UNICAMP -

Wilson Castro Ferreira Jr.-II Sem 2021

Notas de AULA: *ÁLGEBRA LINEAR-*

Capítulo III : BASE E DIMENSÃO : *Teorema Fundamental da Álgebra Linear*

I-INTRODUÇÃO:

Ia-*Representação Ótima dos Elementos de um Espaço Vetorial*

O Problema Fundamental da Álgebra Linear (e certamente de qualquer Estrutura Matemática) refere-se à elaboração de Métodos construtivos para uma representação interna dos elementos de um Espaço Vetorial. Os três aspectos desejáveis que tais Métodos de Representação/Construção devem exibir são:

1) ***Intrínseco***: *Utilização apenas de operações internas da Estrutura*

2) ***Minimal***: *Utilização da quantidade mínima possível de elementos do Espaço*, e

3) *Não Redundante:* *Representação biunívoca, sem ambiguidade*

O protótipo e o Modelo de perfeição para este procedimento é, claro, a representação indu-arábica para os números naturais $\mathbb{N}$ que na sua expressão binária toma a forma $n = \sum_{k=0}^{N} d_k 2^n$; $d_k \in \{0,1\}$) , e cuja notação posicional com vírgula utiliza somente os dígitos $\{0,1\}$. Assumindo a Soma infinita como uma operação intrínseca o conjunto de Números reais $\mathbb{R}$ pode ser representado na forma: $r = \sum_{k=-\infty}^{N} d_k 2^n$; $d_k \in \{0,1\}$.

Em Álgebra Linear, a primeira condição **(1)** nos constrange às operações de Soma e Multiplicação por escalar, ou seja, às Combinações Lineares $\sum_{k=0}^{N} c_k\, v_k$; $c_k \in \mathrm{F}$, que são as expressões intrínsecas mais gerais disponíveis. (**Observação**:*Utilizaremos o símbolo* genérico "F" *para designar o Campo Escalar do Espaço Vetorial em questão, podendo representar qualquer um dos seguintes* $\mathbb{R}, \mathbb{C}, \mathbb{Q}$ *se nada ao contrário for explicitamente declarado.*)

No capitulo anterior denotamos pelo símbolo $[K] = \{\sum_{k=0}^{N} c_k\, v_k\ ;\ v_k \in K, c_k \in \mathrm{F}\}$ o sub-espaço vetorial gerado por todas as possíveis combinações lineares de elementos de um dado subconjunto $K \subset E$ do Espaço Vetorial E . Neste capítulo trataremos de subconjuntos K que sejam geradores de todo o Espaço Vetorial no sentido de que $[K] = E$ e que satisfaçam as condições impostas acima.

As duas condições relacionadas acima se referem à busca de sub-Conjuntos $K \subset E$ geradores do Espaço Vetorial que sejam **(2)** *Minimais* do Espaço E , isto é, quando nenhum de subconjunto próprio dele também possa gerar todo o Espaço e **(3)***Não Redundantes***,** isto é, quando todos os elementos $v \in E = [K]$ disponham de uma *única* representação da forma $v = \sum_{k=0}^{N} c_k\, v_k$. (O termo *"minimal"* se refere, naturalmente, à *ordem parcial* de inclusão " $\subset$ " aplicada a todos os subconjuntos K ***geradores*** do Espaço, i.e., $[K] = E$)

Surpreendentemente, o Teorema Fundamental da Álgebra Linear, a ser abordado em seguida, mostra que as condições (2&3) são equivalentes e estes subconjuntos ***Minimais*** / ***Não Redundantes***, serão denominados ***Bases*** do Espaço Vetorial. A demonstração de existência de Bases para um Espaço Vetorial e o desenvolvimento de alguns Métodos para o cálculo desta importante classe de subconjuntos é o objetivo deste capítulo e se constitui, de fato, em um Tema recorrente em toda a Álgebra Linear.

Os Métodos desenvolvidos neste Capítulo para o ***Cálculo*** algorítmico de Bases e para a ***Verificação*** de minimalidade de subconjuntos de vetores exibem, todos eles, um caráter linear (i.e., sem multiplicações entre variáveis), pois são fundamentados nas idéias do Método de Eliminação de Gauss. Em capítulos seguintes outros Métodos (***não lineares***) baseados na operação de produto interno (Gram-Schmidt e Householder) e na função determinante serão apresentados para os mesmos propósitos.

Ib-Vetores e Informação- *Interpretação*

> *"Knowledge is of two kinds: Either we **know** the subject ourselves, or we **know** where we can find the **information** upon it....In both cases we surely need to know how to retrieve the **information** from where it is stored". ~Samuel Johnson-sec.XVIII.*

A interpretação original e mais intuitiva sobre a natureza dos *vetores* é aquela representada pelo conceito geométrico de *deslocamento retilíneo* resultante do Modelo mais comum da Estrutura de Espaço Vetorial. Esta interpretação é obviamente a expressão da cognição visual humana que, por sua vez, resulta de uma percepção ecológica evolutivamente baseada em trajetórias luminosas em meios homogêneos (sem refração). A importância singular da visão para a cognição humana e o enorme recurso cerebral utilizado para o processamento deste sentido explica com clareza o fato da Geometria Euclideana se constituir no instrumento intuitivo e interpretativo mais natural e poderoso para o estudo e o desenvolvimento da matemática dos Espaços Vetoriais. É também por esta mesma razão que o recurso a uma descrição pictórica da Álgebra Linear (como de qualquer área da Matemática) é quase sempre de grande auxílio, às vezes decisivo, para a compreensão intuitiva de suas questões.

Todavia, há outras importantes interpretações da Estrutura Matemática de Espaço Vetorial que eventualmente também se mostram úteis e oportunas para a sua compreensão intuitiva. Uma destas interpretações alternativas, com origem muito mais recente do que a Geométrica, associa um conceito de ***informação*** a vetores e interpreta o subespaço vetorial gerado por um conjunto deles como toda a informação *potencialmente* "*acessível*" a partir do conteúdo depositado primariamente nos vetores componentes. (Esta interpretação foi provavelmente disseminada a partir da formulação matemática de J. von Neumann para a Teoria Quântica na década de 1920 e hoje também aplicada à ciência de dados (ref.K. van Rijsbergen). Este ponto de vista também sugere uma interessante analogia com o Método Axiomático em que uma Teoria é considerada potencialmente contida em (ou, implicitamente descrita por) um conjunto básico de Axiomas. Ou seja, uma Teoria Axiomática é o conjunto de todas as proposições "logicamente deriváveis/acessíveis" a partir dos Axiomas básicos, assim como todo elemento de um subespaço vetorial é gerado por combinações lineares de um conjunto base de vetores).

Sob este ponto de vista o objeto matemático depositário da **Informação** não é exatamente um conjunto de vetores individuais, mas o espaço vetorial gerado por eles. Assim, por exemplo, a informação total contida em um conjunto de vários vetores colineares se restringe a um espaço unidimensional que poderia ser gerado por um único deles. Ou seja, homotetias (não nulas) de um vetor não produzem informações adicionais, apenas informações redundantes, pois o conteúdo total destas já está *potencialmente* representado pelo subespaço vetorial gerado por apenas um deles. Em particular, vetores paralelos em sentido contrário não representam informações *opostas*, mas *contêm* a mesma "quantidade" de informação. Em outros termos, a essência informativa de *um vetor* solitário está representada pela "reta" que ele define.

Analogamente, dados dois vetores $\{u, v\}$, o conteúdo ("quantidade") total de informações contido neste conjunto é representado pelo sub-espaço gerado por ambos, $[\ \{u, v\}\ ]$. Assim, se um deles puder ser escrito como múltiplo do outro, então $[\ \{u, v\}\ ] = [u] = [v]$ e a *conjunção* deles não acrescenta nenhum ganho de informação, enquanto que, se eles não forem colineares teremos $[u] \subsetneq [u, v]\ e\ [v] \subsetneq [u, v]$, mostrando que a conjunção deles aumenta efetivamente o conteúdo de informação que apenas um deles, isoladamente, representa.

Um terceiro vetor w se puder ser escrito como combinação linear de ambos $w = au + bv$, resultará que $[\{u, v, w\}] = [\{u, v\}]$ e, portanto, w não acrescentaria informações a $[\{u, v\}]$. Neste caso, o espaço plano $\pi = [\{u, v\}]$ gerado pelas suas combinações lineares são todas as representações possíveis que podem ser produzidas a partir daquelas que ambos contêm. Por outro lado, um vetor z que estiver fora deste plano π contém informações "extras" que não podem ser descritas a partir daquelas contidas no par de vetores $\{u, v\}$ e, portanto, o total de informação gerado por estes três vetores, representado pelo espaço $[\{u, v, z\}]$, tem um maior conteúdo do que $[\{u, v\}]$. Assim, sob o ponto de vista particular da informação, os objetos matemáticos de real interesse em Álgebra Linear são os ***subespaços vetoriais***, os vetores isolados são apenas um meio, o que explica a importância do estudo das construções sub-espaços vetoriais e de sua álgebra.

Portanto, seria razoável propor a seguinte definição (que não é usual na literatura de Álgebra Linear, embora devesse ser) : "*Dois subconjuntos de um espaço vetorial serão considerados* ***equivalentes*** *se produzem o mesmo conteúdo de informações, ou , em outros termos, se geram o mesmo subespaço vetorial*". Esta relação de equivalência é a mesma que utilizaremos na caracterização algébrica do conceito de Base (v. Exercicio 1) abaixo).

A interpretação geométrica Euclideana (especialmente no plano) de *conjuntos equivalentes* é razoavelmente clara e auxilia consideravelmente na compreensão desta idéia; a manipulação de desenhos e gráficos no papel, mesmo elementares, pode ajudar muito na compreensão do tema a ser tratado.

EXERCÍCIOS: ***(Exemplifique geometricamente os seus argumentos com gráficos em Espaços Euclideanos e interprete-os em termos de Informação)***

1-Mostre que a relação " $\approx$ " entre os subconjuntos $\wp(E)$ de um Espaço Vetorial E definidas por: "Se $K_1, K_2 \subset E$ diremos que $K_1 \approx K_2$ se $[K_1] = [K_2]$" é uma relação de equivalência. (Em *outros* termos, dois subconjuntos de vetores de um Espaço Vetorial são equivalentes se ambos, separadamente, contem a mesma informação).

2a- Mostre que se $K \subset C$ então $[K] \subset [C]$

2b-Mostre que sendo $K \subset C$, e $K \neq C$, mesmo assim é possível que tenhamos $[K] = [C]$, ou seja, $K \approx C$.

2c-Mostre também que $[K_1 \cap K_2] \subset [K_1] \cap [K_2]$ e analise a possibilidade de uma igualdade.

2d-Analise a relação entre $[K_1 \cup K_2]$, $[K_1] + [K_2]$ e $[K_1 + K_2]$

3-Mostre que se $F \subset E$ são dois Espaços Vetoriais, então $F + \{0\} = F$, $F + E = E$, $F + F = F$ e que não existe "negativo" para esta operação de "soma" . Interprete esta última afirmação como a *impossibilidade de destruir informações com outras informações.*

4-Considere o conjunto $\mathcal{H}(E)$ formado por todos os subespaços vetoriais de um Espaço Vetorial Real $\{E, \}$. Defina neste conjunto as operações de Soma e Multiplicação por Escalar (já definidas) e um (novo) **Produto** ($\cdot$) binário (entre elementos de $\mathcal{H}(E)$) da seguinte maneira: Se $F_1, F_2 \in \mathcal{H}(E)$ $F_1 \cdot F_2 = F_1 \cap F_2 \in \mathcal{H}(E)$. Mostre que esta é uma "***Boa Definição***" no sentido de que o resultado da operação **Produto** ($\cdot$) é, de fato um elemento de $\mathcal{H}(E)$ que pode ser obtido sem ambigüidade tal como descrito. Obtenha as principais propriedades operacionais da Estrutura $\{\mathcal{H}(E), +, \mathbb{R}, \cdot\}$.

II-INDEPENDÊNCIA LINEAR, MINIMALIDADE, E NÃO-REDUNDÂNCIA

O capítulo anterior mostrou como *Sub-Espaços* Vetoriais $[K]$ podem ser gerados por *Sub-conjuntos* de vetores K de um Espaço Vetorial E por intermédio de combinações lineares, um processo intrínseco (já que faz uso apenas da operações internas de soma e multiplicação) que é fundamental para a Teoria e suas aplicações. O presente capítulo trata da caracterização e construção dos conjuntos "***Econômicos"*** ("***Não Redundantes***") dentre aqueles que são capazes de gerar o Espaço Vetorial em que estão imersos. Nesta seção mostraremos que as condições de *Economia* e *Minimalização* são de fato equivalentes e veremos que para cada Espaço Vetorial sempre existem inúmeros conjuntos ***Minimais*** que são seus geradores da maneira mais ***Econômica*** possível.

A literatura clássica de Álgebra Linear define o conceito de Subconjuntos geradores *Minimais* de um Espaço Vetorial utilizando uma caracterização matematicamente técnica, que à primeira vista parece obscura e artificial devido a uma nomenclatura não muito sugestiva. Para efeito de inserção de linguagem (já que os sugestivos termos "*Não-Redundância*" e "*Minimalidade*" não são normalmente utilizados neste contexto) e ao mesmo tempo ilustrar os seus significados, iniciaremos pela apresentação das seguintes definições:

DEF: INDEPENDÊNCIA LINEAR : Diz-se que um conjunto de vetores $K \subset E$ contidos no Espaço Vetorial E é ***Linearmente Independente*** (***LI***) se *o vetor* 0 puder ser representado de uma ***única forma*** como combinação linear de seus elementos (a saber, com coeficientes nulos). *Caso contrário diz-se que K é um conjunto Linearmente Dependente (**LD**).*

DEF- ***Conjunto MINIMAL***: Um subconjunto não vazio $K \subset E$ de um Espaço Vetorial E é denominado ***Minimal*** se o sub-espaço $[K] = E_0$ gerado por ele, **não pode** ser gerado por nenhum subconjunto estrito, isto é, se $w \in K$ então $[K - \{w\}] \neq [K]$.

DEF-Conjunto ***NÃO REDUNDANTE*** : Um subconjunto não vazio $K \subset E$ de um Espaço Vetorial E é denominado ***Não Redundante*** se todos os elementos $w = \sum_{k=1}^{N} c_k v_k$ do sub-espaço $[K]$ gerado por ele, podem ser representados de uma ***única*** maneira.

O conceito de *Independência Linear* e de subconjuntos ***L****inearmente* ***I****ndependentes* (***L I***) são fundamentais na teoria da Álgebra Linear em que aparecem sob várias formas equivalentes com interpretações muito mais sugestivas do que a sua definição meramente "técnica". Por este motivo é importante apresentar algumas de suas outras facetas interpretativas com o seguinte Teorema.

Exercício: Verifique separadamente se os conjuntos abaixo são i)LI, ii)Minimais iii)Não redundantes:

1)$K = \{1, x, x^2, x^3\} \subset P(\mathbb{R})$,2) $K = \{1, (x-2), (x-1)x, x^3\} \subset P(\mathbb{R})$ 3)$K = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\} \subset \mathbb{R}^3$.

TEOREMA: *Caracterizações de um Conjunto MINIMAL* & *L I* & *NÃO-REDUNDANTE*

Se K for um subconjunto não vazio de um Espaço Vetorial E , $K \subset E$, então as **QUATRO** seguintes afirmações são **Equivalentes**:

1- K é ***Linearmente Independente (****O zero admite apenas uma representação em* $[K]$ ***)***
2- K é ***Não Redundante (***Todos os elementos de $[K]$ são descritos por uma *única* combinação linear)

3- K é ***Minimal*** ("*Para qualquer* $w \in K$ *então* $[K - \{w\}] \neq [K]$ "

4-Nenhum dos elementos de K pode ser representado como combinação linear dos restantes.

Demonstração: Todas as implicações são reversas,("*redução ao absurdo*") ou seja, $\sim 2) \Rightarrow \sim 1)$; $\sim 3) \Rightarrow \sim 2)$; $\sim 4) \Rightarrow \sim 3)$ $e, finalmente$, $\sim 1) \Rightarrow \sim 4)$. (OBS: O símbolo lógico " ***~P*** " significa a negação da proposição "***P***").

Suponha ~2). Se $v = \sum_{k=1}^{N} a_k v_k = \sum_{k=1}^{N} b_k v_k$ com pelo menos dois respectivos coeficientes $\{a_k\}$,$\{b_k\}$ distintos, digamos $a_1 - b_1 = c \neq 0$, então $cv_1 + \sum_{k=2}^{N}(a_k - b_k)v_k = 0$ que implica em ~1). Suponha ~3). Se K não for minimal teremos$w \in K$ e $[K - \{w\}] = [K]$. Mas então, $w \in [K - \{w\}]$ e pode ser representado de duas formas em $[K]$; uma só ele mesmo e outra em$[K - \{w\}] = [K]$, ou seja, ~2. Suponha ~4). Isto significa que existe um $w \in K$ e $w \in [K - \{w\}]$ e, portanto, $[K - \{w\}] = [K]$ que é ~3). Suponha ~1). Portanto existe outra representação do zero distinta da totalmente nula, $0 = \sum_{k=1}^{N} a_k v_k$ com, digamos, $a_1 \neq 0$. Mas então v_1 poderia ser representado como combinação linear dos restantes que é ~4).

OBS:

1-A demonstração "por absurdo" assume o ***Princípio*** da *terceira opção excluída* (isto é, dada uma proposição qualquer P , então uma e somente uma das proposições "P " ou "$\sim P$" é verdadeira). Assim, demonstrando a *implicação* $\sim P_2 \Rightarrow \sim P_1$, e sabendo que P_1 é verdadeiro, então necessariamente temos P_2 verdadeira, pois a outra opção ($\sim P_2$)tornaria $\sim P_1$ também verdadeira contrariando o ***Princípio***. (ref. Yu.I.Manin-*Lo demonstrable*...ed.MIR)

2-A caracterização 1), utilizada com mais freqüência como definição de conjuntos ***L I***, tem um caráter excepcional por citar apenas o elemento Zero quando na verdade a condição 2) , equivalente, é mais esclarecedora desta condição.

Como todas as facetas apresentadas acima para o conceito de *Independencia Linear* são importantes, é pedagogicamente interessante que as equivalências acima relacionadas sejam verificadas duas a duas tal como solicitado no Exercício abaixo.

EXERCÍCIO:

Demonstre as 6 equivalências de cada par das 4 caracterizações de Ind Lin apresentadas no Teorema acima. (Obs: São portanto 3 a demonstrar além das apresentadas pelo teorema)

III- BASES : *CONJUNTOS GERADORES MINIMAIS / NÃO-REDUNDANTES / LI*

A importância da caracterização de *Minimalidade/Não-redundância/Independencia Linear* de um subconjunto K com respeito a subconjuntos de um Espaço Vetorial E decorre da *economia* com que ele gera os elementos do subespaço vetorial $[K]$, isto é, biunivocamente em termos dos coeficientes das combinações lineares, fato este demonstrado pelo Teorema acima e, naturalmente, desejável. A classe de sub-conjuntos *minimais* que geram todo o Espaço Vetorial em que estão imersos, $[K] = E$, desempenha papel tão fundamental na Teoria que um termo especial deve ser utilizado para designá-los:

DEFINIÇÃO- BASE de um Espaço Vetorial –

Se E for um Espaço Vetorial, então todo subconjunto $B \subset E$ que for ***GERADOR MINIMAL*** de E , ($isto$ é, $[B] = E$) é denominado ***BASE*** deste Espaço.

DEFINIÇÃO: ***COORDENADAS***

Se $B = \{\beta_1, .., \beta_n\} \subset E$ for uma Base ordenada do Espaço Vetorial E (F) então, a cada elemento $v \in E$ corresponde um único conjunto ordenado de coeficientes escalares $(c_1, .., c_n) \in$ F tal que $v = \sum_{k=1}^{k=n} c_k v_k$ que é denominado **Coordenada de** v na Base ordenada $B = \{\beta_1, .., \beta_n\}$.

OBS: *Um termo sugestivo, mas não utilizado para se referir a uma BASE ordenada e, respectivamente, ao papel desempenhado por seus elementos seria o de "**Conjunto de Descritores**".*

A importância prática da existência de Bases ordenadas de um Espaço Vetorial é obviamente a sua capacidade de representar *numericamente* e *biunivocamente* todos os elementos deste Espaço, isto é, em termos de coeficientes de suas respectivas combinações lineares.

Entretanto, em um Espaço Vetorial há uma multitude de Bases, fato este que não representa um estorvo ou ambiguidade, mas, ao contrário, é um recurso de importância fundamental na Álgebra Linear. De fato, um Espaço Vetorial admite uma quantidade infinita de Bases como mostra o Exercício abaixo. Os Métodos mais profícuos e importantes na Matemática tomam partido desta variedade para escolher a Base mais apropriada para a resolução de cada problema. Na verdade, em muitos casos, a principal manobra para a resolução de fato, ou mais eficiente, de um problema consiste exatamente na construção de uma Base especificamente adequada à questão em vista.

Portanto, para melhor empregar esta estratégia, é necessário dispor de Métodos para a construção de Bases com propriedades particulares e vários deles serão tratados neste texto.

EXERCÍCIO:

Mostre que se $B = \{\beta_k\}_{1 \le k \le n}$ for base de um Espaço Vetorial E , então existem infinitas Bases deste espaço. (**Sugestão**: Por exemplo $B^* = \{a_k \beta_k \,;\, a_k \neq 0\}_{1 \le k \le n}$, , $B^+ = \{\beta_1 + \beta_2, \beta_2, \dots, \beta_n\}_{1 \le k \le n}$ e todas as composições de transformações destes tipos).

Apesar da diversidade de Bases de um determinado Espaço Vetorial, há entre elas uma surpreendente e notável característica que as conecta: a ***Invariância*** do número de seus elementos. Este fato estabelece um limite mínimo e comum de tamanho para os conjuntos minimais de geradores/descritores de um Espaço Vetorial, o que será bem explicitado pelo importante Teorema abaixo.

TEOREMA FUNDAMENTAL DA ÁLGEBRA LINEAR: *Invariância & Dimensão*

Se um Espaço Vetorial E tiver uma ***Base finita*** $B = \{\beta_1, \dots, \beta_n\}$*, Então*

1. ***1)*** *Qualquer subconjunto $K = \{z_1, \dots \dots, z_m\} \subset E$ que também gere o Espaço E, isto é, $[K] = E$ necessariamente terá cardinalidade maior ou igual à cardinalidade de B, isto é, $m \geq n$.*
2. ***2)*** *Todas as Bases de E tem exatamente a mesma cardinalidade , isto é, n elementos.*

DEMONSTRAÇÃO:

1)-*Como K gera todo o espaço E , é possível escrever cada elemento de $B = \{\beta_1, \dots, \beta_n\}$ como combinação linear de elementos de K e iniciemso pelo elemento indexado β_1. Digamos que $\beta_1 = a_1 z_1 + \sum_{k=2}^{m} a_k z_k$ com $a_1 \neq 0$. Então, o conjunto $\{\beta_1, z_2, \dots., z_m\} = K_1$ continua sendo do mesmo tipo que K, isto é, com m elementos e gerando todo o espaço E.* (*Pois $z_1 = \frac{1}{a_1}(\beta_1 - \sum_{k=2}^{m} a_k z_k)$ e todas as combinações lineares de $\{z_1, \dots \dots, z_m\}$ podem agora serem re-escritas como combinações lineares de $\{\beta_1, z_2, \dots., z_m\} = K_1$, ou seja, $[K_1] = E$*).

OBS: *Assumimos que o coeficiente a_1 do* ***primeiro*** *termo z_1 era não nulo para simplificar a notação. Se não o fosse mudaríamos a ordem deles sem prejuízo para a argumentação, já que algum destes coeficientes deve ser não nulo. O que importa é que neste passo um dos elementos de K é substituído pelo elemento β_1.*

Estamos, portanto na mesma situação inicial e podemos repetir o processo tomando agora o elemento indexado $\beta_2 \in B$ e assim progressivamente até que se esgotem os índices de B ou esgotem os elementos originais de K a serem substituídos. Se esgotarem primeiro os elementos de B , então está provado o Teorema.

Por outro lado, se o processo terminasse por esgotamento de elementos $z's$ de K em $K_p = \{\beta_1, \dots, \beta_p\}$, para $1 \leq p < n$, isto significaria que $\beta_{p+1} \in [K_p] = E$, o que é impossivel, já que B é base e, portanto nenhum elemento seu poderia ser descrito pelos restantes. Sendo assim, necessariamente, o processo seguirá até que $K_n = \{\beta_1, \dots, \beta_n, \dots\}$, o que significa que $m \geq n$.

2-*Se $B_1 = \{\beta_1, \dots, \beta_n\}$ e $B_2 = \{\gamma_1, \dots, \gamma_m\}$ são duas bases do Espaço E , então pelo argumento acima aplicado duas vezes teríamos $m \leq n$ e $n \leq m$ de onde vem que: $n = m$.*

DEF: *DIMENSÃO (Finita ou Infinita) DE UM ESPAÇO VETORIAL*

-Se um Espaço Vetorial E tem uma Base Finita, $B = \{\beta_1, \dots, \beta_n\}$*, denomina-se a cardinalidade invariante de todas as suas bases como a* ***DIMENSÃO*** *do Espaço Vetorial e escreve-se* $\dim E = n$.

-Se um Espaço Vetorial ***não*** *admite bases* ***finitas****, então se diz que o Espaço tem* ***DIMENSÃO INFINITA*** *e denota-se este fato com a expressão: $dim\ E = \infty$.*

EXERCÍCIOS:

1-Mostre que $\dim \mathbb{R}^n = n$, $\dim M_{nm}(\mathbb{R}) = nm$, $dimP_n(\mathbb{R}) = n + 1$, $dimP(\mathbb{R}) = \infty$.

2-Considere as duas estruturas distintas de Espaço vetorial no conjunto $\mathbb{C}^n$: A) Com Escalares $\mathbb{C}$, e outra B) com escalares $\mathbb{R}$. Determine a dimensão de cada um destes espaços.(**Sugestão**: construa bases "canônicas", $\{e_k\}, e_1 = (1,0,..,0)$, ...para o primeiro caso e e_k , $f_k = ie_k$ para o segundo).

2-Mostre que $\dim C^k(\mathbb{R}, \mathbb{R}) = \{Espaço\ das\ Funções\ Reais\ com\ k\ Derivadas\ Contínuas\ \} = \infty$. (Sugestão:Considere $P(\mathbb{R})$)

3-Mostre que $\mathcal{F}(\mathbb{N}, \mathbb{R}) = \{f: \mathbb{N} \to \{0,1\}\}$ tem dimensão infinita.(Sugestão:Considere as funções $f_p(k) = \delta_{pk}$)

4-Mostre que $\mathcal{F}^0(\mathbb{N}, \mathbb{R}) = \{f: \mathbb{N} \to \{0,1\}\ ; Existe\ n > 0\ , f(k) = 0\ para\ k > n\}$ = "*Seqüências de 0's e 1's $\{f_k = f(k)\}$ que são constantemente nulos a partir de algum índice*") é um sub-espaço de $\mathcal{F}(\mathbb{N}, \mathbb{R}) = \{f: \mathbb{N} \to \{0,1\}\}$ e também tem dimensão infinita.

3-Mostre que $\dim \Sigma_{nn}(\mathbb{R}) = \frac{n^2+n}{2}$; $\dim \Lambda_{nn}(\mathbb{R}) = \frac{n^2-n}{2}$. ($\Sigma_{nn}(\mathbb{R})$ são as matrizes reais de ordem n **simétricas** ($S^t = S$), e $\Lambda_{nn}(\mathbb{R})$ são as matrizes reais de ordem n **anti-simétricas,** ($A^t = -A$)).

4-Determine a dimensão do espaço $\mathcal{F}(A,\mathbb{R}) = \{f: A \to \mathbb{R}\}, \#A = p$.

5-Determine a dimensão do espaço $R = \{p \in P_n(\mathbb{R}); p(0) = p(1) = p(4) = 0\}$.(Mostre antes que R é de fato um sub-espaço)

6-Determine a dimensão do espaço $R = \{p \in P_5(\mathbb{R}); p(0) = p(1) = p(4)\}$. (Mostre antes que R é de fato um sub-espaço de $P_5(\mathbb{R})$).

7-Mostre que os Espaços Vetoriais seguintes tem dimensão infinita: $\mathcal{F}(\mathbb{N},\mathbb{R}) = \{f: \mathbb{N} \to \mathbb{R}\}$ $\mathcal{F}_0(\mathbb{N},\mathbb{R}) = \{f \in \mathcal{F}(\mathbb{N},\mathbb{R}); \lim_{k\to\infty} f_k = 0\}$, $\mathcal{F}_{00}(\mathbb{N},\mathbb{R}) = \{f \in \mathcal{F}(\mathbb{N},\mathbb{R}); Existe\ N_f, f(k) = 0, k \geq N_f\}$, $\mathcal{F}_{\mathrm{e}}(\mathbb{N},\mathbb{R}) = \{f \in \mathcal{F}(\mathbb{N},\mathbb{R}); Existem\ C > 0, R > 0;\ |f(k)| \leq CR^k, k > 0\}$, $P(\mathbb{C}) = \{p: \mathbb{C} \to \mathbb{C}; Existe\ N > 0, p(z) = \sum_{k=0}^{N} c_k z^k, c_k \in \mathbb{C}\}$.

8-Mostre que em um Espaço Vetorial E de dimensão ***finita*** n , dado um conjunto de n vetores $K = \{v_1, \dots, v_n\} \subset E$ basta verificar se K é LI, ou Não-Redundante para constatar que ele constitui uma Base do espaço. Mostre que um conjunto com maior ou menor número de vetores, automaticamente, não pode ser uma Base deste Espaço.

O resultado do exercício 8) torna importante os Métodos de verificação de Minimalidade/Independencia linear de conjuntos de n vetores em um espaço de dimensão n, particularmente em F^n. O Algoritmo de Gauss é um Método linear apropriado para esta verificação. Métodos não lineares baseados nos produtos interno (escalar) e externo (determinante) serão apresentado em capítulos seguintes. Este problema, como já sabemos, está relacionado, dentre outras, a uma das questões mais fundamentais da teoria de matrizes que constitui na determinação da inversibilidade de uma matriz $A \in M_{nn}$, ou , equivalentemente se as suas colunas (ou linhas) constituem um conjunto de n vetores linearmente independentes.

IV-EXISTÊNCIA DE BASES E MÉTODOS PARA O SEU CÁLCULO: *Contração, Expansão,..*

O importante Teorema Fundamental demonstrado acima garante a existência de ***Bases*** de um Espaço Vetorial que, potencialmente, representam/***descrevem*** todos os elementos deste Espaço por intermédio de combinações lineares ***Não Redundantes***. Entretanto, este é um Teorema de Existência e não apresenta Métodos (Algoritmos) para a construção de nenhuma Base e nem Métodos para verificar a minimalidade (Independencia Linear) de um conjunto de vetores. A construção sistemática de bases para um Espaço Vetorial E e Métodos para verificar a Minimalidade de conjuntos de vetores desempenham um papel importante na Teoria e Aplicações da Álgebra Linear.

Neste capítulo abordaremos estas questões preliminarmente utilizando repetidamente as *idéias* construtivas (algorítmicas) lineares do *Método de Eliminação* de Gauss, tal como já foi, por exemplo, empregado na demonstração do Teorema Fundamental. Em capítulos seguintes voltaremos a abordar a construção de Bases com o emprego da operação (não-linear) de *produto interno* que nos levará aos Métodos de *Gram-Schmidt* , *Householder*, dentre outros.

Em um capítulo específico mais adiante abordaremos também a elaboração de métodos para a ***Verificação*** de Minimalidade de um conjunto de vetores com a introdução da função (não linear) *determinante* que desempenha o papel de um índice numérico que estabelece algebricamente a *Independencia linear* / *Minimalidade* de um conjunto de n vetores.

IVa – TEOREMA : Construção de uma Base por *Completamento de um Conjunto LI*

Se $L = \{v_1, \dots, v_p\} \subset E$ for um subconjunto **LI** de um Espaço Vetorial E de **dimensão finita**:

($\dim E = n \geq p$), Então existe uma **Base** $B = \{v_1, \ldots, v_p, h_1, \ldots, h_{n-p}\}$ de E que é uma extensão de L.

Demonstração: Considere o conjunto **LI** $L = \{v_1, \ldots, v_p\} \subset E$. Se $[L] = E$, nada a demonstrar e, neste caso, necessariamente $p = n$. Caso contrário, existe um elemento $h_1 \notin [K]$ e, portanto, o conjunto $L_1 = L \cup \{h_1\}$ é LI. Repita o argumento. Como o Espaço E tem dimensão finita este processo deverá terminar no estágio L_n pois não pode haver um conjunto LI com mais elementos do que a dimensão do Espaço e, neste caso, $[L_n] = E$ o que faz deste conjunto uma Base do Espaço.

Exercício:

Preencha os detalhes da demonstração acima.

Uma re-edição equivalente deste Lema é o seguinte importante Teorema:

TEOREMA: EXISTÊNCIA DE ESPAÇOS COMPLEMENTARES

1-Se E for um Espaço Vetorial de dimensão **finita,** $\dim E = n$, então, para qualquer sub-espaço $F \subset E$ é possível obter um Espaço Complementar F^c tal que $E = F \oplus F^c$, onde $\dim E = \dim F + \dim F^c$.

2- Se $F \neq E$ então há uma infinitude de Espaços Complementares.

Demonstração: Como E é um Espaço de dimensão finita, F também será de dimensão finita (verifique) e, portanto dispõe de uma Base $B_0 = \{\beta_1, \ldots, \beta_p\}$, $F = [B_0]$. Utilizando o Lema de Completamento, obtemos uma base de E da forma: $B = \{\beta_1, \ldots, \beta_p, h_{p+1}, \ldots, h_n\}$ e, denotando $F^c = [\{h_{p+1}, \ldots, h_n\}]$] concluímos a primeira parte.

Exercícios:

1-Demonstre a afirmação sobre a finitude da dimensão de F e sobre a infinitude do número de Espaços complementares de F. (**Sugestão**: Faça um esboço geométrico no espaço Euclideano tridimensional e considere $F^{c*} = [\{h_{p+1}, \ldots, h_{n-1}, h_n + \beta_1\}]$, por exemplo.)

2-Considere o subEspaço Vetorial $F = [K]$ gerado pelos polinômios reais $K = \{p_1(x) = 1 + x \, , p_2(x) = x + x^2 \, , p_3(x) = 1 - x^4\}$. Obtenha uma infinitude de espaços complementares F^c de tal forma que $P_5(\mathbb{R}) = [1, x, x^2, x^3, x^4, x^5\}] = [K] \oplus F^c$.

3-Substitua no exercício acima o espaço de polinômios reais $P_5(\mathbb{R})$ pelos polinômios complexos $P_5(\mathbb{C})$.

IV b- *Construção de Todas as Bases a partir de uma delas-*

Definição: Se $P \in M_{mn}$ *for uma matriz de escalares e* $K = \{v_1, \ldots v_n\} \subset E$ *um conjunto de* n *vetores escrevemos* $PK = \{w_1, \ldots w_m\} \subset E$ *como sendo o conjunto de* m *vetores obtidos pela Combinações Lineares de* K *com os coeficientes dados pelas linhas de* P *da seguinte maneira:* $w_k = \sum_{j=1}^{n} P_{kj} v_j$.

Exercícios*:*

1-Dados o conjunto de Vetores $K = \left\{ v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, v_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, v_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$ *e a matriz* $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ *e* $Q = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$, *obtenha os conjuntos de vetores* $PK = \{w_1, w_2\}$ *e* $QK = \{w_1, w_2, w_3\}$ *segundo a definição acima.*

2-Efetue as transformações $\mathcal{E}K$ *onde* $\mathcal{E} \in M_{33}$ *são matrizes Elementares segundo a definição do Método de Eliminação de Gauss, isto é, matrizes que representam uma das três classes de operações sobre linhas de uma matriz* M_{3m} *:* **1)**multiplicação de uma linha por numero não nulo, **2)**Permutação de linhas, **3)**Substituição de uma linha pela soma dela com outra linha).

TEOREMA: ***Relação matricial entre Bases***

1-Dado um subconjunto de vetores $K = \{v_1, \dots v_n\} \subset E$ do Espaço Vetorial E , e uma matriz $\mathcal{E} \in M_{nn}$ elementar, então $[\mathcal{E}K] = [\{w_k\}] = [\{v_1, \dots v_n\}] = [K]$.

2-A mesma afirmação vale para qualquer matriz inversível $P \in M_{nn}$ e o respectivo subconjunto de vetores, ou seja, $[PK] = [K]$.

3-Na verdade, todas as Bases B de E são obtidas por este procedimento, isto é, fixando uma Base qualquer B_0 e tomando $B = PB_0$ para todas as matrizes inversíveis $P \in M_{nn}(\mathbb{R})$.

4-Se $u = \sum_{k=1}^{n} x_k v_k$ e $Pw = v$ com $P \in M_{nn}(\mathbb{R})$ ***inversível***, então, $u = \sum_{k=1}^{n} x_k v_k = \sum_{j=1}^{n} y_j w_j$, e $y_j = \sum_{k=1}^{n} P_{jk}\, x_k$. As matrizes $x, y \in M_{1n}$ são denominadas, respectivamente, coordenadas do vetor u nas Bases $\{v_k\}\ e\ \{w_j\}$, e matricialmente, $y = xP$.

Dem-Basta verificar a afirmação para cada uma das operações elementares, sendo as duas primeiras óbvias e a terceira também muito simples. Como o Método de Gauss nos mostra que toda matriz inversível pode ser escrita como uma seqüência de matrizes elementares, fica provado as partes 1)&2) do lema. Se agora $B = \{v_1, \dots, v_n\}$ e $B^* = \{w_1, \dots, w_n\}$ forem duas Bases do mesmo Espaço, concluímos que existem duas matrizes $P, Q \in M_{nn}(\mathbb{R})$ de coeficientes tais que $B = PB^*\ e\ \ B^* = QB$, mas também é fácil ver que $B = PQB$ de onde $PQ = I$ e, analogamente, $QP = I$ de onde tiramos que as duas matrizes são mutuamente inversíveis. Portanto, o conjunto de todas as bases de E pode ser descrito como $\{PB\,;P \in M_{nn}\,, inbversível\}$. A verificação de 4) decorre imediatamente da definição de produto matricial e da representação dos vetores segundo bases.

Exercício:

Complete os detalhes da demonstração acima.

IV c- TEOREMA: Construção de uma Base por *Redução de um Conjunto Gerador*

Se $K \subset E$ for um subconjunto **finito** que gera o Espaço Vetorial E , $([\mathrm{K}] = E)$, então é possível construir uma **Base** $B \subset K$ para o Espaço E.

Dem:Se o conjunto K for LI ele já é uma base. Se não, algum elemento de K pode ser escrito como combinação linear dos restantes. Retira-se este elemento sem perda da capacidade de K gerar E. (Verifique). Repete-se o processo até que o conjunto resultante seja LI. Como a capacidade de gerar E foi mantida em cada passo, o resultado é uma Base.

Algoritmo Gaussiano: *O Método acima é vago, pois não prescreve uma maneira algorítmica de resolver a questão proposta. O Método que apresentaremos em seguida utiliza a idéia de Gauss no contexto vetorial e, por este motivo, pode ser algoritmizado.*

Escreve-se $AB = K$, ou seja, os vetores de $K = \{v_1, \dots v_n\}$ em termos das suas descrições na Base $B = \{\alpha_1, \dots, \alpha_m\}$ onde A é uma matriz $n \times m$ dos coeficientes. Utiliza-se então um Método de Eliminação de Gauss com relação aos vetores α_j da base B até que se obtenha uma Matriz escalonada, ou seja, Calcula-se uma matriz $\mathcal{E} \in M_{nn}$ inversivel (produto de matrizes elementares) tal que $\mathcal{E}AB = \mathcal{E}K$ em que $\mathcal{E}A$ é escalonada. Observa-se que $[\mathcal{E}K] = [K]$. Assim, os vetores obtidos das linhas não nulas de $\mathcal{E}A$ geram o mesmo espaço $[K]$, o que resolverá a questão.

EXEMPLO & EXERCÍCIO: Considere os polinômios

$K = \{p_1(x) = x + x^2 + x^4\,, p_2(x) = -1 + x^2 - x^3\,, p_3(x) = 2 + x - 3x^2\,, p_4(x) = 1 + x^4\}$ no espaço de polinômios $P_4(\mathbb{R}) = \{\sum_{k=0}^{4} a_k x^k\}$. Obtenha uma Base para $B \subset [K]$. Iniciando o procedimento de eliminação

$$\begin{pmatrix} p_1(x) = x + x^2 + x^4 \\ p_2(x) = -1 + x^2 - x^3 \\ p_3(x) = 2 + x - 3x^2 \\ p_4(x) = 1 + x^5 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 2 & 1 & -3 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} >> \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -3 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} >> \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -4 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} >> \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -4 & 1 \end{pmatrix} \sim\sim \begin{matrix} P_1(x) = 1 + x^4 \\ P_2(x) = x + x^2 + x^4 \\ P_3(x) = x^2 - x^3 + x^4 \\ P_4(x) = -4x^3 + x^4 \end{matrix}$$

Complete o escalonamento e determine a dimensão de $[K] = [\{p_1, p_2, p_3, p_4\}]$.

EXERCÍCIOS:

1-Considere o subconjunto de vetores $K = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$. Obtenha um subconjunto ***minimal***, isto é, uma Base $B \subset [K]$.

2-Faça o mesmo com os polinômios $K = \{p_1(x) = x, p_2(x) = -1 + x^2 - x^4, p_3(x) = 2 + x - 3x^2, p_4(x) = 1 + x^6\}$ no espaço de polinômios $P(\mathbb{R}) = \{\sum_{k=1}^{m} a_k x^k\}$.

3-Álgebra de Sub-Espaços Vetoriais. Seja E um Espaço Vetorial de ***dimensão Finita*** e

$\mathcal{F} = \{F \in \wp(E); F \text{ é } sub - espaço\ de\ E\}$ o conjunto de sub-espaços vetoriais de E com a operação de "Soma" de Espaços Vetoriais.

3a-Mostre porque não é possível associar um "negativo" a cada subespaço com respeito à soma.

3b-Faça um esboço geométrico em $E = \mathbb{R}^3$para provar a ***infinitude*** de espaços complementaresa um subespaço $F \subsetneq E$. (Sugestão: Complete uma base de F, e depois adicione um vetor não nulo $h \in F$ a cada elemento deste completamento.

3c-Mostre que se $F \subset E$, então $E + F = E$.

3d-Mostre também que $F_1 + F_2 = F_2$ se e somente e $F_1 \subset F_2$.

4-Bases de Espaços Polinomiais: Mostre que os subconjuntos K de polinômios $K \subset P_n(\mathbb{C}) = \{p(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k x^k, a_k \in \mathbb{C}\}$ são bases:

4a- $K = \{q_0(x) = 1, q_1(x) = (x-1), q_2(x) = (x-1)(x-2), \ldots, q_n(x) = \prod_{k=1}^{n}(x-1)\cdots(x-k)\}$

4b- $K = \{q_0(x) = 1, q_k(x) = (x - \alpha_k)q_{k-1}(x)\,; 1 \leq k \leq n\}$ para uma seqüência de números complexos α_k não necessariamente distintos.

4c- $K = \{L_r(z) = \frac{\prod_{k=1}^{n+1}(z-a_k)}{\prod_{k}^{n+1}(a_r-a_k)}\,; 1 \leq r \leq n+1\}$ em que a_k são *n+1* pontos distintos do plano complexo e $K = \{p(z) = \sum_{k=0}^{n} c_k z^k;\ c_k \in \mathbb{C}\}$. (Polinômios de interpolação de Lagrange).

5-*Mostre, que uma matriz $A \epsilon M_{nn}(\mathbb{R})$ é inversivel se e somente se os seus vetores colunas (isto é, os vetores de $\mathbb{R}^n$ formados pelas n colunas $A^j \in M_{n1} \approx \mathbb{R}^n$ da matriz) são linearmente independentes. (**Sugestão**: Observe que o produto matricial Ax pode ser escrito como a seguinte combinação de vetores de $\mathbb{R}^n$:$Ax = \sum_{k=1}^{n} x_k A^k$ Se forem LI , estes vetores colunas formam base e, portanto, todos os vetores $b \in \mathbb{R}^n$ tem uma única maneira de serem escritos como combinação linear de A^k o que significa uma única solução de $Ax = b$ para qualquer $b \in \mathbb{R}^n$ e, portanto a matiz tem inversa. Por outro lado, se a matriz A tem inversa, é fácil ver que as soluções de $Ax = b$ são sempre únicas),*

*6-Mostre, que uma matriz $A \epsilon M_{nn}(\mathbb{R})$ é inversivel se e somente se os seus vetores linha (isto é, os vetores de $\mathbb{R}^n$ formados pelas n linhas $A_k \in M_{n1} \approx \mathbb{R}^n$ da matriz) são linearmente independentes. (**Sugestão**: Observe que o produto matricial $A^t x$ pode ser escrito como:$A^t x = \sum_{k=1}^{n} x_k A_k$ .Se forem LI , estes vetores colunas formam uma base e, portanto, todos os vetores $b \in \mathbb{R}^n$ tem uma única maneira de serem escritos como combinação linear de A_k o que significa uma única solução de $x^t A = b$ para qualquer $b \in \mathbb{R}^n$ e, portanto a matriz transposta tem inversa e conseqüentemente também a matriz A .)*

*7-Mostre com argumentos **geométricos** que uma verificação direta da independência linear de um conjunto de dois vetores, $K = \{x, y\}$, $x = (x_1, x_2)$ e $y = (y_1, y_2)$ em $\mathbb{R}^2$ pode ser feita com uma "fórmula algébrica" $A: (\mathbb{R}^2)^2 \to \mathbb{R}$ cujo valor calcula a **área** do paralelogramo cujas arestas são estes vetores. (Não interessa esta fórmula, somente o seu significado e sua existência). Argumente **geometricamente** que x, y, são LD se e somente se $A(x, y) = 0$. (Sugestão:Observe o cenário quando ocorre o "colapso" da área do paralelogramo).*

*8-Mostre com argumentos **geométricos** que a verificação de Independencia Linear de um conjunto de três vetores em $\mathbb{R}^3$, $K = \{x, y, z\}$, $x = (x_1, x_2, x_3)$ e $y = (y_1, y_2, y_3)$, $z = (z_1, z_2, z_3)$ pode ser verificada com uma "fórmula algébrica" $V: (\mathbb{R}^3)^3 \to \mathbb{R}$ cujo valor calcula o **volume** do paralelepípedo cujas arestas são estes vetores. (Não interessa esta fórmula, somente o seu significado e sua existência). Argumente **geometricamente** que x, y, z são LD se e somente se $V(x, y, z) = 0$. (Sugestão:Observe o cenário quando ocorre o "colapso" do volume do paralelepípedo).*

*9-Utilizando o resultado do Exercicio acima mostre que a matriz $A \in M_{33}(\mathbb{R})$ é inversível se e somente se $V(A_1, A_2, A_3) \neq 0$, onde $A_j \in \mathbb{R}^3$ é vetor linha da matriz.(**Sugestão:** $V(A_1, A_2, A_3) \neq 0$ se e somente se os vetores A_1, A_2, A_3 são LI, e portanto uma base. Assim qualquer vetor $b \in \mathbb{R}^3$ tem uma única forma de ser escrito como combinação linear : $b = \sum \; x_k A_k$. Mas esta expressão pode ser re-escrita na forma de um produto matricial $b = \sum \; x_k A_k = Ax$.)*

10-Mostre que se $E = U \oplus V$ (onde E, U, V são espaços vetoriais de dimensão finita) então $dimE = dimU + dimV$.

11- Mostre que se $E = U + V$ (onde E, U, V são espaços vetoriais de dimensão finita) então $dimE \leq dimU + dimV$ e determine a situação em que a igualdade é válida. Analise a recíproca de 10), ou seja, se é possível verificar que $U \cap V = \{0\}, e, portanto, E = U \oplus V \; se \; dimE = dimU + dimV$.

12-Mostre que se $U \; e \; V$ são Espaços Vetoriais, então $dim\{U \times V\} = (dimU) \cdot (dimV)$ e verifique se esta expressão vale inclusive se um destes espaços tem dimensão infinita.

13-**Teorema**:Mostre que se $H \subset E$ for um sub-espaço vetorial de E , $(com \;\; dimE < \infty)$ então, $dimE = dimH + dim\{E/_H\}$

14-Determine as dimensões dos Espaços Vetoriais $E_1 = \{\mathbb{C}^n, +, 0, \mathbb{C}\}$ e $E_2 = \{\mathbb{C}^n, +, 0, \mathbb{R}\}$. (Observação: A operação soma é definida coordenada a coordenada como usual, assim como o elemento neutro 0 . A multiplicação utiliza escalares complexos no primeiro caso e reais no segundo caso: $dimK = n$, $dimH = 2n$.)

15-Determine a dimensão de $[K]$ onde **a)**-$K = \{1 + x^2, x^3, x^4\} \subset P(\mathbb{C})$, **b)**- $K = \{1 + x^2, i, x\} \subset P(\mathbb{C})$, **c)**-
$K = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1-i \\ 2i \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ i \\ 1+i \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} i+1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} \right\} \subset \mathbb{C}^3$ considerando todos eles como Espaços Complexos, isto é, com escalares em $\mathbb{C}$.

OBSERVAÇÃO: Em todos os Resultados e Exemplos tratados neste capítulo e nos próximos, a existência de Bases é constatada sempre sob a hipótese adicional de que o Espaço Vetorial em questão pode ser gerado por um conjunto ***finito*** de elementos. A existência geral de Bases (possivelmente infinitas e até não enumeráveis chamadas Bases de Hamel) para espaços de dimensão infinita pode ser demonstrada utilizando uma Teoria de conjuntos que contenha o *contencioso* Axioma da Escolha. É curioso notar que existe uma versão infinita da invariância da cardinalidade das Bases de Hamel.

XXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXX

APÊNDICE I: *Modelo Matemático,Sistema de Unidades & ANÁLISE DIMENSIONAL*

O primeiro passo na construção de um Modelo matemático para descrever um fenômeno qualquer consiste em estabelecer o conjunto de observações que são consideradas relevantes para a sua descrição.

A descrição *quantitativa* de qualquer uma destas observações utiliza algum procedimento prático exeqüível sob o ponto de vista "experimental" (chamado *mensuração*), que atribui o valor numérico de uma observação em comparação com uma observação padrão predeterminada, mas arbitrariamente escolhida dentro de certas condições.

Por exemplo, a mensuração do comprimento linear de uma linha exige, (1) A escolha de um padrão físico de comprimento (arbitrário) dito unitário representado pelo ***símbolo*** L , 2) A possibilidade de uma duplicação e fracionamento uniforme do padrão, e (3) Um procedimento para "medir" comprimentos que consiste na juxtaposição de múltiplos e frações da unidade em ordem (por falta) até que o mesmo seja coberto.(Em outras palavras tomamos a maior duplicação $2^n L$ da unidade que seja menor do que o comprimento de tal forma que, se sobrar, resta apenas um comprimento menor do que $2^{n-1}L$. Repetimos o processo com esta diferença, e sucessivamente teremos finalmente uma representação numérica $\sum_{k=-\infty}^{k=N} d_k 2^k L$; $d_k \in \{0,1\}$ para a medida.

Para a medida de área, utilizamos um padrão de comprimento L e construímos um quadrado com lados iguais a este padrão e o tomamos como unidade de área. Assim, é fácil ver ***geometricamente*** que com outro padrão de comprimento duplicado $2L = L_1$, o quadrado unidade contem 4 dos outros quadrados de lados L e, portanto as medidas numéricas de área com este padrão de unidade é $\frac{1}{4}$ do obtido anteriormente. Por este motivo utiliza-se o símbolo $A = L^2$ para denotar a unidade de área representada pelo quadrado de lado L. Assim, com outra unidade padrão de comprimento $L_1 = aL$ (com $a > 0$) a unidade correspondente de área será representada por $A_1 = {L_1}^2 = (a^2)L^2 = (a^2)A$. Então, uma medida de área $xA = xL^2 = \left(x \left(\frac{L_1}{a} \right)^2 \right) =$

$\left(x\frac{1}{a^2}\right)L_1{}^2 = \left(\frac{x}{a^2}\right)A_1$ que é uma fórmula algébrica elementar para calcular mudanças de registros numéricos com mudança de unidades para uma mesma medida.

É fácil verificar que uma mesma medida não nula pode ser expressa por qualquer número real positivo; basta tomar uma unidade apropriada: quanto maior a unidade, menor o número para representar a medida, e vice-versa. (A unidade "metro" (arbitrária) é conveniente para a maioria dos usos cotidianos unicamente porque é da ordem do comprimento de um braço humano e, portanto, a representação quantitativa das medidas usuais não necessita de números muito grandes ou pequenos. Imagine se a unidade de comprimento escolhida é o angstrom (raio do átomo de hidrogênio) ou um ano luz (distância percorrida pela luz durante 1 ano) e os respectivos números que deverão ser utilizados para medir a sua altura).

Para medir o Tempo , utiliza-se um evento físico que se (supõe) seja sistematicamente repetido, como, por exemplo o "batimento do pulso" que, teoricamente admitiria ser duplicado e fracionado ao meio tantas vezes quanto necessárias(?). Um procedimento análogo ao comprimento pode ser então utilizado para mensurar a duração de um período de tempo.

Uma vez estabelecida uma unidade de Comprimento e uma unidade de Tempo, o próximo passo seria estabelecer uma unidade de velocidade com o seguinte procedimento "experimental" : "O *comprimento percorrido em uma unidade de tempo*" . Analogamente, é possível estabelecer uma unidade de aceleração em termos das "básicas" como "*O acréscimo de velocidade em uma unidade de tempo*"). Observa-se que nestes casos não há necessidade de inventar outra unidade básica. Estas unidades são denominadas *unidades compostas*. Uma outra escolha para a unidade de comprimento (mantendo a unidade de tempo) resulta em uma modificação da unidade composta de velocidade e consequentemente da unidade composta de aceleração. Não é difícil verificar (com um momento de reflexão) que uma mesma velocidade que pode ser medida em unidades $\{L_0, T_0\}$ com o numero v_0 será medida nas duas unidades básicas $\{L_1 = lL_0,\ T_0\}$ com o número $v_1 = \frac{v_0}{l}$. Simbolicamente esta transformação pode ser feita de maneira algébrica simples e mais imediata escrevendo-se $v_0(L_0(T_0)^{-1}) = v_0\left(\frac{1}{l}L_1(T_0)^{-1}\right) = \left(\frac{v_0}{l}\right)\left(L_1T_0{}^{-1}\right) = v_1\left(L_1T_0{}^{-1}\right)$. Se agora a unidade básica de tempo é também modificada para $T_1 = tT_0$, $t \in \mathbb{R}^{++}$, então a unidade composta de velocidade passa a ser $V_1 = L_1T_1^{-1} = lL_0(tT_0)^{-1} = (lt^{-1})L_0T_0{}^{-1} = (lt^{-1})V_0$ e, conseqüentemente uma mesma velocidade passa a ser representada em suas respectivas unidades na forma: $w_0V_0 = w_0(l^{-1}tV_1) = (w_0l^{-1}t)V_1 = w_1V_1$.

A Álgebra que relaciona medidas em unidades distintas, como se pode perceber, é elementar e direta.

A unidade de massa M_0 é também escolhida arbitrariamente e a utilização de uma balança pode ser o procedimento experimental para comparação e mensuração de massa de um objeto. A unidade de Força pode ser então estabelecida em termos das unidades de aceleração e massa (via segunda lei de Newton). Assim, com as unidades básicas de Comprimento, Tempo e Massa L, T, M é possível *medir* qualquer observação da Mecânica Newtoniana pois podemos construir todas as unidades compostas da forma geral $L^rT^qM^p$ para $r, q, p \in \mathbb{Z}$. (A Aceleração: $r = 1, q = -2, s = 0$ e a Força com: $r = 1, q = -2, s = 1$.)

Consideremos a título de exemplo (que é clássico) o fenômeno mecânico estudado por Galileo (sec.XVII – era pré-Newtoniana) referente a uma pequena oscilação periódica de um pêndulo que consiste em uma massa pontual suspensa em uma haste inextensível de massa desprezível realizando um movimento plano sem atrito. Para descrevê-lo Galileo ***assumiu a hipótese*** de que o tempo de oscilação deste pêndulo dependia apenas do comprimento da haste, da gravidade, da massa e do deslocamento inicial. (A fase da Lua, por exemplo, não foi considerada importante e nem a data de observação, assim como infinitos outros fatores. A concentração em poucos fatores representou a grande revolução científica de Galileo.). A teoria de Galileo para o pêndulo se reduz então à determinação da função que relaciona o período de Oscilação do pêndulo em termos das medidas de todas as outras observações/ parâmetros consideradas (por ele) como relevantes, no caso: $t = \varphi(l, g, m, A)$, em que l é o comprimento da haste, g é a aceleração da gravidade, m a massa do pingente, e A é o comprimento do arco máximo descrito pelo pêndulo. A segunda hipótese física fundamental (embora nem sempre explicitada) é a de que a função matemática de 4 variáveis $\varphi(x, y, z, w)$ independe das unidades básicas escolhidas. Portanto, sendo arbitrarias as unidades, podemos escolher o comprimento l da haste como padrão (na verdade lL_0), m para massa e, $\sqrt{\frac{l}{g}}$= "*Tempo de queda com aceleração g para percorrer um comprimento l*". (Algebricamente é fácil verificar que este agrupamento de parâmetros se modifica como a unidade de tempo sem necessidade de interpretá-lo fisicamente: basta lembrar que o valor numérico da aceleração g se modifica de acordo com LT^{-2} e l obviamente com L de onde $\frac{l}{g}$ se modifica como T^2 e daí a conclusão. A forma algébrica como uma medida numérica se modifica com as unidades básicas é explicitada pela notação de Maxwell: $[l] = L, [g] = LT^{-2}$ e , em geral $[h] = L^r T^q M^p$ para $r, q, p \in \mathbb{Z}$).

Utilizando estas ***unidades intrínsecas*** do problema o modelo numérico para os registros de medidas com as novas unidades toma a forma: $\frac{t}{\sqrt{\frac{l}{g}}} = \varphi(1,1,1,\frac{A}{l})$. Observe que as expressões numéricas $\frac{t}{\sqrt{\frac{l}{g}}}$ e $\frac{A}{l}$ ***independem*** das unidades utilizadas inicialmente para determinar estes valores. Portanto, estes parâmetros são denominados ***adimensionais***. Com isto obtemos a famosa fórmula: $t = \sqrt{\frac{l}{g}}\psi(\frac{A}{l})$. O regime de oscilações de pequena amplitude do pêndulo é caracterizado pelo fato de que $\frac{A}{l}$ tem um valor muito pequeno e, portanto, $\psi(\frac{A}{l}) \approx \psi(0)$. Este número é a única informação que nos falta para obter a fórmula completa de Galileo. O seu cálculo é muito mais trabalhoso do que o empregado até agora, mas é possível determiná-lo e surpreendentemente $\psi(0) = 2\pi$.

Se desejarmos construir um pequeno modelo "*maquete*" para analisar o movimento do pêndulo da catedral de Santiago de Compostela (*botafumeiro*) com $l *= 64m = 6400cm$ de altura, com amplitude de $A *= 10m = 1000cm$ e com pingente de aproximadamente $20kg = 20000gr$, é necessário que mantenhamos na maquete o mesmo valor de $\frac{A}{l} = \frac{10}{64} = \frac{5}{32}$ e, com isto a formula adimensional será válida para ambos os casos, ou seja, determinamos experimentalmente $\frac{t}{\sqrt{\frac{l}{g}}} = \psi(\frac{5}{32})$ para a "maquete" e depois (como $\frac{A*}{l*} = \frac{A}{l}$) podemos calcular $t^* = \sqrt{\frac{l*}{g}}\psi\left(\frac{A*}{l*}\right) = \sqrt{\frac{l*}{g}}\psi\left(\frac{5}{32}\right)$ para o botafumeiro. Observe que a simples miniaturização do tamanho de um grande mecanismo não produz o mesmo modelo; é necessário que os parâmetros adimensionalizados sejam todos mantidos iguais. Muitos desastres de engenharia civil e mecânica foram resultados do desconhecimento deste fato simples já apontado por Galileo no século XVII e apontados em bons livros.

O conceito intuitivo de *complexidade* de um Modelo matemático é comumente associado ao número de experiências necessárias para mapear seu comportamento. ("*Complexidade experimental*"). A exploração experimental ou computacional do movimento de um pêndulo que empregue um Modelo da forma, $t = \varphi(l, m, g, A)$ exigiria ***pelo menos*** a consideração de 3 valores (pequeno, médio e grande) para a medida de cada uma das variáveis (l, m, g, A) a fim de caracterizar minimamente a função φ de ***quatro*** variáveis. Isto significaria $\mathbf{3^4 = 81}$ experimentos (ou cálculos) a serem realizados e depois analisados. Como o número de medidas para cada variável é arbitrariamente estabelecido, e este cresce exponencialmente com o número de variáveis, é razoável definir a *complexidade estrutural* do modelo como o número de variáveis descritoras que independe do critério "experimentalista". Entretanto, não está claro que $\mathbf{4}$ é de fato o número de variáveis necessárias para a descrição deste modelo. Não poderia ser ele descrito com um número menor, irredutível? Neste caso, a complexidade do modelo poderia ser caracterizada de maneira mais consistente por este número mínimo independente das representações.

Para analisar esta questão observemos que a exploração do mesmo Modelo na sua forma adimensionalizada exige apenas a avaliação da função $\psi(s)$ de ***uma*** variável e seguindo o mesmo critério *experimentalista* exigiria apenas **3** experimentos. A demonstração de que o número mínimo de variáveis necessárias para descrever um Modelo quantitativo é aquele apresentado na sua versão adimensional, utiliza argumentos de Álgebra Linear, coincidentemente (ou não), associados ao conceito de dimensão de um Espaço Vetorial. (Historicamente, é duvidoso afirmar que o antigo termo "análise dimensional" (meados do séculoXIX) tenha sido utilizado por conta desta relação porque o conceito de "Espaço Vetorial" é muito mais recente (final do século XIX-inicio do século XX).

A questão que surge, naturalmente, se refere à determinação da complexidade de um Modelo que utiliza m unidades básicas e é descrito por n parâmetros dimensionalizados. Suponhamos que seja necessário um conjunto ***minimal*** de m unidades básicas $\{L_k\}_{1\le k\le m}$ para descrever numericamente as medidas de todas as n variáveis/parâmetros $\{P_j\}_{1\le j\le n}$do Modelo. Assim, se cada parâmetro tiver uma dependência de unidades na forma $[P_1] = {L_1}^{a_{11}} \cdot\cdot {L_k}^{a_{1k}} \cdot\cdot {L_m}^{a_{1m}}$, ..., $[P_n] = {L_1}^{a_{n1}} \cdot\cdot {L_k}^{a_{nk}} \cdot\cdot {L_m}^{a_{nm}}$, a questão se reduz a determinar quantas potencias inteiras da forma $(x_1, \ldots, x_n)$ para as quais a expressão ${P_1}^{x_1} \cdots {P_n}^{x_n} = P^x$ produz um parâmetro adimensional. Para isto é necessário que $P^x = {L_1}^0 \cdot\cdot {L_k}^0 \cdot\cdot {L_m}^0$ ou seja, é necessário que resolvamos o sistema de equações lineares: $\sum_{j=1}^{n} a_{jk}x_j = 0\, ; 1 \le k \le m$. A complexidade do Modelo naturalmente é dada pela dimensão do núcleo da matriz $n \times m\ \{a_{jk}\}$. Supondo m parâmetros distintos a dimensão do núcleo será $n - m = \mu$, o que será "bem" definido como a *medida de complexidade estrutural* do Modelo e determinada pelo número de parâmetros adimensionais necessários para descrevê-lo. No caso do pêndulo de Galileo $m = 3$ e $n = 4$ de onde vem que $\mu = 1.$ (Refer. G.Barenblatt, G.West).

Exercicio:

1-Considere um sistema massa-mola cuja massa m pontual está pendurada por uma mola "linear" (Hooke) fixa no teto, submetida a um atrito do meio viscoso em que se encontra imerso c (de tal forma que um objeto com velocidade v é submetido a uma força contraria ao movimento igual a cv). Sendo a mola linear, a força exercida por ela de restauração no sentido da posição sem deformação é kx onde x representa o deslocamento vertical da massa a partir desta posição. Acrescente-se a este sistema a força da gravidade mg exercida sobre a massa e as condições iniciais $x(0) = x_0$ de deslocamento e $\frac{dx}{dt}(0) = 0$ de velocidade. Portanto o Modelo pode ser descrito na forma: $x = \varphi(t, m, k, c, x_0)$. Considere as unidades básicas como sendo comprimento, tempo e massa. Determine a dependência da medida de cada parâmetro com respeito às unidades básicas e a quantidade de parâmetros adimensionais independentes. Reduza o modelo a variáveis intrínsecas e determine a sua complexidade. (Ref. Bassanezi-Ferreira).

REFERÊNCIAS

G.Barenblatt-*Scaling,* Cambridge UP

R.C.Bassanezi-W.C.Ferreira Jr-*Equações Diferenciais e Aplicações*, Harbra 1988

K. van Rijsbergen-*The Geometry of Information Retrieval*, Cambridge UP, 2004

G.West-*Scale-The Universal Laws of Life, Growth, and Death in Organisms, Cities, and Companies*, Penguin 2018

xxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxx

APÊNDICE II:Variação sobre o Problema de Arquimedes

Ainda se tratando da coroa do rei Hieron, sua suspeita sobre a composição material utilizada pelo artesão na confecção da mesma e a infindável tarefa de Prometeu, isto é, de Arquimedes.

xxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxx

APÊNDICE III: *As Generalizações do Princípio de Superposição*

O conceito de Superposição em um conjunto de elementos S está associado à existência de uma *operação* ***binária*** e ***associativa*** (a ser genericamente denominada "*Soma*") com propriedades convenientes que permita a construção *intrínseca* de todos os elementos $v \in S$ a partir de algum conjunto reduzido $B = \{\beta\}$ de elementos, isto é, $v = \sum \beta_k$.

O conceito de "Soma" embora tenha a sua origem na operação de mesmo nome (e com o mesmo símbolo " + ") definida para os números naturais, evoluiu consideravelmente ao longo da história da Matemática. Hoje ela significa *genericamente* uma operação ***binária*** e ***associativa*** que permite tratar de "somas" múltiplas (em geral finitas, mas também infinitas) e cujo objetivo é possibilitar uma representação econômica e intrínseca dos elementos de uma Estrutura. Com esta generalidade o conceito de Superposição abstrato pode assumir formas extremamente distintas das suas origens históricas sempre com o objetivo de, por um lado ampliar a capacidade descritiva do procedimento e, por outro, reduzir o tamanho dos conjuntos geradores.

O Principio de Superposição deve sua origem histórica a um contexto de interesse essencialmente prático com os trabalhos do engenheiro de Napoleão Bonaparte, Jean-Baptiste de Fourier ,no principio do século XIX sobre a transmissão do calor. (O tema era tão prático que o poderoso burocrata da ciência à época, Jean d'Alembert fez pouco caso do seu trabalho recusando o patrocínio da Academia Francesa para a publicação de um do livros mais influentes da Matemática: *Théorie Analytique de la chaleur*, 1828). Neste trabalho Fourier apresenta um método de Superposição ***infinita*** que tem a capacidade de descrever essencialmente todas as funções de interesse para a teoria do calor utilizando apenas as (extremamente) simples funções exponenciais complexas $e^{i\lambda x}$ (ou as elementares, mas muito mais complicadas funções trigonométricas) com as hoje famosas Séries de Fourier. Em seguida, ele expandiu ainda mais o conceito de Superposição utilizando um procedimento de "***Soma contínua***" que hoje é conhecida como Integral / Transformada de Fourier. A partir deste trabalho, os conceitos de ***Soma Infinita*** (Séries de números ou de funções) e a ***Soma Contínua*** (Integral de funções), tornaram-se instrumentos indispensáveis à Teoria de Equações Diferenciais Parciais e também da Análise Matemática e da Física Matemática. A generalização profícua da idéia de *Superposição* para espaços numéricos e funcionais originada nos trabalhos de J.B. Fourier (sec.XIX) foi um dos temas mais centrais da Matemática que influenciou todo o seu desenvolvimento desde a sua concepção até os dias de hoje. Entretanto, este tema pertence mais ao domínio da Análise Matemática e serão abordadas apenas colateralmente neste texto (Ref. W.C.Ferreira Jr.-*Notas de Análise Funcional*, IMECC 2010).

Em um contexto mais algébrico e muito mais modesto, mas ainda importante, estão as generalizações decorrentes da *Álgebra Idempotente* inventada e desenvolvida pelo matemático V.P.Maslov e por engenheiros de transporte em que operações binárias de "*Soma*" são definidas em termos de procedimentos de maximização. Nestes casos a Estrutura resultante não constitui um Espaço Vetorial pois admite restrições severas quanto às propriedades operacionais da "*Soma*" limitando a sua aplicação a um leque mais especifico de problemas. (Ref. Heidergott& Kolokoltsov&Maslov).

REFERÊNCIAS:

B.Heidergott &AL-*Max-Plus at Work: Modeling and Analysis of Synchronized Systems*, Princeton UP 2006

V.V.Kolokoltsov-V.P.Maslov-*Idempotent Analysis and Applications*, Kluwer 1997

xxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxx

APÊNDICE IV: *CONJUNTOS CONVEXOS EM ESPAÇOS VETORIAIS*

O conceito de convexidade provem de conceitos geométricos intuitivos e simples da Geometria Euclideana e sua generalização tem se mostrado importante para o estudo de diversas questões em Espaços Vetoriais funcionais especialmente relacionadas com Otimização e Aproximação.

Apresentaremos abaixo uma definição abstrata de convexidade que faz uso apenas da estrutura *algébrica* de Espaços Vetoriais seguida de algumas propriedades que devem ser ilustradas pelo/a leitor/a com gráficos em duas dimensões com lápis e papel para a aquisição de familiaridade intuitiva com o tema que é o objetivo deste Apêndice.

DEFINIÇÃO: Combinação Convexa

Em um Espaço Vetorial qualquer Combinação linear $v = \sum_{k=1}^{N} \lambda_k v_k$ com coeficientes da forma $0 \leq \lambda_k$; $\sum_{k=1}^{N} \lambda_k = 1$ é denominada ***Combinação Convexa***.

-DEFINIÇÃO: *Envoltória Convexa*:

Se $A \subset E$ for um subconjunto não vazio de um Espaço Vetorial E , denomina-se ***Envoltória Convexa*** de A ao conjunto definido por todas as possíveis Combinações Lineares Convexas com elementos de A denotado por: $\langle A \rangle = \{v = \sum_{k=1}^{N} \lambda_k v_k \ ; 0 \le \lambda_k \ ; \ \sum_{k=1}^{N} \lambda_k = 1 \ ; \ v_k \in A\}$.

DEFINIÇÃO:*Conjunto Convexo*

Um subconjunto $K \subset E$ de um Espaço Vetorial E é dito ***Convexo*** se $\langle K \rangle = K$.

Exercícios:

1-Familiarize-se com o conceito de convexidade definido acima com desenhos em Espaços Euclideanos de duas e três dimensões.

2-Mostre que todos os Espaços Vetoriais são conjuntos convexos, mas não vale a afirmação recíproca.

3-Mostre que a interseção de conjuntos convexos é um conjunto convexo, mas não a união.

4-Argumente com evidências tiradas de exemplos gráficos no plano, e depois demonstre formalmente em geral, que um Conjunto $K \subset E$ é convexo se e somente se dados dois vetores $a, b \in K$ então o "segmento linear" que os une está contido em K, isto é, $\overleftrightarrow{ab} = \{x = a + t(b - a); 0 \le t \le 1\} \subset K$. (Vide Ex.9).

5-Mostre que o produto cartesiano de dois conjuntos convexos é convexo.

6-Se E for um Espaço Vetorial, $F \subset E$ um subespaço e $K \subset E$ um conjunto convexo, é possível dizer que ${}^{K}\!/_{F} \subset {}^{E}\!/_{F}$ é um conjunto convexo?

7-Determine graficamente o conjunto convexo $\langle a, b, c \rangle \subset \mathbb{R}^2$ em que $a = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ $b = \begin{pmatrix} 5 \\ 3 \end{pmatrix}$ $c = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}$ e calcule a sua área. (**Sugestão**: "Produto" vetorial).

8- Determine graficamente o conjunto convexo $\langle a, b, c \rangle \subset \mathbb{R}^3$ em que $a = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, $b = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $c = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$ e calcule o seu volume. (**Sugestão**: "Produto" "misto").

9-Mostre que uma combinação convexa da forma $\sum_{k=1}^{n} \lambda_k v_k$, $0 \le \lambda_k \le 1, \sum_{k=1}^{n} \lambda_k = 1$, pode ser reescrita na forma:

$$\lambda_1 v_1 + \left(\sum\nolimits_{k=2}^{n} \lambda_2\right) \sum\nolimits_{k=2}^{n} \frac{\lambda_k}{(\sum_{k=2}^{n} \lambda_2)} v_k \quad ,$$

Que é uma combinação convexa entre v_1 e $w_1 = \sum_{k=2}^{n} \frac{\lambda_k}{(\sum_{k=2}^{n} \lambda_2)} v_k$, e que w_1é também uma combinação convexa de $\{v_k\}_{k \ge 2}$. Interprete geometricamente este fato para três vetores não colineares dois a dois no plano ou três vetores lin. Indep. no espaço.

10-Interprete geometricamente as figuras descritas pelas combinações lineares do tipo $\sum_{k=1}^{n} \lambda_k v_k$, $0 \le \lambda_k \le 1$ para $n = 2,3,4$ no plano e no espaço tridimensional.