MA211 - Lista 04

Regra da Cadeia, Derivadas Direcionais e Vetor Gradiente

12 de setembro de 2016

EXERCÍCIOS RESOLVIDOS

1. ★ ([1], seção 14.5) Utilize a Regra da Cadeia para determinar $\partial z/\partial s$ e $\partial z/\partial t$, onde

$$z = \operatorname{sen}\theta\cos\phi, \quad \theta = st^2, \quad \phi = s^2 t.$$

Solução: Utilizando a Regra de Cadeia, obtemos

$$\begin{aligned}\frac{\partial z}{\partial s} &= \frac{\partial z}{\partial \theta}\frac{\partial \theta}{\partial s} + \frac{\partial z}{\partial \phi}\frac{\partial \phi}{\partial s}\\ &= (\cos\theta\cos\phi)(t^2) + (\operatorname{sen}\theta(-\operatorname{sen}\phi))(2st)\\ &= t^2\cos(st^2)\cos(s^2t) - 2st\operatorname{sen}(st^2)\operatorname{sen}(s^2t)\end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned}\frac{\partial z}{\partial t} &= \frac{\partial z}{\partial \theta}\frac{\partial \theta}{\partial t} + \frac{\partial z}{\partial \phi}\frac{\partial \phi}{\partial t}\\ &= (\cos\theta\cos\phi)(2st) + (\operatorname{sen}\theta(-\operatorname{sen}\phi))(s^2)\\ &= 2st\cos(st^2)\cos(s^2t) - s^2\operatorname{sen}(st^2)\operatorname{sen}(s^2t).\end{aligned}$$

2. ♦ (Prova, 2008) Seja $g(x, y) = f(x^2 + y^2)$, onde $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é uma função diferenciável. Mostre que

$$y\frac{\partial g}{\partial x} - x\frac{\partial g}{\partial y} = 0.$$

Solução: Observe que f é uma função de uma variável. Logo, utilizando a Regra da Cadeia para funções de uma variável, obtemos

$$\frac{\partial g}{\partial x}(x, y) = f'(x^2 + y^2)(2x)$$

e

$$\frac{\partial g}{\partial y}(x, y) = f'(x^2 + y^2)(2y).$$

Portanto

$$y\frac{\partial g}{\partial x} - x\frac{\partial g}{\partial y} = 0.$$

3. ★ (Prova, 2014) Considere a função

$$f(x,y) = \begin{cases} x+y, & \text{se } xy = 0, \\ 1, & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

Mostre que f não possui derivada direcional em $(0,0)$ na direção de um vetor $\mathbf{v} = (a,b)$ com $a^2 + b^2 = 1$ e $ab \neq 0$.

Solução: Seja $\mathbf{v} = (a,b)$ um vetor unitário (isto é, $a^2 + b^2 = 1$), em que $ab \neq 0$. A derivada direcional em $(0,0)$ na direção do vetor unitário $\mathbf{v}$ existe se o limite

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(0+ah, 0+bh) - f(0,0)}{h}$$

existir. Para $h \neq 0$, temos $(ah)(bh) \neq 0$. Logo $f(ah,bh) = 1$. Assim, o limite em questão se reduz a

$$\lim_{h\to 0} \frac{1}{h},$$

e esse limite não existe. Como o vetor $\mathbf{v}$ satisfazendo as hipóteses foi tomado arbitrariamente, concluímos que f não possui derivada direcional em $(0,0)$ na direção de nenhum vetor $\mathbf{v} = (a,b)$ que satisfaça $a^2 + b^2 = 1$ e $ab \neq 0$.

4. ♦ ([1], seção 14.6) Suponha que em uma certa região do espaço o potencial elétrico V seja dado por $V(x,y,z) = 5x^2 - 3xy + xyz$.

a) Determine a taxa de variação do potencial em $P = (3,4,5)$ na direção do vetor $\mathbf{v} = \mathbf{i} + \mathbf{j} - \mathbf{k}$.

b) Em que direção V varia mais rapidamente em P?

c) Qual a taxa máxima de variação em P?

Solução:

a) Queremos determinar o valor de $D_{\mathbf{u}}f(P)$, em que $\mathbf{u}$ é o vetor unitário que tem mesma direção de $\mathbf{v}$, isto é, $\mathbf{u} = \frac{1}{\sqrt{3}}(1,1,-1)$. Como V é diferenciável, segue que $D_{\mathbf{u}}f(P) = \nabla V(P) \cdot \mathbf{u}$. Observe que $\nabla V(x,y,z) = (10x - 3y + yz, -3x + xz, xy)$. Logo $\nabla V(P) = (38,6,12)$. Portanto,

$$D_{\mathbf{u}}f(P) = \nabla V(P) \cdot \mathbf{u} = (38,6,12) \cdot \frac{1}{\sqrt{3}}(1,1,-1) = \frac{32\sqrt{3}}{3}.$$

b) A direção em que V varia mais rapidamente no ponto P é a direção do gradiente de V no ponto P, isto é, na direção de $\nabla V(P) = (38,6,12)$. Observe que aqui não é necessário normalizar o vetor, pois o exercício pede apenas a direção.

c) A taxa de variação máxima é $|\nabla V(P)| = 2\sqrt{406}$.

EXERCÍCIOS PROPOSTOS

5. ♦ ([1], seção 14.5) Use a Regra da Cadeia para determinar $\mathrm{d}z/\mathrm{d}t$ ou $\mathrm{d}w/\mathrm{d}t$.

   a) $z = x^2y + xy^2, \quad x = 2 + t^2, \quad y = 1 - t^3.$

   b) $z = \sqrt{x^2 + y^2}, \quad x = e^{2t}, \quad y = e^{-2t}.$

   c) ★ $z = \operatorname{sen} x \cos y, \quad x = \pi t, \quad y = \sqrt{t}.$

   d) $z = \operatorname{tg}^{-1}(x/y), \quad x = e^t, \quad y = 1 - e^{-t}.$

   e) $w = xe^{y/z}, \quad x = t^2, \quad y = 1 - t, \quad z = 1 + 2t.$

6. ♦ ([1], seção 14.5) Utilize a Regra da Cadeia para determinar $\partial z/\partial s$ e $\partial z/\partial t$.

   a) $z = x^2y^3, \quad x = s\cos t, \quad y = s \operatorname{sen} t.$

   b) $z = \operatorname{arcsen}(x - y), \quad x = s^2 + t^2, \quad y = 1 - 2st.$

   d) $z = e^{x+2y}, \quad x = s/t, \quad y = t/s.$

   e) $z = e^r \cos\theta, \quad r = st, \quad \theta = \sqrt{s^2 + t^2}.$

   f) $z = \operatorname{tg}(u/v), \quad u = 2s + 3t, \quad v = 3s - 2t.$

7. ([1], seção 14.5) Se $z = f(x, y)$, onde f é diferenciável, e

$x = g(t)$	$y = h(t)$
$g(3) = 2$	$h(3) = 7$
$g'(3) = 5$	$h'(3) = -4$
$f_x(2, 7) = 6$	$f_y(2, 7) = -8,$

   determine $\mathrm{d}z/\mathrm{d}t$ quando $t = 3$.

8. ([1], seção 14.5) Seja $W(s, t) = F(u(s, t), v(s, t))$, onde F, u e v são diferenciáveis, e

$u(1, 0) = 2$	$v(1, 0) = 3$
$u_s(1, 0) = -2$	$v_s(1, 0) = 5$
$u_t(1, 0) = 6$	$v_t(1, 0) = 4$
$F_u(2, 3) = -1$	$F_v(2, 3) = 10.$

   Determine $W_s(1, 0)$ e $W_t(1, 0)$.

9. ([1], seção 14.5) Utilize um diagrama em árvore para escrever a Regra da Cadeia para o caso dado. Suponha que todas as funções sejam diferenciáveis.

   a) $w = f(r, s, t)$, onde $r = r(x, y), \quad s = s(x, y), \quad t = t(x, y).$

   b) $t = f(u, v, w)$, onde $u = u(p, q, r, s), \quad v = v(p, q, r, s), \quad w = w(p, q, r, s).$

10. ♦ ([1], seção 14.5) Utilize a Regra da Cadeia para determinar as derivadas parciais indicadas.

   a) ★ $z = x^2 + xy^3, \quad x = uv^2 + w^3, \quad y = u + ue^w;$
   $\dfrac{\partial z}{\partial u}, \quad \dfrac{\partial z}{\partial v}, \quad \dfrac{\partial z}{\partial w}$ quando $u = 2, \quad v = 1, \quad w = 0.$

   b) $u = \sqrt{r^2 + s^2}, \quad r = y + x\ \cos t, \quad s = x + y\ \operatorname{sen} t;$
   $\dfrac{\partial u}{\partial x}, \quad \dfrac{\partial u}{\partial y}, \quad \dfrac{\partial u}{\partial t}$ quando $x = 1, \quad y = 2, \quad t = 0.$

   c) $Y = w\,\operatorname{tg}^{-1}(uv), \quad u = r + s, \quad v = s + t; \quad w = t + r$
   $\dfrac{\partial Y}{\partial r}, \quad \dfrac{\partial Y}{\partial s}, \quad \dfrac{\partial Y}{\partial t}$ quando $r = 1, \quad s = 0, \quad t = 1.$

11. ([1], seção 14.5) Utilize a Equação 6 Seção 14.5 de [1] para determinar $\mathrm{d}y/\mathrm{d}x$.

   a) $\sqrt{xy} = 1 + x^2 y$

   b) $\cos(x - y) = xe^y$

12. ([1], seção 14.5) Utilize as Equações 7 Seção 14.5 de [1] para determinar $\partial z/\partial x$ e $\partial z/\partial y$.

   a) $x^2 + y^2 + z^2 = 3xyz$

   b) $xyz = \cos(x + y + z)$

   c) $yz = \ln(x + z)$

13. ([1], seção 14.5) A temperatura em um ponto (x, y) é $T(x, y)$, medida em graus Celsius. Um inseto rasteja de modo que sua posição depois de t segundos seja dada por $x = \sqrt{1 + t}$ e $y = 2 + \dfrac{1}{3}t$, onde x e y são medidas em centímetros. A função temperatura satisfaz $T_x(2, 3) = 4$ e $T_y(2, 3) = 3$. Quão rápido a temperatura aumenta no caminho do inseto depois de três segundos?

14. ★ ([1], seção 14.5) O comprimento l, a largura w e a altura h de uma caixa variam com o tempo. Em certo instante, as dimensões da caixa são $l = 1\ m$ e $w = h = 2\ m$. l e w aumentam a uma taxa de $2\ m/s$, ao passo que h diminui a uma taxa de $3\ m/s$. Nesse instante, determine as taxas nas quais as seguintes quantidades estão variando.

   a) O volume.

   b) A área da superfície.

   c) O comprimento da diagonal.

15. ([1], seção 14.5) Se $z = f(x, y)$, onde $x = r\cos\theta$ e $y = r\operatorname{sen}\theta$,

   a) Determine $\dfrac{\partial z}{\partial r}$ e $\dfrac{\partial z}{\partial \theta}$.

   b) Mostre que $\left(\dfrac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + \left(\dfrac{\partial z}{\partial y}\right)^2 = \left(\dfrac{\partial z}{\partial r}\right)^2 + \dfrac{1}{r^2}\left(\dfrac{\partial z}{\partial \theta}\right)^2.$

16. ([1], seção 14.5) Se $u = f(x, y)$, onde $x = e^s \cos t$ e $y = e^s \operatorname{sen} t$, mostre que

$$\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2 = e^{-2s}\left[\left(\frac{\partial u}{\partial s}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial t}\right)^2\right].$$

17. ([1], seção 14.5) Se $z = f(x - y)$, mostre que

$$\frac{\partial z}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial y} = 0.$$

18. ♦ ([1], seção 14.5) Mostre que qualquer função da forma

$$z = f(x + at) + g(x - at)$$

é uma solução da equação de onda

$$\frac{\partial^2 z}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 z}{\partial x^2}.$$

(Sugestão: Tome $u = x + at$, $v = x - at$.)

19. ([1], seção 14.5) Se $z = f(x, y)$, onde $x = r^2 + s^2$ e $y = 2rs$, determine $\partial^2 z/\partial r \partial s$. (Compare com o Exemplo 7, Seção 14.5 de [1].)

20. ([1], seção 14.5) Suponha que a equação $F(x, y, z) = 0$ defina implicitamente cada uma das três variáveis x, y e z como função das outras duas: $z = f(x, y)$, $y = g(x, y)$ e $x = h(y, z)$. Se F for diferenciável e F_x, F_y e F_z forem todas não nulas, mostre que

$$\frac{\partial z}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial z} = -1.$$

21. ([2], seção 12.1) Calcule $\mathrm{d}z/\mathrm{d}t$ pelos dois processos descritos no Exemplo 2, Seção 12.1 de [2].

   a) $z = \operatorname{sen}(xy)$, $x = 3t$ e $y = t^2$.

   b) $z = x^2 + 3y^2$, $x = \operatorname{sen} t$ e $y = \cos t$.

   c) $z = \ln(1 + x^2 + y^2)$, $x = \operatorname{sen} 3t$ e $y = \cos 3t$.

22. ♦ ([2], seção 12.1) Seja $g(t) = f(3t, 2t^2 - 1)$.

   a) Expresse $g'(t)$ em termos das derivadas parciais de f.

   b) Calcule $g'(0)$ admitindo $\frac{\partial f}{\partial x}(0, -1) = \frac{1}{3}$.

23. ([2], seção 12.1) Expresse $\partial z/\partial t$ em termos das derivadas parciais de f, sendo $z = f(x, y)$ e

a) $x = t^2$ e $y = 3t$.

b) $x = \operatorname{sen} 3t$ e $y = \cos 2t$.

24. ([2], seção 12.1) Suponha que, para todo t, $f(t^2, 2t) = t^3 - 3t$. Mostre que

$$\frac{\partial f}{\partial x}(1,2) = -\frac{\partial f}{\partial y}(1,2).$$

25. ([2], seção 12.1) Suponha que, para todo x, $f(3x, x^3) = \operatorname{arctg}(x)$.

a) Calcule $\dfrac{\partial f}{\partial x}(3,1)$ admitindo $\dfrac{\partial f}{\partial y}(3,1) = 2$.

b) Determine a equação do plano tangente ao gráfico de f no ponto $(3, 1, f(3, 1))$.

26. ♦ ([2], seção 12.1) Admita que, para todo (x, y),

$$4y\,\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) - x\,\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = 2.$$

Calcule $g'(t)$, sendo $g(t) = f(2\cos t, \operatorname{sen} t)$.

27. ♦ ([2], seção 12.1) Admita que, para todo (x, y),

$$4y\,\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) - x\,\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = 0.$$

Prove que f é constante sobre a elipse $\dfrac{x^2}{4} + y^2 = 1$.

28. ([2], seção 12.1) Seja $z = f(u + 2v, u^2 - v)$. Expresse $\partial z/\partial u$ e $\partial z/\partial v$ em termos das derivadas parciais de f.

29. ([2], seção 12.1) Seja $z = f(u - v, v - u)$. Verifique que

$$\frac{\partial z}{\partial u} + \frac{\partial z}{\partial v} = 0.$$

30. ([2], seção 12.1) Considere a função $F(x, y) = f\left(\dfrac{x}{y}, \dfrac{y}{x}\right)$. Mostre que

$$x\,\frac{\partial F}{\partial x} + y\,\frac{\partial F}{\partial y} = 0.$$

31. ([2], seção 12.1) $f(t)$ e $g(x, y)$ são funções diferenciáveis tais que $g(t, f(t)) = 0$ para todo t. Suponha $f(0) = 1$, $\dfrac{\partial g}{\partial x}(0,1) = 2$ e $\dfrac{\partial g}{\partial y}(0,1) = 4$. Determine a equação da reta tangente a $\gamma(t) = (t, f(t))$, no ponto $\gamma(0)$.

32. ([2], seção 12.1) $f(x, y, z)$ e $g(x, y)$ são funções diferenciáveis tais que, para todo (x, y) no domínio de g, $f(x, y, g(x, y)) = 0$. Suponha $g(1, 1) = 3$, $\dfrac{\partial f}{\partial x}(1, 1, 3) = 2$, $\dfrac{\partial f}{\partial y}(1, 1, 3) = 5$ e $\dfrac{\partial f}{\partial z}(1, 1, 3) = 10$. Determine a equação do plano tangente ao gráfico de g no ponto $(1, 1, 3)$.

33. ♦ ([2], seção 12.1) Seja $g(t) = f(3t^2, t^3, e^{2t})$ e suponha $\dfrac{\partial f}{\partial z}(0, 0, 1) = 4$.

   a) Expresse $g^{'}(t)$ em termos das derivadas parciais de f.

   b) Calcule $g^{'}(0)$.

34. ♦ ([2], seção 12.2) Mostre que cada uma das equações a seguir define implicitamente pelo menos uma função diferenciável $y = y(x)$. Expresse $\mathrm{d}y/\mathrm{d}x$ em termos de x e y.

   a) $x^2y + \mathrm{sen}(y) = x$

   b) $y^4 + x^2y^2 + x^4 = 3$

35. ([2], seção 12.2) Mostre que cada uma das equações a seguir define implicitamente pelo menos uma função diferenciável $z = z(x, y)$. Expresse $\partial z/\partial x$ e $\partial z/\partial y$ em termos de x, y e z.

   a) $e^{x+y+z} + xyz = 1$

   b) $x^3 + y^3 + z^3 = x + y + z$

36. ([2], seção 12.2) A função diferenciável $z = z(x, y)$ é dada implicitamente pela equação $f\left(\dfrac{x}{y}, z\right) = 0$, onde $f(u, v)$ é suposta diferenciável e $\dfrac{\partial f}{\partial v}(u, v) \neq 0$. Verifique que

$$x\,\frac{\partial z}{\partial x} + y\,\frac{\partial z}{\partial y} = 0.$$

37. ([2], seção 12.2) A função diferenciável $z = z(x, y)$ é dada implicitamente pela equação $f\left(\dfrac{x}{y}, \dfrac{z}{x^\lambda}\right) = 0$ ($\lambda \neq 0$ um número real fixo), onde $f(u, v)$ é suposta diferenciável e $\dfrac{\partial f}{\partial v}(u, v) \neq 0$. Verifique que

$$x\,\frac{\partial z}{\partial x} + y\,\frac{\partial z}{\partial y} = \lambda z.$$

38. ([3], seção 11.4) Nos itens abaixo: **(i)** expresse $\mathrm{d}w/\mathrm{d}t$ como uma função de t, usando a Regra da Cadeia, expressando w em termos de t e diferenciando em relação a t; **(ii)** calcule $\mathrm{d}w/\mathrm{d}t$ no valor dado de t.

   a) $w = x^2 + y^2, \quad x = \cos t, \quad y = \operatorname{sen} t; \quad t = \pi.$

   b) $w = x^2 + y^2, \quad x = \cos t + \operatorname{sen} t, \quad y = \cos t - \operatorname{sen} t; \quad t = 0.$

39. ([3], seção 11.4) Nos itens abaixo: **(i)** expresse $\partial w/\partial u$ e $\partial w/\partial v$ como funções de u e v, usando a Regra da Cadeia e também expressando w diretamente em termos e u e v antes de diferenciar; **(ii)** calcule $\partial w/\partial u$ e $\partial w/\partial v$ no ponto dado (u, v).

   a) $w = xy + yz + xz, \quad x = u + v, \quad y = u - v, \quad z = uv; \quad (u, v) = (1/2, 1).$

   b) $w = \ln(x^2 + y^2 + z^2), \quad x = ue^v \operatorname{sen} u, \quad y = ue^v \cos u, \quad z = ue^v;$ $(u, v) = (-2, 0).$

40. ♦ ([3], seção 11.4) Encontre os valores de $\partial z/\partial x$ e $\partial z/\partial y$ nos pontos indicados.

   a) $z^3 - xy + yz + y^3 - 2 = 0, \quad (1, 1, 1).$

   b) $\dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{y} + \dfrac{1}{z} - 1 = 0, \quad (2, 3, 6).$

41. ([3], seção 11.4) Encontre $\partial w/\partial r$ quando $r = 1$, $s = -1$ se $w = (x + y + z)^2$, $x = r - s$, $y = \cos(r + s)$, $z = \operatorname{sen}(r + s)$.

42. ([3], seção 11.4) Se $f(u, v, w)$ é diferenciável, $u = x - y$, $v = y - z$ e $w = z - x$, mostre que
$$\frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial y} + \frac{\partial f}{\partial z} = 0.$$

43. ♦ ([3], seção 11.4) Suponha que substituamos coordenadas polares $x = r\cos\theta$ e $y = r\operatorname{sen}\theta$ em uma função diferenciável $w = f(x, y)$.

   a) Mostre que
$$\frac{\partial w}{\partial r} = f_x \cos\theta + f_y \operatorname{sen}\theta$$
   e
$$\frac{1}{r}\frac{\partial w}{\partial \theta} = -f_x \operatorname{sen}\theta + f_y \cos\theta.$$

   b) Resolva as equações no item (a) para expressar f_x e f_y em termos de $\partial w/\partial r$ e $\partial w/\partial \theta$.

   c) Mostre que
$$(f_x)^2 + (f_y)^2 = \left(\frac{\partial w}{\partial r}\right)^2 + \frac{1}{r^2}\left(\frac{\partial w}{\partial \theta}\right)^2.$$

44. ([5], seção 16.5) O raio r e a altura h de um cilindro circular reto aumentam à razão de $0,01\ cm/min$ e $0,02\ cm/min$, respectivamente.

a) Ache a taxa de variação do volume quando $r = 4\ cm$ e $h = 7\ cm$.

b) A que taxa a área da superfície curva está variando nesse instante?

45. ([5], seção 16.5) Os lados iguais e o ângulo correspondente de um triângulo isósceles estão aumentando à razão de $3\ cm/h$ e $2°/h$, respectivamente. Ache a taxa à qual a área do triângulo está aumentando no instante em que o comprimento de cada um dos lados iguais é de 6 metros e o ângulo correspondente é $60°$.

46. ([5], seção 16.5) Quando o tamanho das moléculas e suas forças de atração são levadas em conta, a pressão P, o volume V e a temperatura T de um mol de gás confinado estão relacionados pela *equação de van der Waals*

$$\left(P + \frac{a}{V^2}\right)(V - b) = kT,$$

em que a, b e k são constantes positivas. Se t é o tempo, estabeleça uma fórmula para $\mathrm{d}T/\mathrm{d}t$ em termos de $\mathrm{d}P/\mathrm{d}t$, $\mathrm{d}V/\mathrm{d}t$, P e V.

47. ([5], seção 16.5) Suponha que $u = f(x, y)$ e $v = g(x, y)$ verifiquem as equações de Cauchy- Riemann $u_x = v_y$ e $u_y = -v_x$. Se $x = r\cos\theta$ e $y = r\,\mathrm{sen}\,\theta$, mostre que

$$\frac{\partial u}{\partial r} = \frac{1}{r}\frac{\partial v}{\partial \theta} \quad \text{e} \quad \frac{\partial v}{\partial r} = -\frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial \theta}.$$

48. (Prova, 2010) Suponha que $w = f(x, y)$ é diferenciável e que exista uma constante α tal que

$$x = u\cos(\alpha) - v\,\mathrm{sen}(\alpha)$$
$$y = u\,\mathrm{sen}(\alpha) + v\cos(\alpha).$$

Mostre que

$$\left(\frac{\partial w}{\partial u}\right)^2 + \left(\frac{\partial w}{\partial v}\right)^2 = \left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial w}{\partial y}\right)^2.$$

49. ♦ (Teste, 2013) Se $z = f(x, y)$ com $x = u + v$ e $y = u - v$, demonstre que

$$\frac{\partial z}{\partial u} + \frac{\partial z}{\partial v} = 2\frac{\partial f}{\partial x}.$$

50. ([1], seção 14.6) Determine a derivada direcional de f no ponto dado e na direção indicada pelo ângulo θ.

a) $f(x, y) = x^2y^3 - y^4$, $\quad (2, 1)$, $\quad \theta = \pi/4$.

b) $f(x, y) = ye^{-x}$, $\quad (0, 4)$, $\quad \theta = 2\pi/3$.

51. ⧫ ([1], seção 14.6) Nos itens **(a) - (d)**: **(i)** determine o gradiente de f; **(ii)** calcule o gradiente no ponto P; e **(iii)** determine a taxa de variação de f em P na direção do vetor $\mathbf{u}$.

a) ★ $f(x,y) = 5xy^2 - 4x^3y, \quad P = (1,2), \quad \mathbf{u} = \left(\frac{5}{13}, \frac{12}{13}\right)$.

b) $f(x,y) = y \ln x, \quad P = (1,-3), \quad \mathbf{u} = \left(-\frac{4}{5}, \frac{3}{5}\right)$.

c) $f(x,y,z) = xe^{2yz}, \quad P = (1,-3), \quad \mathbf{u} = \left(\frac{2}{3}, -\frac{2}{3}, \frac{1}{3}\right)$.

d) $f(x,y,z) = \sqrt{x+yz}, \quad P = (1,3,1), \quad \mathbf{u} = \left(\frac{2}{7}, \frac{3}{7}, \frac{6}{7}\right)$.

52. ⧫ ([2], seção 11.5) Calcule $\nabla f(x,y)$.

a) $f(x,y) = x^2y$

b) $f(x,y) = e^{x^2-y^2}$

c) $f(x,y) = \dfrac{x}{y}$

d) $f(x,y) = \operatorname{arctg} \dfrac{x}{y}$

53. ⧫ ([2], seção 11.5) Defina gradiente de uma função de três variáveis. Calcule $\nabla f(x,y,z)$.

a) $f(x,y,z) = \sqrt{x^2+y^2+z^2}$

b) $f(x,y,z) = x^2+y^2+z^2$

c) $f(x,y,z) = (x^2+y^2+1)^{z^2}$

d) $f(x,y,z) = z \operatorname{arctg} \dfrac{x}{y}$

54. ([4], seção 14.8) Seja f uma função de três variáveis independentes x, y e z. Mostre que $D_{\mathbf{i}}f = f_x$, $D_{\mathbf{j}}f = f_y$ e $D_{\mathbf{k}}f = f_z$.

55. ⧫ ([2], seção 13.4) Calcule $D_{\mathbf{u}}f(x_0,y_0)$, sendo dados

a) $f(x,y) = x^2 - 3y^2$, $(x_0,y_0) = (1,2)$ e $\mathbf{u}$ o versor de $2\mathbf{i} + \mathbf{j}$.

b) $f(x,y) = e^{x^2-y^2}$, $(x_0,y_0) = (1,1)$ e $\mathbf{u}$ o versor de $(3,4)$.

c) $f(x,y) = \operatorname{arctg} \dfrac{x}{y}$, $(x_0,y_0) = (3,3)$ e $\mathbf{u} = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$.

d) $f(x,y) = xy$, $(x_0,y_0) = (1,1)$ e $\mathbf{u}$ o versor de $\mathbf{i} + \mathbf{j}$.

56. ⧫ ([1], seção 14.6) Determine a derivada direcional da função no ponto dado e na direção do vetor $\mathbf{v}$.

a) $f(x,y) = 1 + 2x\sqrt{y}, \quad (3,4), \quad \mathbf{v} = (4,-3)$.

b) $g(p,q) = p^4 - p^2q^3, \quad (2,1), \quad \mathbf{v} = (-1,2)$.

c) $f(x,y,z) = xe^y + ye^z + ze^x, \quad (0,0,0), \quad \mathbf{v} = (5,1,-2)$.

d) $f(x,y,z) = \sqrt{xyz}, \quad (3,2,6), \quad \mathbf{v} = (-1,-2,2)$.

57. ([1], seção 14.6) Determine a derivada direcional de $f(x,y,z) = xy + yz + zx$ em $P = (1,-1,3)$ na direção de $Q = (2,4,5)$.

58. (Prova, 2014) Considere o vetor unitário $\mathbf{u} = (\sqrt{3}/2, 1/2)$ e a função

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{xy^2}{x^2+y^4}, & \text{se } (x,y) \neq (0,0), \\ 0, & \text{se } (x,y) = (0,0). \end{cases}$$

a) Determine a derivada direcional $D_{\mathbf{u}} f(0,0)$.

b) Explique por que o produto escalar $\nabla f(0,0) \cdot \mathbf{u}$ não fornece a derivada direcional de f em $(0,0)$ na direção de $\mathbf{u}$.

59. ([3], seção 11.5) Encontre a derivada direcional de $f(x,y) = x^2+y^2$ na direção do versor tangente da curva

$$\mathbf{r}(t) = (\cos t + t \operatorname{sen} t)\mathbf{i} + (\operatorname{sen} t - t\cos t)\mathbf{j}, \quad t > 0.$$

60. (Prova, 2010) Seja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ uma função diferenciável de uma variável. Defina

$$g(x,y) = f(r), \quad r = \sqrt{x^2+y^2}.$$

Calcule a derivada direcional da função g no ponto $(x,y) \neq (0,0)$ e na direção do vetor (x,y).

61. ♦ (Prova, 2006) Determine as direções em que a derivada direcional da função $f(x,y) = x^2 + \operatorname{sen} xy$ no ponto $(1,0)$ tem valor 1.

62. ♦ ([1], seção 14.6) Determine a taxa de variação máxima de f no ponto dado e a direção em que isso ocorre.

a) $f(x,y) = \dfrac{y^2}{x}, \quad (2,4)$.

b) $f(x,y) = \operatorname{sen} xy, \quad (1,0)$.

c) $f(x,y,z) = \dfrac{x+y}{z}, \quad (1,1,-1)$.

d) $f(x,y,z) = \sqrt{x^2+y^2+z^2}, \quad (3,6,-2)$.

e) $f(x,y,z) = \operatorname{tg}(x+2y+3z), \quad (-5,1,1)$.

63. ([3], seção 11.5) Existe uma direção $\mathbf{u}$ na qual a taxa de variação de $f(x,y) = x^2 - 3xy + 4y^2$ em $P = (1,2)$ é igual a 14? Justifique sua resposta.

64. ([1], seção 14.6) Mostre que uma função diferenciável f decresce mais rapidamente em $\mathbf{x}$ na direção oposta à do vetor gradiente, ou seja, na direção de $-\nabla f(\mathbf{x})$.

65. ([2], seção 13.4) Em que direção e sentido a função dada cresce mais rapidamente no ponto dado? E em que direção e sentido decresce mais rapidamente?

a) $f(x, y) = x^2 + xy + y^2$ em $(1, 1)$.

b) $f(x, y) = \ln ||(x, y)||$ em $(1, -1)$.

c) $f(x, y) = \sqrt{4 - x^2 - 2y^2}$ em $\left(1, \frac{1}{2}\right)$.

66. ♦ (Prova, 2010) A superfície de um lago é representada por uma região D no plano xy, tal que a profundidade (em pés) sob o ponto correspondente a (x, y) é dada por

$$f(x, y) = 300 - 2x^2 - 3y^2.$$

Se um nadador está no ponto $(4, 9)$, em que direção deve nadar para que a profundidade sob ele decresça mais rapidamente?

67. ([2], seção 13.4) Seja $f(x, y) = x \operatorname{arctg} \frac{x}{y}$. Calcule $D_{\mathbf{u}}f(1, 1)$, em que $\mathbf{u}$ aponta na direção e sentido de máximo crescimento de f, no ponto $(1, 1)$.

68. ([1], seção 14.6) Determine todos os pontos nos quais a direção de maior variação da função $f(x, y) = x^2 + y^2 - 2x - 4y$ é $\mathbf{i} + \mathbf{j}$.

69. (Prova, 2008) Seja

$$f(x, y) = x - y \operatorname{sen}(\pi(x^2 + y^2)).$$

a) Calcule a derivada direcional de f no ponto $(0, 0)$ na direção de $\mathbf{v} = (1/2, \sqrt{3}/2)$.

b) Em que direção a taxa de variação de f no ponto $(0, 0)$ é máxima? Qual é o valor da taxa máxima nesse ponto?

70. (Prova, 2014) Considere a função

$$f(x, y) = \ln(x^2 + y^2).$$

a) Determine a taxa de variação máxima de f em $(1, 1)$ e a direção em que isso ocorre.

b) Determine a derivada direcional de f em $(1, 1)$ na direção do vetor $\mathbf{v} = (3, 4)$.

71. ([1], seção 14.6) A temperatura T em uma bola de metal é inversamente proporcional à distância do centro da bola, que tomamos como a origem. A temperatura no ponto $(1, 2, 2)$ é de $120°$.

a) Determine a taxa de variação de T em $(1, 2, 2)$ em direção ao ponto $(2, 1, 3)$.

b) Mostre que em qualquer ponto da bola a direção de maior crescimento na temperatura é dada por um vetor que aponta para a origem.

72. ♦ ([1], seção 14.6) A temperatura em um ponto (x, y, z) é dada por

$$T(x, y, z) = 200e^{-x^2-3y^2-9z^2},$$

em que T é medido em °C e x, y e z em metros.

a) Determine a taxa de variação da temperatura no ponto $P = (2, -1, 2)$ em direção ao ponto $(3, -3, 3)$.

b) Qual é a direção de maior crescimento da temperatura em P?

c) Encontre a taxa máxima de crescimento em P.

73. ([1], seção 14.6) Seja f uma função de duas variáveis que tenha derivadas parciais contínuas e considere os pontos $A = (1, 3)$, $B = (3, 3)$, $C = (1, 7)$ e $D = (6, 15)$. A derivada direcional em A na direção do vetor $\overrightarrow{AB}$ é 3, e a derivada direcional em A na direção $\overrightarrow{AC}$ é 26. Determine a derivada direcional de f em A na direção do vetor $\overrightarrow{AD}$.

74. ([1], seção 14.6) Mostre que a operação de calcular o gradiente de uma função tem a propriedade fornecida. Suponha que u e v sejam funções de x e y, diferenciáveis, e a e b sejam constantes.

a) $\nabla(au + bv) = a\nabla u + b\nabla v$

b) $\nabla(uv) = u\nabla v + v\nabla u$

c) $\nabla\left(\dfrac{u}{v}\right) = \dfrac{v\nabla u - u\nabla v}{v^2}$

d) $\nabla u^n = nu^{n-1}\nabla u$

75. ([2], seção 13.1) É dada uma curva γ que passa pelo ponto $\gamma(t_0) = (1, 3)$ e cuja imagem está contida na curva de nível $x^2+y^2 = 10$. Suponha $\gamma'(t_0) \neq \mathbf{0}$.

a) Determine a equação da reta tangente a γ no ponto $(1, 3)$.

b) Determine uma curva $\gamma(t)$ satisfazendo as condições acima.

76. ([2], seção 13.1) Determine a equação da reta tangente à curva γ no ponto $\gamma(t_0) = (2, 5)$ sabendo-se que $\gamma'(t) \neq \mathbf{0}$ e que sua imagem está contida na curva de nível $xy = 10$. Qual a equação da reta normal a γ, neste ponto?

77. ♦ ([2], seção 13.2) Determine as equações do plano tangente e da reta normal à superfície dada, no ponto dado.

a) $x^2 + 3y^2 + 4z^2 = 8$, em $(1, -1, 1)$.

b) $2xyz = 3$, em $\left(\dfrac{1}{2}, 1, 3\right)$.

c) $ze^{x-y} + z^3 = 2$ em $(2, 2, 1)$.

d) ([1], seção 14.6) $x^2 - 2y^2 + z^2 + yz = 2$ em $(2, 1, -1)$.

78. ★ ([2], seção 13.2) A função diferenciável $z = f(x, y)$ é dada implicitamente pela equação $x^3 + y^3 + z^3 = 10$. Determine a equação do plano tangente ao gráfico de f no ponto $(1, 1, f(1, 1))$.

79. ([1], seção 14.6) Se $g(x, y) = x^2+y^2-4x$, encontre o vetor gradiente $\nabla g(1, 2)$ e use-o para encontrar a reta tangente à curva de nível $g(x, y) = 1$ no ponto $(1, 2)$. Esboce a curva de nível, a reta tangente e o vetor gradiente.

80. ([2], seção 13.1) Determine a equação da reta tangente à curva de nível dada, no ponto dado.

    a) $x^2 + xy + y^2 - 3y = 1$, em $(1, 2)$.

    b) $e^{2x-y} + 2x + 2y = 4$, em $\left(\frac{1}{2}, 1\right)$.

81. (Prova, 2013) Seja $g(x, y) = f(x^2+y^2)$, em que f é uma função diferenciável. Sabendo que $f'(2) = 1$, determine a equação da reta tangente à curva de nível de g que passa pelo ponto $(1, 1)$.

82. ♦ ([1], seção 14.6) Mostre que a equação do plano tangente ao elipsoide $x^2/a^2 + y^2/b^2 + z^2/c^2 = 1$ no ponto (x_0, y_0, z_0) pode ser escrita como

$$\frac{xx_0}{a^2} + \frac{yy_0}{b^2} + \frac{zz_0}{c^2} = 1.$$

83. ([2], seção 13.1) Determine uma reta que seja tangente à elipse $2x^2 + y^2 = 3$ e paralela à reta $2x + y = 5$.

84. ([2], seção 13.1) Determine uma reta que seja tangente à curva $x^2+xy+y^2 = 7$ e paralela à reta $4x + 5y = 17$.

85. ([1], seção 14.6) Existem pontos no hiperboloide $x^2 - y^2 - z^2 = 1$ nos quais o plano tangente é paralelo ao plano $z = x + y$?

86. ♦ (Prova, 2013) Determine os pontos da superfície $x^2 + 2y^2 + 3z^2 = 1$ nos quais o plano tangente é paralelo ao plano $3x - y + 3z = 1$.

87. ([2], seção 13.2) Determine um plano que seja tangente à superfície $x^2+3y^2+2z^2 = \frac{11}{6}$ e paralelo ao plano $x + y + z = 10$.

88. ([1], seção 14.6) Determine as equações paramétricas da reta tangente à curva formada pela intersecção do paraboloide $z = x^2 + y^2$ com o elipsoide $4x^2 + y^2 + z^2 = 9$ no ponto $(-1, 1, 2)$.

89. ([1], seção 14.6)

    a) Duas superfícies são ditas **ortogonais** em um ponto de intersecção se suas normais são perpendiculares nesse ponto. Mostre que superfícies com equação $F(x, y, z) = 0$ e $G(x, y, z) = 0$ são ortogonais em um ponto P, em que $\nabla F \neq 0$ e $\nabla G \neq 0$, se, e somente se, em P,

$$F_xG_x + F_yG_y + F_zG_z = 0.$$

    b) Use a parte (a) para mostrar que as superfícies $z^2 = x^2 + y^2$ e $x^2 + y^2 + z^2 = r^2$ são ortogonais em todo ponto de intersecção. Você pode ver isso sem fazer os cálculos?

RESPOSTAS DOS EXERCÍCIOS PROPOSTOS

5. **a)** $\dfrac{dz}{dt} = 4(2xy + y^2)^3 - 3(x^2 + 2xy)t^2.$

   b) $\dfrac{dz}{dt} = \dfrac{2xe^{2t} - 2ye^{2t}}{\sqrt{x^2 + y^2}}.$

   c) $\dfrac{dz}{dt} = \pi \cos(x)\cos(y) - \dfrac{1}{2\sqrt{t}} \operatorname{sen}(x)\operatorname{sen}(y).$

   d) $\dfrac{dz}{dt} = \dfrac{xe^{-t} - ye^{t}}{x^2 + y^2}.$

   e) $\dfrac{dw}{dt} = e^{\frac{y}{z}} \left(2t - \dfrac{x}{z} - \dfrac{2xy}{z^2}\right).$

6. **a)** $\dfrac{\partial z}{\partial s} = 2xy^3 \cos(t) + 3x^2y^2 \operatorname{sen}(t)$ e $\dfrac{\partial z}{\partial t} = -2sxy^3 \operatorname{sen}(t) + 3sx^2y^2 \cos(t).$

   b) $\dfrac{\partial z}{\partial s} = \dfrac{\partial z}{\partial t} = \dfrac{2s + 2t}{\sqrt{1 - (x - y)^2}}.$

   d) $\dfrac{\partial z}{\partial s} = e^{x+st} \left(\dfrac{1}{t} - \dfrac{2t}{s^2}\right)$ e $\dfrac{\partial z}{\partial t} = e^{x+st} \left(\dfrac{2}{s} - \dfrac{s}{t^2}\right).$

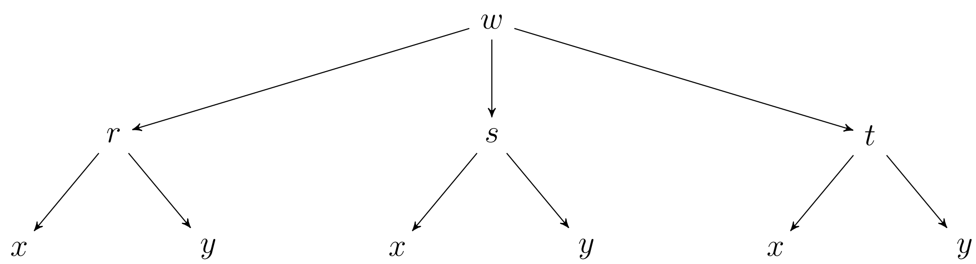
   e) $\dfrac{\partial z}{\partial s} = e^{r} \left(t\cos(\theta) - \dfrac{s}{\sqrt{s^2 + t^2}} \operatorname{sen}(\theta)\right)$ e $\dfrac{\partial z}{\partial t} = e^{r} \left(s\cos(\theta) - \dfrac{t}{\sqrt{s^2 + t^2}} \operatorname{sen}(\theta)\right).$

   f) $\dfrac{\partial z}{\partial s} = \dfrac{2u - 3v}{v^2} \sec^2\left(\dfrac{u}{v}\right)$ e $\dfrac{\partial z}{\partial t} = \dfrac{2u + 3v}{v^2} \sec^2\left(\dfrac{u}{v}\right).$

7. $\dfrac{dz}{dt}(3) = 62.$

8. $W_s(1, 0) = 52$ e $W_t(1, 0) = 34.$

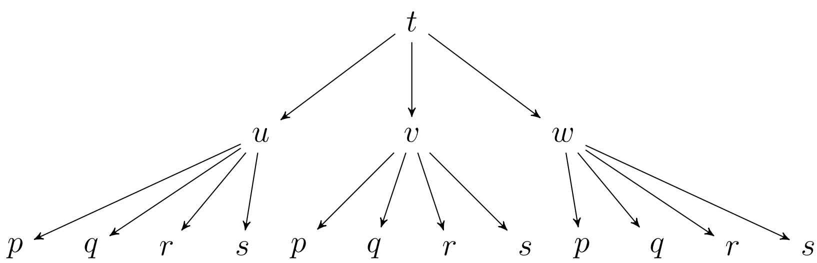
9. **a)** Do diagrama:



   tem-se

$$\frac{\partial w}{\partial x} = \frac{\partial w}{\partial r}\frac{\partial r}{\partial x} + \frac{\partial w}{\partial s}\frac{\partial s}{\partial x} + \frac{\partial w}{\partial t}\frac{\partial t}{\partial x} \quad \text{e} \quad \frac{\partial w}{\partial y} = \frac{\partial w}{\partial r}\frac{\partial r}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial s}\frac{\partial s}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial t}\frac{\partial t}{\partial y}$$

   b) Do diagrama:



tem-se

$$\frac{\partial t}{\partial p} = \frac{\partial t}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial p} + \frac{\partial t}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial p} + \frac{\partial t}{\partial w}\frac{\partial w}{\partial p}, \quad \frac{\partial t}{\partial q} = \frac{\partial t}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial q} + \frac{\partial t}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial q} + \frac{\partial t}{\partial w}\frac{\partial w}{\partial q},$$
$$\frac{\partial t}{\partial r} = \frac{\partial t}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial r} + \frac{\partial t}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial r} + \frac{\partial t}{\partial w}\frac{\partial w}{\partial r} \quad \text{e} \quad \frac{\partial t}{\partial s} = \frac{\partial t}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial s} + \frac{\partial t}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial s} + \frac{\partial t}{\partial w}\frac{\partial w}{\partial s}.$$

10. **a)** $\dfrac{\partial z}{\partial u} = 85, \quad \dfrac{\partial z}{\partial v} = 178, \quad \dfrac{\partial z}{\partial w} = 54.$

    b) $\dfrac{\partial u}{\partial x} = \dfrac{4}{\sqrt{10}}, \quad \dfrac{\partial u}{\partial y} = \dfrac{3}{\sqrt{10}}, \quad \dfrac{\partial u}{\partial t} = \dfrac{2}{\sqrt{10}}.$

    c) $\dfrac{\partial Y}{\partial r} = 1 + \dfrac{\pi}{4}, \quad \dfrac{\partial Y}{\partial s} = 2, \quad \dfrac{\partial Y}{\partial t} = 1 + \dfrac{\pi}{4}.$

11. **a)** $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{4(xy)^{3/2} - y}{x - 2x^2\sqrt{xy}}.$

    b) $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{\operatorname{sen}(x-y) + e^y}{\operatorname{sen}(x-y) - xe^y}.$

12. **a)** $\dfrac{dz}{dx} = \dfrac{3yz - 2x}{2z - 3xy}$ e $\dfrac{dz}{dy} = \dfrac{3xz - 2y}{2z - 3xy}.$

    b) $\dfrac{dz}{dx} = \dfrac{yz + \operatorname{sen}(x+y+z)}{xy + \operatorname{sen}(x+y+z)}$ e $\dfrac{dz}{dy} = \dfrac{xz + \operatorname{sen}(x+y+z)}{xy + \operatorname{sen}(x+y+z)}.$

    c) $\dfrac{dz}{dx} = \dfrac{1}{y(x+z) - 1}$ e $\dfrac{dz}{dy} = \dfrac{z(x+z)}{y(x+z) - 1}.$

13. A temperatura aumenta a uma taxa de 2ºC/s.

14. **a)** 6 m^3/s.

    b) 10 m^2/s.

    c) 0 m/s.

15. **a)** $\dfrac{\partial z}{\partial r} = \cos(\theta)\dfrac{\partial z}{\partial x} + \operatorname{sen}(\theta)\dfrac{\partial z}{\partial y}$ e $\dfrac{\partial z}{\partial \theta} = -r\operatorname{sen}(\theta)\dfrac{\partial z}{\partial x} + r\cos(\theta)\dfrac{\partial z}{\partial y}.$

    b) Use (a) para calcular $\left(\dfrac{\partial z}{\partial r}\right)^2 + \dfrac{1}{r^2}\left(\dfrac{\partial z}{\partial \theta}\right)^2.$

16. Note que $\dfrac{\partial u}{\partial s} = e^s\cos(t)\dfrac{\partial u}{\partial x} + e^s\operatorname{sen}(t)\dfrac{\partial u}{\partial y}$ e $\dfrac{\partial u}{\partial t} = -e^s\operatorname{sen}(t)\dfrac{\partial u}{\partial x} + e^s\cos(t)\dfrac{\partial u}{\partial y}.$

17. Note que se $u = x - y$, então $\dfrac{\partial z}{\partial x} = \dfrac{dz}{du}$ e $\dfrac{\partial z}{\partial y} = -\dfrac{dz}{du}.$

18. Note que se $u = x + at$ e $v = x - at$, então $\dfrac{\partial^2 z}{\partial t^2} = a^2 f''(u) + a^2 g''(v)$ e $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2} = f''(u) + g''(v).$

19. $\dfrac{\partial^2 z}{\partial r \partial s} = 4rs\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2} + 4rs\dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2} + (4r^2 + 4s^2)\dfrac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} + 2\dfrac{\partial z}{\partial y}.$

20. Note que $\dfrac{\partial z}{\partial x} = -\dfrac{F_x}{F_z}$, $\dfrac{\partial x}{\partial y} = -\dfrac{F_y}{F_x}$ e $\dfrac{\partial y}{\partial z} = -\dfrac{F_z}{F_y}$.

21. **a)** $\dfrac{dz}{dt}(t) = 9t^2\cos(3t^3)$.

    b) $\dfrac{dz}{dt}(t) = -4\,\mathrm{sen}(t)\cos(t)$.

    c) $\dfrac{dz}{dt}(t) = 0$.

22. **a)** $g'(t) = 3\dfrac{\partial f}{\partial x}(3t, 2t^2-1) + 4t\dfrac{\partial f}{\partial y}(3t, 2t^2-1)$.

    b) $g'(0) = 1$.

23. **a)** $\dfrac{dz}{dt}(t) = 2t\dfrac{\partial f}{\partial x}(t^2, 3t) + 3\dfrac{\partial f}{\partial y}(t^2, 3t)$.

    b) $\dfrac{dz}{dt}(t) = 3\cos(3t)\dfrac{\partial f}{\partial x}(\mathrm{sen}(3t), \cos(2t)) - 2\,\mathrm{sen}(2t)\dfrac{\partial f}{\partial y}(\mathrm{sen}(3t), \cos(2t))$.

24. Tome $t = 1$ em $\dfrac{df}{dt}(t^2, 2t) = 2t\dfrac{\partial f}{\partial x}(t^2, 2t) + 2\dfrac{\partial f}{\partial y}(t^2, 2t) = 3t^2 - 3$.

25. **a)** $\dfrac{\partial f}{\partial x}(3, 1) = -\frac{11}{6}$.

    b) $z - \dfrac{\pi}{4} = -\dfrac{11}{6}(x-3) + 2(y-1)$.

26. $g^{'}(t) = -1$.

27. Note que $\dfrac{dz}{dt}(t) = 0$, para $z = f(x, y)$, $x = t$ e $y = \pm\sqrt{1 - \dfrac{t^2}{4}}$.

28. $\dfrac{\partial z}{\partial u}(u, v) = \dfrac{\partial f}{\partial x}(u+2v, u^2-v) + 2u\dfrac{\partial f}{\partial y}(u+2v, u^2-v)$ e
    $\dfrac{\partial z}{\partial v}(u, v) = 2\dfrac{\partial f}{\partial x}(u+2v, u^2-v) - \dfrac{\partial f}{\partial y}(u+2v, u^2-v)$.

29. Note que $\dfrac{\partial z}{\partial u}(u, v) = \dfrac{\partial f}{\partial x}(u-v, v-u) - \dfrac{\partial f}{\partial y}(u-v, v-u)$ e
    $\dfrac{\partial z}{\partial v}(u, v) = -\dfrac{\partial f}{\partial x}(u-v, v-u) + \dfrac{\partial f}{\partial y}(u-v, v-u)$.

30. Note que $\dfrac{\partial F}{\partial x} = \dfrac{1}{y}\dfrac{\partial f}{\partial x}\left(\dfrac{x}{y}, \dfrac{y}{x}\right) - \dfrac{y}{x^2}\dfrac{\partial f}{\partial y}\left(\dfrac{x}{y}, \dfrac{y}{x}\right)$ e
    $\dfrac{\partial F}{\partial y} = -\dfrac{x}{y^2}\dfrac{\partial f}{\partial x}\left(\dfrac{x}{y}, \dfrac{y}{x}\right) + \dfrac{1}{x}\dfrac{\partial f}{\partial y}\left(\dfrac{x}{y}, \dfrac{y}{x}\right)$.

31. $(x, y) = (0, 1) + \lambda\left(1, -\dfrac{1}{2}\right)$, $\lambda \in \mathbb{R}$.

32. $z - 3 = -\dfrac{1}{5}(x-1) - \dfrac{1}{2}(y-1)$.

33. **a)** $g^{'}(t) = 6t\dfrac{\partial f}{\partial x}(3t^2, t^3, e^{2t}) + 3t^2\dfrac{\partial f}{\partial y}(3t^2, t^3, e^{2t}) + 2e^{2t}\dfrac{\partial f}{\partial z}(3t^2, t^3, e^{2t})$.

b) $g^{'}(0) = 8$.

34. **a)** $\dfrac{dy}{dx} = -\dfrac{2xy-1}{x^2+\cos(y)}$.

b) $\dfrac{dy}{dx} = -\dfrac{2xy^2+4x^3}{4y^3+2x^2y}$.

35. **a)** $\dfrac{\partial z}{\partial x} = -\dfrac{e^{x+y+z}+yz}{e^{x+y+z}+xy}$ e $\dfrac{\partial z}{\partial y} = -\dfrac{e^{x+y+z}+xz}{e^{x+y+z}+xy}$.

b) $\dfrac{\partial z}{\partial x} = -\dfrac{3x^2-1}{3z^2-1}$ e $\dfrac{\partial z}{\partial y} = -\dfrac{3y^2-1}{3z^2-1}$.

36. Note que $\dfrac{\partial z}{\partial x} = -\dfrac{1}{y}\dfrac{\partial f}{\partial u}\left(\dfrac{x}{y}, z\right)\left(\dfrac{\partial f}{\partial v}\left(\dfrac{x}{y}, z\right)\right)^{-1}$ e

$\dfrac{\partial z}{\partial y} = \dfrac{x}{y^2}\dfrac{\partial f}{\partial u}\left(\dfrac{x}{y}, z\right)\left(\dfrac{\partial f}{\partial v}\left(\dfrac{x}{y}, z\right)\right)^{-1}$.

37. Note que $\dfrac{\partial z}{\partial x} = \dfrac{\lambda z}{x} - \dfrac{x^\lambda}{y}\dfrac{\partial f}{\partial u}\left(\dfrac{x}{y}, \dfrac{z}{x^\lambda}\right)\left(\dfrac{\partial f}{\partial v}\left(\dfrac{x}{y}, \dfrac{z}{x^\lambda}\right)\right)^{-1}$ e

$\dfrac{\partial z}{\partial y} = \dfrac{x^{\lambda+1}}{y^2}\dfrac{\partial f}{\partial u}\left(\dfrac{x}{y}, \dfrac{z}{x^\lambda}\right)\left(\dfrac{\partial f}{\partial v}\left(\dfrac{x}{y}, \dfrac{z}{x^\lambda}\right)\right)^{-1}$.

38. **a)** **(i)** $\dfrac{dw}{dt}(t) = 0$.

(ii) $\dfrac{dw}{dt}(\pi) = 0$.

b) **(i)** $\dfrac{dw}{dt}(t) = 0$.

(ii) $\dfrac{dw}{dt}(0) = 0$.

39. **a)** **(i)** $w(u,v) = u^2 - v^2 + 2u^2v$, $\dfrac{\partial w}{\partial u}(u,v) = 2u + 4uv$ e

$\dfrac{\partial w}{\partial v}(u,v) = -2v + 2u^2$.

(ii) $\dfrac{\partial w}{\partial u}(-2,0) = 3$ e $\dfrac{\partial w}{\partial v}(-2,0) = -\dfrac{3}{2}$.

b) **(i)** $w(u,v) = \ln(2) + 2\ln(u) + 2v$, $\dfrac{\partial w}{\partial u}(u,v) = \dfrac{2}{u}$ e $\dfrac{\partial w}{\partial v}(u,v) = 2$.

(ii) $\dfrac{\partial w}{\partial u}(-2,0) = -1$ e $\dfrac{\partial w}{\partial v}(-2,0) = 2$.

40. **a)** $\dfrac{\partial z}{\partial x}(1,1,1) = \dfrac{1}{4}$ e $\dfrac{\partial z}{\partial x}(1,1,1) = -\dfrac{3}{4}$.

b) $\dfrac{\partial z}{\partial x}(2,3,6) = -9$ e $\dfrac{\partial z}{\partial x}(2,3,6) = -4$.

41. $\dfrac{\partial w}{\partial r}(x(1,-1),y(1,-1),z(-1,1))=12.$

42. Note que $\dfrac{\partial f}{\partial x}=\dfrac{\partial f}{\partial u}-\dfrac{\partial f}{\partial w}$, $\dfrac{\partial f}{\partial y}=-\dfrac{\partial f}{\partial u}+\dfrac{\partial f}{\partial v}$ e $\dfrac{\partial f}{\partial z}=-\dfrac{\partial f}{\partial v}+\dfrac{\partial f}{\partial w}$.

43. **b)** $f_x=\cos(\theta)\dfrac{\partial w}{\partial r}-\dfrac{\operatorname{sen}(\theta)}{r}\dfrac{\partial w}{\partial \theta}$ e $f_y=\operatorname{sen}(\theta)\dfrac{\partial w}{\partial r}+\dfrac{\cos(\theta)}{r}\dfrac{\partial w}{\partial \theta}$.

44. **a)** $0,88\pi$ cm^3/min.

    b) $0,3\pi$ cm^2/min.

45. ≈ 181559 cm^2/h.

46. $\dfrac{dT}{dt}=\dfrac{1}{k}\left(\left(\dfrac{dP}{dt}-\dfrac{2a}{V^3}\dfrac{dV}{dt}\right)(V-b)+\left(P+\dfrac{a}{V^2}\right)\dfrac{dV}{dt}\right).$

47. Note que $\dfrac{\partial u}{\partial r}=\cos(\theta)u_x+\operatorname{sen}(\theta)u_y$, $\dfrac{\partial v}{\partial r}=\cos(\theta)v_x+\operatorname{sen}(\theta)v_y$,

    $\dfrac{\partial u}{\partial \theta}=-r\operatorname{sen}(\theta)u_x+r\cos(\theta)u_y$ e $\dfrac{\partial v}{\partial \theta}=-r\operatorname{sen}(\theta)v_x+r\cos(\theta)v_y$.

48. Note que $\dfrac{\partial w}{\partial u}=\cos(\alpha)\dfrac{\partial w}{\partial x}+\operatorname{sen}(\alpha)\dfrac{\partial w}{\partial y}$ e $\dfrac{\partial w}{\partial v}=-\operatorname{sen}(\alpha)\dfrac{\partial w}{\partial x}+\cos(\alpha)\dfrac{\partial w}{\partial y}$.

49. Note que $\dfrac{\partial z}{\partial u}=\dfrac{\partial f}{\partial x}+\dfrac{\partial f}{\partial y}$ e $\dfrac{\partial z}{\partial v}=\dfrac{\partial f}{\partial x}-\dfrac{\partial f}{\partial y}$.

50. **a)** $6\sqrt{2}$.

    b) $2+\frac{\sqrt{3}}{2}$.

51. **a)** **(i)** $\nabla f(x,y)=(5y^2-12x^2y,10xy-4x^3)$.

    (ii) $\nabla f(1,2)=(-4,16)$.

    (iii) $\dfrac{172}{13}$.

    b) **(i)** $\nabla f(x,y)=(y/x,\ln(x))$.

    (ii) $\nabla f(1,-3)=(-3,0)$.

    (iii) $\dfrac{12}{5}$.

    c) **(i)** $\nabla f(x,y,z)=(e^{yz},2xze^{2yz},2xye^{2yz})$.

    (ii) $\nabla f(3,0,2)=(1,12,0)$.

    (iii) $-\dfrac{22}{3}$.

    d) **(i)** $\nabla f(x,y,z)=\left(\dfrac{1}{2\sqrt{x+yz}},\dfrac{z}{2\sqrt{x+yz}},\dfrac{y}{2\sqrt{x+yz}}\right)$.

    (ii) $\nabla f(1,3,1)=\left(\dfrac{1}{4},\dfrac{1}{4},\dfrac{3}{4}\right)$.

    (iii) $\dfrac{23}{28}$.

52. **a)** $\nabla f(x,y)=(2xy,x^2)$.

b) $\nabla f(x,y) = e^{x^2-y^2}(2x,-2y)$.

c) $\nabla f(x,y) = \left(\frac{1}{y}, -\frac{x}{y^2}\right)$.

d) $\nabla f(x,y) = \left(\frac{y}{x^2+y^2}, -\frac{x}{x^2+y^2}\right)$.

53. **a)** $\nabla f(x,y,z) = \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}(x,y,z)$.

b) $\nabla f(x,y,z) = (2x, 2y, 2z)$.

c) $\nabla f(x,y,z) = (x^2+y^2+1)^{z^2-1}\left(2xz^2, 2yz^2, 2z(x^2+y^2+1)\ln(x^2+y^2+1)\right)$.

d) $\nabla f(x,y,z) = \left(\frac{yz}{x^2+y^2}, -\frac{xz}{x^2+y^2}, \arctan\left(\frac{x}{y}\right)\right)$.

54. Lembre que $\mathbf{i} = (1,0,0)$, $\mathbf{j} = (0,1,0)$, $\mathbf{k} = (0,0,1)$ e $D_{\mathbf{u}}f = \nabla f \cdot \mathbf{u}$.

55. **a)** $D_{(\mathbf{2},\mathbf{1})}f(1,2) = -\frac{8}{5}$.

b) $D_{(\mathbf{3},\mathbf{4})}f(1,1) = -\frac{2}{5}$.

c) $D_{\left(\frac{\mathbf{1}}{\sqrt{\mathbf{2}}},\frac{\mathbf{1}}{\sqrt{\mathbf{2}}}\right)}f(3,3) = 0$.

d) $D_{(\mathbf{1},\mathbf{1})}f(1,1) = \sqrt{2}$.

56. **a)** $\frac{23}{10}$.

b) $-\frac{4\sqrt{10}}{5}$.

c) $\frac{4}{\sqrt{30}}$.

d) -1.

57. $\frac{22}{\sqrt{30}}$.

58. **a)** $\frac{\sqrt{3}}{6}$.

b) Pois f não é diferenciável em $(0,0)$, já que não é contínua nesse ponto.

59. Versor tangente a $\mathbf{r}(t)$: $\mathbf{u} = \cos(t)\mathbf{i} + (\operatorname{sen}(t))\mathbf{j}$; $D_{\mathbf{u}}f = 2$.

60. $(f'(r))^2$.

61. As direções são dadas pelos vetores $(1,0)$ e $\left(\frac{4}{5}, -\frac{3}{5}\right)$.

62. **a)** $4\sqrt{2}$.

b) 1.

c) $\sqrt{6}$.

d) 1.

e) $\sqrt{14}$.

63. Não, já que $|\nabla f(1,2)| = \sqrt{185} < 14$.

64. Se $\mathbf{u}$ é um versor e θ é o ângulo entre ∇f e $\mathbf{u}$, então

$$D_{\mathbf{u}f} = \nabla f \cdot \mathbf{u} = |\nabla f||\mathbf{u}|\cos(\theta) = |\nabla f|\cos(\theta).$$

O valor mńimo de $\cos(\theta)$ é -1 e isto ocorre quando $\theta = \pi$. Portanto o valor mínimo de $D_{\mathbf{u}}f$ é $-|\nabla f|$ e ocorre quando $\theta = \pi$, ou seja, quando $\mathbf{u}$ tem a direção oposta à de ∇f.

65. **a)** Cresce: $(3,3)$; descresce: $(-3,-3)$.

b) Cresce: $(1,-1)$; descresce: $(-1,1)$.

c) Cresce: $(-1,-1)$; descresce: $(1,1)$.

66. Na direção dada pelo vetor $(16,54)$.

67. $D_{\mathbf{u}}f(1,1) = \sqrt{\left(\frac{\pi}{4}+\frac{1}{2}\right)^2 + \frac{1}{4}}$.

68. $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2;\ y = x+1\}$.

69. **a)** $\frac{1}{2}$.

b) Na direção do vetor $(1,0)$. O valor da taxa máxima é 1.

70. **a)** Na direção do vetor $(1,1)$. O valor da taxa máxima é $\sqrt{2}$.

b) $\frac{7}{5}$.

71. **a)** $-\frac{40}{3\sqrt{3}}$.

b) Note que $\nabla T = -360(x^2+y^2+z^2)^{-3/2}(x,y,z)$ sempre aponta para a origem.

72. **a)** $\frac{5200\sqrt{6}}{3e^{43}}$ °C/m.

b) $400e^{-43}(-2,3,-18)$.

c) $400e^{-43}\sqrt{337}$ °C/m.

73. $\frac{327}{13}$.

74. Pelas propriedades análogas para derivadas parciais e a linearidade de vetores, os quatro itens são válidos.

75. **a)** $(x,y) = (1,3) + \lambda(-6,2)$, $\lambda \in \mathbb{R}$.

b) $\gamma(t) = (\sqrt{10}\cos(t), \sqrt{10}\,\mathrm{sen}(t))$.

76. Reta tangente: $(x, y) = (2, 5) + \lambda(-2, 5)$, $\lambda \in \mathbb{R}$,
Reta normal: $(x, y) = (2, 5) + \lambda(5, 2)$, $\lambda \in \mathbb{R}$.

77. **a)** Plano tangente: $x - 3y + 4z = 8$,
Reta normal: $(x, y, z) = (1, -1, 1) + \lambda(2, -6, 8)$, $\lambda \in \mathbb{R}$.

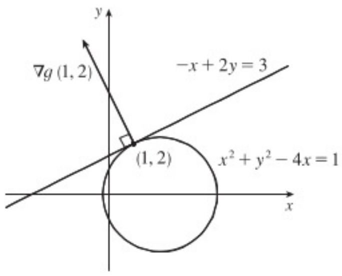
b) Plano tangente: $6x + 3y + z = 9$,
Reta normal: $(x, y, z) = \left(\frac{1}{2}, 1, 3\right) + \lambda(6, 3, 1)$, $\lambda \in \mathbb{R}$.

c) Plano tangente: $x - y + 4z = 4$,
Reta normal: $(x, y, z) = (2, 2, 1) + \lambda(1, -1, 4)$, $\lambda \in \mathbb{R}$.

d) Plano tangente: $4x - 5y - z = 4$,
Reta normal: $(x, y, z) = (2, 1, -1) + \lambda(4, -5, -1)$, $\lambda \in \mathbb{R}$.

78. $x + y + 4z = 10$.

79. $\nabla g(1, 2) = (1, 2) = (-2, 4)$; reta tangente à curva de nível $g(x, y) = 1$ em $(1, 2)$: $-x + 2y = 3$.



80. **a)** $y - 2 = -2(x - 1)$.

b) $y = -4x + 3$.

81. $x + y = 2$.

82. Note que se $F(x, y, z) = x^2/a^2 + y^2/b^2 + z^2/c^2 - 1$, então

$$\nabla F(x_0, y_0, z_0) = 2\left(\frac{x_0}{a^2}, \frac{y_0}{b^2}, \frac{z_0}{c^2}\right)$$

e a equação do plano tangente em (x_0, y_0, z_0) é

$$\nabla F(x_0, y_0, z_0) \cdot (x, y, z) = \nabla F(x_0, y_0, z_0) \cdot (x_0, y_0, z_0) = 2.$$

83. $y = -2x + 3$ ou $y = -2x - 3$.

84. $y - 2 = -\dfrac{4}{5}(x - 1)$ ou $y + 2 = -\dfrac{4}{5}(x + 1)$.

85. Não.

86. $\left(\dfrac{3\sqrt{2}}{5}, -\dfrac{1}{5\sqrt{2}}, \dfrac{\sqrt{2}}{5}\right)$ e $\left(-\dfrac{3\sqrt{2}}{5}, \dfrac{1}{5\sqrt{2}}, -\dfrac{\sqrt{2}}{5}\right)$.

87. $x + y + z = \dfrac{11}{6}$ ou $x + y + z = -\dfrac{11}{6}$.

88. $(x, y, z) = (-1, 1, 2) + \lambda(-10, -16, -12)$, $\lambda \in \mathbb{R}$.

89. **a)** Note que a direção da normal de F é dada por ∇F, a de G por ∇G e que duas normais em P são perpendiculares se $\nabla F \cdot \nabla G = 0$.

    b) Tome $F = x^2 + y^2 - z^2$, $G = x^2 + y^2 + z^2 - r^2$ e verifique (a). Para "ver" isso sem calcular, note que $F = 0$ é a equação de um cone circular com vértice na origem e $G = 0$ é a equação de uma esfera centrada na origem.

Referências

[1] J. Stewart. *Cálculo*, Volume 2, 6^a Edição, São Paulo, Pioneira/ Thomson Learning.

[2] H. L. Guidorizzi. *Um Curso de Cálculo*, Volume 2, 5^a Edição, Rio de Janeiro, 2002.

[3] G. B. Thomas. *Cálculo*, Volume 2, 10^a edição, São Paulo, Addison-Wesley/Pearson, 2002.

[4] C. H. Edwards Jr; D. E. Penney. *Cálculo com Geometria Analítica*, Volumes 2 e 3, Prentice Hall do Brasil, 1997.

[5] E. W. Swokowski, *Cálculo com Geometria Analítica*, Volume 2, 2^a Edição, Markron Books, 1995.