Departamento de Matemática - IMECC - Unicamp

MA211 - Segundo Semestre de 2020

PROVA 1 - 06/11/2020 (6^a Noite)

Questão 1. (2,5 pontos) Determine e classifique os pontos críticos de

$$f(x,y) = x^2 + x^2y - y + y^2.$$

Solução: Primeiramente vamos determinar as derivadas de primeira ordem de f. Temos

$$f_x(x,y) = 2x + 2xy \qquad \text{e} \qquad f_y(x,y) = x^2 - 1 + 2y.$$

Assim, para determinar os pontos críticos devemos resolver o sistema

$$\begin{cases} 2x + 2xy = 0, \\ x^2 - 1 + 2y = 0. \quad \textbf{(0.5)} \end{cases}$$

Da primeira equação devemos ter $x = 0$ ou $y = -1$. Por um lado, substituindo $x = 0$ na segunda equação encontramos que $y = 1/2$. Por outro lado, substituindo $y = -1$ deduzimos que x deve satisfazer a equação $x^2 - 3 = 0$, ou seja, $x = \pm\sqrt{3}$.

Portanto, os pontos críticos de f são $(0, 1/2)$, $(\sqrt{3}, -1)$ e $(-\sqrt{3}, -1)$. **(0.8)** Para classificá-los vamos usar o teste da derivada segunda. Para isso, notemos que

$$D(x,y) = f_{xx}(x,y)f_{yy}(x,y) - (f_{xy}(x,y))^2 = (2 + 2y)2 - 4x^2 = 4(1 + y - x^2).$$

Como $D(\pm\sqrt{3}, -1) = 4(1 - 1 - 4) = -12$, obtemos que os pontos $(\sqrt{3}, -1)$ e $(-\sqrt{3}, -1)$ são pontos de sela. **(0.6)** Também, como $D(0, 1/2) = 4(1 + 1/2) = 6$ e $f_{xx}(0, 1/2) = 3 > 0$ segue que $(0, 1/2)$ é um ponto de mínimo local de f. **(0.6)**

Questão 2. (2,5 pontos) Encontre os valores máximo e mínimo absoluto da função

$$f(x,y) = 2x^2 + xy + \frac{5}{4}y^2 - 2x - 2y$$

no quadrado unitário $\mathrm{Q} = [0,1] \times [0,1]$.

Solução: Devemos analisar f no interior de Q e sobre a fronteira de Q.

- *No interior de Q*: Nessa região o gradiente é dado por $\nabla f(x,y) = (4x+y-2, x+\frac{5}{2}y-2)$. Além disso, $\nabla f(x,y) = (0,0)$ se e somente se

$$\begin{cases} 4x + 4 - 2 = 0, \\ x + \frac{5}{2}y - 2 = 0. \end{cases}$$

  Resolvendo o sistema acima encontramos $x = \frac{1}{3}$ e $y = \frac{2}{3}$. Agora note que $\left(\frac{1}{3}, \frac{2}{3}\right) \in \mathrm{Q}$. Assim, tal ponto é candidato a ponto de mínimo ou máximo absoluto.

  Em tal ponto a função vale $f\left(\frac{1}{3}, \frac{2}{3}\right) = -1$. **(0.8)**

- *Fronteira de Q*: Tal análise será feita nos quatro segmentos de reta de Q.
  (1) $y = 0$ e $0 \le x \le 1$: $f(x,0) = 2x^2 - 2x$, cujo ponto crítico é $x = \frac{1}{2}$.
  Assim os candidatos a max/min são: $f(0,0) = 0, f(\frac{1}{2},0) = -\frac{1}{2}$ e $f(1,0) = 0$. **(0.3)**

  (2) $y = 1$ e $0 \le x \le 1$: $f(x,1) = 2x^2 - x - \frac{3}{4}$, cujo ponto crítico é $x = \frac{1}{4}$.
  Assim os candidatos a max/min são: $f(0,1) = -\frac{3}{4}, f(\frac{1}{4},1) = -\frac{1}{2}$ e $f(1,1) = \frac{1}{4}$. **(0.3)**
  (3) $x = 0$ e $0 \le y \le 1$: $f(0,y) = \frac{5}{4}y^2 - 2y$, cujo ponto crítico é $y = \frac{4}{5}$.
  Assim os candidatos a max/min são: $f(0,0) = 0, f(0,\frac{4}{5}) = -\frac{4}{5}$ e $f(0,1) = -\frac{3}{4}$. **(0.3)**
  (4) $x = 1$ e $0 \le y \le 1$: $f(1,y) = \frac{5}{4}y^2 - y$, cujo ponto crítico é $y = \frac{2}{5}$.
  Assim os candidatos a max/min são: $f(1,0) = 0, f(1,\frac{2}{5}) = -\frac{1}{5}$ e $f(1,1) = \frac{1}{4}$. **(0.3)**

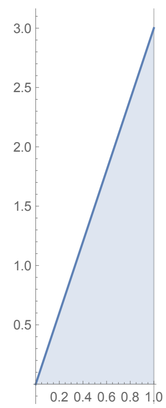
Portanto, comparando todos os valores vemos que o máximo absoluto é $f(1,1) = \frac{1}{4}$ e o mínimo absoluto é $f\left(\frac{1}{3}, \frac{2}{3}\right) = -1$. **(0.5)**

Questão 3. (2,5 pontos) Encontre o volume do sólido no primeiro octantante que se encontra acima do triângulo com vértices no pontos $(0,0), (1,0), (1,3)$ e abaixo do plano $z = 2x+3y+1$.

Solução: Observe que a reta que passa pelos pontos $(0,0)$ e $(1,3)$ tem equação $y = 3x$. Assim, o sólido procurado é aquele que se encontra abaixo do gráfico de $f(x,y) = 2x+3y+1$ e situado sobre a região do tipo I dada por

$$D = \{(x,y) : 0 \leq x \leq 1 \quad \text{e} \quad 0 \leq y \leq 3x\}. \quad (\mathbf{1.0})$$

Um esboço da região pode visto na figura abaixo.



Portanto, o volume do sólido será dado por

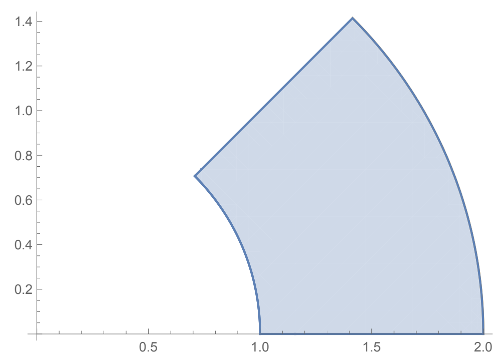
$$\begin{aligned}
V = \iint_D f(x,y)d\mathrm{A} &= \int_0^1 \left[\int_0^{3x} (2x+3y+1)dy\right] dx \quad (\mathbf{0.7}) \\
&= \int_0^1 \left[2xy + \frac{3}{2}y^2 + y\right]_{y=0}^{y=3x} dx \\
&= \int_0^1 \left(\frac{39}{2}x^2 + 3x\right) dx \\
&= \left[\frac{39}{6}x^3 + \frac{3}{2}x^2\right]_{x=0}^{x=1} \\
&= \frac{39}{6} + \frac{3}{2} \\
&= 8. \quad (\mathbf{0.8})
\end{aligned}$$

Questão 4. (2,5 pontos) Calcule a integral

$$\iint_R \arctan\left(\frac{y}{x}\right) dA$$

onde a região R é definida por $R = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 1 \leq x^2 + y^2 \leq 4, 0 \leq y \leq x\}$.

Solução: Observe que R é a região no primeiro quadrante abaixo da reta $y = x$ e entre os círculos de centro na origem e raios 1 e 2. **(0.5)** Um esboço da região é dado na figura abaixo.



Em coordenadas polares a região R pode ser escrita como

$$R = \{(r, \theta) : 1 \leq r \leq 2\,, 0 \leq \theta \leq \pi/4\}. \quad \mathbf{(1.0)}$$

Assim,

$$\begin{aligned}
\iint_R \arctan\left(\frac{y}{x}\right) dA &= \int_0^{\pi/4} \int_1^2 \arctan\left(\frac{r\sin(\theta)}{r\cos(\theta)}\right) r dr d\theta \quad \mathbf{(0.5)} \\
&= \int_0^{\pi/4} \int_1^2 \arctan\left(\tan(\theta)\right) r dr d\theta \\
&= \int_0^{\pi/4} \int_1^2 \theta r dr d\theta \\
&= \left[\frac{\theta^2}{2}\right]_{\theta=0}^{\theta=\pi/4} \left[\frac{r^2}{2}\right]_{r=1}^{r=2} \\
&= \frac{3\pi^2}{64}. \quad \mathbf{(0.5)}
\end{aligned}$$