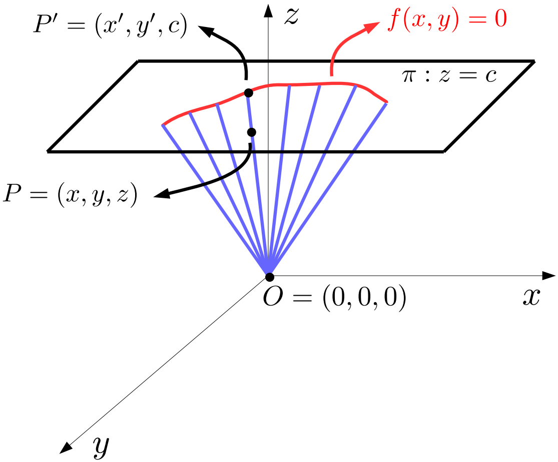
Superfícies Cônicas



Superfícies Cônicas

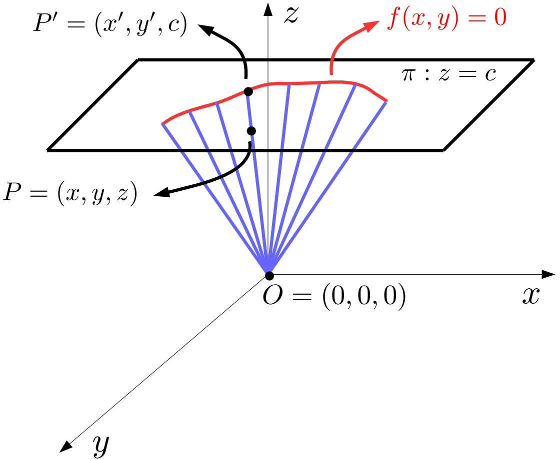


Superfícies Cônicas



Olhando a figura, percebemos que

$$\overrightarrow{OP} = \lambda\overrightarrow{OP'} \Leftrightarrow (x, y, z) = \lambda(x', y', c).$$



Superfícies Cônicas

Olhando a figura, percebemos que

$$\overrightarrow{OP} = \lambda \overrightarrow{OP'} \Leftrightarrow (x, y, z) = \lambda(x', y', c).$$

Portanto, temos que

$$\lambda = \frac{z}{c} \text{ e } x' = \frac{cx}{z}, \;\; y' = \frac{cy}{z}.$$

Desta forma,

$$f(x', y') = 0 \Leftrightarrow \underbrace{f\left(\frac{cx}{z}, \frac{cy}{z}\right) = 0}_{\text{equação da superfície cônica}}.$$

Superfícies Cônicas

A curva $f(x, y) = 0$ é chamada de **diretriz**, enquanto que a origem $O = (0, 0, 0)$ é chamada de **vértice** da superfície cônica.

Superfícies Cônicas

A equação encontrada vale somente para quando a curva está no plano que tem $z = c$ fixo. O mesmo pode ser feito para quando a curva está nos planos onde $x = a$ ou $y = b$ são fixos.

- Curva diretriz $f(x, y) = 0$ no plano $z = c$:

$$f\left(\frac{cx}{z}, \frac{cy}{z}\right) = 0.$$

- Curva diretriz $f(y, z) = 0$ no plano $x = a$:

$$f\left(\frac{ay}{x}, \frac{az}{x}\right) = 0.$$

- Curva diretriz $f(x, z) = 0$ no plano $y = b$:

$$f\left(\frac{bx}{y}, \frac{bz}{y}\right) = 0.$$

Superfícies Cônicas

Resultado

Se o ponto $P = (x, y, z)$ pertence à superfície cônica $\mathcal{S}$, então $P_\lambda = (\lambda x, \lambda y, \lambda z)$ também pertence à superfície cônica para qualquer λ escolhido.

Superfícies Cônicas

Exercício

Encontrar a equação da superfície cônica $\mathcal{S}$ com curva diretriz $x^2 = 2y$ situada no plano $z = 1$ e vértice $O = (0, 0, 0)$.

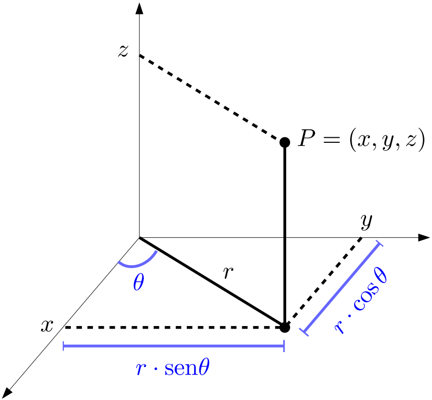
Superfícies Cônicas

Exercício

Mostre que a superfície de equação $4x^2 - y^2 + 4z^2 = 0$ descreve uma superfície cônica.

UNICAMP

Coordenadas Cilíndricas



$$x = r \cdot \cos\theta, \quad y = r \cdot sen\theta \quad \text{e} \quad r = \sqrt{x^2 + y^2}$$

Coordenadas Cilíndricas

- **Polo:** $O = (0, 0, 0)$;
- **Eixos de referência:** x e z;
- P **em coordenadas cartesianas:** $P = (x, y, z)$;
- P **em coordenadas cilíndricas:** $P = (r, \theta, z)$;
- **Relação:**

$$x = r \cdot \cos\theta, \quad y = r \cdot sen\theta \quad \text{e} \quad r = \sqrt{x^2 + y^2}.$$

UNICAMP

Coordenadas Cilíndricas

Exercício

Determine a equação em coordenadas cilíndricas do parabolóide elíptico

$$x^2 + y^2 = 4z.$$

Coordenadas Cilíndricas

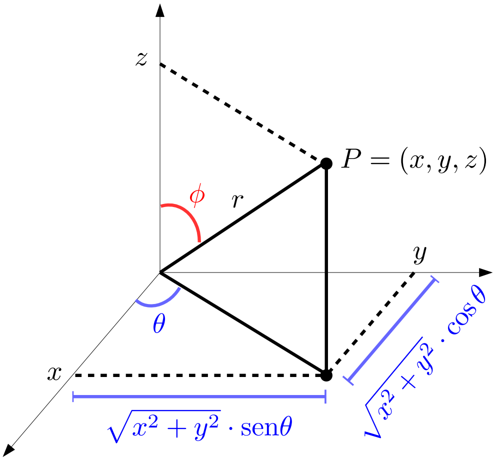
Exercício

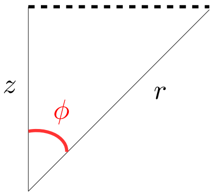
Determine a equação em coordenadas cartesianas da seguinte superfície

$$r = 2sen\theta.$$

UNICAMP

Coordenadas Esféricas





Coordenadas Esféricas

- **Polo:** $O = (0, 0, 0)$;
- **Eixos de referência:** z e x;
- P **em coordenadas cartesianas:** $P = (x, y, z)$;
- P **em coordenadas esféricas:** $P = (r, \phi, \theta)$;
- **Relação:**

$$x = r \cdot sen\phi \cos\theta,\ y = r \cdot sen\phi sen\theta,\ z = r \cdot \cos\phi \text{ e } r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}.$$

Coordenadas Esféricas

Exercício

Determine a equação em coordenadas esféricas do parabolóide elíptico

$$x^2 + y^2 = 4z.$$

Coordenadas Esféricas

Exercício

Determine a equação em coordenadas cartesianas da seguinte superfície

$$r \cdot sen\phi = 2.$$

Exercício Extra

Seja $\mathcal{S}$ a superfície dada pela equação

$$4x^2 - 8x - 9y^2 + 6y - 36z + 3 = 0.$$

a) Identifique esta quádrica.
b) Qual é a cônica gerada pela interseção da superfície $\mathcal{S}$ com o plano $y = 0$?
c) Apresente a equação de $\mathcal{S}$ em coordenadas cilíndricas usando o polo e eixos apropriados.