UNIVERSIDADE ESTADUAL DE CAMPINAS
Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica
1a. Prova – MA-211 – Quinta-feira (TARDE), 13/09/2018

Q1	
Q2	
Q3	
Q4	
Q5	
$\sum$	

ALUNO	RA

1a. Prova – MA-211 – Quinta-feira (TARDE), 13/09/2018

INSTRUÇÕES

NÃO É PERMITIDO DESTACAR AS FOLHAS DA PROVA
É PROIBIDO O USO DE CALCULADORAS E DE DISPOSITIVOS ELETRÔNICOS
SERÃO CONSIDERADAS SOMENTE AS QUESTÕES ESCRITAS DE FORMA CLARA E DEVIDAMENTE JUSTIFICADAS

Boa Prova!

Questão 1. (2 pontos) Considere a função real de duas variáveis reais definida por

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^4y - xy^4}{x^5 - y^5}, & \text{se } y \neq x, \\ 0, & \text{se } y = x. \end{cases}$$

(a) f é contínua em $(0,0)$? Justifique.

(b) f é contínua em $(1,-1)$? Justifique.

Questão 2. (3 pontos) Use o método dos multiplicadores de Lagrange para determinar os valores de máximo e mínimo de $f(x, y) = x^2y^2 + x^2 - y^2$ restrita à circunferência de raio 1 centrada na origem de $\mathbb{R}^2$. Em que pontos tais valores são atingidos?

Questão 3. (2 pontos) Determine as direções em que a derivada direcional da função $f(x, y) = x^2y^2 + x^2 - y^2$ no ponto $P = (2, 1)$ assume:

(a) o valor 6;

(b) o valor 10;

(c) o valor 14.

Questão 4. (2 pontos) Um laser é disparado do ponto $P = (2, -1, 0)$ de maneira a atingir a superfície $z = x - xy$ ortogonalmente no ponto Q. Determine Q.

Questão 5. (1 ponto) Assuma que a expressão $\exp(x+y+z)+xyz=1$ define implicitamente z como função de x e y. Calcule $\dfrac{\partial z}{\partial x}$ e $\dfrac{\partial z}{\partial y}$.

P1 - MA211 , 2018

(1) $f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^4y - xy^4}{x^5 - y^5}, & \text{se } x \neq y \\ 0, & \text{se } x = y \end{cases}$

(a) $f(-t,t) = \dfrac{t^5 + t^5}{-t^5 - t^5} = -1 \xrightarrow[t \to 0]{} 1$

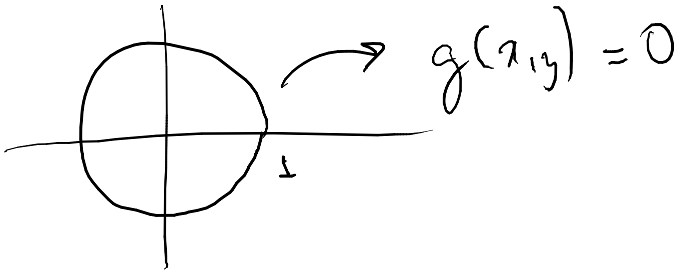
$f(t,0) = \dfrac{0}{t^5} = 0 \xrightarrow[t \to 0]{} 0$

Como os "limites via duas curvas" diferentes dão resultados diferentes, o limite da função não existe. +0,5 Portanto, ela não é contínua em (0,0). +0,5

(b) f é quociente de polinômios, de maneira que é contínua em todos os pontos onde seu denominador não é zero. Assim, f é contínua em (1,-1). 1,0

2. $f(x,y) = x^2y^2 + x^2 - y^2$

$g(x,y) = x^2+y^2-1$



$\nabla f = (2xy^2+2x, 2x^2y-2y)$

$\nabla g = (2x, 2y)$

$$\begin{cases} \nabla f = \lambda \nabla g \\ g(x,y) = 0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} 2xy^2+2x = \lambda 2x & (1) \\ 2x^2y - 2y = \lambda 2y & (2) \\ x^2+y^2 = 1 & (3) \end{cases}$$

0,5

(i) Se $x=0$, temos de (3): $y = \pm 1$

que dá, por (2) $\lambda = -1$.

Assim, os candidatos aqui são

$(x,y) = (0,1)$ e $(0,-1)$ +1,0

com $f(x,y) = -1$ e -1

(ii) Se $x \neq 0$, temos de (1): $\lambda = y^2+2$

Ainda, de (3): $x^2 = 1-y^2$

Substituindo em (2):

$$(1-y^2)\,y - y = (y^2+2)\,y$$

$$\Rightarrow \cancel{y} - y^3 - \cancel{y} = y^3 + 2y$$

$$\Rightarrow y^3 + 2y = 0 \Rightarrow y(y^2+2) = 0$$

$$\Rightarrow \boxed{y=0} \quad \text{ou} \quad \cancel{y^2 = -2}$$

Subst.: $x^2 = 1 \Rightarrow x = \pm 1$ e $\lambda = 2$

Assim, os candidatos aqui são

$(x,y) = (1,0)$ e $(-1,0)$ $+1,0$

com $f(x,y) = 1$ e 1.

Assim: $+0,5$

- o valor máximo de f é 1, atingido nos pontos $(x,y) = (1,0)$ e $(-1,0)$
- o valor mínimo de f é -1, atingido nos pontos $(x,y) = (0,1)$ e $(0,-1)$.

(3) $f(x,y) = x^2y^2 + x^2 - y^2$, $P = (2,1)$

$$\nabla f = (2xy^2 + 2x,\ 2x^2y - 2y)$$

$$\Rightarrow \nabla f(P) = (8,6).$$

Notamos que $|\nabla f| = 10$.

Na direção de $\hat{n} = (a,b)$, com $a^2+b^2=1$

tem $D_{\hat{n}} = \nabla f(P) \cdot \hat{n} = 8a + 6b.$

0,3

(a) Queremos (a,b) tal que

$$\begin{cases} 8a+6b = 6 \rightarrow b = 1 - \frac{4}{3}a \quad (*) \\ a^2+b^2 = 1 \end{cases}$$ +0,2

$$\Rightarrow a^2 + \left(1 - \frac{4}{3}a\right)^2 = 1 \Rightarrow a^2 + \cancel{1} - \frac{8}{3}a + \frac{16}{9}a^2 = \cancel{1}$$

$$\Rightarrow \frac{25}{9}a^2 - \frac{8}{3}a = 0 \qquad a\left(\frac{25}{9}a - \frac{8}{3}\right) = 0$$

$$\Rightarrow a = 0 \quad \text{ou} \quad \frac{25}{3}a - 8 = 0$$

$$\Rightarrow a = 0 \quad \text{ou} \quad a = \frac{24}{25}$$

(A)
$$\Rightarrow b = 1 \quad \text{ou} \quad b = 1 - \frac{32}{25} = -\frac{7}{25}.$$

Assim, as direções são dadas por

$(a,b) = (0,1)$ e $(a,b) = \left(\frac{24}{25}, -\frac{7}{25}\right)$.

+1,0

(b) Vemos que 10 é o valor de $|\nabla f|$ que é a taxa máxima de variação de f e que ocorre na direção de ∇f.

Logo, aqui a direção é dada por $(8,6)$ (normalizado, se preferir). +0,5

(c) Vemos que 16 é maior que a taxa máxima de variação de f, que é dada por $|\nabla f| = 10$. Assim, não existem tais direções. +0,5 (novo 4) superfície Σ: $z = x^2 + y^2 - \frac{1}{2}$

ponto P: $(2, 0, 0)$.

$\Sigma \iff F(x,y,z) = 0$, com $F(x,y,z) = x^2 + y^2 - \frac{1}{2} - z$

$$\nabla F = (2x, 2y, -1)$$

Q = [ponto a determinar] $= (a, b, a^2+b^2-\frac{1}{2})$

$$\vec{PQ} = (a-2,\ b-0,\ a^2+b^2-\tfrac{1}{2}-0)$$

$$\nabla F|_Q = (2a, 2b, -1).$$

$$\vec{PQ} = \lambda \nabla F|_Q \Rightarrow \begin{cases} a-2 = \lambda 2a & (1) \\ b = \lambda 2b & (2) \\ a^2+b^2-\frac{1}{2} = -\lambda & (3) \end{cases}$$

+1,5

Se $b \neq 0$, então $\lambda = \frac{1}{2}$ por (2) e de (3) $a^2+b^2 = 0 \Rightarrow b = 0$ (contradição)

Assim, $\boxed{b=0}$ e temos de (1) e (3)

$$\begin{cases} a-2 = 2a\lambda \\ \lambda = -a^2 + \frac{1}{2} \end{cases}$$

Subst. a segunda na primeira:

$$a - 2 = 2a\left(-a^2 + \frac{1}{2}\right)$$

$$\Rightarrow \cancel{a} - 2 = -2a^3 + \cancel{a}$$

$$\Rightarrow a^3 = 1 \Rightarrow \boxed{a = 1}$$

Desta forma, o ponto Q procurado é

$$Q = \left(1, 0, \frac{1}{2}\right)$$

+1,0

Ja.

⑤ $\exp(x+y+z) + xyz = 1$. Calculo $\frac{\partial z}{\partial x}$ e $\frac{\partial z}{\partial y}$

Considere: $F(x,y,z) = \exp(x+y+z) + xyz - 1$ 0,1

$$\frac{\partial F}{\partial x} = \exp(x+y+z) + yz \quad 0,1$$

$$\frac{\partial F}{\partial y} = \exp(x+y+z) + xz \quad 0,1$$

$$\frac{\partial F}{\partial z} = \exp(x+y+z) + xy \quad 0,1$$

Pelo teorema Função implícita:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{\frac{\partial F}{\partial x}}{\frac{\partial F}{\partial z}} = -\frac{\exp(x+y+z) + yz}{\exp(x+y+z) + xy} \quad 0,2 \quad , \quad \frac{\partial F}{\partial z} \neq 0 \quad 0,1$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{-\frac{\partial F}{\partial y}}{\frac{\partial F}{\partial z}} = -\frac{\exp(x+y+z) + xz}{\exp(x+y+z) + xy} \quad 0,2 \quad , \quad \frac{\partial F}{\partial z} \neq 0. \quad 0,1$$