Departamento de Matemática - IMECC - Unicamp

MA211 - Segundo Semestre de 2020

PROVA 1 - 05/11/2020 (5^a Tarde)

Questão 1. (2,5 pontos) Determine a menor distância entre o ponto $(2, 1, -1)$ e o plano $x + y - z = 1$.

Solução: Seja d a distância do ponto $(2, 1, -1)$ a qualquer ponto (x, y, z) do plano $x+y-z = 1$. Então,

$$d = \sqrt{(x-2)^2 + (y-1)^2 + (z+1)^2}.$$

Como $z = x + y - 1$, podemos reescrever a expressão acima como

$$d = \sqrt{(x-2)^2 + (y-1)^2 + (x+y)^2}. \quad \textbf{(0.5)}$$

Uma vez que a função d é não-negativa, vamos minimizar

$$f(x, y) = d^2 = (x-2)^2 + (y-1)^2 + (x+y)^2.$$

Observe que

$$f_x(x, y) = 2(x-2)+2(x+y) = 4x+2y-4 \;\text{ e }\; f_y(x, y) = 2(y-1)+2(x+y) = 4y+2x-2. \quad \textbf{(0.5)}$$

Para encontrar os pontos críticos, precisamos então resolver o sistema:

$$\begin{cases} 4x + 2y - 4 = 0 \\ 4y + 2x - 2 = 0. \quad \textbf{(0.5)} \end{cases}$$

Da primeira equação encontramos $x = (2 - y)/2$. Substituindo x na segunda,

$$4y + 2\left(\frac{2-y}{2}\right) - 2 = 0 \Leftrightarrow 8y + 4 - 2y - 4 = 0 \Leftrightarrow 6y = 0 \Leftrightarrow y = 0.$$

Logo, segue que $x = (2 - 0)/2 = 1$. Portanto, o único ponto crítico de f é $(1, 0)$. **(0.5)**

Como um mínimo absoluto existe, pois existe uma distância mínima do ponto ao plano, este mínimo deve ocorrer no ponto crítico. Assim, a menor distância ocorre no ponto $(1, 0)$ donde encontramos $d = \sqrt{(1-2)^2 + (0-1)^2 + (1+0)^2} = \sqrt{3}$. **(0.5)**

Observação: Uma outra maneira de justificar que $(1, 0)$ é um ponto de mínimo de f é usar o Teste da Derivada Segunda, pois $f_{xx}(1, 0) = 4 > 0$ e

$$D(1, 0) = f_{xx}(1, 0).f_{yy}(1, 0) - (f_{xy}(1, 0))^2 = 4.4 - 2^2 = 12 > 0.$$

Questão 2. (2,5 pontos) Usando o métodos dos multiplicadores de Lagrange, encontre os pontos de máximo e mínimo da função

$$f(x,y) = x^2 + y^2$$

sujeitos à restrição $x^4 + y^4 = 1$.

Solução: Defina $g(x,y) = x^4 + y^4$. Pelo método dos multiplicadores de Lagrange, devemos resolver o sistema

$$\begin{cases} \nabla f(x,y) = \lambda \nabla g(x,y) \\ g(x,y) = 1. \end{cases}$$

ou seja,

$$\begin{cases} 2x = \lambda 4x^3, \\ 2y = \lambda 4y^3, \\ x^4 + y^4 = 1. \quad \textbf{(0.5)} \end{cases}$$

Da primeira equação temos $x = 2\lambda x^3$. Isso implica que $x = 0$ ou $\lambda = \frac{1}{2x^2}$. Também, da segunda equação temos que $y = 2\lambda y^3$ e assim, $y = 0$ ou $\lambda = \frac{1}{2y^2}$. Então,

- Se $x = 0$, de $x^4 + y^4 = 1$ concluímos que $y = \pm 1$. Assim temos os pontos $(0,1)$ e $(0,-1)$ **(0.5)** .
- Da mesma forma, se $y = 0$, temos $x = \pm 1$ e obtemos os pontos $(1,0)$ e $(-1,0)$. **(0.5)**
- Se $x, y \neq 0$, segue que $\frac{1}{2x^2} = \lambda = \frac{1}{2y^2}$, de onde obtemos que $x^2 = y^2$ e portanto, de $x^4 + y^4 = 1$, temos $2x^4 = 1$ o que implica que $x = \pm \frac{1}{\sqrt[4]{2}}$. Logo, neste caso temos os pontos $\left(\pm \frac{1}{\sqrt[4]{2}}, \pm \frac{1}{\sqrt[4]{2}}\right)$. **(0.5)**

Como a função f é quadrática, $f\left(\pm \frac{1}{\sqrt[4]{2}}, \pm \frac{1}{\sqrt[4]{2}}\right) = \frac{2}{\sqrt{2}} = \sqrt{2}$ e $f(0,\pm 1) = 1 = f(\pm 1, 0)$. Portanto, os pontos de máximo são

$$\left(\frac{1}{\sqrt[4]{2}}, \frac{1}{\sqrt[4]{2}}\right), \quad \left(-\frac{1}{\sqrt[4]{2}}, \frac{1}{\sqrt[4]{2}}\right), \quad \left(\frac{1}{\sqrt[4]{2}}, -\frac{1}{\sqrt[4]{2}}\right) \quad \text{e} \quad \left(-\frac{1}{\sqrt[4]{2}}, -\frac{1}{\sqrt[4]{2}}\right)$$

enquanto que os pontos de mínimo são

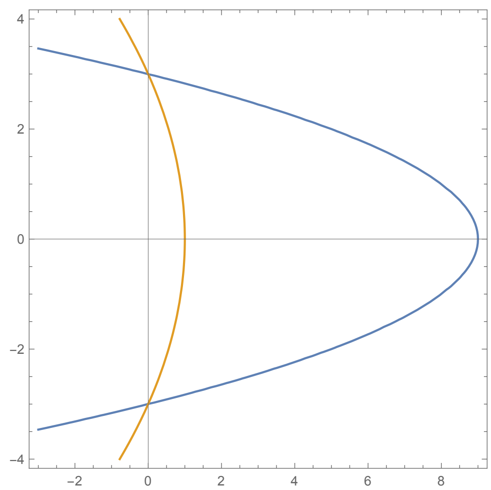
$$(1,0), (-1,0), (0,1) \quad \text{e} \quad (0,-1). \quad \textbf{(0.5)}$$

Questão 3. (2,5 pontos) Use integral dupla para calcular a área da região limitada pelas curvas $y^2 = 9 - x$ e $y^2 = 9 - 9x$.

Solução: As curvas podem ser escritas como $x = 9 - y^2$ e $x = 1 - y^2/9$. Assim, elas devem se interceptam quando

$$9 - y^2 = 1 - \frac{y^2}{9} \quad \Longrightarrow \quad 81 - 9y^2 = 9 - y^2 \quad \Longrightarrow \quad y^2 = 9 \quad \Longrightarrow \quad y = \pm 3. \quad \textbf{(0.5)}$$

Um esboço da região é mostrado na figura abaixo.



Observe que podemos descrever a região como uma *região do tipo II*, a saber, se D é a região desejada então

$$D = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2; -3 \leq y \leq 3, \;\; 1 - \frac{y^2}{9} < x < 9 - y^2 \right\}. \quad \textbf{(1.0)}$$

Portanto,

$$\begin{aligned}
A(D) &= \int_{-3}^{3} \int_{1-\frac{y^2}{9}}^{9-y^2} 1 dx dy \quad \textbf{(0.5)} \\
&= \int_{-3}^{3} \left[9 - y^2 - \left(1 - \frac{y^2}{9} \right) \right] dy \\
&= \int_{-3}^{3} \left(8 - \frac{8}{9} y^2 \right) dy \\
&= 2 \int_{0}^{3} \left(8 - \frac{8}{9} y^2 \right) dy \\
&= 2 \left(8y - \frac{8}{27} y^3 \right) \Big|_{0}^{3} \\
&= 32, \quad \textbf{(0.5)}
\end{aligned}$$

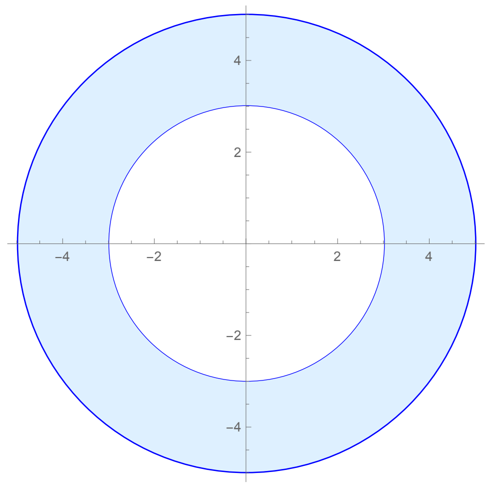
onde, na quarta igualdade, usamos que estamos integrando uma função par em um intervalo simétrico.

Questão 4. (2,5 pontos) Use coordenadas polares para encontrar o volume do sólido no interior da esfera $x^2 + y^2 + z^2 = 25$ e no exterior do cilindro $x^2 + y^2 = 9$.

Solução: Primeiramente note que pelas simetrias da esfera e do cilindro, podemos calcular o volume do sólido desejado que está cima do plano xy e multiplicar por 2. Observe agora que a esfera e o cilindro interceptam o plano xy nas circunferências $x^2 + y^2 = 25$ e $x^2 + y^2 = 9$, respectivamente **(0.5)** . Portanto, devemos calcular o volume do sólido que está abaixo do gráfico da função $z = \sqrt{25 - x^2 - y^2}$ e acima da região D, dada em coordenadas polares por

$$D = \{(r, \theta) : 3 \leq r \leq 5 \quad \text{e} \quad 0 \leq \theta \leq 2\pi\} \quad (\mathbf{0.5})$$

Um esboço da região D é mostrado na figura abaixo.



Portanto, se V é o volume do sólido desejado então

$$\begin{aligned}
V &= 2\int_0^{2\pi}\int_3^5 \sqrt{25 - r^2}\, r dr d\theta \quad (\mathbf{0.7}) \\
&= 2\left(\int_0^{2\pi} d\theta\right)\left(\int_3^5 \sqrt{25 - r^2}\, r dr\right) \\
&= 4\pi\left(-\frac{1}{2}\int_3^5 \sqrt{25 - r^2}(-2r dr)\right) \qquad \text{(mudança de variável } u = 25 - r^2) \\
&= 2\pi\int_0^{16} \sqrt{u} du \\
&= 2\pi . \frac{2}{3} u^{3/2}\Big|_0^{16} \\
&= \frac{256\pi}{3}. \quad (\mathbf{0.8})
\end{aligned}$$

Observação: Se não usarmos simetria então o integrando é geralmente $z_{\text{superior}} - z_{\text{inferior}}$, onde cada $z = f(x, y)$ define os limites inferior e superior do sólido. Neste case temos que $z_{\text{superior}} = \sqrt{25 - x^2 - y^2}$ e $z_{\text{inferior}} = -\sqrt{25 - x^2 - y^2}$ para $9 \leq x^2 + y^2 \leq 25$. Portanto,

$$V = \int_0^{2\pi}\int_3^5 \left[\sqrt{25 - r^2} - \left(-\sqrt{25 - r^2}\right)\right] r dr d\theta = 2\int_0^{2\pi}\int_3^5 \sqrt{25 - r^2}\, r dr d\theta,$$

que é exatamente a expressão que obtivemos acima.