

Roteiro para o Interferômetro de Michelson

Neste experimento será abordado o interferômetro de Michelson, que é composto por um divisor de feixes e dois espelhos. Interferômetros deste tipo foram usados para testar a hipótese do éter no final do século XIX e para detectar ondas gravitacionais no início de século XXI. Iremos tratar este interferômetro como um instrumento de medida de precisão para comprimentos de onda desconhecidos.

Objetivos de Aprendizagem

- Caracterizar um equipamento científico de mensuração.
- Usar o Interferômetro de Michelson como um instrumento de mensuração.
- Usar o Interferômetro de Michelson para medir comprimentos de onda desconhecidos.

Procedimento Experimental

Os experimentos mostrados nos vídeos foram feitos usando os interferômetros disponíveis no laboratório de ótica, como mostrados na Figura 1. Foram feitos 2 experimentos. No primeiro deles incidimos um laser de He-Ne (Hélio-Neônio) com comprimento de onda igual a $(632,8 \pm 0,5)$ nm sobre o interferômetro já alinhado e projetamos o feixe de saída sobre uma parede branca. No segundo experimento, incidimos uma lâmpada de sódio sobre o interferômetro e medimos o campo diretamente refletido por dos espelhos. Em ambos os casos, usamos um motor ligado a um parafuso micrométrico com precisão de $10 \mu\text{m}$ por marcação para mover um dos espelhos. Monitoramos em vídeo tanto a intensidade luminosa¹ quanto a posição do parafuso micrométrico. Os vídeos estão disponíveis nos seguintes links:

1. Vídeo Introdutório à montagem: [link](#).

¹Projetada na parede no primeiro experimento e medida diretamente no segundo experimento.

2. Vídeo do experimento com o laser de Hélio-Neônio (HeNe): [link](#). Neste vídeo são feitas **três** medidas em sequência e que correspondem a três regiões do parafuso micrométrico (com os momentos aproximados de início e fim indicados no vídeo). Inclusive é possível ver o parafuso micrométrico ser movido à mão entre as medidas.
3. Vídeo do experimento com a lâmpada de vapor de sódio: [link](#). Neste vídeo, somente uma medida é feita e ela dura um tempo muito longo.

Os dois vídeos dos experimentos não tem qualquer edição entre o início e o final das respectivas medidas. A ideia aqui é trazer a coleta de dados diretamente para vocês. Inclusive é esperado que vocês usem os recursos disponíveis no YouTube para coletar os dados: rodar o vídeo em velocidade mais rápida ou mais lenta, pausá-lo e usar o mouse para avançar ou retroceder conforme necessário.

Detalhes da Montagem

Interferômetros como o disponível no laboratório de F 429 tem um dos espelhos montados sobre uma plataforma controlável e ligada a um parafuso micrométrico (micrômetro). Para aumentar ainda mais a precisão na variação do espelho este é conectado ao micrômetro por uma alavanca como mostrado na Figura 2, que faz com que a variação do parafuso micrométrico seja reduzida. Como a variação de uma franja de interferência corresponde a um deslocamento de meio comprimento de onda na posição do espelho, podemos escrever esta distância como

$$x_e = N \frac{\lambda}{2} = f x_p, \quad \text{com } f < 1, \quad (1)$$

onde x_e e x_p são as distâncias percorridas pelo espelho e pelo parafuso micrométrico respectivamente, f é o *fator de redução da alavanca*, N é o número de franjas que aparecem e λ é o comprimento de onda. Como utilizamos um laser de He-Ne (Hélio-Neônio) com comprimento de onda igual a $(632,8 \pm 0,5)$ nm, a mudança de uma franja clara (escura) para a próxima franja clara (escura) corresponde a uma distância percorrida pelo espelho de aproximadamente 316,4 nm. Usando as expressões em (1), podemos determinar posição do espelho usando 2 métodos: 1) a partir do conhecimento do comprimento de onda e da contagem de franjas e 2) a partir do conhecimento do fator de redução f e da medida do parafuso micrométrico. Para usar o primeiro método é necessário que se saiba λ e para usar o segundo é necessário que se saiba f . Em outras palavras, se dispomos de uma fonte laser com comprimento de onda conhecido, podemos determinar f medindo x_e usando os dois métodos e comparando-os. Consequentemente podemos usar o f caracterizado para determinar o comprimento de onda de uma fonte de luz desconhecida.

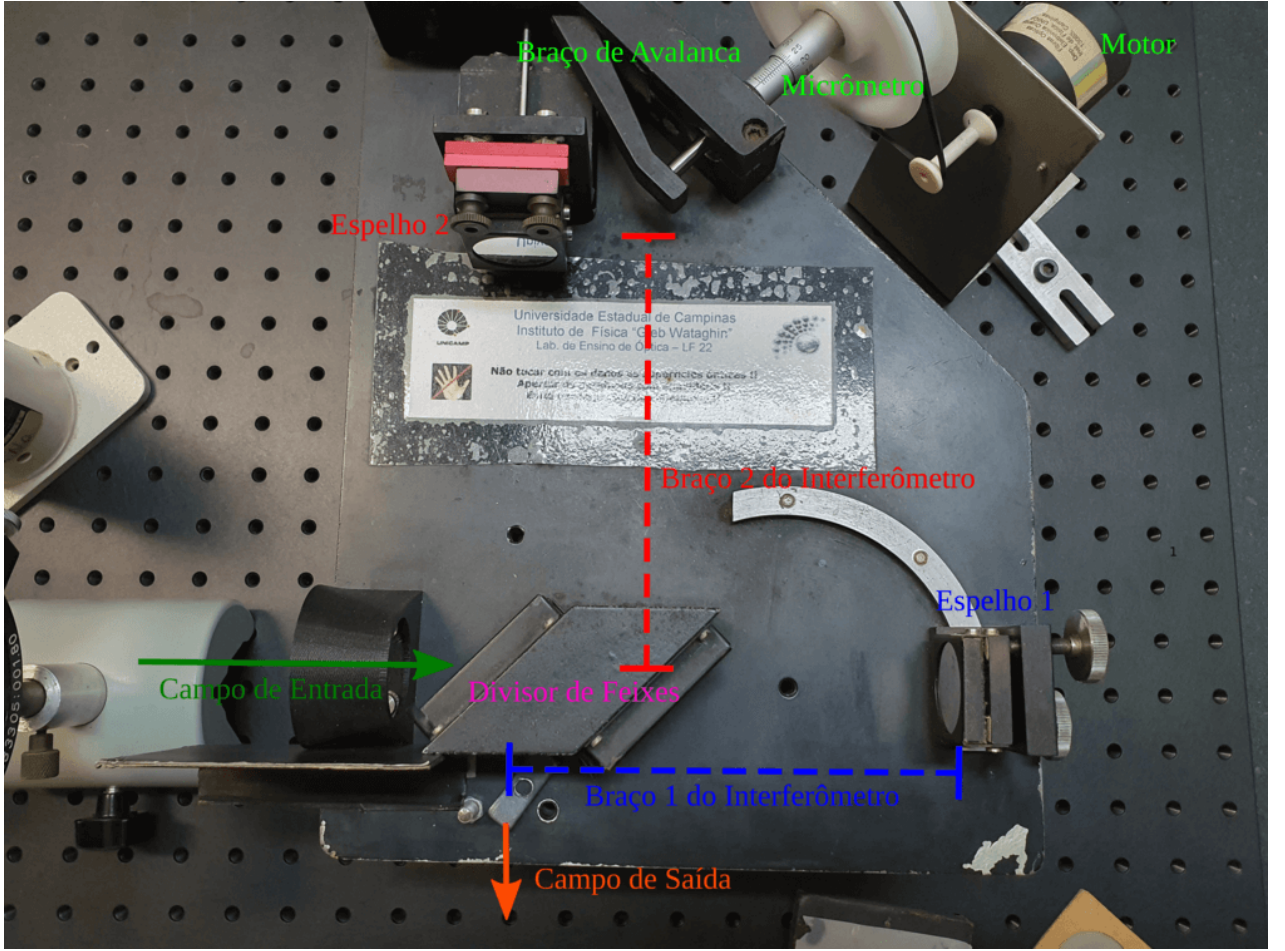


Figura 1: Montagem experimental utilizada. Na foto estão marcadas os principais elementos do interferômetro.

1. Para um comprimento de onda conhecido (λ_A), podemos caracterizar f usando $f = \frac{N_A}{2x_{pA}} \lambda_A$.
2. Após caracterizar f , podemos determinar qualquer comprimento de onda desconhecido (λ_B) usando a expressão $\lambda_B = \frac{2x_{pB}}{N_B} f$.

Note que os fatores $N_A/2x_{pA}$ ou $N_B/2x_{pB}$ são extraídos diretamente da contagem de franjas (medida de N_A e N_B) e da medição no parafuso micrométrico (medida de x_{pA} e x_{pB}).

Em termos de precisão na medida de x_e , esta será multiplicada data pela multiplicação do número de franjas pela precisão de λ caso consideremos que não há incerteza na determinação de N . Em um caso geral, a incerteza relativa de x_e no primeiro método é dada por

$$\frac{\delta x_e}{x_e} = \sqrt{\left(\frac{\delta \lambda}{\lambda}\right)^2 + \left(\frac{\delta N}{N}\right)^2} \quad (2)$$

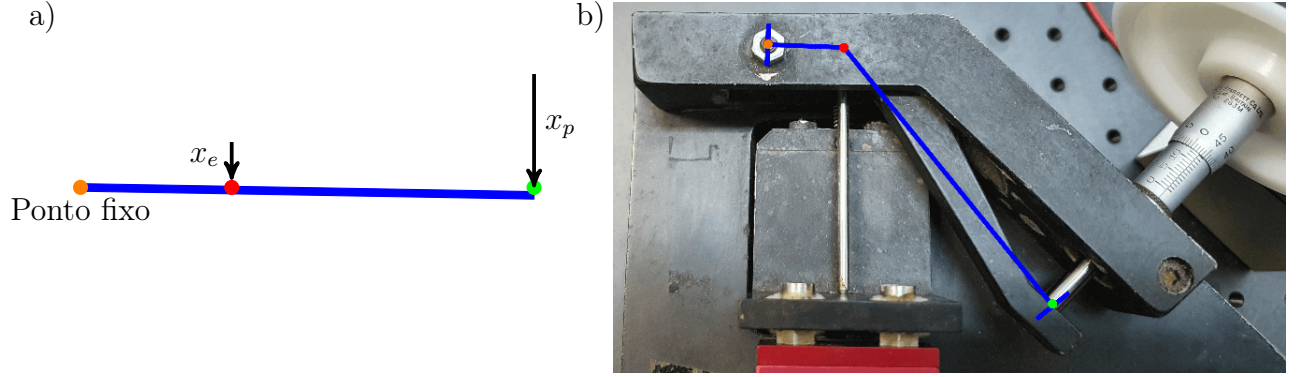


Figura 2: a) Diagrama esquemático do braço de alavanca. O deslocamento do parafuso micrométrico é mostrado à direita (x_p) e o deslocamento do espelho é mostrado à esquerda (x_e). As cores dos círculos representam, da esquerda para a direita, o ponto fixo, a posição do espelho e a posição do parafuso respectivamente. b) Foto da montagem experimental com o braço de alavanca real

onde δN é a precisão na determinação do número de franjas e $\delta\lambda = 1 \text{ nm}$ é a incerteza no comprimento de onda. Para o segundo método, a precisão de x_e será igual à precisão de x_p reduzida pelo fator f se assumirmos que a incerteza em f é desprezível. Em um caso geral, a incerteza relativa de x_e para o segundo método será dada por

$$\frac{\delta x_e}{x_e} = \sqrt{\left(\frac{\delta x_p}{x_p}\right)^2 + \left(\frac{\delta f}{f}\right)^2} \quad (3)$$

onde δf é a precisão na determinação de f e $\delta x_p = 10 \mu\text{m}$ é a precisão do parafuso micrométrico. Note que tanto f quanto λ são constantes no experimento. Somente podemos variar x_p , o que irá variar indiretamente N .

Caracterização do Interferômetro

- Nesta parte, use o vídeo para caracterizar o fator de redução, inclusive sua incerteza.
- Procure formas de melhorar a precisão desta caracterização.

Medição de Comprimentos de onda Desconhecidos

- Nesta segunda parte, use o fator de redução e o respectivo vídeo para estimar ambos os comprimentos de onda que formam o dubleto do sódio, inclusive as suas respectivas incertezas.
- Procure formas de melhorar a precisão das quantidades medidas.

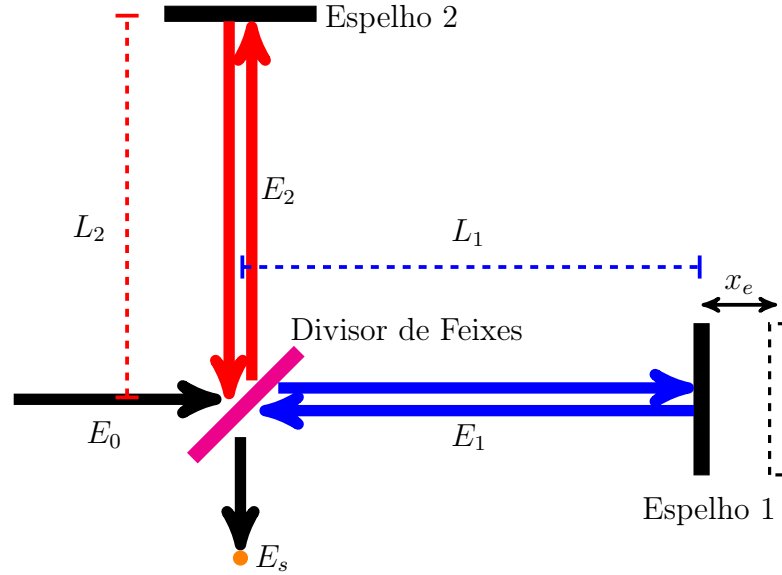


Figura 3: Diagrama Esquemático do Interferômetro de Michelson: o feixe de entrada E_0 é separado em 2 pelo divisor de feixes (campos E_1 e E_2). Cada uma destas duas partes é refletida pelos espelhos 1 e 2 de volta para o divisor de feixes. Os campos E_1 e E_2 são então recombinaos no divisor de feixes após terem se propagado pelas distâncias L_1 e L_2 respectivamente. Também é mostrado a variação na posição do espelho 1 como x . Note que as cores utilizadas para os campos são meramente ilustrativas, no mundo real, todos eles oscilam com a mesma frequência. Consequentemente, caso esta esteja espectro visível, todos os campos terão a mesma cor.

Apêndice - Teoria do Interferômetro de Michelson

O interferômetro de Michelson é composto por um divisor de feixes² e dois espelhos arranjados como mostrado na Figura 3. A luz que incide no divisor de feixe é separada em duas partes que são enviadas a dois espelhos e refletidas de volta para serem misturadas novamente no divisor de feixes. Na notação complexa, o campo elétrico que compõe um feixe de luz com frente de onda plana e que se propaga na direção z sem sofrer perdas pode ser escrito como

$$E(z, t) = A_0 e^{i(\beta z - \omega t)} \quad (4)$$

onde ω é a *frequência angular* de oscilação do campo e $\beta = 2\pi n/\lambda$ é a *constante de propagação*, com n sendo o índice de refração do meio³ e λ o *comprimento de onda no vácuo*. A constante $A_0 = |A_0| e^{i\phi_0}$ onde $|A_0|$ é a amplitude do campo elétrico e $e^{i\phi_0}$ é a sua fase.

O campo elétrico logo antes do divisor de feixes será descrito como $E_0 = E(0, t)$. Caso o

²Espelho parcialmente refletor.

³Como a propagação ocorre no ar, iremos considerar que $n \approx 1$ no restante do roteiro.

divisor de feixes tenha de coeficiente de reflexão igual a R e seja ideal⁴, os campos logo após a primeira passagem pelo divisor de feixes são iguais a $E_1(0) = \sqrt{T} E_0$ e $E_2(0) = \sqrt{R} E_0$, onde T é o coeficiente de reflexão. Como os dois braços do interferômetro tem comprimentos tipicamente diferentes, chamados de L_1 e L_2 na figura 3, os campos E_1 e E_2 irão ganhar uma fase diferente à medida que se propagam a partir do divisor de feixes em direção ao respectivo espelho e são refletidos de volta. Desta forma, os campos E_1 e E_2 logo antes da segunda passagem pelo divisor de feixes são dados por

$$E_1(2L_1) = \sqrt{T} E_0 e^{2i\beta L_1} \quad \text{e} \quad E_2(2L_2) = \sqrt{R} E_0 e^{2i\beta L_2}, \quad (5)$$

Como os campos são misturados na segunda passagem pelo divisor de feixes, é neste ponto que ocorre a interferência. Esta mistura dará origem a dois feixes de luz sendo que um deles volta sobre o feixe incidente. O segundo feixe é mostrado na Figura 3 e se propaga em direção ao ponto S marcado em laranja na Figura 3. O campo logo após o divisor de feixes é dado por

$$E_{bs} = \sqrt{T} E_2(2L_2) - \sqrt{R} E_1(2L_1) = 2i\sqrt{RT} e^{i\beta(L_1+L_2)} \sin(\beta\Delta L) E_0 \quad (6)$$

onde $\Delta L = L_2 - L_1$ é a diferença de comprimento entre os braços. O feixe de luz que chega ao ponto S é o campo E_{bs} com uma fase adicional devido à propagação entre o divisor de feixes e o detector, $E_S = E_{bs} e^{i\beta L_D}$. Como a intensidade é proporcional ao módulo quadrado do campo elétrico, a intensidade no ponto S se torna,

$$I_s = K |E_S|^2 = K 4RT \sin^2(\beta\Delta L) |E_0|^2 = 4RT \sin^2(\beta\Delta L) I_0 \quad (7)$$

onde K é uma constante de proporcionalidade que foi incorporada I_0 . Note que a intensidade é nula quando $\Delta L = 0$. Isto ocorre porque o campo E_{bs} ganha uma fase extra de 180 graus introduzida pelo divisor de feixes em uma das reflexões⁵. Por este motivo, a luz que vai em direção ao ponto S sofre interferência *destrutiva* caso a diferença de caminho ($2\Delta L$) seja um múltiplo inteiro do comprimento de onda. Note também, que a distância (L_D) entre o divisor de feixes e o detector não é importante para a intensidade. Isto ocorre, pois estamos assumindo que: 1) não há perdas por propagação e 2) a frente de onda é plana. Caso haja perdas por propagação, a

⁴O que significa que toda a luz não refletida foi transmitida ($T = 1 - R$).

⁵Para um divisor de feixes simples, formado por um bloco de material com índice de refração maior que o do ar, esta fase ocorre por causa da diferença dos índices de refração em ambos os materiais. Na interface entre eles ocorrerá uma reflexão de Fresnel: quando a luz refletida parte do lado de índice maior, a sua fase é mantida na reflexão, quando este parte do lado de índice menor, a luz ganha uma fase de 180 graus. Em um divisor de feixes mais sofisticado, esta fase também irá aparecer e pode ser derivada a partir do princípio da conservação de energia.

potência da luz ficará cada vez mais fraca quando maior for L_D , o que conseqüentemente reduz a intensidade. Caso a frente de onda não seja plana, ela irá de expandir à medida que se propaga, fazendo com que a potência ocupe uma área maior, o que também reduz a intensidade. Neste último caso, também ocorre que pontos pertencentes a diferentes frentes de onda retornam ao divisor de feixes ao mesmo tempo após a propagação pelo interferômetro. Neste caso, o campo no centro da frente de onda chegará antes que o campo nas suas extremidades, como mostrado na Figura 4. Conseqüentemente, eles percorrerão distâncias diferentes antes de se recombinarem no divisor de feixes. Em outras palavras, caso a intensidade I_S seja observada por espalhamento em um anteparo, como é feita no curso de F 429, a intensidade pode conter regiões de interferência construtiva e destrutiva lado a lado como mostrado na Figura 4

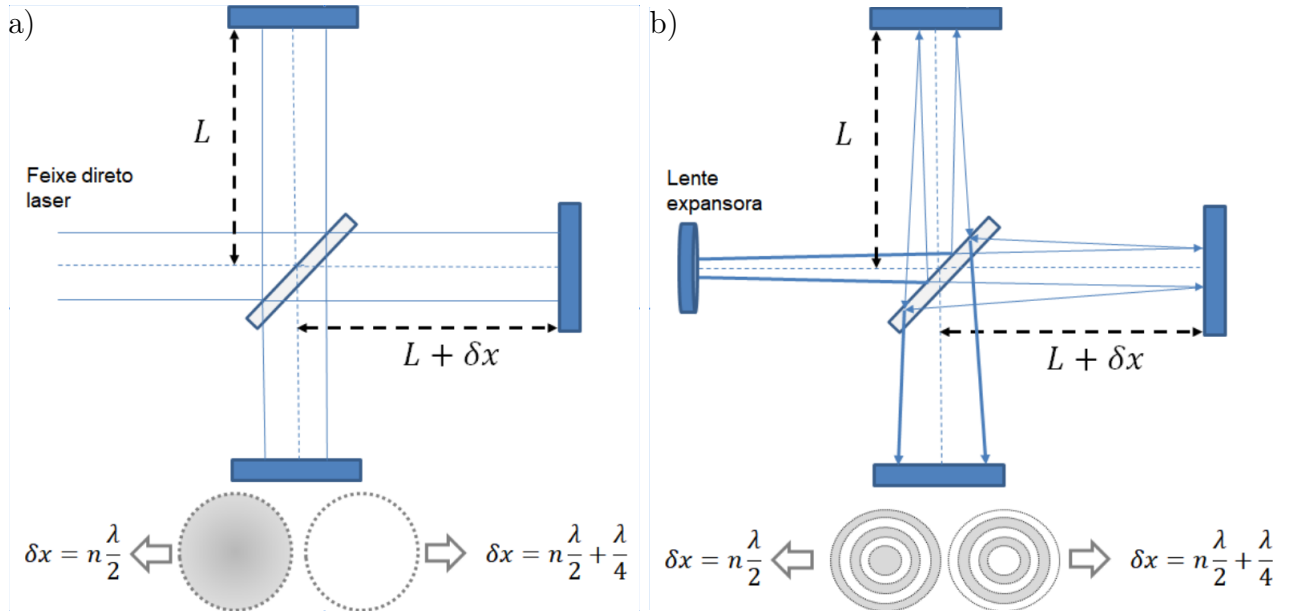


Figura 4: Comparação de Interferômetros de Michelson iluminados por fontes de luz diferentes: a) com onda plana b) frente de onda se expandindo.

Para associar o interferômetro da Figura 3 com o que usaremos no nosso experimento, considere que a diferença de caminho entre os braços é dada por uma componente fixa e outra que podemos variar: $\Delta L = \Delta L_0 + x_e$. Neste caso, a intensidade no ponto S é dada por

$$I_S = \sin^2 \left(2\pi \frac{x_e}{\lambda} + \frac{\phi_0}{2} \right) I_0 = \frac{1}{2} \left[1 - \cos \left(2\pi \frac{2x_e}{\lambda} + \phi_0 \right) \right] I_0, \quad \text{com} \quad \phi_0 = 2\beta \Delta L_0 \quad (8)$$

onde já assumimos que $R = T = 1/2$. A equação anterior é uma senóide com período igual a $\lambda/2$. Isto significa que a distância percorrida pelo espelho está associada ao comprimento de onda do

laser e ao número de franjas de interferência observadas durante a variação da posição por

$$x_e = N \frac{\lambda}{2}, \quad (9)$$

onde N é o número de franjas observadas enquanto o espelho se move pela distância x_e .

Interferômetro com 2 Comprimentos de Onda

Na discussão até aqui, a exponencial $e^{i\omega t}$ foi ignorada, pois ela aparecia implicitamente no campo E_0 e conseqüentemente em todos os outros campos. A sua presença também não contribui para a intensidade, pois ela tem módulo unitário. Quanto temos mais de um comprimento de onda, ou seja, mais de uma frequência de oscilação, haverá uma superposição das diversas componentes de frequência. Por exemplo, para 2 frequências, o campo elétrico é dado por

$$E(z, t) = A_A e^{i(\beta_A z - \omega_A t)} + A_B e^{i(\beta_B z - \omega_B t)} \quad (10)$$

Como os componentes do interferômetro são lineares⁶ e independentes da frequência⁷, o interferômetro irá atuar nas componentes de frequência angular ω_A e ω_B de forma independente. Portanto, o campo final no ponto S será similar ao calculado para o caso de um comprimento de onda, porém com duas contribuições,

$$E_S = 2i\sqrt{RT} \left[e^{i(\beta_A \tilde{L} - \omega_A t)} \sin(\beta_A \Delta L) A_A + e^{i(\beta_B \tilde{L} - \omega_B t)} \sin(\beta_B \Delta L) A_B \right] \quad (11)$$

onde $\tilde{L} = L_1 + L_2 + L_D$. Como anteriormente a intensidade será proporcional ao módulo quadrado desta quantidade do campo, $I_S = K |E_S|^2$, de modo que

$$I_S = 4RT \left[\sin^2(\beta_A \Delta L) I_A + \sin^2(\beta_B \Delta L) I_B + 2\sqrt{I_A I_B} \operatorname{Re} \left(e^{i(\beta_A - \beta_B) \tilde{L}} e^{-i(\omega_A - \omega_B)t} e^{i(\phi_A - \phi_B)} \right) \right]$$

onde $I_A = K |A_A|^2$ e $I_B = K |A_B|^2$ são as intensidades dos campos que oscilam com frequência angular ω_A e ω_B . Note que a expressão derivada para intensidade I_S depende do tempo e tem periodicidade temporal dada por $T = 2\pi/(\omega_A - \omega_B)$ ⁸. Esta é uma característica da intensidade da luz quando esta é formada por mais de uma componente de frequência. Entretanto, o mesmo

⁶Isto significa que não há acoplamento entre componentes de frequência distintas.

⁷Isto significa que os coeficientes de reflexão e transmissão assim como o índice de refração são os mesmos para as frequências angulares ω_A e ω_B .

⁸O fato de este termo ser relevante não significa que possamos medi-lo diretamente. Para este exemplo em particular, $T^{-1} = 500 \text{ GHz}$. O que está significativamente além da região acessível por qualquer fotodetector conhecido.

termo que possui dependência temporal, também depende da diferença de fase entre as duas fontes de luz. Quando esta diferença de fase é bem determinada, este termo de dependência temporal se torna relevante e pode ser bastante importante para criação de luz pulsada. Entretanto, quanto esta diferença de fase é aleatória, como ocorre no nosso caso, este termo se anula para tempos longos⁹. Esta aleatoriedade de fase leva a uma *superposição incoerente* e a intensidade resultante se torna simplesmente a soma das intensidades de cada componente. Caso a intensidade de cada uma das linhas seja igual, $I_A = I_B = I_0/2$, a intensidade no ponto S é dada por

$$I_S = 2 RT [\sin^2(\beta_A \Delta L) + \sin^2(\beta_B \Delta L)] I_0 \quad (12)$$

$$= 2 RT \left\{ 1 - \frac{1}{2} [\cos(2\beta_A \Delta L) + \cos(2\beta_B \Delta L)] \right\} I_0 \quad (13)$$

$$= 2 RT \{ 1 - \cos[(\beta_A + \beta_B) \Delta L] \cos[(\beta_A - \beta_B) \Delta L] \} I_0 \quad (14)$$

Vamos considerar $R = T = 1/2$ e substituir $\beta_A = 2\pi/\lambda_A$, $\beta_B = 2\pi/\lambda_B$ e $\Delta L = \Delta L_0 + x_e$, como foi feito para o caso com um comprimento de onda, para obter

$$I_S = \frac{1}{2} \left[1 - \cos\left(2\pi \frac{x_e}{\lambda_m} + \phi_0\right) \cos\left(2\pi \frac{x_e}{\Lambda} + \phi_1\right) \right] I_0 \quad (15)$$

$$\text{onde} \quad \frac{2}{\lambda_m} = \frac{1}{\lambda_A} + \frac{1}{\lambda_B} \quad \text{e} \quad \frac{1}{\Lambda} = \frac{1}{\lambda_A} - \frac{1}{\lambda_B} \quad (16)$$

Note que diferentemente do que ocorre para um comprimento de onda, neste caso há duas periodicidades espaciais: a primeira delas dada pela média harmônica entre os dois comprimentos de onda (λ_m) e a segunda dada por Λ . Caso, $\lambda_A \approx \lambda_B$, estas duas periodicidades serão bem diferentes. A primeira é bem próxima da periodicidade do interferômetro para cada um dos comprimentos de onda ($\lambda_m \approx \lambda_A \approx \lambda_B$). A segunda será muito maior que cada um dos comprimentos de onda, pois $|\Lambda| \ll \lambda_m$. Em outras palavras, a senóide com periodicidade Λ funcionará como um *envelope*. Além disso, a caracterização experimental de λ_m e de Λ corresponde a uma caracterização de λ_A e λ_B devido às relações (16).

A medição de λ_m segue os mesmos princípios usados para o caso de um comprimento de onda,

$$x_e = N \frac{\lambda_m}{2}, \quad (17)$$

onde N é o número de franjas observadas enquanto o espelho se move pela distância x_e . Já a

⁹O termo longo aqui é dado em relação à escala de tempo desta aleatoriedade de fase, que para a luz que iremos usar é da ordem de picosegundos.

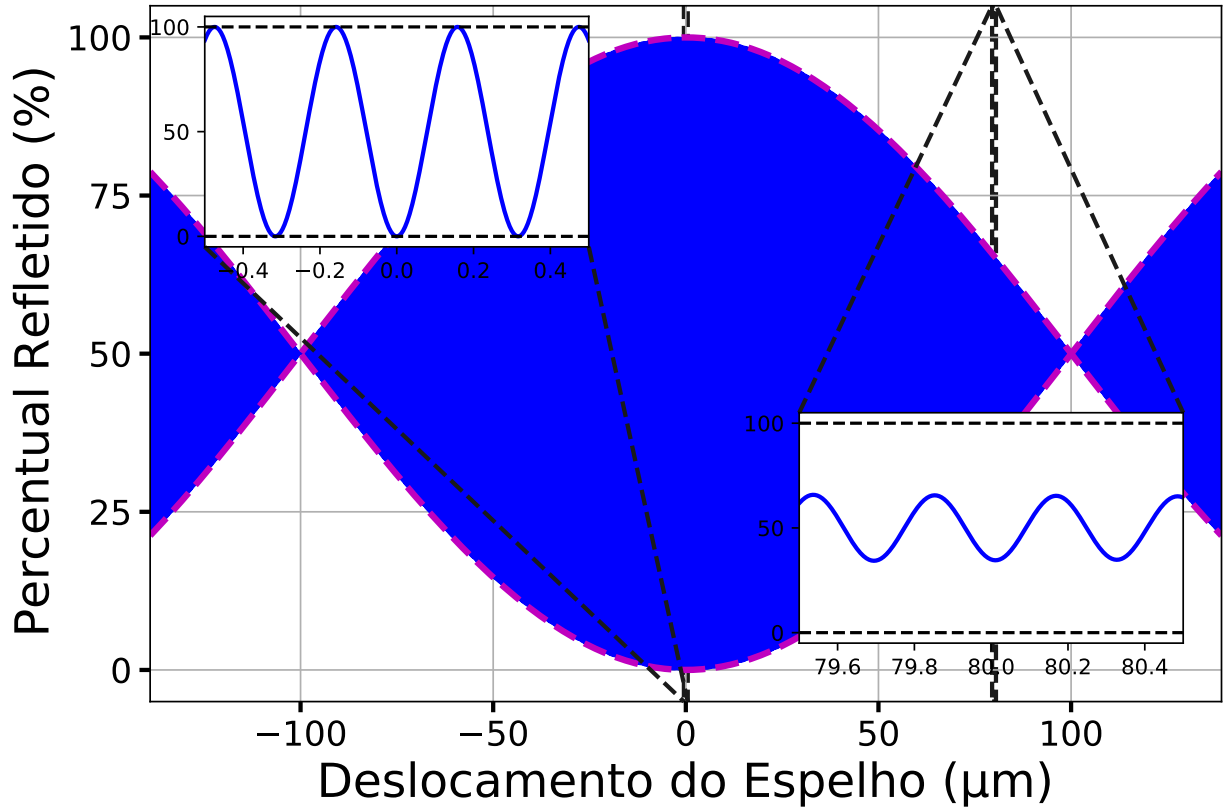


Figura 5: Curva do Batimento para a luz nos comprimentos de onda de 632 nm e 633 nm. Ambos os *insets* correspondem a um zoom de 1 micrômetro nos pontos marcados. A curva tracejada em magenta corresponde à curva do envelope, traçada ligando os picos e os vales da curva em azul. Os nós da figura de batimento ocorrem quando as duas curvas tracejadas se cruzam.

medida de Λ pode ser feita observando a distância entre os picos/vales do envelope ou entre os nós. Esta distância corresponde a meio período da senóide com periodicidade Λ . Em outras palavras, a distância percorrida pelo espelho entre dois nós consecutivos (x'_e) é igual a $\Lambda/2$.