11 Coordenadas Polares

1. Desenhe sobre o plano o ponto P que tem coordenadas polares:

   a) $(3, \pi/4)$
   a) $(1, 5\pi/6)$
   a) $(2, 3\pi/2)$
   a) $(1, 5\pi/4)$

   Resposta:

2. Em cada um dos casos abaixo encontre a equação em coordenadas polares.

   a) $x^2 - y^2 = 16$
   b) $2xy = 25$
   c) $(x^2 + y^2)^2 = 4(x^2 - y^2)$
   d) $x^3 + y^3 - 6xy = 0.$
   e) $4x^2 + 3y^2 = 1$
   f) $2x^2 - y^2 = 1$
   g) $y^2 + 4x = 0$
   h) $x^2 - 2y = 0$
   i) $x^2 + 2y^2 = 1$

   Resposta:

   a)
   $$r^2 \cos(2\theta) = 16.$$
   b)
   $$r^2 \sin(2\theta) = 25.$$
   c)
   $$r^2 = 4\cos(2\theta).$$
   d)
   $$r^3 \cos^3(\theta) + r^3 \sin^3(\theta) - 3r^2 \sin(2\theta) = 0.$$
   e)
   $$r^2 \cos^2(\theta) + 3r^2 = 1.$$
   f)
   $$r^2 \cos^2(\theta) + r^2 \cos(2\theta) = 1.$$
   g)
   $$r^2 \sin^2(\theta) + 4r\cos(\theta) = 0.$$
   h)
   $$r^2 \cos^2(\theta) - 2r\sin(\theta) = 0.$$
   i)
   $$r^2 + r^2 \sin^2(\theta) = 1.$$

3. Em cada um dos casos abaixo encontre a equação em coordenadas cartesianas.

   a) $r = \frac{5}{2-2\cos\theta}$
   b) $r^2 = 2\sin 2\theta$
   c) $r = \frac{6}{2-3\sin\theta}$
   d) $r^2 = \cos(\theta)$.
   e) $r\cos(\theta - \pi/4) = 2$
   f) $r\sin(\theta - \pi/3) = 3$
   g) $r + r\cos(\theta - \pi/4) = 2$
   h) $r + 2r\cos(\theta) = 1$
   i) $2r + r\cos(\theta) = 2$

   Resposta:

   a)
   $$2\sqrt{x^2+y^2} = 5 + 2x.$$
   b)
   $$(x^2+y^2)^2 = 4xy.$$
   c)
   $$2\sqrt{x^2+y^2} = 6 + 3y.$$
   d)
   $$(\sqrt{x^2+y^2})^3 = x.$$
   e)
   $$\sqrt{2}(x+y) = 4.$$
   f)
   $$y - \sqrt{3}x = 6.$$
   g)
   $$\sqrt{x^2+y^2} + \frac{1}{\sqrt{2}}x + \frac{1}{\sqrt{2}}y = 2$$
   h)
   $$\sqrt{x^2+y^2} + 2x = 1.$$
   h)
   $$2\sqrt{x^2+y^2} + x = 2.$$

4. Em cada um dos casos abaixo identifique a cônica. Determine a excentricidade, a equação cartesiana da cônica e da diretriz e as coordenadas cartesianas do(s) foco(s) e do(s) vértice(s).

   a) $r = \frac{5}{2-2\cos\theta}$
   b) $r = \frac{6}{3+\sin\theta}$
   c) $r = \frac{3}{2+4\cos\theta}$
   d) $r = \frac{4}{2-3\cos\theta}$.

e) $r = \frac{1}{2-\cos(\theta-\pi/4)}$

f) $r = \frac{1}{1+3\sin(\theta-\pi/3)}$

g) $r = \frac{1}{1-\sin(\theta-\pi/6)}$

Resposta: Para ressolver os exercçios levamos a equação na forma

$$r = \frac{r_0 e}{1 + e\cos(\theta - \phi)}$$

para poder idetificar $r_0,\ e$ e ϕ utilizando as identidades trigonométricas

$$\cos(\alpha + \beta) = \cos(\alpha)\cos(\beta) - \sin(\alpha)\sin(\beta)$$

$$\sin(\alpha + \beta) = \sin(\alpha)\cos(\beta) + \sin(\alpha)\sin(\beta).$$

Logo utilizamos esta informação para achar focos vértices e reta diretriz.

a) Parábola com

$$\textbf{Foco} \quad F = O.$$

$$\textbf{Vértice} \quad V = \left(\frac{5}{4}, \pi\right).$$

$$\textbf{Reta diretriz} \quad r\cos(\theta - \pi) = \frac{5}{2}.$$

b) Elipse com

$$\textbf{Focos} \quad F_1 = O \quad F_2 = \left(\frac{3}{2}, \frac{3\pi}{2}\right).$$

$$\textbf{Vértices} \quad V_1 = \left(\frac{3}{2}, \frac{\pi}{2}\right) \quad V_2 = \left(3, \frac{3\pi}{2}\right).$$

$$\textbf{Reta diretriz} \quad r\cos(\theta - \pi/2) = 6.$$

c) Hipérbole com

$$\textbf{Focos} \quad F_1 = O \quad F_2 = (2, 0).$$

$$\textbf{Vértices} \quad V_1 = \left(\frac{1}{2}, \pi\right) \quad V_2 = \left(\frac{3}{2}, \pi\right).$$

$$\textbf{Reta diretriz} \quad r\cos(\theta) = \frac{3}{4}.$$

d) Hipérbole com

$$\textbf{Focos} \quad F_1 = O \quad F_2 = \left(\frac{24}{5}, \pi\right).$$

$$\textbf{Vértices} \quad V_1 = \left(\frac{4}{5}, \pi\right) \quad V_2 = (4, \pi).$$

$$\textbf{Reta diretriz} \quad r\cos(\theta - \pi) = \frac{4}{3}.$$

e) Hipérbole com

$$\textbf{Focos} \quad F_1 = O \quad F_2 = \left(\frac{2}{3}, \frac{\pi}{4}\right)$$

$$\textbf{Vértices} \quad V_1 = \left(\frac{1}{3}, \frac{5\pi}{4}\right) \quad V_2 = \left(1, \frac{\pi}{4}\right).$$

$$\textbf{Reta diretriz} \quad r\cos(\theta - 5\pi/4) = 1.$$

f) Hipérbole com

$$\textbf{Focos} \quad F_1 = O \quad F_2 = \left(\frac{3}{4}, \frac{5\pi}{6}\right)$$

$$\textbf{Vértices} \quad V_1 = \left(\frac{1}{4}, \frac{5\pi}{6}\right) \quad V_2 = \left(\frac{1}{2}, \frac{5\pi}{6}\right).$$

$$\textbf{Reta diretriz} \quad r\cos(\theta - 5\pi/6) = \frac{1}{3}.$$

g) Hipérbole com

$$\textbf{Foco} \quad F_1 = O.$$

$$\textbf{Vértice} \quad V = \left(\frac{1}{2}, \frac{5\pi}{3}\right).$$

$$\textbf{Reta diretriz} \quad r\cos(\theta - 5\pi/3) = 1.$$

5. Considere a cônica cuja equação em coordenadas polares é dada por

$$r = \frac{1}{2 + \sin(\theta)}$$

Determine

i- tipo de cônica

iii- a equação da cônica em coordenadas cartesianas.

Resposta:

Juntando as partes podemos responder:

i- Elipse

iii-

$$4x^2 + 3y^2 + 2y = 1.$$

6. (a) Encontre as coordenadas polares (r, θ) do ponto $(1, 1)$ com $r > 0$ e $0 \leq \theta < 2\pi$.

b) Determine as coordenadas cartesianas de todos os pontos que estão sobre uma reta paralela ao eixo polar a $\theta = \pi$ unidades dele.

(c) Reescreva a equação $2\,x\,y = 25$ em coordenadas polares.

(d) Reescreva a equação $r = 3\,\cos(\theta)$ em coordenadas cartesianas.

Resposta:

(a) As coordenadas polares são $r = \sqrt{2}$ e $\theta = \pi/4$.

(b) As coordenadas cartesianas de todos os pontos que estão sobre uma reta paralela ao eixo polar a $\theta = \pi$ unidades dele são (x, y) com $x < 0$.

(c) A equação $2\,x\,y = 25$ em coordenadas polares é escrita como $r^2 \sin(2\theta) = 25$.

(d) A equação $r = 3\,\cos(\theta)$ em coordenadas cartesianas é escrita como

$$x^2 + y^2 = 3x.$$

7. Verifique se as afirmações abaixo são verdadeiras ou falsas.

- A equação em coordenadas polares $r(2 - 3\cos(\theta)) = 4$ representa uma parábola. **Resposta:** (FALSO)
- A equação em coordenadas polares $r(1 - 2\cos(\theta)) = 1$ representa uma elipse. **Resposta:** (FALSO)