① $y'' - 2y' + 2y = e^{x}(2\cos(x) - 4x\,\text{sen}(x))$

★ PASSO I: RESOLVER A EQUAÇÃO HOMOGÊNEA ASSOCIADA PARA OBTER A SOLUÇÃO COMPLEMENTAR y_c

$y'' - 2y' + 2y = 0$

EQUAÇÕES LINEARES HOMOGÊNEAS COM COEFS. CONSTANTES TÊM EQUAÇÃO CARACTERÍSTICA DO TIPO

$r^2 - 2r + 2 = 0$ E CANDIDATA A SOLUÇÃO $e^{rx} = y_c$

$$r = \begin{cases} 1+i \\ 1-i \end{cases}$$

(O CONJUGADO SEMPRE APARECE COMO SOLUÇÃO SE OS COEFICIENTES DA EQUAÇÃO QUADRÁTICA SÃO REAIS)

USANDO A FÓRMULA DE EULER: $e^{ix} = \cos(x) + i\,\text{sen}(x)$ TEMOS

$$\begin{aligned} y_c &= C_1 e^{x(1+i)} + C_2 e^{x(1-i)} \\ &= C_1 e^{x} e^{xi} + C_2 e^{x} e^{-ix} \\ &= C_1 e^{x}(\cos(x) + i\,\text{sen}(x)) + C_2 e^{x}(\cos(x) - i\,\text{sen}(x)) \\ &= \underbrace{(C_1 + C_2)}_{K_1} e^{x} \cos(x) + \underbrace{i(C_1 - C_2)}_{K_2} e^{x}\,\text{sen}(x) \end{aligned}$$

$$y_c = K_1 e^{x} \underbrace{\cos(x)}_{y_1} + K_2 e^{x} \underbrace{\text{sen}(x)}_{y_2}$$

★ PASSO II: PROPOR COEFICIENTES PARA A SOLUÇÃO PARTICULAR y_p

OBSERVE O LADO DIREITO DA EQUAÇÃO: $e^{x}(2\cos(x) - \underline{4x\,\text{sen}(x)})$

COMO TEMOS UM POLINÔMIO MULTIPLICANDO UMA FUNÇÃO TRIGONOMÉTRICA, PRECISAMOS DE POLINÔMIOS "COMPLETOS" MULTIPLICANDO AMBOS SEN E COS:

$$y_p = x^{s} e^{x}((Ax + B)\cos(x) + (Cx + D)\,\text{sen}(x))$$

(OS COEFS. DEVIDO A "$2\cos(x)$" SÃO ABSORVIDOS POR B E D)

★ PASSO III: GARANTIR QUE y_p E y_c SÃO LINEARMENTE DEPENDENTES COM O VALOR DE s

s NÃO PODE SER 0: TERÍAMOS $Be^{x}\cos(x)$ EM y_p E $K_1 e^{x}\cos(x)$ EM y_c

s PODE SER 1

$$y_p = x e^{x}((Ax + B)\cos(x) + (Cx + D)\,\text{sen}(x))$$

PEDRO SADER AZEVEDO RA: 243245

* PASSO IV : ENCONTRAR y_p' E y_p''

$$y_p' = \frac{\partial}{\partial x} y_p = \frac{\partial}{\partial x}\, xe^x((Ax+B)\cos(x) + (Cx+D)\operatorname{sen}(x))$$

$$= \frac{\partial}{\partial x}(xe^x)((Ax+B)\cos(x) + (Cx+D)\operatorname{sen}(x)) + xe^x \frac{\partial}{\partial x}((Ax+B)\cos(x) + (Cx+D)\operatorname{sen}(x))$$

$$= (x+1)e^x((Ax+B)\cos(x) + (Cx+D)\operatorname{sen}(x)) + xe^x\left(\frac{\partial}{\partial x}((Ax+B)\cos(x)) + \frac{\partial}{\partial x}((Cx+D)\operatorname{sen}(x))\right)$$

$$= (x+1)e^x((Ax+B)\cos(x) + (Cx+D)\operatorname{sen}(x)) + xe^x(A\cos(x) - (Ax+B)\operatorname{sen}(x) + C\operatorname{sen}(x) + (Cx+D)\cos(x))$$

$$y_p'' = \frac{\partial}{\partial x} y_p' = \frac{\partial}{\partial x} e^x\Big[(x+1)((Ax+B)\cos(x) + (Cx+D)\operatorname{sen}(x)) + x(A\cos(x) - (Ax+B)\operatorname{sen}(x) + C\operatorname{sen}(x) + (Cx+D)\cos(x))\Big]$$

$$= e^x\Big[(x+1)((Ax+B)\cos(x) + (Cx+D)\operatorname{sen}(x)) + x(A\cos(x) - (Ax+B)\operatorname{sen}(x) + C\operatorname{sen}(x) + (Cx+D)\cos(x))\Big]$$

$$+ e^x \frac{\partial}{\partial x}\Big[(x+1)((Ax+B)\cos(x) + (Cx+D)\operatorname{sen}(x)) + x(A\cos(x) - (Ax+B)\operatorname{sen}(x) + C\operatorname{sen}(x) + (Cx+D)\cos(x))\Big]$$

$$= \frac{\partial}{\partial x}(Ax^2 + (A+B)x + B)\cos(x)$$
$$+ \frac{\partial}{\partial x}(Ax^2 + (A+B) + B)\operatorname{sen}(x)$$
$$+ (A\cos(x) - (Ax+B)\operatorname{sen}(x) + C\operatorname{sen}(x) + (Cx+D)\cos(x))$$
$$+ x\frac{\partial}{\partial x}(A\cos(x) - (Ax+B)\operatorname{sen}(x) + C\operatorname{sen}(x) + (Cx+D)\cos(x))$$

DE FORMA SIMPLIFICADA, FATORANDO AS FUNÇÕES TRIGONOMÉTRICAS, TEMOS:

$$y_p' = e^x(\cos(x)(Ax^2 + 2Ax + Bx + B + Cx^2 + Dx) + \operatorname{sen}(x)(-Ax^2 - Bx + Cx^2 + 2Cx + Dx + D))$$

$$y_p'' = 2e^x(\cos(x)(2Ax + A + B + Cx^2 + 2Cx + Dx + D) + \operatorname{sen}(x)(-Ax^2 - 2Ax - Bx - B + 2Cx + C + D))$$

VALE A PENA TAMBÉM REESCREVER y_p DA SEGUINTE MANEIRA

$$y_p = xe^x((Ax+B)\cos(x) + (Cx+D)\operatorname{sen}(x))$$
$$= e^x((Ax^2 + Bx)\cos(x) + (Cx^2 + Dx)\operatorname{sen}(x))$$

PEDRO SADER AZEVEDO RA: 243245

★ PASSO V: SUBSTITUIR y_p, y_p' E y_p'' NA EQUAÇÃO ORIGINAL E CALCULAR OS COEFICIENTES

$$y_p'' - 2y_p' + 2y_p = e^x(2\cos(x) - 4x\,\mathrm{sen}(x)) = 2e^x(\cos(x) - 2x\,\mathrm{sen}(x))$$

$$= 2e^x\big(\cos(x)(\cancel{2Ax} + A + \cancel{B} + \cancel{Cx^2} + 2Cx + \cancel{Dx} + D) + \mathrm{sen}(x)(-\cancel{Ax^2} - 2Ax - \cancel{Bx} - B + \cancel{2Cx} + C + \cancel{D})$$

$$+ \cos(x)(-\cancel{2Ax} - \cancel{Ax^2} - \cancel{B} - \cancel{Bx} - \cancel{Cx^2} - \cancel{Dx}) + \mathrm{sen}(x)(+\cancel{Ax^2} - \cancel{Cx^2} + \cancel{Bx} - \cancel{2Cx} - \cancel{Dx} - \cancel{D})$$

$$+ \cos(x)(+\cancel{Ax^2} + \cancel{Bx}) + \mathrm{sen}(x)(+\cancel{Cx^2} + \cancel{Dx})\big)$$

$$= 2e^x(\cos(x)(A + 2Cx + D) + \mathrm{sen}(x)(-2Ax - B + C)) = 2e^x(\cos(x) - 2x\,\mathrm{sen}(x))$$

$$\Rightarrow \begin{cases} A + D = 1 \\ 2C = 0 \\ -2A = -2 \\ C - B = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A = 1 \\ B = 0 \\ C = 0 \\ D = 0 \end{cases} \Rightarrow y_p = e^x x^2 \cos(x)$$

★ PASSO VI: ESCREVER A SOLUÇÃO GERAL y COMO COMBINAÇÃO LINEAR DE y_c E y_p

$$\boxed{y = K_1 e^x \cos(x) + K_2 e^x\,\mathrm{sen}(x) + K_3 e^x x^2 \cos(x)}$$

PEDRO SADER AZEVEDO RA: 243245

(2) $y'' - 3y' + 2y = \dfrac{1}{e^x + 1}$

★ PASSO I : RESOLVER A HOMOGÊNEA ASSOCIADA PARA OBTER A SOLUÇÃO COMPLEMENTAR y_c

$$y'' + 3y' + 2y = 0$$

EQUAÇÃO CARACTERÍSTICA : $r^2 + 3r + 2 = 0$, COM CANDIDATA A SOLUÇÃO e^{rx}

$$r = \begin{cases} -2 \\ -1 \end{cases} \Rightarrow \quad y_c = K_1 \underbrace{e^{-1x}}_{y_1} + K_2 \underbrace{e^{-2x}}_{y_2}$$

★ PASSO II : APLICAR A FÓRMULA DO MÉTODO DE VARIAÇÃO DOS PARÂMETROS

$$y_p = u_1 y_1 + u_2 y_2 = u_1 e^{-x} + u_2 e^{-2x}$$

$$u_i = \int \frac{f(x)\, W_i}{W} \, dx$$

$$u_1 = \int \frac{(e^x+1)^{-1} W_1}{W} \, dx \quad \text{E} \quad u_2 = \int \frac{(e^x+1)^{-1} W_2}{W} \, dx$$

$$W = \begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1' & y_2' \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} e^{-x} & e^{-2x} \\ -e^{-x} & -2e^{-2x} \end{vmatrix} = e^{-3x} - 2e^{-3x} = -e^{-3x}$$

$$(e^x+1)^{-1} W_1 = \begin{vmatrix} 0 & e^{-2x} \\ (e^x+1)^{-1} & -2e^{-2x} \end{vmatrix} = -e^{-2x} (e^x+1)^{-1} = \frac{-e^{-2x}}{e^x+1}$$

$$(e^x+1)^{-1} W_2 = \begin{vmatrix} e^{-x} & 0 \\ -e^{-x} & (e^x+1)^{-1} \end{vmatrix} = e^{-x} (e^x+1)^{-1} = \frac{e^{-x}}{e^x+1}$$

$$u_1 = \int \frac{(e^x+1)^{-1} W_1}{W} = \int \frac{e^x}{e^x+1} \, dx = \int \frac{1}{m} \, dm = \ln(m) = \ln(e^x+1) + C$$

$$m(x) = e^x + 1 \Rightarrow dm = e^x \, dx$$

$$u_2 = \int \frac{(e^x+1)^{-1} W_2}{W} = \int \frac{-e^{2x}}{e^x+1} \, dx = -\int \frac{u}{u+1} \, du = -\int \frac{u+1-1}{u+1} \, du = \int \left(1 - \frac{1}{u+1}\right) du$$

$$m(x) = e^x \Rightarrow du = e^x \, dx$$

$$= u + \ln(u+1)$$

$$= e^x + \ln(e^x+1) + C$$

$$\Rightarrow \begin{cases} u_1 = \ln(e^x + 1) \\ u_2 = e^x + \ln(e^x + 1) \end{cases}$$

$$\Rightarrow y_p = \ln(e^x + 1)\, e^{-x} + (e^x + \ln(e^x + 1))\, e^{-2x}$$

* PASSO III: ESCREVER A SOLUÇÃO GERAL COMO COMBINAÇÃO LINEAR DE Y_c E Y_p

$$\boxed{Y_{(x)} = K_1 e^{-x} + K_2 e^{-2x} + K_3 \left(\ln(e^x+1)\, e^{-x} + (e^x + \ln(e^x+1))\, e^{-2x} \right)}$$

PEDRO SADER AZEVEDO RA: 243245