Projeto 03 - Anel Carregado

Equipe Donner

Diogo Silva, Guilherme Shimada, Leonardo Vieira, Lucca Miranda, Pedro Azevedo

17 de Novembro, 2021

Resumo

Este artigo apresenta uma discussão teórica a respeito do comportamento de um anel de material isolante carregado e imerso em um campo magnético variável. Para esse propósito, apresentaremos equações que descrevem esse corpo no ambiente em questão, a fim de compreender de uma melhor maneira a física do experimento analisado.

Palavras-chave: anel carregado, rotação, momento angular, campo magnético, solenoide.

1 Introdução

Na configuração inicial da situação que nos propomos estudar, existe um anel de raio r fabricado com material isolante que está carregado com uma densidade linear de carga uniforme e total q. O mesmo encontra-se em repouso, podendo girar em torno do seu eixo de simetria Z. Na mesma direção desse eixo, encontra-se um campo magnético constante B_{ext} gerado por um solenóide infinito com raio $b \gg r$. Eventualmente interrompe-se a corrente que passa pelo solenóide, induzindo um campo elétrico no eixo de simetria, tangencial ao anel.

A partir de uma modelagem matemática dessa situação com as equações adquiridas no decorrer da disciplina de Física Teórica III, avaliamos se o anel irá girar em torno do seu eixo após a interrupção do fluxo de corrente.

2 Metodologia

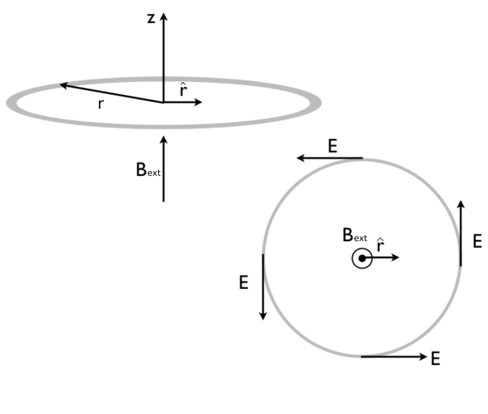
2.1 O anel gira ou não gira?

Quando a corrente é interrompida, o fluxo magnético sobre o anel vai de $\Phi_{Bi} = B_{\text{ext}}\pi r^2$ para $\Phi_{Bf} = 0$. Isso significa que o fluxo magnético se altera mediante o tempo, provocando o surgimento de uma tensão induzida ao redor do anel, de acordo com a Lei de Faraday:

$$\frac{d\Phi_B}{dt} = -\Delta V = \oint_{\text{anel}} \vec{E} \cdot d\vec{l}. \tag{1}$$

Onde há tensão elétrica, certamente há também campo elétrico. Como o campo B_{ext} era constante na direção axial, o campo elétrico que surge tem formato circular (pense na "Regra da Mão da Direita"!), conforme a figura abaixo.

Figura 1 – Campo elétrico tangente ao anel



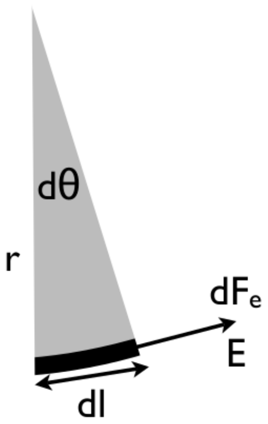
Fonte: LECLAIR, 2008

Como dito na Introdução, o anel tem um total de carga q uniformemente distribuído em seu comprimento $2\pi r$, então a densidade linear de carga é $\lambda = q/(2\pi r)$ e, portanto, um elemento infinitesimal de carga é $dq = \lambda dl$. Essa notação nos permite descrever a força elétrica $d\vec{F}_e$ que surge em resposta ao campo elétrico presente em cada elemento infinitesimal de comprimento do anel como

$$d\vec{F}_e = dq\vec{E} = \lambda dl\vec{E}. \tag{2}$$

A fim de facilitar uma compreensão mais intuitiva dessa equação (e das seguintes), incluímos uma ilustração dos elementos infinitesimais de ângulo, comprimento, e força.

Figura 2 – Elementos infinitesimais



Fonte: LECLAIR, 2008

Essa figura ajuda a perceber que o campo elétrico tangente ao anel segue a igualdade $\vec{E} = E\hat{\theta}$, onde $\hat{\theta}$ é o versor no sentido em que o ângulo interno ao anel aumenta, logo

$$d\vec{F}_e = \lambda dl E\hat{\theta}. \tag{3}$$

A partir disso, calculamos o torque em cada elemento de comprimento do anel. Como o fulcro está no centro no anel, o braço do torque equivale ao raio $\vec{r}$ do anel, então o elemento de torque é

$$d\vec{\tau} = \vec{r} \times d\vec{F} \tag{4}$$

$$\Rightarrow d\vec{\tau} = (r\hat{r}) \times \left(\lambda dl E\hat{\theta}\right) \tag{5}$$

$$\Rightarrow d\vec{\tau} = \lambda r dl E\left(\hat{r} \times \hat{\theta}\right). \tag{6}$$

Pela "Regra da Mão Direita", o produto vetorial da equação 6 equivale a $\hat{z}$ (isso é mais fácil de perceber se você der um "tapa" com a mão direita, do versor $\hat{r}$ para um dos vetores $\vec{E}$ na figura 2.1), então o elemento de torque é

$$\Rightarrow d\vec{\tau} = \lambda r dl E\hat{z}, \tag{7}$$

e, portanto, o torque no anel inteiro é

$$\vec{\tau} = \oint_{\text{anel}} d\vec{\tau} = \lambda r\left(\oint_{\text{anel}} dlE\right)\hat{z}. \tag{8}$$

Como o campo elétrico é tangencial, $d\vec{l} \parallel \vec{E}$ em todo o anel. Por esse motivo temos $dlE = d\vec{l} \cdot \vec{E}$, então

$$\vec{\tau} = \lambda r\left(\oint_{\text{anel}} d\vec{l} \cdot \vec{E}\right)\hat{z}, \tag{9}$$

que pela Lei de Faraday (vide equação 2) é

$$\vec{\tau} = (\lambda r\Delta V)\,\hat{z} \tag{10}$$

Dúvida: o resultado dessa integral não deveria ser $-\Delta V$? A Lei de Faraday (como expressa na equação 2) nos leva a esse resultado, mas a fonte que usamos para compor nossa resolução (LECLAIR, 2008) indicou ΔV como resultado da integral. Isso está relacionado a direção do campo elétrico?

$$\Rightarrow \vec{\tau} = \left(\frac{q}{2\pi\cancel{r}}\cancel{r}\Delta V\right)\hat{z} = \left(\frac{q\Delta V}{2\pi}\right)\hat{z} \tag{11}$$

Agora que ajeitamos todas as direções, podemos substituir a notação vetorial pela notação escalar obtendo a equação

$$\tau = \left(\frac{q\Delta V}{2\pi}\right), \tag{12}$$

que, pela Lei de Faraday, equivale a

$$\tau = -\left(\frac{q}{2\pi}\right)\frac{d\Phi_B}{dt}. \tag{13}$$

Note que $q \neq 0$ e $\Delta V \neq 0$, então o torque é não-nulo e, portanto, o anel gira.

2.2 Velocidade angular do anel

Pela Segunda Lei de Newton, o torque resultante equivale a derivada temporal do momento angular L, então

$$\tau = \frac{dL}{dt} = -\left(\frac{q}{2\pi}\right)\frac{d\Phi_B}{dt} \tag{14}$$

$$\Rightarrow \int_i^f dL = \int_i^f -\left(\frac{q}{2\pi}\right)d\Phi_B, \tag{15}$$

onde os limites de integração i e f representam os instantes imediatamente anterior e posterior ao desligamento da corrente do solenoide, respectivamente. Resolvendo as integrais da equação 15, obtemos

$$L_f - L_i = \frac{q}{2\pi}(\Phi_{Bi} - \Phi_{Bf}), \tag{16}$$

onde $L_i = 0$ pois o momento angular inicial é nulo, e $\Phi_{Bf} = 0$ pois o campo magnético é nulo logo após o desligamento da corrente no solenoide. Assim o momento angular final do anel é

$$L_f = \frac{q}{2\pi}\Phi_{Bi} \tag{17}$$

$$\Rightarrow L_f = \frac{q}{2\cancel{\pi}}(B_{\text{ext}}\cancel{\pi}r^2) \tag{18}$$

$$\Rightarrow L_f = \frac{q}{2}(B_{\text{ext}}\ r^2). \tag{19}$$

Sabendo que o momento de inércia I de um anel de raio r e massa m é dado por $I = mr^2$, podemos calcular a velocidade angular ω como

$$\omega = Lf/I = \frac{q}{2}\left(\frac{B_{\text{ext}}\ \cancel{r^2}}{m\cancel{r^2}}\right) \tag{20}$$

$$\Rightarrow \omega = \frac{qB_{\text{ext}}}{2m} \tag{21}$$

2.3 Campo magnético inicial

O momento angular de um único elétron no solenoide é

$$L_{\text{elétron}} = m_e v_e b, \tag{22}$$

onde m_e e v_e são, respectivamente, a massa e a velocidade de um elétron. Assim, o momento angular dos elétrons em uma espira do solenoide é

$$L_{\text{espira}} = (n_e 2\pi b)(m_e V_e b) = n_e 2\pi b^2 m_e v_e, \tag{23}$$

sendo n_e o número de elétrons em uma espira. Por fim, o momento angular do total de elétrons no solenoide é

$$L_{\text{total}} = (N u_a)(2\pi b^2 m_e v_e) \tag{24}$$

$$\frac{L_T}{u_a} = N(2\pi b^2 m_e V_e), \tag{25}$$

em que u_a representa uma unidade de medida arbitrária de comprimento e N representa o número de espiras no solenoide. Disso, temos as seguintes equações:

$$\begin{cases} B_{\text{ext}} = \mu_0 n i \\ i = n_e m_e V_e \\ B_{\text{ext}} = \mu_0 n_e v_e q_e n \end{cases} \tag{26}$$

$$\Rightarrow \frac{L_T}{u_a} = \frac{2\pi b^2}{\mu_0 q_e} B_{\text{ext}}, \tag{27}$$

ou seja, podemos definir uma constante C tal que

$$\frac{L_T}{u_a} = C B_{\text{ext}}. \tag{28}$$

$$\therefore B_{\text{ext}} = \frac{L_T}{u_a C}. \tag{29}$$

3 Resultados e Conclusão

Em primeira instância, é importante ressaltar que o primeiro argumento proposto no enunciada da questão que motivou essa pesquisa está correto e o anel vai girar! Além dessa conclusão, fomos capazes de determinar a velocidade angular do anel, bem como o campo magnético inicial do problema.

Referências

LECLAIR, P. R. *Problem Set 8: Solutions*. [S.l.]: University of Alabama, 2008. Citado na página 2.