UNICAMP

Wilson Castro Ferreira Jr.- *2021-2º Ano da Praga*

Notas de AULA: *ÁLGEBRA LINEAR-*

CAPÍTULO V: TRANSFORMAÇÕES LINEARES & *ISOMORFISMOS*

I-INTRODUÇÃO: *06 Razões Suficientes e uma Razão Mandatória para a Axiomatização Operacional do conceito de Transformação Linear e o seu Estudo*

*A estrutura da Álgebra Linear é uma generalização abstrata do problema de Arquimedes que, originalmente, pode ser descrito por um **cenário** representavel por "incógnitas" $\boldsymbol{x} \in (\mathbb{R}^{+})^{\boldsymbol{n}}$ (as possíveis concentrações dos n ingredientes da coroa) que podem ser compostas segundo a operação de "adição" $\oplus$. A incognita deve ser determinada por **ações exteriores** interpretadas como **Testes** numericamente expressáveis (Volume, Peso,Capacidade térmica,Respostas à incidência de radiações,...etc.) $\boldsymbol{T}: (\mathbb{R}^{+})^{\boldsymbol{n}} = \boldsymbol{E} \to \mathbb{R}^{+}$ cujo resultado $\boldsymbol{Tx}$ consiste em uma informação **parcial** sobre $\boldsymbol{x} \in \boldsymbol{E}$. Supõe-se que o resultado numérico do Teste aplicado à uma composição $\boldsymbol{z} = \boldsymbol{x} \oplus \boldsymbol{y}$ é a soma (numérica) das respostas respectivas quando testadas separadamente, ou seja, o resultado do teste da composição **não acusa interferência** das duas informações. Matematicamente isto significa que*

$$\boldsymbol{T}(\boldsymbol{x} \oplus \boldsymbol{y}) = \boldsymbol{Tx} + \boldsymbol{Ty}$$

o que caracteriza $\boldsymbol{T}$ como um Funcional Aditivo.

*Matematicamente, o cenário é expandido para um contexto mais inclusivo, $\mathbb{R}^{\boldsymbol{n}}$ **(**ou seja, acrescentamos os "números negativos"**) e** a composição $\oplus$ é estendida para a operação natural de soma neste espaço e $\boldsymbol{T}: \mathbb{R}^{\boldsymbol{n}} \to \mathbb{R}$. A expansão binária dos números reais permite dotar $\boldsymbol{T}$ da propriedade **Homogênea** $\boldsymbol{T}(\boldsymbol{\lambda x}) = \boldsymbol{\lambda T x}$ **,** o que expande ainda mais o cenário matemático e amplia as possibilidades de manipulação**,** pois situa o problema na **Álgebra Linear.** Enfim, seguindo uma metodologia usual da Matemática Aplicada, o problema original é **imerso** em um contexto matemático muito mais amplo em que se define uma estrutura matemática a ser utilizada na sua solução. Como o problema foi expandido, novas soluções "espúrias" do problema surgirão, (Concentrações negativas, por exemplo!), mas as soluções desejadas (Concentrações positivas), estão todas incluídas e poderão ser alcançadas neste contexto ampliado por caminhos que não existiam no contexto original.*

Nesta seção apresentaremos 06 Razões "práticas", cada uma delas suficiente para motivar o estudo do cenário matemático descrito acima; já o conceito de Isomorfismo entre Espaços Vetoriais (7) é uma razão "teórica" fundamental para a Teoria da Álgebra Linear.

I.1- *FUNÇÕES ALGÉBRICAS DE PRIMEIRA ORDEM* e os *MODELOS DE PROPORÇÃO*

Ahmés, Liu Hui, Arquimedes, Bhaskara, Fibonacci-Euler....

> ***"****A quinta parte de um enxame de abelhas repousa, Em uma florada de Kadamba, E um terço delas nas flores de Silinda. Três vezes a diferença entre estes dois enxames voou para as flores de Krutaja, Mas uma delas permaneceu atraída pelo perfume de um jasmim em flor. Diga-me Lilavati quantas abelhas havia neste enxame?****"****- Problema proposto na forma*

de um poema pelo matemático hindu Bhaskaracharya à sua filha a quem ele chama de Lilavati (bela menina). (1114-1185 DC).

Os Modelos Matemáticos que utilizam relações de proporções entre medidas ("regras de três") estão presentes nos mais antigos registros da Matemática (Ahmés,Liu Huui,Bhaskara,Arquimedes,Fibonacci e etc).

Os sistemas de equações denominadas "*lineares*" em variáveis numéricas são descritas na literatura clássica desde o século XVII na seguinte forma ***literal*** extensiva (e exaustiva!)

$$
\begin{gathered}
a_{11}x_1 + \cdots . + a_{1n}x_n = b_1 \\
\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots . \\
a_{m1}x_1 + \cdots . + a_{mn}x_n = b_m
\end{gathered}
$$

e tem o seu foco nas variáveis $x_1, \dots . , x_n$ e sua resolução numérica. Esta notação algébrica literal (introduzida por René Descartes[1556-1690] e François Viéte[1541-1603]) foi um grande avanço histórico na Matemática, considerando que problemas práticos representáveis nesta forma já se encontram descritos na forma ***discursiva*** nos hieróglifos egípcios de Ahmés, em tabletes Babilônicos nos textos de Bhaskara, nos textos chineses de Liu Hui e no próprio problema de Arquimedes.(Para avaliar o avanço que a notação matemática literal significou, é interessante ler as passagens contorcionistas de difícil entendimento do texto de G.Cardano-*Ars Magna*, 1545, em que ele resolve equações polinomiais de segundo e terceiro grau na forma ainda discursiva.)

Sob o ponto de vista algébrico e algorítmico o termo mais descritivo para nomear esta classe de equações seria "***Sistema de Equações para Funções de Primeiro Grau/ Ordem***" (em vez de *"Lineares"*), o que enfatizaria uma estrita utilização de operações aritméticas aplicadas à ***primeira potência*** das variáveis, isto é, sem a ocorrência de produtos (interações) entre elas (potencias e multiplicações) e nem termos independentes.

Re-intepretando este problema geral de uma maneira contemporânea (pós sec. XIX), a ênfase e o foco do seu tratamento matemático passa das variáveis literais de Descartes-Viéte ao conceito moderno de ***Função*** $F: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ ($F: \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}^m$) que o representa e o caracteriza sinteticamente na forma vetorial $F(x) = b$ em lugar de um sistema de m equações com n incógnitas, $F_k(x_1, \dots . , x_n) = b_k$ $(1 \leq k \leq m)$.

Equações $F(x) = b$ com funções aritméticas elementares, mas cujas expressões envolvem *produtos das variáveis* $({x_1}^2, x_1^2x_2^3, etc.)$ são notoriamente difíceis de analisar (mesmo numericamente), a começar com as equações polinomiais, $p(x) = a_nx^n + \cdots + a_0 = 0$ para as quais $n = 1, m = 1$. Portanto, é claramente impossível fazer qualquer progresso nesta área geral antes de um bom conhecimento da classe das equações mais simples possíveis dentre elas, isto é, $Lx = b$, definidas por Funções $L: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ cujas expressões aritméticas envolvem apenas o *primeiro grau* das variáveis, ou seja $L_k(x_1, \dots . , x_n) = c_{k1}x_1 + \cdots + c_{kn}x_n = b_k$.

Um último avanço conceitual com respeito às equações deste tipo ocorreu recentemente (meados do sec.XX) quando a mesma classe de problemas tratada por Ahmés, Liu Hui, Baskhara, Arquimedes e outros luminares toma a forma matricial $Ax = b$, em que o foco é inteiramente dirigido ao *operador* A .Nesta nova abordagem as matrizes passam a ser consideradas, não apenas como tabelas numéricas, mas como um *objeto matemático* pertencente a uma Estrutura Matemática (Álgebra) em que operações (soma, produto, produto interno etc.) são definidas. Este é o ponto de vista ***operacional*** que será o tema deste texto de agora em diante. (É importante mencionar a influencia da Teoria Quântica desenvolvida segundo W.Heisenberg, P. Dirac e J.von Neumann na introdução e consolidação do formalismo operacional em Matemática).

Além desta motivação teórica e formal, é notório que a classe de sistemas de equações lineares representa diretamente inúmeras e importantes questões de origem prática e Modelos Matemáticos relevantes.

A importância da classe de ***funções numéricas de primeiro grau*** e suas mais variadas ocorrências em Matemática e suas Aplicações assim como a riqueza e eficiência de seus métodos específicos, resultou em uma busca natural de um contexto mais geral e apropriado em que se pudesse identificar suas propriedades operacionais básicas e, com isto, organizar teoricamente seus Princípios fundamentais em uma estrutura abstrata que possibilitasse a sua aplicação mais ampla. Para isto, será definido Axiomaticamente o conceito de ***Transformação Linear*** com domínio em um Espaço Vetorial abstrato na seção II.

I.2-O UNIVERSO INFINITESIMAL É "*LOCALMENTE PLANO*" : *A Aproximação "linear" de Leibniz e os Fundamentos do Cálculo*

"O Universo Infinitesimal é Localmente Plano ("Flat") e nele as relações entre as suas medidas são meras proporções, isto é, obedecem a simples "Regras de três" . O mesmo ocorre com o tempo, em que tudo é estático ou quase-Instantâneo. Como a vida é efêmera e se passa em uma pequena aldeia, raramente também abandono a 'regra de proporção'". Anônimo

As curvas na Geometria Euclideana são consideradas como sequencias de pequenos segmentos ("infinitesimais", ou "invisíveis") assim como as superfícies são consideradas como formadas por pequenos fragmentos planos. O movimento de uma partícula é considerado como uma sequencia de deslocamentos retilíneos *infinitesimais* e os nascimentos e mortes em uma população durante um pequeno intervalo de tempo é proporcional ao número de indivíduos. O Cálculo Diferencial, especialmente segundo a concepção de Leibniz, estuda modificações infinitesimais das variáveis x e y pelos símbolos dx , dy e utiliza apenas relações proprocionais entre eles, as derivadas. As Teorias sobre fenômenos naturais e suas aplicações são construídas a partir de teorias expressas *localmente*/infinitesimalmente na forma de proporções e o instrumento matemático para realizar esta transição para o "*macroscópico*" é o Cálculo. O Cálculo Diferencial utiliza relações proporcionais entre fragmentos locais (os *elementos infinitesimais*) para representa-las macroscopicamente como *derivadas*. O Cálculo Integral, por sua vez, "*soma"* elementos locais *infinitesimais* e produz medidas "macroscópicas". Enfim, o Cálculo é completamente baseado nas funções de primeiro grau.

De fato, o Calculo Diferencial surgiu e está baseado completamente na possibilidade de aproximar localmente Funções de interesse por funções de primeiro grau (relacionada à idéia de derivada) , que, no caso de uma variável é graficamente representada por uma reta. No caso de funções de várias variáveis a aproximação local prevista pelo Calculo se dá com funções de primeiro grau, $L: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$, ou seja, diz-se que uma função $\varphi: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ é diferenciável em um ponto $a \in \mathbb{R}^n$ se admite uma aproximação local da forma: $\varphi(a+h) = \varphi(a) + L(h) + \varepsilon(h)\|h\|$, onde $\varepsilon(h) \to 0 \; com \; h \to 0$, e L é de primeiro grau cujos coeficientes o Teorema de Jacobi nos informa que são dados pelas derivadas parciais , $A_{jk} = \frac{\partial \varphi_j}{\partial x_k}(a)$. Em termos da linguagem original de Leibniz, a variação dy_j do valor da variável dependente y_j em termos das variações dx_k infinitesimais das variáveis independentes x_k é infinitesimal e proporcional a estas últimas: $dy_j = \sum_{k=1}^{n} A_{jk} dx_k$. Em notação contemporânea, escreveríamos a expressão de Leibniz sucintamente na forma $dy = Adx$. (Para uma recordação destes temas de Cálculo elementar de várias variáveis, é recomendável a consulta a um bom texto sobre o assunto, de preferência um que seja também excelente, como os já citados R.Courant, P.Lax).

Assim as funções de primeiro grau $L: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$, sendo exemplos principais de Funções Lineares, assumem um papel de grande importância, uma vez que o Cálculo permite reduzir o estudo de uma enorme classe de funções gerais (as diferenciáveis) ao estudo de vizinhanças locais em que tudo é ***Plano*** ("flat") e todas as relações são "proporções".

É importante ressaltar que o termo "*infinitesimal*" é matemático e técnico e não físico, isto é, vizinhanças locais não são "pequenas" em escala absoluta. Por exemplo, a planitude da Terra é uma boa hipótese para a maioria dos afazeres humanos assim como a trajetória luminosa retilínea em meios homogêneos é uma excelente hipótese de trabalho, exceto para a cosmologia.

A caracterização ***operacional*** destas funções (em lugar da sua definição como expressões de primeiro grau nas variáveis) é facilmente axiomatizada com as duas seguintes propriedades: **1)-**$\boldsymbol{Aditividade}$: $- L(u+v) = L(u) + L(v)$ e **2)-**$\boldsymbol{Homogeneidade}$: $L(\lambda u) = \lambda L(u)$. Os Exercícios seguintes demonstram este fato.

Exercícios:

-Mostre que as funções de primeiro grau $L: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ satisfazem as propriedades de **1)**Aditividade e de **2**)Homogeneidade.

-Mostre que, reciprocamente, se uma função $L: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ satisfaz as duas propriedades **1)** e **2)** então ela é de primeiro grau.

I.3-ORIGENS INSTRUMENTAIS: *Superposição&Decomposição de Sinais não Interativos*

Em Física e Engenharia o *Principio de Superposição* é utilizado amplamente no estudo de experimentos que analisam as respostas ("output") mensuráveis de algum sistema (ou instrumento) a perturbações ou estímulos ("input") que são alimentados a este mesmo sistema. Tanto os estímulos quanto as respostas neste contexto são ***sinais*** representados, em geral, por intermédio de funções que podem, portanto, ser encaradas como elementos de algum espaço vetorial funcional. O termo ***Superposição*** neste contexto se refere a alguma operação de "***mistura***"' (associativa) de dois sinais para a produção de outro sinal que denominaremos "soma". A utilidade desta operação resulta da possibilidade de construção e decomposição de sinais "complexos" como somas de sinais "elementares".

A hipótese fundamental do Principio de Superposição é de que um estímulo constituído da "superposição" de dois estímulos componentes produz uma resposta que consiste também da "superposição" entre as duas respostas às respectivas componentes. Esse fato é de importância notável porque o conhecimento das respostas para uma "base" de estímulos simples permite o conhecimento imediato para a resposta de todos os estímulos "gerados" (compostos) por esta base e que pode abranger sinais de grande complexidade e, por fim, todos os sinais que interessam tratar. E vice-versa, sinais de grande complexidade terão também a suas respostas conhecidas se for possível decompô-los como superposições de sinais mais simples, para os quais são conhecidas as respectivas respostas. A idéia que fundamenta este cenário é a hipótese de que, durante o processamento de um sinal *composto* os sinais *básicos* que o compõe são processados *sem interação* entre eles. Isto é, o sistema processa os sinais básicos independentemente, isto é, sem ***interação*** (***interferência***) entre eles. Assim, cada um dos estímulos pode ser simultaneamente alimentado e será processado independentemente. Isto resulta no fato de que a resposta do sistema a um estímulo composto por uma soma de estímulos consiste na soma dos efeitos produzidos por cada um separadamente. A obtenção de um procedimento de superposição para a qual não ocorra interferência entre sinais durante o seu processamento pelo sistema é um passo fundamental para a descrição de seu funcionamento geral. Sob o ponto de vista matemático, o conceito de Principio de Superposição para Operações T sobre Sinais/Estímulos pertencentes a um Espaço Vetorial E e com respostas em outro Espaço R, $T: E \to R$, pode ser traduzido sucintamente na seguinte propriedade: $T(u+v) = Tu + Tv$ para todos os $u, v \in E$. Em termos matemáticos, portanto, o Principio de Superposição é equivalente ao fato de que a operação T ***preserva*** a soma, ou,operacionalmente ***comuta*** com ela, ou ainda que satisfaz a ***Aditividade*** com relação a composição que denominamos de "soma".

Se T satisfaz ao Principio de Superposição então são também válidas as propriedades:1)$T(2v) = 2Tv \; e \; T\left(\frac{1}{2}v\right) = \frac{1}{2}Tv$ de tal forma que, se um número real for escrito em expansão Binária, $\gamma = \left(\sum_{k=-M}^{N} 2^k\right)$, então $T(\gamma v) = \gamma Tv$. No limite (supondo continuidade) conclui-se que $T(\lambda v) = \lambda Tv$ para todo numero real $\lambda \in \mathbb{R}$. Este argumento geral sugere que a homogeneidade decorre naturalmente do Principio de Superposição e, de fato, este é o caso para a maioria dos Modelos, as exceções sendo particularmente exóticas. Apesar da dependência natural da homogeneidade como decorrência do Principio de Superposição para a maioria dos exemplos, a sua independência lógica pode ser demonstrada com exemplos patológicos e, portanto, para não adentrar neste assunto , denominaremos Transformações Lineares aquelas que também são (axiomaticamente) homogêneas, isto é, $T(\lambda v) = \lambda Tv \,, v \in E, \lambda \in \mathbb{R}/\mathbb{C}$.

Assim, as propriedades operacionais que definem Sistemas operados segundo Principios de Superposição e cujos sinais são representáveis em um Espaço Vetorial (em que a "superposição" é, de fato uma operação de "soma" neste Espaço) é representável por uma Transformação/Operação $L: E \to R$ linear no sentido que satisfaz aos axiomas de Aditividade e Homogeneidade.

Um processo de *mistura* em geral destrói a individualidade dos componentes e torna difícil recuperá-los; Arquimedes que o diga. Entretanto, se o estado de um sistema é representável em uma estrutura de Espaços Vetoriais, a existência de bases (especialmente as ortonormais) permite que recuperemos os "componentes" , pelo menos segundo padrões que estas bases representam. Este fato é que fundamenta a utilidade deste formalismo em Análise Linear de sinais.

I.4-ORIGENS GEOMÉTRICAS: *As Quatro Transformações Geométricas Elementares*

As quatro transformações ***Elementares*** fundamentais $T: E \to E$ realizadas pela Geometria Euclideana no espaço E (Plano $n = 2$ e Espacial $n = 3$) são:

1) Homotetia (Dilatação/Compressão), $\varphi(\gamma x) = \gamma x, 0 < \gamma < 1, (1 < \gamma)$,

2) Reflexão através de um subespaço E_2 **(** $E = E_1 \oplus E_2$, $R(u \oplus v) = -u \oplus v$) ,

3) Projeção sobre um subespaço E_1 : Se $E = E_1 \oplus E_2$, $P(u \oplus v) = u \oplus 0$, e

4) Rotação (cuja caracterização será descrita cinematicamente no capitulo VI) .

Observações:

-A translação foi excluída por ser representável como um artifício na escolha da origem de coordenadas. O estudo da Geometria está, em grande parte, baseado no estudo do efeito de uma seqüência destas transformações geométricas sobre objetos geométricos. Na verdade a Geometria foi definida pelo influente matemático alemão Felix Klein em meados do século XIX como o estudo de propriedades que são invariantes sob determinados grupos de transformações.(Ref.Jerome Gray, J.Stillwell).

-A propriedade comum compartilhada por todas estas transformações geométricas (1-4) e, portanto, por suas composições é a ***linearidade***, ou seja, a preservação da soma (Aditividade) e a multiplicação por escalar real (Homogeneidade).

-A operação de inversão $\varphi(x) = -x$, $(\varphi = -I)$, pode ser entendida como uma reflexão através do sub-espaço nulo e sua composição com uma Homotetia 1) permite a definição destas para fatores negativos. Na verdade o termo Homotetia é utiliZado mesmo para fatores negativos.

-Acrescenta-se a estas transformações elementares a sua fatoração o que significa aplicá-los apenas aos sub-espaços definidos por um produto direto do espaço total preservando o complementar. Por exemplo, se $E = E_1 \oplus E_2$, $T(u \oplus v) = T_1 u \oplus v$, em que $T_1: E_1 \to E_1$ é elementar (1-4).

A caracterização *operacional* das transformações geométricas Elementares (1-4) possibilitará a sua generalização para os Espaços Cartesianos de dimensões superiores ($\mathbb{R}^n, \mathbb{C}^n ; n > 3$) e Espaços com Produto Interno e se constitui em uma parte essencial do programa de Geometrização da Álgebra Linear. A "Rotação" é a transformação geométrica elementar/Euclideana cuja generalização é menos direta e exige maior cuidado, razão porque a sua discussão natural será adiada para as seções do Capitulo VI que tratam da Dinâmica desenvolvida por Leonhard Euler-Capit VI).

A decomposição de Transformações Lineares gerais de $\mathbb{R}^n(\mathbb{C}^n)$em uma seqüência de operações "Geométricas Elementares" é uma das questões fundamentais para a Geometrização das Operações Lineares nos Espaços Cartesianos e nos Espaços com produto Interno, em geral, temas que serão tratados em capítulos posteriores.

Exercícios: *(**Obs**: Uma Argumentação geométrica é fundamentada em experiências (bem feitas) com "lápis e papel")*

-Verifique geometricamente ("*lápis e papel*") que todas as transformações elementares ou parciais preservam as operações intrínsecas de soma e multiplicação por escalar (ou seja, $T(u + \lambda u = Tu + \lambda Tv$) e, exceto a Projeção, todas são bijetivas.

-Decomponha a transformação $T: E \to E$ de um Espaço Vetorial Euclideano E (Plano $n = 2$ e Espacial $n = 3$) definida pelo seguinte efeito sobre uma base ortonormal $\{v_1, \dots, v_n\}$: $v_k \to v_{k+1}$,$1 \leq k < n$, $v_n \to 0$ em termos de uma seqüência de composição de transformações elementares. Discuta o caso em que a base não é ortonormal. O mesmo para a transformação dita circular $v_k \to v_{k+1}$,$1 \leq k < n$, $v_n \to v_1$.

-Verifique que as Transformações (2)-Reflexão e (4)-Rotação) efetuadas em Espaços Vetoriais Euclideanos preservam também o produto interno, e portanto os comprimentos dos vetores, o que não ocorre com as Projeções(3) e Homotetias(1).

-Mostre que uma (1)Homotetia preserva o ângulo, mas não o produto interno.

I.5-OPERAÇÕES FUNCIONAIS ANALÍTICAS do CÁLCULO DIFERENCIAL e INTEGRAL

Os Espaços Vetoriais Funcionais, especialmente aqueles que são palco para a aplicação das idéias do Calculo, como, por exemplo, $C^k(\mathbb{R},\mathbb{R}), C^k(\mathbb{R},\mathbb{R}^m), C^k(\mathbb{R},\mathbb{C}), C^k(\mathbb{R}^n,\mathbb{R}), C^\omega(\mathbb{R}^n,\mathbb{C}), P(\mathbb{R})$, tem a sua importância oriunda exatamente do fato de que as operações básicas do Cálculo, a ***Derivada*** e a ***Integral*** são operações que preservam a soma e a multiplicação por escalar e, portanto, são caracterizadas operacionalmente por estas propriedades. Além destas operações transcendentais de derivação e integração (i.e., que envolvem o cálculo de limites) a simples operação que resulta da multiplicação por uma função fixa, $M_\varphi: C^k(\mathbb{R}^n,\mathbb{R}) \to C^k(\mathbb{R}^n,\mathbb{R})$; $M_\varphi(f)(x) = \varphi(x)f(x)$, com $\varphi \in C^k(\mathbb{R}^n,\mathbb{R})$ fixa, é também um dos fundamentos da Análise. Na verdade, todas as Equações Diferenciais e Integrais lineares que tem um papel de enorme importância, tanto na Teoria quanto nas aplicações da Análise, podem ser expressas em termos de Operações Lineares obtidas da composição destas três classes de operações fundamentais. A vasta disciplina de *Análise Funcional* trata, em larga escala, de operações lineares cujos protótipos são composições destas três classes de operações funcionais.

I.6-SISTEMAS DINÂMICOS LINEARES E MARKOVIANOS

O modelo Newtoniano para o estudo da dinâmica Celeste estabeleceu uma Metodologia para a construção de Modelos para a descrição de qualquer processo temporal que é a predominante desde então. O primeiro conceito presente nesta metodologia é a de Espaço de Fase (ou de Configuração) Ͼ em que se representa toda a informação desejável e/ou necessária para a descrição do sistema em cada instante, o chamado Estado do Sistema. Em geral este Espaço de Configuração é representado por um Espaço Vetorial E , ou pelo menos descrito localmente por ele. (Em Mecânica, por exemplo, Newton estabeleceu o estado Mecânico de uma partícula como sendo a posição e a velocidade que podem ser representados em um espaço cartesiano $(x, v) \in \mathbb{R}^6 = \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3$). A ***Cinemática*** de um Sistema é descrita pela trajetória de um ponto no Espaço de Configuração, $p: [0, \infty) \to E, p(t)$ a partir de seu estado inicial $p(0)$. O segundo ingrediente de um Modelo *à moda* Newtoniana é uma Função (dita *Operador*) que "propulsiona" o ponto ao longo do Espaço de Configuração que, na maioria dos casos, é interpretada como um "campo vetorial" $\Phi: E \to E$. O Operador Φ representa a ***Dinâmica*** do Sistema. Embora, na maioria dos casos (tal como ocorre na Mecânica Celeste) a função Φ seja não-linear, em muitos casos, este Operador é linear pela sua própria natureza. Em outros casos a sua Linearidade resulta de uma aproximação local de uma função não-linear segundo a Teoria do Cálculo diferencial. Se o tempo é registrado discretamente ("tic-tac's) , o Modelo Dinâmico Linear toma a forma recursiva $p(t + 1) = Lp(t)$, em que $L: E \to E$ é linear. Se o tempo é registrado continuamente, a recursão é infinitesimal e a Dinâmica toma a forma de uma equação diferencial: $\frac{dp}{dt} = Lp(t)$.

O Problema de Fibonacci-Euler tem a sua interpretação mais importante como um modelo para a Dinâmica de uma população Estruturada em duas sub-populações (Imatura e Fértil) recenseadas ***ao final*** de cada período discretamente registrado pelo número natural k e que se modificam de acordo com as seguintes hipóteses biológicas: **1**) $I(k)$ é a sub-População Imatura não fértil dos indivíduos que nasceram durante o período k (e recenseada ao final dele), da qual sobrevive uma proporção $(1 - \mu)$ após a passagem para o próximo período quando se tornará fértil **2**) $M(k)$ é a sub-População fértil (madura) que se reproduz

durante cada período *proporcionalmente* a uma taxa $0 < \sigma$ e sobrevive uma proporção $(1-\mu)$ a cada ***passagem*** de período. (Observação: μ é denominada taxa de mortalidade). Sob estas condições o Modelo de Fibonacci-Euler pode ser escrito na forma Dinâmica linear da seguinte maneira:

$$p(k+1) = \begin{pmatrix} I(k+1) \\ M(k+1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & \sigma \\ (1-\mu) & (1-\mu) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I(k) \\ M(k) \end{pmatrix} = L\, p(k)$$

em que o Operador dinâmico é a Matriz $L = \begin{pmatrix} 0 & \sigma \\ (1-\mu) & (1-\mu) \end{pmatrix}$ e o estado do sistema em cada instante k é dado pelo ponto $\begin{pmatrix} I(k) \\ M(k) \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$. C

Portanto, conhecido o estado inicial do Sistema $\begin{pmatrix} I(0) \\ M(0) \end{pmatrix} = p(0) \in \mathbb{R}^2$, os seu estado futuro em qualquer outro instante k é determinado pela expressão: $p(k) = L^k p(0)$.

Em qualquer um dos casos, contínuo ou discreto, a variação imediata (o *Movimento*) do estado do sistema depende apenas do seu estado atual. Esta dependência da Dinâmica unicamente no estado atual, sem necessidade da memória dos estados pregressos é denominada ***Propriedade Markoviana*** em referência aos Modelos probabilísticos introduzidos pelo matemático russo A.A.Markov ao final do século XIX. Os Modelos Dinâmicos de Markov , ao contrário dos Modelos deterministicos Newtonianos, não descrevem o estado do sistema, mas uma *Configuração* Probabilistica do Sistema, ou seja, em lugar da posição exata de uma partícula, é descrita uma função de distribuição de probabilidade sobre os seus possíveis estados determinísticos.

Por exemplo, o Modelo de Movimento Aleatório (Caminho Aleatório) de uma partícula sobre $\mathbb{Z}$ que é o protótipo de uma Dinâmica probabilística em que a cada instante o ***Estado Probabilístico*** do sistema é representado por uma função distribuição de probabilidade sobre as suas possíveis posições:

$$p_n(k) = \text{"}Probabilidade\ da\ particula\ estar\ na\ posição\ k\ no\ istante\ n\text{"}\ .$$

Este Modelo Markoviano é então descrito por uma recursão $p_{n+1} = Lp_n$ em que L é um Operador Linear que gera a Dinâmica em um Espaço funcional.(Observação: As funções de distribuição de probabilidade não constituem um espaço vetorial, mas formam um subconjunto imerso em um espaço funcional e a dinâmica markoviana se mantem sobre este subconjunto).

Assim, o Modelo de Fibonacci-Euler (sec.XIII, XVIII) é o protótipo do Sistema dinâmico Linear discreto determinístico, o Modelo de Caminho Aleatório,(sec.XVIII), por outro lado, é o protótipo dos Modelos Dinâmicos probabilísticos de Markov e o clássico Modelo Mecânico Massa-Mola-Atrito viscoso (sec. XVII), que será abordado em outra seção, é um protótipo de um Modelo Linear continuo diferencial, todos eles gerados por um Operador Linear. Estes e vários outros importantes exemplos que serão apresentados oportunamente são indicadores da relevância do conceito de Operador linear como gerador de uma Dinâmica.

I.7-IDENTIFICAÇÃO DE ESTRUTURAS VETORIAIS: *Isomorfismos Lineares*

O grande trunfo da abstração em Matemática consiste em identificar (e utilizar) a mesma estrutura axiomática que aparece sob *disfarces* em vários Modelos que, quando encarados sob outros aspectos, são completamente distintos. Para que esta identificação estrutural seja verificada é necessário identificar biunivocamente não apenas os elementos de dois Modelos, mas também as suas respectivas operações para mostrar que estamos diante da mesma estrutura sob nomes diferentes.

A identificação de duas estruturas algébricas semelhantes (por exemplo, Espaços Vetoriais) exige não apenas a identificação dos **cenários** (conjuntos de elementos), mas também suas **ações *internas*** representadas pelas operações de ***Soma*** e ***Multiplicação*** por escalares. O "espelhamento" entre Modelos de uma mesma Estrutura exige uma associação ***bijetiva*** entre seus elementos $\varphi: E \leftrightarrow F$ de tal forma que a ***Soma*** de dois elementos $u, v \in E$, $u + v = w \in E$ seja "fielmente espelhada" na respectiva **Soma** de seus correspondentes $\varphi(u), \varphi(v) \in F$, ou seja, que $\varphi(w) = \varphi(u) + \varphi(v) \in F$, e, analogamente, com a **Multiplicação** por um escalar, ou seja, $\varphi(\lambda u) = \lambda\varphi(u)$.

Estas duas propriedades são exatamente aquelas que caracterizam uma transformação linear.

Funções bijetivas entre Espaços Vetoriais que preservam as operações destas estruturas tal como acima descrito, são denominados ***Isomorfismos de Espaços Vetoriais*** e desempenham papel fundamental no seu estudo abstrato, o que constitui mais uma importante razão para o estudo desta classe de funções que será o tema central da próxima seção.

II-A AXIOMATIZAÇÃO Operacional do Conceito de Transformação Linear

Se o **Cenário** da Álgebra Linear é a Estrutura de Espaços Vetoriais, por outro lado as **Ações** neste cenário são representadas por suas **Operações,** tanto intrínsecas (Soma e Multiplicação Escalar e, eventualmente o Produto escalar) quanto exteriores (Transformações Lineares).

Conforme pudemos ver nos exemplos que deram origem ao estudo da Álgebra Linear (tanto Geométricos quanto Analíticos) o traço comum a todos eles era a presença de uma Operação externa que age sobre os elementos de um Espaço Vetorial produzindo novos elementos também em um Espaço Vetorial que exibe uma característica operacional genericamente denominada Principio de Superposição. A caracterização operacional desta classe de funções é o objetivo da axiomatização do conceito de transformações lineares que será feita a seguir.

DEFINIÇÃO: *Transformação Linear-*

Uma ***função*** $T: E \to F$ entre dois espaços vetoriais E, F com o ***mesmo*** campo de Escalares (seja ele $\mathbb{C}\ ou\ \mathbb{R}$)é denominada ***Transformação Linear*** se para $\forall\ u, v \in E, \lambda \in \mathbb{R}/\mathbb{C}$

i)Preserva a Operação Soma: $L(u + v) = L(u) + L(v)$, (Aditividade)

ii)Preserva a Operação Multiplicação, $L(\lambda u) = \lambda L(u)$, (Homogeneidade)

Observações: *Uma Estrutura Vetorial consiste de cinco ingredientes indispensáveis e independentes: **(1)** O conjunto de elementos, (2)O elemento zero, **(3)** A Operação Soma, **(4)** O campo de escalares ($\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$) e **(5)** A Operação Multiplicação. Embora na definição acima tenhamos utilizado o mesmo símbolo para a Operação de Soma nos dois Espaços Vetoriais e a justaposição para indicar ambas as Multiplicações, a rigor, seria necessário ressaltar a distinção entre as operações dos dois Espaços. Um mesmo conjunto de elementos E pode "hospedar" duas estruturas distintas de Espaços Vetoriais (com operações intrínsecas distintas ou escalares distintos) e isto deve ser levado em conta na definição acima para que uma função entre conjuntos $\varphi: E \to E$ seja classificada como "Transformação linear". Em particular, é importante ressaltar que a definição de transformação linear exige que os dois espaços de domínio e contradomínio tenham o **mesmo campo de Escalares,** (seja ele $\mathbb{C}$ ou $\mathbb{R}$), condição essencial para a verificação completa de ii).*

Exercício: Exiba um exemplo simples de duas Estruturas de Espaços Vetoriais em que os conjuntos de elementos de ambos os espaços vetoriais $E_1\ e\ E_2$ são idênticos, mas as Estruturas são distintas, de tal forma que a **função** identidade $i: E_1 \to E_2$ ***não é*** uma transformação linear.(Sugestão: $\mathbb{C}$ com escalares reais e complexos).

O tema principal do estudo das Transformações/Operadores lineares são as Equações "***Estáticas***" $Lx = b$ e as Equações "***Dinâmicas***" $x_{n+1} = Lx_n$ (ou, $\frac{dx}{dt} = Lx$) abordadas sob um ponto de vista *operacional* que focaliza a sua resolução no Operador L que a define e por isto denominado ***Método Operacional***. Para o desenvolvimento desta estratégia será necessário estabelecer uma Estrutura para a classe de Operadores lineares que permita a sua manipulação algébrica, o que será feito em seguida.

TEOREMA- O conjunto das ***Transformações Lineares*** entre dois Espaços Vetoriais E, F denotado por $\mathcal{L}(E, F) = \{L: E \to F\ , L\ linear\}$ *pode ser dotado de uma Estrutura de Espaço Vetorial com as operações de **Soma** e **Multiplicação** por escalar ponto a ponto.(Na verdade, é um sub-espaço das funções gerais $\mathcal{F}(E, F) = \{f: E \to F\ \}$).*

Demonstração:

Exercício:-Demonstre o Teorema.

Dentre as transformações lineares, as mais importantes e "*perfeitas*" são as *bijeções* e, como foi mencionado na introdução, desempenham um papel fundamental na Teoria da Álgebra Linear.

III- ISOMORFISMOS: *Identificação de Elementos e Estruturas*

Uma função ***Bijetiva*** $\varphi: A \to B$ entre dois conjuntos quaisquer não vazios $A\ e\ B$ é denominada um ***Isomorfismo entre Conjuntos***, pois identifica completamente e mutuamente os elementos dos dois conjuntos e, portanto, não há o que distinguir um de outro conjunto excetos os nomes de seus elementos. Nesta definição, nenhum outro aspecto é mencionado ou levando em conta além da propriedade de pertinência aos conjuntos.

Por outro lado, se os conjuntos domínio e contradomínio da função bijetiva são dotáveis de Estruturas algébricas, é natural investigar em que medida as ações (operações) realizada no domínio é refletida nos *respectivos* elementos do contradomínio indicados pela função. Uma Função ***Bijetiva*** que identifica não somente os elementos de dois conjuntos dotados de uma Estrutura de Espaços Vetoriais, mas que também ***preserva*** as suas respectivas operações intrínsecas tem um papel importante de identificação das duas Estruturas, o que leva a uma denominação especial para este fato:

DEFINIÇÃO: ISOMORFISMO e Automorfismos entre Estruturas de Espaços Vetoriais

-Uma ***Transformação Linear Bijetiva*** entre dois espaços vetoriais $\varphi \in \mathcal{L}(E, F)$ é denominada um ***Isomorfismo*** Linear **entre os Espaços Vetoriais** $E\ e\ F$ **.** O conjunto dos Isomorfismos lineares entre $E\ e\ F$ será denotado por $Iso(E, F)$.

-Um Isomorfismo do mesmo Espaço Vetorial, é denominado ***Automorfismo***, e seu conjunto será denotado por$\boldsymbol{Aut(E, E) = GL(E)}$.

Observações:

-É importante ressaltar mais uma vez que a Estrutura de Espaço Vetorial consiste de **5** ingredientes e o conceito de isomorfismo, assim como o de transformação linear, é atrelado a todos eles.

-Portanto, Automorfismos são Isomorfismos do mesmo Espaço Vetorial (i.e., caracterizados pelos mesmos cinco ingredientes, e não apenas exibindo o mesmo conjunto de elementos).

-O qualificativo "Linear" (no termo "Isomorfismo Linear") é uma redundância que nem sempre é necessário utilizar no contexto em que *o Isomorfismo* citado se dá entre Estruturas de Espaços Vetoriais.

Exercício: Mostre que os isomorfismos entre dois espaços vetoriais $Iso(E, F)$ **não** constituem um sub-espaço vetorial de $\mathcal{L}(E, F)$. Mostre, todavia, que os isomorfismos do mesmo espaço vetorial, denotado por $GL(E) \subset \mathcal{L}(E)$, constituem uma Estrutura de Grupo com a operação de composição.

DEFINIÇÃO-ISOMORFISMO *entre* ***EVPI's (Esp. Vet. Com Prod. Interno)*** : ***ISOMETRIA***

Seja $\varphi: E \to F$ um ***Isomorfismo*** entre dois Espaços Vetoriais, ambos dotados de produtos internos, $E, \langle\ ,\ \rangle\ e\ F, [\ ,\ ]$. Se a transformação φ ***também*** preservar a operação de ***Produto Interno***, isto é, $[\varphi(x), \varphi(y)] = \langle x, y\rangle\ , \forall x, y \in E$, então ela é denominada ***Isomorfismo entre Espaços Vetoriais com Produto Interno (EVPI)***, ou, uma ***ISOMETRIA***. O **conjunto das Isometrias** entre dois Espaços Vetoriais com Produtos Internos, $E, \langle\ ,\ \rangle\ e\ F, [\ ,\ ]$ será denotado por $\boldsymbol{Isom(E, F)}$**.**

Exercícios:

-Sejam dois EVPI $E, \langle\, , \rangle\, e\, F, [\, ,]$ com mesmo campo de escalares. Mostre que $Isom(E, F) \subsetneq Iso\mathcal{L}(E, F) \subsetneq \mathcal{L}(E, F) \subsetneq \mathcal{F}(E, F)$.(Observe que a afirmação acima se refere a inclusões estritas e, portanto, é necessário mostrar que não há igualdades).

O conceito de ***Isomorfismo*** é fundamental em Matemática porque constitui uma maneira de verificar se dois Modelos de uma determinada Estrutura Matemática são algebricamente equivalentes, ou seja, "se eles se *espelham* mutuamente", não apenas com a correspondência biunívoca de seus *elementos*, mas também com a correspondência biunívoca de todos os ingredientes que caracterizam um espaço vetorial, especialmente suas *"ações intrínsecas"*.

Além disso, o conceito de Isomorfismo também tem um papel importante na construção de novos Modelos Isomorfos de Espaços Vetoriais por um procedimento denominado "*indução/transporte*". O Teorema abaixo mostra que é possível estender ("*induzir*") um mero Isomorfismo **entre conjuntos** para um Isomorfismo Algébrico *transportando* a Estrutura Algébrica hospedada em um deles para o outro.

TEOREMA- Estruturas Induzidas de Espaço Vetorial, e de EVPI.

-Se o conjunto E "*hospeda*" uma estrutura de Espaço Vetorial real, então um ***Isomorfismo entre conjuntos*** (***bijeção***) $\varphi: E \to H$ entre E e um conjunto qualquer H, permite definir (ou, *"induzir"*) uma Estrutura de Espaço Vetorial em H segundo as regras: Se $h_1, h_2 \in H, \gamma \in \mathbb{R}$, define-se **1**)$h_1 + h_2 = \varphi\big((\varphi^{-1}(h_1) + \varphi^{-1}(h_1)\big)$ e **2**)$\gamma h = \varphi(\gamma\varphi^{-1}(h))$, de tal forma que φ se torne um ***Isomorfismo entre Espaços Vetoriais***. (Observe: O campo de escalares é o mesmo para ambos os espaços e pode ser complexo).

-Se $\varphi: E \to H$ for Isomorfismo entre Espaços Vetoriais e E for dotado de um produto interno,$\langle\, , \rangle: E \times E \to \mathbb{R}$ então é possível "*induzir*" uma operação $[\, ,] : H \times H \to \mathbb{R}$ da forma$[h_1, h_2] = \langle\varphi^{-1}(h_1), \varphi^{-1}(h_2)\rangle$ que é também é um produto interno, e tal que $\varphi: E \to H$ seja um ***Isomorfismo entre Espaços Vetoriais com Produto Interno*** (EPVI).

Exercícios:

-Demonstre que, de fato, as construções acima descritas definem as Estruturas induzidas e os respectivos Isomorfismos que afirmam construir.

-Mostre que se $E_1\, e\, E_2$ são dois Espaços Vetoriais e $\varphi: E_1 \to E_2$ for um isomorfismo entre Espaços Vetoriais, então $\varphi^{-1}: E_2 \to E_1$ também é um isomorfismo, e o mesmo se aplica para Isometrias se E_1, E_2 forem EVPI.

-Mostre que se $E_1, E_2, e\, E_3$ forem Espaços Vetoriais e $\varphi_1: E_1 \to E_2$ e $\varphi_2: E_2 \to E_3$ isomorfismos, então

$\varphi_3: E_1 \to E_3$,$\varphi_3 = \varphi_2 \circ \varphi_1$ é um isomorfismo, e o mesmo se aplica para Isometrias se E_1, E_2, E_3 forem EVPI.

-Mostre que existem Isomorfismos entre os Espaços Vetoriais Reais: $\mathcal{L}(\mathbb{R}^2) \approx M_{22}(\mathbb{R}) \approx \mathcal{L}(\mathbb{C})$.

-Descreva em $M_{22}(\mathbb{R})$ os conjuntos $Aut(\mathbb{R}^2)$ e $Isom(\mathbb{R}^2)$.

-Seja $\alpha \in \mathbb{C} - \{0\}$ e o Isomorfismo entre Espaços vetoriais com Escalares reais $E \approx \mathbb{R}^2 \approx \mathbb{C}$ (em que E é o Espaço Euclideano plano de "*lápis e papel*") . Mostre que a função $T: \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, $Tu = \alpha u$ (Produto complexo) é linear, $T \in \mathcal{L}(\mathbb{C})$ e pode ser identificada em E como uma composição de Homotetia e Rotação e obtenha sua representação em $\mathcal{L}(\mathbb{R}^2)$.

IV-REPRESENTAÇÕES FUNCIONAIS DE ESPAÇOS VETORIAIS de DIMENSÕES FINITAS

Os Modelos de Estruturas de Espaço Vetorial não são necessariamente idênticos para além dos axiomas que regulam suas operações, basta observar os diversos Modelos Euclideanos de Espaços Vetoriais ($n = 1,2,3$). O conceito de Isomorfismo, todavia é uma relação de Equivalência que classifica os Espaços Vetoriais em classes constituídas de Modelos idênticos a partir de um isomorfismo de conjuntos e da correspondência biunívoca de suas respectivas operações.

Assim, iniciamos com a definição formal da seguinte Relação de Equivalência na categoria de Modelos de Espaços Vetoriais:

DEFINIÇÃO: Diz-se que dois Espaços Vetoriais $E_1\ e\ E_2$ **são isomorficamente relacionados,** o que se denotará da forma $E_1 \approx E_2$ **, se existir um isomorfismo linear** $\varphi \in \mathcal{L}(E_1, E_2)$.

Exercício: -Mostre que a Relação acima definida é uma Relação de Equivalência na categoria de Espaços Vetoriais.

Por este motivo, torna-se interessante escolher para cada Classe de equivalência isomórfica um Modelo que permita "*coisificar*" os conceitos abstratos que definem a Estrutura de Espaço Vetorial e assim possibilitem descrever e estudar a Teoria em termos *mais concretos*, ou *mais familiares*. As vantagens teóricas e pedagógicas deste procedimento são ressaltadas quando a escolha do Representante de cada classe isomórfica recai sobre os Modelos Funcionais Numéricos, Cartesianos ($\mathbb{R}^n$, $M_{nm}(\mathbb{R}), \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$) e analíticos ($C^0([a,b],\mathbb{R})$) e seus Sub-espaços (e, também, suas versões complexas que substituem $\mathbb{R}\ por\ \mathbb{C}$). As propriedades de todos os Modelos Equivalentes podem assim ser "*espelhadas*" e estudadas exclusivamente em seu Representante que servirá então de padrão para a sua respectiva Classe isomórfica. (De fato, alguns textos preferem apresentar a Teoria da Álgebra linear completamente nestes termos. Ref. Strang).

Apresentaremos em seguida alguns aspectos formais que fundamentam o sucesso deste procedimento.

DEFINIÇÃO: Um Modelo Funcional Numérico de uma Classe de Equivalência isomórfica será denominado ***Representante*** da respectiva classe.

O importante Teorema abaixo mostra que a ***dimensão*** de um Espaço Vetorial, quando finita, é um índice numérico simples que determina biunivocamente a Classe de Equivalência Isomórfica a que ele pertence e, com isto, apresenta Representantes Funcionais para cada uma destas classes.

1º TEOREMA FUNDAMENTAL: *Representação de Espaços de Dimensão Finita*

Sejam E, F Espaços Vetoriais Reais (Complexos) **isomorfos** via $\varphi: E \to F$, e $\dim E = n.$ Então

1)Se $\{\alpha_k\}_{1\le k\le n}$ for uma base de E, $\{\beta_k = \varphi(\alpha_k)\}_{1\le k\le n}$ será uma base para F, ou seja, "*Isomorfismos levam **bases** em **bases***".

2) $\dim F = n$

3) E (e, portanto, também F) é isomorfo ao Espaço Vetorial Cartesiano $\mathbb{R}^n$ ($\mathbb{C}^n$), $\phi: E \to \mathbb{R}^n$ o que significa que ***todos os Espaços de mesma dimensão finita são Isomorfos*** a $\mathbb{R}^n$ ($\mathbb{C}^n$).

4)Além disso, é possível induzir um produto interno em E que torne a função $\phi: E \to \mathbb{R}^n$ um isomorfismo de EVPI entre E e o espaço $\mathbb{R}^n$com produto canônico: $\langle v, u\rangle = \langle \sum_{k=1}^n x_k\alpha_k , \sum_{k=1}^n y_k\alpha_k \rangle = \langle \sum_{k=1}^n x_k , \sum_{k=1}^n y_k \rangle$. (Analogamente para espaços complexos)

Demonstração: 1- Se $w \in F$, então existe único $v \in E$; $\varphi(v) = w$ e, se $v = \sum_{k=1}^n c_k v_k$, então $w = \varphi(\sum_{k=1}^n c_k v_k) = \sum_{k=1}^n c_k \varphi(v_k)$ o que demonstra $[\varphi(v_k)] = F$. A não-redundancia desta descrição de F decorre do fato de que φ é uma bijeção. 2)-Decorre imediatamente de 1) pois ambos tem bases com mesmo número de elementos. Para demonstrar 3) , associe as duas bases $v_k \in E \leftrightarrow e_k \in \mathbb{R}^n$ (onde $\{e_k\}$ é a base canônica) e observe que a função $v = \sum_{k=1}^n c_k v_k \leftrightarrow \sum_{k=1}^n c_k e_k$, $\forall c_k \in \mathbb{R}\,(\mathbb{C})$, é bem definida e um isomorfismo, de onde vem o resultado.4)Basta verificar a boa definição do produto e suas propriedades.

Exercícios:

-Complete os detalhes da demonstração do 1º Teorema Fundamental.

-Mostre geometricamente que Homotetias, Reflexões e Projeções são Transformações lineares, mas somente as duas primeiras são Automorfismos.

-Demonstre a afirmação: "...a função $v = \sum_{k=1}^{n} c_k v_k \leftrightarrow \sum_{k=1}^{n} c_k e_k$ é *bem definida* e um isomorfismo entre E e $\mathbb{R}^n$ ($\mathbb{C}^n$)".

- Demonstre: **Teorema**: Se $\varphi \in \mathcal{L}(E,F)$ e $\dim E = \dim F$, então as seguintes afirmações são equivalentes: 1) φ é bijetiva, portanto, um isomorfismo de Espaços Vetoriais , 2) φ é injetiva, 3) φ é sobrejetiva.

-Mostre que se $\varphi: E \to F$ for uma transformação linear injetiva e E for espaço de dimensão finita, $\dim E = n$ então, $R(\varphi) = \{y = \varphi(x); x \in E\} \subset F$ é um sub-espaço, $\dim R(\varphi) = n$ e $\varphi: E \to R(\varphi)$ é um isomorfismo.

-Mostre que uma Transformação Linear $T: E \to F$ entre dois Espaços Vetoriais com Produtos Internos preserva o produto interno se e somente se preserva a norma e, neste caso, é necessariamente injetiva .(Sugestão: Observe que normas e produtos internos podem ser descritos uns em termos de outros).

-Mostre que uma Transformação Linear sobrejetiva $T: E \to F$ entre dois EPVI de dimensão finita é uma Isometria (i.e., um Isomorfismo entre Esp.Vet. com Produto Interno) **se e somente se** preserva a norma.

Observação:

-O Teorema Fundamental de Espaços de Dimensão Finita demonstra que, essencialmente, os únicos Espaços Vetoriais Reais (Complexos) de dimensão finita são os respectivos Espaços Cartesianos $\mathbb{R}^n$ ($\mathbb{C}^n$), *a menos de uma nomeação distinta para seus elementos. Por este motivo, o estudo destes Espaços Numéricos, que já tem importância própria quanto às suas aplicações específicas, ganham também importância teórica como representantes completos destas Estruturas abstratas. Portanto, cada Espaço Vetorial de dimensão Finita pode ser "espelhado", tanto no que se refere aos seus* ***elementos*** *e também quanto às suas ações básicas (soma e multiplicação por escalar) em um bem definido Espaço Cartesiano.*

A próxima seção estenderá este resultado para os Espaços de Transformações Lineares.

IV-OPERADORES LINEARES: *Representações* de $\mathcal{L}(E,F)$, $\mathcal{L}(E)$ *e* $\mathcal{L}(E,\mathbb{R}) = E^*$

O Teorema seguinte mostra que o Isomorfismo entre Espaços Cartesianos ($\mathbb{R}^n, \mathbb{C}^n$) e Espaços Vetoriais de dimensão Finita têm conseqüências que se estendem ao *nível acima de abstração*, isto é, aos Espaços Vetoriais de seus Operadores Lineares. Em particular, o ***Espaço Vetorial*** $\mathcal{L}(E,F)$ de operadores lineares entre dois espaços de dimensões finitas n *e* m é isomorfo e, portanto, *Representado* pelo ***Espaço Vetorial*** das Matrizes $M_{mn}(\mathbb{R})$. Particularmente, $\mathcal{L}(E,\mathbb{R})) = E^*$ é Isomorfo ao espaço vetorial das Matrizes $M_{nn}(\mathbb{R}) \approx \mathbb{R}^n$ e, portanto é i***somorfo*** ao próprio Espaço Vetorial E . Em cada um destes casos o isomorfismo é denominado uma *Representação* dos Espaços Abstratos e se estende imediatamente para os Espaços Vetoriais Complexos.

2º TEOREMA FUNDAMENTAL: *Representação Cartesiana de* $\mathcal{L}(E,F)$

Sejam E, F Espaços Vetoriais Reais (Complexos) de dimensão finita, $\dim E = n$, $\dim F = m$. Então:

1) $\mathcal{L}(E,F) \approx M_{mn}(\mathbb{R})$ - Isomorfismo de Espaços Vetoriais ($resp. M_{mn}(\mathbb{C})$ se forem Espaços Vetoriais Complexos)

2) $\mathcal{L}(E,\mathbb{R}) = E^* \approx E$ Isomorfismo de Espaços Vetoriais. ($resp. \mathcal{L}(E,\mathbb{C})$)

Demonstração: Exercício.

Exercícios:

-Mostre que o isomorfismo $\mathcal{L}(E,F) \approx M_{mn}(\mathbb{R})$ pode ser estendido a um isomorfismo de EVPI induzindo em $\mathcal{L}(E,F)$ o produto de Frobenius de $M_{mn}(\mathbb{R})$ ($\langle A,B\rangle = \sum_{k,j=1}^{n} A_{kj}B_{kj}$).

-Demonstre detalhadamente o Teorema acima. (Consulte a Definição de Isomorfismo [da Estrutura] de Grupo para abordar o terceiro item).

-Mostre que se, $\dim E = n$, $\dim F = m$ então $\dim \mathcal{L}(E,F) = nm$ e $\dim \mathcal{L}(E) = n^2$.

-Determine as dimensões $\dim \mathcal{L}(E,\mathcal{L}(E))$ e $\dim \mathcal{L}\left(E,\mathcal{L}(E,\mathcal{L}(E))\right)$.

-Se $E \subset F$ são Espaços Vetoriais e $\dim E = n < \dim F = m$, determine $\dim\left(\frac{E}{F}\right)$.

- Se E,F,H são Espaços Vetoriais e $\dim E = n$, $\dim F = m$, $\dim H = p$, $\dim G = r$ determine $\dim \mathcal{L}(E\times F, H\times G)$.

- Se E,F,H são Espaços Vetoriais e $\dim E = n$, $\dim F = m$, $\dim H = p$, determine $\dim \mathcal{L}(E\oplus F, H)$.

V- ESTRUTURA GEOMÉTRICA INTRÍNSECA de uma TRANSFORMAÇÃO LINEAR

O estudo de Transformações Lineares adota a milenar e eficiente estratégia que é a essência dos Métodos Matemáticos em geral e se assemelha ao princípio militar de Sun-Tzu: *"Separe o todo em partes simples para poder dominá-lo"*. No presente contexto, esta estratégia é representada pela busca de uma "fatoração" da transformação linear geral em termos de uma série de composições funcionais, cujos fatores são transformações padrões, simples e "*canônicas*", isto é, bem compreendidas. Este procedimento foi introduzido em Álgebra Linear pelo notável *Método de Eliminação Gauss* cujo resultado final pode ser operacionalmente interpretado como a fatoração uma matriz $M \in M_{nm}(\mathbb{R})$ em "produtos" de matrizes elementares, simples e inversíveis, $\mathcal{E}_r$, e uma matriz característica (*reduzida*) $\mathcal{R}$ que ***explicita*** alguns importantes aspectos implícitos e intrínsecos da Matriz $M = \mathcal{E}_1 \cdots \mathcal{E}_r\mathcal{R}$. (Analogamente, $M = \mathcal{Q}\mathcal{F}_1 \cdots \mathcal{F}_s$ para operações à direita)

Naturalmente, o significado do termo "*simplicidade*" para os fatores admissíveis ("*canônicos*") na decomposição de uma transformação linear pode ser baseado em vários critérios, como por exemplo, computacional ou geométrico. Se a simplicidade dos fatores da decomposição tem um sentido mais geométrico, mesmo que sejam computacionalmente mais elaborados, as transformações lineares "elementares" , são as homotetias, reflexões, projeções e rotações. A Teoria Numérica de Matrizes, por outro lado, é fundamentada em um critério computacional que focaliza seu objetivo em decomposições que minimizem o esforço computacional final. (Ref. L.Trefethen-D.Bau-*Numercal Linear Algebra*, SIAM).

O Teorema desta seção apresenta um resultado Fundamental e básico para o estudo de todas as outras formas de decomposição, sejam elas computacionais ou geométricas.

Sob um determinado aspecto, podemos considerar que os Isomorfismos lineares são as transformações lineares mais simples e completas entre dois Espaços Vetoriais. Entretanto, nem sempre uma Transformação linear é um isomorfismo entre seus domínio e contradomínio. Apesar disso, é sempre possível "fatorá-la" em termos de uma composição que explicita um isomorfismo fundamental intrínseco entre um sub-espaço do domínio e um sub-espaço do contradomínio. O objetivo desta seção é detectar e descrever o isomorfismo intrínseco que está "*escondido*" em cada transformação linear não nula, e que representa os aspectos **intrínsecos** essenciais da sua estrutura.

O Teorema desta seção tem uma interpretação geométrica e metodológica clara que identifica quatro Sub-espaços fundamentais definidos intrinsecamente por uma Transformação Linear, de tal forma que a sua ação é completamente descrita por um isomorfismo entre dois deles; como se uma redundância suplementar fosse retirada para que apenas o "DNA" da Transformação linear seja revelado.

É importante ressaltar a versão deste resultado em Espaços Vetoriais com Produto Interno que oferece maiores recursos para uma interpretação geométrica mais específica e tem aplicações variadas.

DEFINIÇÃO*: Espaços Fundamentais de uma Transformação Linear*

Se $L \in \mathcal{L}(E,F)$ então $N(L) = \{h \in E\,; Lh = 0\} = L^{-1}\{0\}$ é um Sub-espaço vetorial de E denominado ***NÚCLEO*** de L (também denotado por $Ker(L)$, denominado Kernel de L)

Se $L \in \mathcal{L}(E,F)$ então $R(L) = \{f \in F\,; Existe\ h \in E\,; Lh = f\} = L(E)$ é um Sub-espaço vetorial de F denominado ***IMAGEM*** de L .

Exercícios:

-Determine o Núcleo e a Imagem da Transformação Linear $A \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)$ para os seguintes casos numéricos: $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ -1 & 2 & 0 \end{pmatrix}$, **2**) $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -2 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$, **3**) $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & -2 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.

-Determine o Núcleo e a Imagem da Transformação Linear $L \in \mathcal{L}(E)$, sendo, $E = P(\mathbb{R}) = "Polinômios"$ e : **1**)$L = D^3$; $(D = \frac{d}{dx})$, **2)**$L = x^2 D$, 3)$Lp\,(x) = \int_0^x s^2 p(s) ds$, **4)** $Lp\,(x) = \int_0^1 s^2 p(s) ds$ (Observe que $\mathbb{R} \approx P_0(\mathbb{R}) = "Polinômios\ de\ grau\ zero"$.)

-Determine o Núcleo e a Imagem da Transformação Linear $L \in \mathcal{L}(E)$, sendo, $E = C^\infty(\mathbb{R})$ e $L = D - 2$ $(Lu\,(x) = \frac{d}{dx}u - 2u)$. (**Sugestão**: Resolva a equação diferencial elementar $\frac{du}{dx} - 2u = 0$ e $\frac{du}{dx} - 2u = f$ como se faz em Calculo I).

- Determine o Núcleo e a Imagem da Transformação Linear $L \in \mathcal{L}(E)$, sendo, $E = P(\mathbb{R}) = "Polinômios"$ e $Lp(x) = p(x+1) - p(x) = \delta p$(x) onde δ é denominado "Operador Diferença". Faça o Mesmo para δ^3 que é a aplicação 3 vezes sucessivas do operador Diferença. Por exemplo:

$\delta p(x) = p(x+1) - p(x) \implies \delta^2 \text{p}\,(x) = \delta(\delta p)(x) = \delta p(x+1) - \delta p(x) = \{p(x+2) - p(x+1)\} - \{p(x+1) - p(x)\} = \{p(x+2) - 2p(x+1) + p(x)\}$.

3º TEOREMA FUNDAMENTAL: *Estrutura Intrínseca de Transformações Lineares*

Se E, F são Espaços Vetoriais de dimensões finitas e $T \in \mathcal{L}(E,F)$. Então,

1) O Núcleo $N(T)$ e a Imagem $R(T)$ são sub-espaços Vetoriais e as decomposições $E = N(T) \oplus N(T)^c$, $F = R(T) \oplus R(T)^c$ são denominadas ***decomposições intrínsecas*** de T.
2) A restrição $T_*: N(T)^c \to R(T)$, $T_* v = Tv$, é um ***isomorfismo***.
3) $\dim N(T) + dim R(T) = \dim E$
4) Se E, F são EVPI, as ***decomposições intrínsecas*** $E = N(T) \oplus N(T)^\perp$, $F = R(T) \oplus R(T)^\perp$ podem ser ortogonais, neste caso, únicas , sendo $T_*: N(T)^\perp \to R(T)$ um isomorfismo.

Demonstração: **1**) é parte de um Exercício simples.

2): Como E tem dimensão finita, é possível representá-los respectivamente, como a somas diretas $E = N(T) \oplus N(T)^c$, utilizando para isto um completamento de uma Base de $N(T)$. Como todo $v \in E$ pode ser decomposto na forma única, $v = h + u$, $h \in N(T)$, $u \in N(T)^c$, então $T(h+u) = T(u) \in R(T)$, o que demonstra $R(T) = T(N(T)^c)$ e, se $Tu_1 = Tu_2$, então

$T(u_1 - u_2) = 0$ de onde $(u_1 - u_2) \in N(T) \cap N(T)^c$, ou seja $(u_1 - u_2) = 0$ e, portanto $T_*: N(T)^c \to R(T)$, $T_* v = Tv$,é um isomorfismo entre espaços vetoriais.

3)A igualdade decorre de **(2),** $\dim N(T)^c = \dim R(T)$ e do fato de que $\dim E = \dim N(T) + \dim N(T)^c = \dim N(T) + \dim R(T)$.

4)Basta realizar o completamento via Método Gram-Schmidt que garante uma decomposição ortogonal única de E e F respectivamente com relação a $N(T)$ e $R(T)$.

Observações:

-A decomposição não necessariamente ortogonal prevista no item 3) pode ser realizada mesmo que F tenha dimensão infinita, desde que E tenha dimensão finita.

-Os espaços complementares $N(T)^c$ e $R(T)^c$ não são únicos. A Unicidade da decomposição somente é garantida se ela for ortogonal como prescrita no item 4) do Teorema.

FIGURA: *Os quatro Sub-espaços Fundamentais de uma Transformação Li near com* $\dim F < \infty$ *.*

Exercícios:

-Mostre que $T \in \mathcal{L}(E, F)$ pode ser fatorada como $E \xrightarrow{P_1} N(T)^c \xrightarrow{T_*} R(T)$, $T = T_* \circ P_1$ em que P_1 é uma Projeção e T_* um isomorfismo.

-Se $D: P_n(\mathbb{R}) \to P(\mathbb{R})$ for a Operação Linear definida no Espaço Vetorial dos polinômios na forma da derivada: $Dp(x) = \frac{d}{dx}p(x)$ mostre que vale a igualdade $\dim N(D) = 1$ e $\dim R(T) = n$.(Mesmo que $\dim P(\mathbb{R}) = \infty$). Descreva a decomposição ortogonal dotando os espaços $P_n(\mathbb{R})$ e $P(\mathbb{R})$ com o produto interno $\langle p, q \rangle = \sum_{k=0}^{\infty} p^{(k)}(0) q^{(k)}(0)$. O mesmo com o produto $[p, q] = \int_0^1 p(x)q(x)dx$.

-Analise a decomposição fundamental para a transformação $M_x: P_n(\mathbb{R}) \to P_n(\mathbb{R})$ definida na forma: $Mp(x) = xp(x)$.

-O mesmo para $T: P_n(\mathbb{R}) \to P_n(\mathbb{R}); Tp(x) = xD - 2$, ou seja, $Tp(x) = (xD - 2)u(x)$=$x\frac{d}{dx}p(x) - 2p(x)$.

-O mesmo para $\delta^4: P(\mathbb{R}) \to P(\mathbb{R}); \delta p(x) = p(x+1) - p(x)$. (Sugestão: Observe que $grau\{\delta p\} = grau\{p\} - 1$ para $p \neq 0$.

-Construa diversas Matrizes $M_{mn}(\mathbb{R})$) com entradas de 0's e 1's aleatoriamente (jogando uma moeda) , interprete-as como $M \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)$ e obtenha as suas decomposições ortogonais para $n = 2{,}5$ $m = 5{,}3$ e outros.

V-O ESPAÇO DUAL $\mathcal{L}(E, \mathbb{R}) = E^*$

DEFINIÇÃO: FUNCIONAIS LINEARES *("Testes Lineares"):* $\mathcal{L}(E, \mathbb{R}) = E^*$

Se E for um espaço vetorial real, então $\mathcal{L}(E, \mathbb{R}) = E^*$ é denominado ***Espaço Dual*** de E e $l \in \mathcal{L}(E, \mathbb{R})$ é denominado um ***Funcional Linear***. (Analogamente, $\mathcal{L}(E, \mathbb{C}) = E^*$ se E for um espaço vetorial sobre os Complexos)

Os Funcionais lineares desempenham um importante papel nos fundamentos da Teoria da Álgebra Linear e podem ser considerados como pedras fundamentais para a sua construção. (v. Exercicio abaixo).

Em termos mais concretos derivados de suas aplicações, os funcionais lineares podem ser interpretados como "*testes*" para determinar aspectos parciais de um vetor "*incógnito*". Os Funcionais lineares mais simples de um Espaço Vetorial de dimensão finita são representados pelas "*Funções coordenadas*" com respeito a uma base. Veremos mais adiante que, na verdade este funcional é o mais geral possível, tanto em dimensão finita quanto em vários exemplos importantes de dimensão infinita. Por outro lado, é importante tratar do conceito abstrato de funcional linear porque há exemplos de Espaços com dimensão infinita em que pode não haver uma base, conveniente ou óbvia, e, nestes caso, os funcionais lineares tomam o lugar das coordenadas.

Exercicios:

-Demonstre a que as Funções Coordenadas podem ser ***"bem definidas"*** com relação a uma base qualquer fixada e conhecida, isto é, se $\beta = \{v_k\}_{1 \le k \le n} \subset E$ for uma base, então é possível definir n funções $l_k: E \to \mathbb{R}$, $l_k(v) =$"*coordenada de v na base β*" e $l_k \in E^*$.

-Mostre que$\{l_k\}_{1 \le k \le n}$ formam uma base para E^*.

-Mostre que se E, F são espaços vetoriais de dimensões finitas, $\dim F = m$ então temos $\mathcal{L}(E, F) \approx E^* \times \ldots \times E^*$, isto é, cada transformação linear de $\mathcal{L}(E, F)$ pode ser representada como m funcionais lineares.(Sugestão:Utilize coordenadas em F).

Por exemplo, um Sistema de Equações lineares pode ser identificado como m equações geradas por m "*testes lineares*" , isto é, em um contexto no qual o Principio de Superposição é válido. Cada teste atribuído a, ou imaginado por "Arquimedes" (Peso, Volume, capacidade Térmica, etc.) pode ser interpretado no formalismo moderno da Álgebra Linear como um funcional linear sobre vetores cartesianos (concentrações de elementos) ou seja, $L_k(x_1, \ldots., x_n) = c_{k1}x_1 + \cdots + c_{kn}x_n = b_k$.

Infelizmente, o termo "*Teste Proporcional*" não foi adotado, nem marginalmente, pela literatura, pois teria trazido mais uma visão intuitiva para a Álgebra Linear. Os elementos de $\mathcal{L}(E, \mathbb{R}) = E^*$ são denominados ***Funcionais Lineares***.

Exercícios: Discuta sobre a "quantidade" de testes necessários para que se possa caracterizar completamente um vetor de um Espaço de Dimensão Finita. Testes redundantes não acrescentam nenhuma informação a um conjunto deles. Interprete esta frase.

- Mostre que $\mathcal{L}(E, \mathbb{R}) = E^*$ é isomorfo ao próprio E se este tem uma Base enumerável, ($\{v_k\}_{1 \le k}$) possivelmente infinita, mas que gera todo o Espaço por combinações lineares **finitas** ($E = \{\sum_{k=1}^{n} c_k v_k\ ;\ c_k \in \mathbb{C}, n \in \mathbb{N}\}$).(Sugestão: Cada vetor $v \in E$ tem uma única representação $v = \sum_{k=1}^{n} c_k v_k$. Defina $l_k \in E^*$; $l_k(v) = c_k$. Mostre que $\{l_k\}_{1 \le k}$ são de fato bem definidas funcionais lineares, LI e constituem uma base para E^* e em seguida que a associação $l_k \leftrightarrow v_k$ é leva a um isomorfismo.)

O Exercício acima expõe a existência do isomorfismo $\mathcal{L}(E, \mathbb{R}) = E^* \approx E$ para dimensão finita e o Teorema abaixo apresenta uma interpretação geométrica deste isomorfismo e uma demonstração que independe da existência de Bases (finitas ou infinitas). O Teorema de Riesz a ser demonstrado maia adiante explicitará completamente este isomorfismo no caso de Espaços Vetoriais com Produto Interno.

TEOREMA GERAL DA DUALIDADE: $\mathcal{L}(E, \mathbb{R}) = E^*$ é isomorfo a E.

Demonstração: Se $l \in \mathcal{L}(E, \mathbb{R}) = E^*$ e $l \neq 0$, então existe um $w \in E$ tal que $l(w) = 1$ de onde podemos escrever a decomposição $E = Ker\{l\} \oplus H$ pois $\forall v \in E$ pode ser escrito de uma única forma: $v = u + h = l(v)w + (v - l(v)w)$ onde $(v - l(v)w) \in Ker\{l\}$. A função $l \in E^* \leftrightarrow w \in E$, $0 \leftrightarrow 0$, é uma função bijetiva e linear, de onde vem a conclusão.

Exercícios:

-Preencha os detalhes da demonstração acima.

-Mostre que as operações $l: E \to \mathbb{R}\ (\mathbb{C})$, $l \in \mathcal{L}(E, \mathbb{R}) = E^*$definidas abaixo são Funcionais Lineares

-$l: M_{nn}(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}, l(A) = Tr(A) = \sum_{k=1}^{n} A_{kk}$

-$l: C^0([0,1], \mathbb{R}) \to \mathbb{R}$, $l(f) = \int_0^1 p(x)f(x)dx$, onde $p \in C^0([0,1], \mathbb{R})$ é fixa. (Observe que podemos escrever $l(f) = \langle f, p \rangle$ para o produto interno correspondente.

-$l: C^0([0,1], \mathbb{R}) \to \mathbb{R}$, $\sum_{k=0}^{m} c_k f(x_k)$, onde $x_k \in \mathbb{R}$) são m pontos fixados na reta e $\{c_k\}$ m constantes fixas. (Este funcional linear é denominado de "***Evaluação***" , ou seja, "*Cálculo de valores funcionais em pontos determinados*".

-$l: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, $l(v) = \sum_{k=0}^{n} c_k v_k$, onde $\{c_k\}$ são *n* constantes fixas. (Observe que podemos escrever, $l(v) = \sum_{k=0}^{n} c_k v_k = \langle v, c \rangle$ para um produto interno correspondendente e $c = (c_1, \dots\dots, c_n)$.

- $l: E \to \mathbb{R}$, $l(x) = c_k$, onde $\{c_k\}$ são *as coordenadas do vetor* $x \in E$ *em uma base fixada* $B = \{v_1, \dots, v_n)$, *isto é,* $x = \sum_{k=0}^{n} c_k v_k$

-$l: P(\mathbb{C}) \to \mathbb{C}$; $l(p) = p^{(k)}(0)$, isto é o valor da *k-ésima* derivada do polinômio para $x = 0$.

-Mostre que, para um Espaço Vetorial E de dimensão finita, $\dim E = n$, um conjunto linearmente independente de n funcionais lineares de E^* gera todos os funcionais lineares de E^* . Aplique esta conclusão para um sistema de equações lineares interpretados como m equações $l_k(x) = b_k$.

Em vários exemplos acima verificamos que se o Espaço Vetorial E for dotado de um produto interno, $\langle\, , \rangle$ então cada funcional $l \in E^*$ pode ser interpretado explicitamente como produto interno por um vetor fixo. O importante Teorema de Riesz garante que isto sempre ocorre em Espaços Vetoriais com Produto Interno de dimensão **finita** apresentando explicitamente o isomorfismo $\mathcal{L}(E, \mathbb{R}) = E^* \approx E$.

4º TEOREMA FUNDAMENTAL: TEOREMA DE RIESZ: *Representação Explícita de um Funcional Linear como Produto Interno*

Se E for um Espaço Vetorial Real (Complexo) de ***dimensão Finita*** com Produto Interno $\langle\, , \rangle$ e $l \in E^*$ então,

1)Para cada elemento $\alpha \in E$ existe um ***único*** funcional linear $l_\alpha \in E^*$ definido com a expressão $l_\alpha(x) = \langle x, \alpha \rangle$.

2)-***A Função*** $\alpha \in E \to l_\alpha \in E^*$ ***é bijetiva,*** *ou seja, todo funcional linear* $l \in E^*$ *é representável como um produto interno por um vetor fixo* $\alpha \in E$ tal que $l(x) = \langle x, \alpha \rangle$ que é denominado ***representante*** de l.

3)-***A Função*** $\alpha \in E \to l_\alpha \in E^*$ ***é Linear e, portanto,*** *é um* ***Isomorfismo*** *entre espaços Vetoriais* E *e* E^*.

Demonstração:

1)É claro que $l_\alpha(x) = \langle x, \alpha \rangle$ é um funcional linear e para mostrar que é único basta verificar que $0 = l_\alpha(x) - l_\beta(x) = \langle x, \alpha - \beta \rangle$ e, fazendo $x = \alpha - \beta$ concluimos que se $l_\alpha(x) = l_\beta(x)$, então $\alpha = \beta$.

2)Consideremos que l é não-nula e $l(v) \neq 0$. Sendo $Ker(l)$ um espaço de dimensão finita, ($\dim Ker(l) = n - 1$), então, segundo o Teorema de Projeção Ortogonal de Riesz, é possível decompor ortogonalmente o vetor v na forma $v = \lambda N + h$ em que N é unitário ortogonal a $Ker(l)$ e $h \in Ker(l)$. Assim, podemos escrever $Ker(l) = H_N$ como um Hiper-Espaço. Se agora $x \in E$, escreve-se $x = \langle x, N \rangle N + h$ de onde $l(x) = \langle x, N \rangle l(N)$ que, portanto, pode ser escrito como um produto interno na forma $l(x) = \langle x, N \rangle l(N) = \langle x, l(N)N \rangle = \langle x, l_* \rangle$, ou seja, $l_* = l(N)N$ onde N é unitário ortogonal a $Ker(l)$.

3)Exercicio.

Exercícios:

-Mostre que E^* é um Espaço Vetorial que pode ser dotado do Produto Interno induzido pelo isomorfismo da forma: $[l_\alpha, l_\beta] = \langle \alpha, \beta \rangle$, e, portanto ***A Função*** $\alpha \in E \leftrightarrow l_\alpha \in E^*$ é um **Isomorfismo** ***entre Espaços Vetoriais com Produto Interno e*** $\|l_\alpha\| = \|\alpha\| = \sqrt{\langle l_\alpha, l_\alpha \rangle}$

-Complete os detalhes da demonstração com uma interpretação geométrica com "Lápis&Papel". Mostre, em particular que $\|l\| = \max \frac{|l(x)|}{\|x\|} = \max_{\|u\|=1} |l(u)|$.

-Obtenha a representação de Riesz para o funcional linear Traço: $Tr: M_{nn}(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}, TrA = \sum_{k=1}^{n} A_{kk}$ no Espaço Vetorial de Matrizes $M_{nn}(\mathbb{R})$ com produto interno de Frobenius.

-Obtenha a representação de Riesz para o funcional linear $l(p) = p(0) + p(1) + p(-1)$ no Espaço Vetorial com Produto Interno: $P_n(\mathbb{R}), \langle p, q \rangle = \sum_{k=0}^{\infty} p^{(k)}(0) q^{(k)}(0)$.

-A mesma questão anterior com o mesmo Espaço Vetorial, mesmo funcional linear e com o produto interno $\langle p, q \rangle = \int_0^1 p(x)q(x)dx$.

-Mostre que se $F = F_1 \oplus F_2 \ldots \oplus F_n$ então podemos também fatorar $\mathcal{L}(E,F)$ na forma $\mathcal{L}(E,F) = \mathcal{L}(E,F_1) \oplus \ldots \oplus \mathcal{L}(E,F_n)$ e, em particular, se $\dim F = n$, $\mathcal{L}(E,F) \approx E^* \oplus \ldots \oplus E^*$ (n vezes) .

Observação: O Teorema de Riesz (demonstrado em espaços funcionais pelo matemático húngaro Frigyes Riesz em principio do século XX) foi posteriormente estendido por J. Von Neumann para os Espaços Vetoriais gerais com produto interno que admitem superposição infinitas e são denominados Espaços de Hilbert. Estes espaços (cuja designação homenageia o matemático David Hilbert[18..-1943]) são generalizações dos Espaços Cartesianos e exibem bases ortonormais. O Teorema de Riesz organiza e sintetiza vários Métodos e idéias da Análise Funcional para a demonstração de existência de soluções de equações diferenciais e integrais e fundamentação de algoritmos computacionais para o seu cálculo.(ref. I.Gohbeerg &al.-, P.D.Lax-*Análise Funcional*, J.Wiley 2002).

VI-TEORIA ESPECTRAL*: Em Busca da Simplicidade Perdida (* i.e., d*os subespaços de E em que $T \in \mathcal{L}(E,F)$ age como uma simples Proporção/Homotetia*)

A interpretação instrumental de uma Transformação linear $T \in \mathcal{L}(E), \dim E = n$ representa o seu funcionamento como a de um dispositivo que processa *sinais-estímulos* de n canais de *entrada* e produz uma resposta em outros n canais de saída, cada um destes últimos resultante de uma específica superposição ponderada de todos os sinais de entrada. A "*mistura interna*" de estímulos é onde reside a complexidade do processamento descrito por uma Transformação linear. Se cada canal de resposta for estimulada por apenas um canal de entrada tudo seria extremamente mais simples, ou seja, a sua ação poderia ser descrita simplesmente na forma $Te_k = \lambda_k e_k$ para cada canal básico. Entretanto, (e felizmente) nem todas as transformações lineares são tão simples.

Mesmo assim, é interessante rearranjar os canais de entrada e saída de tal maneira que esta decomposição se torne possível. Em termos mais matemáticos, ainda é altamente desejável a situação em que existam decomposições $E = E_1 \oplus E_2 \oplus \quad \ldots \oplus E_p$ de tal forma que o operador T seja uma Homotetia particular quando restrito a cada um destes sub-espaços fatores, isto é, $Tu_k = \lambda_k u_k, \forall u_k \in E_k$. De fato, esta fatoração simplificadora é tão desejável que a caracterização dos contextos que permitem a sua implementação e, assim os métodos de cálculo destes sub-espaços E_k e dos respectivos parâmetros λ_k , se constitui em uma das questões mais fundamentais da Álgebra Linear e ocupa grande parte de seu esforço.

Entretanto, quando analisada a questão sob o ponto de vista geométrico verifica-se que, sendo esta decomposição uma Homotetia em cada sub-espaço E_k e como sabemos (por experiencia geométrica) a rotação no plano não preserva nenhuma direção, no espaço preserva apenas uma direção, assim como a reflexão, que preserva o sub-espaço através do qual se define a reflexão, mas **não** as direções dos vetores de seu complementar. Portanto, é necessário relaxar as restrições aos fatores da Decomposição para admitir também como fatores não apenas Homotetias, mas também as Rotações e as Reflexões, podemos expandir o alcance do Método, o que, de fato será feito mais adiante.

Entretanto, nesta seção descreveremos uma ampla classe de Operadores Lineares que podem ser efetivamente fatorados em Homotetias em Espaços Unidimensionais.

Para isto apresentaremos as seguintes definições de linguagem que formalizam as idéias expostas acima.

DEFINIÇÃO: Um subespaço $H \subset E$ de $T \in \mathcal{L}(E)$ é dito ***INVARIANTE*** com relação a T se " $\forall h \in H \Rightarrow Th \in H$ ", ou seja, se for possível definir a seguinte restrição $T_H : H \to H, T_H u = Tu$.

DEFINIÇÃO: Se E for um Espaço Vetorial Real, $T \in \mathcal{L}(E)$, e se existir um escalar real $\lambda \in \mathbb{R}$ ao qual é associado um vetor **não nulo** $v \in E - \{0\}$ tal que $Tv = \lambda v$, então , λ é dito ***AUTOVALOR*** de T e v é denominado ***AUTOVETOR*** associado ao autovalor λ. (Analogamente se define os mesmos objetos para Espaços Complexos).

Observação: *A definição do autovalor é totalmente atrelada à existência do autovetor (não nulo) no Espaço indicado E . Modificando-se (por extensão ou restrição) o domínio do operador T , seus autovalores também serão modificados.(v. Exercicios abaixo).*

DEFINIÇÃO*:* Se linear $\mathrm{T} \in \mathcal{L}(\mathrm{E})$, então autovalor $\lambda \in \mathrm{Sp}(\mathrm{T})$ é dito Geometricamente Simples se o Espaço de Autovatores correspondentes tem dimensão 1 e que tem Multiplicidade Geométrica r se $\dim \mathrm{Ker}\{\mathrm{T} - \lambda\} = \mathrm{r}$.

DEFINIÇÃO: Se , $T \in \mathcal{L}(E)$, então a equação $Tv = \lambda v$ em que v, λ são incógnitas é chamada ***EQUAÇÃO ESPECTRAL*** para T.

DEFINIÇÃO:O conjunto de autovalores de um operador $T \in \mathcal{L}(E)$ é denominado ***ESPECTRO*** de T e denota-se por $Sp(T) = \{\lambda \in \mathbb{R} \ ; \ \text{Existe } v \in E - \{0\} \ ; \ Tv = \lambda v\}$. (Analogamente para Espaços Complexos).

DEFINIÇÃO*: Se* $T \in \mathcal{L}(E)$*,* então diz-se que um autovalor $\lambda \in Sp(T)$ tem ***Multiplicidade Geométrica/ Dimensional*** r se $\dim Ker\{T - \lambda\} = r$ *e que* é ***Geometricamente Simples*** se $r = 1$.

Exercícios:

-Mostre que uma definição alternativa para autovalores e autovetores de uma operação linear $T \in \mathcal{L}(E)$ em um espaço real é a seguinte: $Sp(T) = \{\lambda \in \mathbb{R}\, ; Ker\{T - \lambda\} \neq \{0\}$ e em um espaço complexo $Sp(T) = \{\lambda \in \mathbb{C}\, ; Ker\{T - \lambda\} \neq \{0\}$.

-Mostre que o operador derivada $D \in \mathcal{L}(C^{\infty}(\mathbb{R}))$ é tal que $Sp(D) = \mathbb{R}$ e determine seus respectivos autovetores $Ker\{D - \lambda\} \subset C^{\infty}(\mathbb{R})$. Mostre agora que com a restrição $D \in \mathcal{L}(P(\mathbb{R}))$, conclui-se que $Sp(D) = \phi$. (Este exemplo mostra a dependência crucial do espectro do operador com relação ao seu domínio).

-Considere a operação linear $T_\alpha \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^2)$ (espaço vetorial real) definida da forma $T_\alpha v = \alpha * v$, onde $\alpha * v$ representa o produto complexo com o vetor fixo $\alpha \in \mathbb{R}^2$. Mostre que $Sp(T_\alpha) = \phi$ se $\alpha = a + ib\, ; b \neq 0$. Considerando agora $T_\alpha \in \mathcal{L}(\mathbb{C})$, (espaço vetorial real complexo) , $T_\alpha v = \alpha * v$, então $Sp(T_\alpha) = \{\alpha\}$.

-Mostre que a Equação Espectral $Tv = \lambda v$ em um Espaço Vetorial de dimensão $\dim E = n$ se constitui em um sistema de n equações a $n + 1$ incognitas, o que , sugere claramente um grau de liberdade. Argumente que este "grau de liberdade" está no módulo de v e que mesmo com mais incógnitas do que equações, o sistema pode não ter soluções. Analise esta argumentação.

-Demonstre a importante observação: A cada autovalor λ está associado "***uma direção***" e não apenas "*um autovetor*" pois, se $Tv = \lambda v$ então $T(sv) = \lambda(sv)$ para qualquer escalar s.

-Demonstre o **Teorema**: $\lambda \in Sp(T)$ se e somente se $Ker(T - \lambda I) \neq \phi$. Conclua que os autovetores associados a um **mesmo** autovalor constituem um sub-espaço vetorial.

-Obtenha $Sp(T)$ e seus respectivos autovalores para $D \in \mathcal{L}(P(\mathbb{R}))$ e para $D \in \mathcal{L}(C^{\infty}(\mathbb{R}))$ e para $D \in \mathcal{L}(E); E = \{f \in C^{\infty}(\mathbb{R}); f(0) = 0\}$, $D^2 \in \mathcal{L}(E); E = \{f \in C^{\infty}(\mathbb{R}); f(0) = 0, f(1) = 0\}$.

-Obtenha $Sp(T)$ e seus respectivos autovalores para $T \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^2)$; $T = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$ e para $T \in \mathcal{L}(\mathbb{C}^2)$; $T = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ (**Sugestão Mandatória**: Resolva o sistema indeterminado de três incógnitas (*duas coordenadas e o autovalor*): $Tv = \lambda v$,não se esquecendo todavia que nos interessa apenas soluções com $v \neq 0$. Observe que a indeterminação do sistema de equações para três incógnitas vem do fato de que o **autovetor** é indeterminado pois qualquer múltiplo dele é solução para o mesmo autovalor λ).

-Se $T \in \mathcal{L}(E)$, onde E é um EVPI, Mostre que é possivel definir uma função $\varphi: Sp(T) \to S_1 = \{N \in E; \|N\| = 1\}$ que associa autovalores a autovetores unitários, mas que esta função não é necessariamente injetiva e nem única. (Sugestão: Considere a transformação Identidade).

A relação entre autovalores e seus respectivos autovetores é semelhante a um "*casamento polígamo*", pois um autovalor pode ser associado a ***múltiplas direções*** (autovetores linearmente independentes), mas uma ***direção*** (autovetor) deve "fidelidade" a apenas um autovalor. O importante Teorema abaixo explicita bem esta associação.

Teorema: *Independência Linear de Autovetores*

Se $T \in \mathcal{L}(E)$ e $\{\lambda_k\}_{0\leq k}$ for uma família de ***Autovalores distintos*** de T e $\{v_k\}_{0\leq k}$ autovetores respectivos, $Tv_k = \lambda_k v_k$, então , $\{v_k\}_{0\leq k}$ são ***Linearmente Independentes***.

Demonstração: Considere o caso $n = 2$ e $Tv_k = \lambda_k v_k$, $k = 1,2$. Se $v_1 = cv_2$ então $c \neq 0$ e $Tv_1 = cTv_2 = c\lambda_2 v_2$ e $Tv_1 = \lambda_1 v_1 = \lambda_1 c v_2$ de onde $(\lambda_1 c - c\lambda_2)v_2 = 0$ e daí $\lambda_1 - \lambda_2 = 0$. Suponha que a proposição já tenha sido provada para $n \geq 2$ e consideremos uma família de $n + 1$ autovetores $\{v_k\}_{0\leq k}$ e respectivos autovalores ***distintos*** $\{\lambda_k\}_{0\leq k}$. Suponha que não sejam LI . Portanto podemos escrever (para algum deles) $v_0 = \sum_{k=1}^{n} c_k v_k$. Então $Tv_0 = \lambda_0 v_0 = \sum_{k=1}^{n} \lambda_k c_k v_k$. Se $\lambda_0 = 0$,então $\sum_{k=1}^{n} \lambda_k c_k v_k = 0$ e como a família $\{v_k\}_{1\leq k}$ é LI, e $\lambda_k \neq \lambda_0$ teríamos $c_k = 0$ o que não é possível pois $v_0 \neq 0$. Consideremos então a alternativa $\lambda_0 \neq 0$. Então: $\lambda_0 v_0 = Tv_0 = \sum_{k=1}^{n} \lambda_k c_k v_k$, mas também $\lambda_0 v_0 = \sum_{k=1}^{n} \lambda_0 c_k v_k$ de onde $\sum_{k=1}^{n} (\lambda_0 - \lambda_k) c_k v_k = 0$. Mas como $(\lambda_0 - \lambda_k) \neq 0$, $\forall k$, pela hipótese indutiva concluímos que $c_k = 0\ \forall k$ o que é impossível pois $\lambda_0 v_0 \neq 0$. Então o teorema está demonstrado indutivamente para $n \geq 2$.

-Exercícios:

-Mostre que as funções exponenciais $\{e^{\alpha t}\}_{\alpha\in\mathbb{R}} \subset C^{\infty}(\mathbb{R})$ são Linearmente Independentes.(Sugestão: Considere $T = D$). O mesmo vale para exponenciais complexas no Espaço complexo: $\{e^{\alpha t}\}_{\alpha\in\mathbb{C}} \subset C^{\infty}(\mathbb{R}, \mathbb{C})$.

- Mostre que as funções exponenciais $\{h_\gamma(k) = \gamma^k\}_{\gamma\in\mathbb{C}} \subset \mathcal{F}(\mathbb{N}, \mathbb{C})$ são Linearmente Independentes.(Sugestão: Considere $T = S$ (Operador **Deslocamento ("*Shift*")**: $S: \mathcal{F}(\mathbb{N}, \mathbb{C}) \to \mathcal{F}(\mathbb{N}, \mathbb{C})$; $Sf(k) = f(k + 1)$).

-Mostre que os operadores lineares $T \in \mathcal{L}(E)$ em espaço de dimensão finita, $\dim E = n$, tem no máximo n autovalores, mas podem ter qualquer quantidade entre zero e n. (Dê exemplos simples em espaços reais fatorados e operadores com homotetias e rotações).

TEOREMA :(*A Simplicidade dos autovalores gera Fatoração completa do Espaço e Operador)*

Se $T \in \mathcal{L}(E)$, $\dim E = n$ e $\{\lambda_k\}_{1\leq k\leq n}$ forem autovalores **distintos**, então seus respectivos autovetores $\{v_k\}_{1\leq k\leq n}$ constituem uma Base para E . Em particular, E pode ser completamente fatorado $E = E_1 \oplus \ldots . \oplus E_n$, onde $E_k = Ker\{T - \lambda_k\} = [v_k]$ e $T \approx T_1 \oplus \ldots . \oplus T_n$ é fatorado em homotetias $T_k: E_k \to E_k, T_k v = \lambda_k v$.

Demonstração: Basta aplicar o Teorema anterior.

Observação:

Exercicios: *(A generalidade da simplicidade)*

--Argumente sobre o seguinte "Teorema Folclorico"- "*Todo Operador $T \in \mathcal{L}(E)$ que não tiver autovalores distintos, pode se tornar um destes com uma "Perturbação apropriada" tão pequena quanto se queira (ou, "Qualquer Operador Linear está a um 'passo infinitesimal' de um operador com autovalores distintos*") analisando os seguintes exemplos: a) $T \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^2)$, b)- $D^m: C^{\infty}(\mathbb{R}) \to C^{\infty}(\mathbb{R})$; $D^m u\,(x) = \frac{d^m u}{dx^m}(x)$, $m \in \mathbb{N}$. (Sugestão: a)Utilize o Método de Gauss para resolver a Equação Espectral $\begin{pmatrix} a-\lambda & b \\ c & d-\lambda \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ *perturbando* o coeficiente a para que o sistema tenha soluções com $\lambda' s$ distintos –

b) $D^m \approx (D - \varepsilon_1) \cdots (D - \varepsilon_n)$,

-Exercício:

Variações sobre o "Problema Geral de Arquimedes" e o 1º Teorema Fundamental ***: Determinar o número limitado de ingredientes com Testes ilimitados***

Consideremos o relato sobre o problema enfrentado por Arquimedes com a coroa de Hieron sob um ponto de vista mais pessimista: a suspeita do rei não se refere apenas a uma possível manipulação das quantidades de ouro e prata empregados na confecção da coroa, mas na substituição destes nobres elementos por vários outros de menor valor, como cobre, estanho e etc. A questão que se propõe é a seguinte: Admita-se que a obtenção de uma homogeneidade de composição da coroa é um feito impossível para qualquer artesão (antigo ou moderno) e, portanto cada parte dela é uma amostra de distintas proporções dos possíveis ingredientes que são em número N, finito, mas talvez bem grande. Suponhamos que Arquimedes disponha de uma infindável bateria de testes "lineares" não destrutivos que poderiam ser aplicados localmente a cada parte da coroa. (Por exemplo, radiações incidentes de diferentes comprimentos de onda λ que são refletidas em intensidade proporcional (intermediado por coeficiente específico ${c_k}^{(\lambda)}$)à quantidade de massa ${x_k}^{(a)}$ do k-ésimo ingrediente na amostra (a). Sendo o teste linear (sem interferências/interações mútuas) , a resposta total registrada para cada teste λ é a soma (Superposição) de todas as respostas de cada elemento: $\sum_{k=1}^{N} {c_k}^{(\lambda)}{x_k}^{(a)} = {R_\lambda}^{(a)}$. A questão portanto, sob o ponto de vista matemático é determinar o Número *N uma vez conhecidas as respostas* ${R_\lambda}^{(a)}$ *registradas no aparelho para cada teste* λ *e cada amostra* (a), sendo possível tomar ***grande*** quantidade de testes e de amostras, ambos bem maiores do que a variedade dos possíveis ingredientes que o artesão teria à sua disposição.

O Modelo Geral de "Arquimedes" pode ser empregado no estudo de uma "Coroa" em que não se conhece os ingredientes fundamentais que a compõem e muito menos os coeficientes de proporção específicos que cada um deles apresenta com relação a cada estímulo. Entretanto, se admitirmos como hipótese que o mecanismo interno é *linear* (isto é,as respostas são proporcionais e sem interferência e, portanto, vale o principio de superposição), o argumento da Álgebra Linear pode ser aplicado. Em Psicologia um "Modelo de Arquimedes" tem sido utilizado por décadas na Psicologia para analisar os possíveis "ingredientes" da Mente humana, razão porque, talvez surpreendentemente, alguns importantes teoremas de Álgebra Linear tenham sido originados nesta disciplina.

xxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxx

GLOSSÁRIO (*Reúna nesta seção todas as definições deste capítulo*)

"Diz a lenda (e "Se non è vero è ben trovato") que os esquimós (inuites) do Polo Ártico têm 12 palavras ou mais para designar 12 tipos distintos de neve, e os bérberes do Saara outras tantas palavras para designar os tipos de areia do deserto ou as patas de um camelo. Estes são exemplos interessantes para lembrar que a linguagem de sobrevivência em um ambiente depende muito do que se deve descrever dele e com qual exatidão ("che è piu verissimo")". (Anônimo conhecido)

DEFINIÇÃO: Isomorfismo entre Grupos-

Se G e H são dois Grupos (com suas respectivas operações denotadas por simples justaposição dos fatores), então, uma **bijeção** $\varphi: G \to H$ é um ***Isomorfismo entre os dois Grupos*** G e H se preservar a operação intrínseca de grupo, isto é, $\varphi(ab) = \varphi(a)\varphi(b)$.