

25. Бесконечно Большие Последовательности

25.15а. Докажите, что у всякой последовательности длины $n^2 + 1$ существует монотонная подпоследовательность длины $n + 1$.

Пусть максимальная монотонная последовательность состоит из n членов. Возьмем для каждого числа в последовательности пару чисел — длин максимальных убывающей и возрастающей монотонных последовательностей, заканчивающихся на этом элементе. Всего таких пар не более n^2 . Докажем, что 2 одинаковых пар нет. Пусть они есть у членов i -ого и j -ого. Тогда если $i > j$, то i -ый элемент будет продолжением либо возрастающей, либо убывающей монотонной последовательности, заканчивающейся на j -том, тогда пары разные. Тогда по принципу Дирихле 2 пары одинаковые, чего быть не может, а значит максимальная длина — $n+1$.

25.15б. Останется ли верным утверждение задачи в случае последовательности длины n^2 при больших значениях n ?

Отсортируем последовательность длины n^2 , состоящую из разных по значению членов, в порядке возрастания. Разделим ее на куски длины n и сделаем новую последовательность, поставив куски в обратном порядке. Например, если $n = 3$, последовательность будет такой: , 2 вертикальные черты разделяют куски. Теперь о том, почему тут нет монотонной последовательности длины $n + 1$. Рассмотрим возрастающие монотонные подпоследовательности. Рассмотрим какой-то член. Тогда после него больше него будут члены только в его куске, то есть максимум длины такой подпоследовательности n . Рассмотрим убывающие монотонные последовательности. Т.к. в каждом куске члены возрастают, то не будет подпоследовательности, в которой будет более 1 члена из какого-то куска, то есть длина тоже будет n . Тогда получаем, что такого n нет.

26. Бесконечно Малые Последовательности

26.1а. Запишите в кванторах определение бесконечно малой последовательности. Запишите их так, чтобы кванторы существования шли в начале формулы.

$$\exists f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{N} \forall \varepsilon > 0 \in \mathbb{R}, k \in \mathbb{N} k > f(\varepsilon) \rightarrow |a_k| < \varepsilon$$

26.1б. Запишите в кванторах определение последовательности, не являющейся бесконечно малой. Запишите их так, чтобы кванторы существования шли в начале формулы.

$$\exists \varepsilon > 0 \exists f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N} \forall N \in \mathbb{N} |a_{f(N)}| > \varepsilon \text{ или } f(N) > N$$

26.2а. Для последовательности $\{\alpha_n\}$ укажите какой-нибудь номер N , начиная с которого для всех членов последовательности верно неравенство $|\alpha_n| < \varepsilon$, если $\alpha_n = \frac{1}{n}$
 $\frac{2}{\varepsilon}$. Тогда при таком n $a_n = \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon$.

26.2б. Т.к. нужен модуль, степень -1 нас не волнует. Т.е. выражение превращается в $\frac{\cos n}{n^3} < \frac{\cos n}{n}$. Т.к. $\cos n < 1$, то при $n = \frac{1}{\varepsilon}$ получаем $\varepsilon \cos \varepsilon < \varepsilon$

26.2в. При $n = \log_{0.99} \varepsilon$ $a_n = 0.99^{2 \log_{0.99} \varepsilon} = \varepsilon^2 < \varepsilon$ при $\varepsilon < 1$.

26.2г. После $n = 20 \frac{2n}{n!}$ изменяется за одно n более, чем на порядок, из-за умножения на числа, меньшие $\frac{2}{20}$ на каждом шаге. Тогда достаточное n равно кол-ву первых 0 в десятичной записи $\varepsilon + 20$.

26.2д. При натуральных n $\frac{1}{n^2+2n-1} < \frac{1}{n^2}$; $2n+3 < 3n$. Значит, $\frac{2n+3}{n^2+2n-1} < \frac{3n}{n^2} = \frac{3}{n}$, которое меньше ε при $n = \frac{1}{1.5\varepsilon}$

26.2е. Для последовательности $\{\alpha_n\}$ укажите какой-нибудь номер N , начиная с которого для всех членов последовательности верно неравенство $|\alpha_n| < \varepsilon$, если $a_n = \sqrt{n+1} - \sqrt{n}$.

$$\sqrt{n+1} - \sqrt{n} < \varepsilon$$

$$\sqrt{n+1} < \varepsilon + \sqrt{n}$$

$$n+1 < \varepsilon^2 + n + 2\sqrt{n}\varepsilon$$

$$\varepsilon^2 + 2\varepsilon\sqrt{n} - 1 > 0$$

$$\frac{1 - \varepsilon^2}{2\varepsilon}$$

$$\sqrt{n} > \frac{1 - \varepsilon^2}{2\varepsilon}$$

$$n > \frac{(1 - \varepsilon^2)^2}{4\varepsilon^2}$$

26.3а. Да. Пусть есть сумма 2 бесконечно малых последовательностей (БМП). Тогда для каждого ε по определению БМП найдется такие N_1 и N_2 , что для каждого $n_1 > N_1$ и $n_2 > N_2$ верно $|a_n| < \frac{\varepsilon}{2}$ и $|b_n| < \frac{\varepsilon}{2}$. Тогда $|a_n + b_n| < \varepsilon$, для всех n , больших большего из N_1 и N_2 , что является определением БМП.

26.3б. Если последовательность БМП, то и обратная ей БМП, т.к. $|x| = |-x|$. Разность 2 БМП — сумма 1-й БМП и обратной 2-й БМП, т.е. сумма БМП, то есть верно.

26.3в. У каждой БМП есть N , после которого модуль всех членов меньше 1. Поэтому для них если $|a_n| < \varepsilon$; $|b_n| < \varepsilon$, то $|a_n \cdot b_n| < |a_n|$ и $|a_n \cdot b_n| < b_n$ для всех n , больших большего из N_1 и .

26.3г. Нет, пример $a_n = \frac{1}{n}$; $b_n = \frac{1}{n^2} \rightarrow \frac{a_n}{b_n} = n$, что не БМП.

26.4. Рассмотрим какой-нибудь ε . Тогда в БМП α и β есть N_1 и N_2 такие, что для всех n таких, что $n > N_1$ и $n > N_2$, верно $b_n \leq a_n$. Тогда тоже БМП.

26.5 Будем брать $C = \frac{1}{\varepsilon}$. Тогда есть однозначное соответствие между ε и C . Возьмем бесконечно большую последовательность. Тогда, если в ней нет нулей, то есть последовательность $\beta_n = \frac{1}{\alpha_n}$, где α_n - бесконечно большая последовательность. Тогда β очевидно бесконечно малая, и очевидно, что каждой БМП минимум 1 БМП. Возьмем БМП без нулей. Прделаав аналогичную операцию, получим БМП. Т.е. есть биекция между БМП и БМП. Это перефразированный вопрос задачи.

26.6а. Если α - БМП, то β такая, что $b_n = |a_n|$, тоже, очевидно, БМП. У такой БМП найдется N -ый член, после которого все члены БМП меньше 1. Расставим знаки сравнения между членами. Тогда в последовательности $\{a_n^2\}$ после N -ого члена будет такой же порядок следования знаков, при этом каждый член будет по модулю меньше соответствующего в изначальной. Тогда это БМП. Аналогичные действия проходят и в обратную сторону.

26.6б. Если α - БМП, то β такая, что $b_n = |a_n|$, тоже, очевидно, БМП. У такой БМП найдется N -ый член, после которого все члены БМП меньше 1. Расставим знаки сравнения между членами. Тогда в последовательности $\{\sqrt[n]{a_n}\}$ после N -ого члена будет такой же порядок следования знаков, при этом каждый член будет по модулю больше соответствующего в изначальной, но меньше 1. Тогда это БМП. Аналогичные действия проходят и в обратную сторону.

26.7. Да, является. Возьмем ε . Тогда начиная с членов N_1 и N_2 все последующие будут меньше. Возьмем большее из них. Тогда, домножив его на 2, получим номер члена в γ , начиная с которого все остальные меньше ε .

26.8а. БМП ограничена, поэтому, т.к. сумма 2 ограниченных ограничена, то и полученная будет ограничена. Однако это не БМП. Пример — ограниченная 1,1,1,1... и БМП $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \dots$. Ее члены всегда больше 1, что не подходит под определение БМП.

26.8б. Получится БМП. Возьмем большее по модулю ограничение ограниченной - k . Тогда ее члены все меньше k по модулю. Теперь возьмем ε . Результат будет БМП, если для любого ε в БМП найдется такой член, после которого все члены будут меньше $\frac{\varepsilon}{k}$. Это число положительное, поэтому по определению БМП такой член найдется. Поэтому результат БМП.

26.8в. Если в последовательностях есть нули, то результат, очевидно, не определен. Если же их нет, то результат может ББП (пример в 26.8а), БМП (перевернуть отношение из 26.8а), ограниченной (2 одинаковые БМП), неограниченной (последовательности $1, \frac{1}{2}, 1, \frac{1}{3}, 1, \frac{1}{4}, 1, \dots$ и $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \dots$).

26.9а. Получится ББП, т.к. это сумма ББП и ограниченной, которая ББП.

26.9б. Может получиться ББП ($\{n^2\}$ и $\{n^{-1}\}$), БМП ($\{n^2\}$ и $\{n\}$), ограниченной ($\{n\}$ и $\{n^{-1}\}$), неограниченной (первый пример, если в БМП каждый второй член заменить на 0).

26.9в. Может получиться ББП ($\{n^2\}$ и $\{n^{-1}\}$), БМП ($\{n^2\}$ и $\{n\}$). Докажем, что других вариантов нет. Возьмем N1-ый член для некоторого $C>1$ в ББП и N2 для в БМП. Тогда отношение любых 2 членов после них будет больше C2 или меньше. Т.к. $C2>C$, то выполняются условия на ББП или БМП.

26.10а. $\frac{n^5+3}{n^{10}} = \frac{n^5}{n^{10}} + \frac{3}{n^{10}} = \frac{1}{n^5} + \frac{3}{n^{10}}$. Сумма 2 БМП — БМП.

26.10б. $\frac{3n^6+2n^4-n}{n^9+7n^5-5n^2-2} = \frac{3n^6}{n^9+7n^5-5n^2-2} + \frac{2n^4}{n^9+7n^5-5n^2-2} - \frac{n}{n^9+7n^5-5n^2-2} < \frac{3n^6}{n^9} + \frac{2n^4}{n^9} - \frac{n}{n^9} = \frac{3}{n^3} + \frac{2}{n^5} + \frac{-1}{n^8}$ Сумма 3 БМП — БМП.

26.10в. $\sqrt{\frac{|\sin 3n + \cos 7n|}{2n^2+3n}} < \sqrt{\frac{2}{2n^2+3n}} < \sqrt{\frac{1}{n^2}} = \frac{1}{n}$. БМП.

26.10г. $\frac{3^n+4^n}{2^n+5^n} = \frac{3^n}{2^n+5^n} + \frac{4^n}{2^n+5^n} < \frac{3^n}{5^n} + \frac{4^n}{5^n}$. Сумма 2 БМП — БМП.

26.11. Будем делать две последовательности (делимую и делящую), исходя из результата. В качестве базы возьмем последовательность $\frac{1}{n}$. Пусть n-ый член равен k. Если $k > 1$, то разделим n-ый член делящей на k. Если $k < 1$, домножим n-ый член делимой на k. В обоих случаях делимая и делящая последовательности получаются меньше $\frac{1}{n}$, т.е. тоже БМП.

26.12. По свойству $\beta \alpha_{n+1} - \frac{\alpha n}{2} < \varepsilon \rightarrow \alpha_{n+1} < \varepsilon + \frac{\alpha n}{2}$. Пусть α_i - последнее число, большее или равное ε . Тогда аналогичными преобразованиями получим $\alpha_n < \varepsilon + \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{4} + \dots + \frac{\alpha_i}{2^{n-i}}$. Тогда при некотором n и всех последующих $\frac{\alpha_i}{2^{n-i}} < \varepsilon$. Тогда $a_n < 3\varepsilon$. Т.к. такое верно для каждого ε , α - БМП.

27. Действительные числа

27.1. Как известно, множество всех бесконечных последовательностей из 0 и 1 несчетно. Тогда, т.к. это множество БДД, несчетно.

27.2а. $\exists x \in M \ b > x$

27.2б. $\forall b \exists x : b > x$

27.2в. Не употребляя отрицаний, дайте определение неограниченного множества.
 $\forall k \in \mathbb{R} \exists n \in A \ |n| > k$

27.2г. $\forall b \exists x_1, x_2 : x_2 > b > x_1$

27.3а. $\forall x \in M \exists m \in M \ m \leq$

27.3б. $\forall x \in M \ x \leq b$ и $\forall y \in \mathbb{R} \ b \leq y$ или $\exists x \in M \ x > y$

27.4. Нет, пример: $\{\frac{-1}{n}\}$.

27.5а. $\text{ТВГ} = \frac{1}{3}$. Пусть ТВГ меньше — тогда какой-то знак после запятой отличается от 3 в меньшую сторону, а значит ТВГ меньше одного из элементов. Пусть ТВГ больше — тогда это не ТВГ, т.к. $\frac{1}{3}$ тоже верхняя грань.

27.6а. Да, верно, т.к. если ТВГ меньше, то она равна одному из элементов, если больше, то есть меньшая верхняя грань - b .

27.6б. Да, верно, т.к. если ТВГ меньше, то она в каком-то знаке отличается от b , значит, если ТВГ обрезать по этому знаку, то результат будет меньшая конечная БДД, если ТВГ больше, то есть меньшая верхняя грань - b .

27.7а. Т.к. b — ТВГ, то меньших верхних граней нет и для любого меньшего числа найдется член множества больше него. Это и есть вопрос задачи.

27.7б. Если есть меньшая общая грань, то разница между ней и заданной будет положительной. Тогда, т.к. меньшая верхняя грань — верхняя грань, то больше нее элементов нет, значит достаточно.

27.8. Докажите, что каждое ограниченное сверху подмножество в \mathbb{R} имеет точную верхнюю грань, а каждое ограниченное снизу — точную нижнюю.

Рассмотрим ограниченные сверху, для ограниченных снизу аналогично. Тогда у таких множеств есть верхние грани. Если у множества есть максимальный элемент, то он и будет ТВГ. Тогда пусть его нет и ТВГ нет. Назовем множество M и множество его верхних граней X . Тогда отметим какую-то верхнюю грань, являющуюся целой БДД и какое-то целое число, не являющееся верхней гранью. Тогда, очевидно, 2-я БДД меньше 1-й. Разделим расстояние между ними на части размера 0.1 — там меняются цифры. Потом разделим на 10 равных частей ту часть, у которой один конец не является верхней гранью, а другой является. Так будем делать и далее. Почему при дальнейшем строительстве такой БДД получим ТВГ? Пусть есть верхняя грань меньше. Тогда она в каком-то знаке отличается от полученной в меньшую сторону, а значит лежит в той части, у которой обе границы не являются верхними гранями, а значит и она сама ею не является. При этом это, очевидно, верхняя грань, т.к. все числа больше нее — верхние грани по той же причине.

27.10. Пусть $b \in \mathbb{R}$ есть ТВГ конечных БДД β с $\beta^2 < 5$. Докажите, что b существует и вычислите b^2 .

Существование b очевидно по 27.8. Докажем, что квадратом такой ТВГ будет 5. Пусть есть меньшая верхняя грань. Тогда она отличается на какое-то число, пусть ε . Тогда ее квадрат равен $5 - \varepsilon$, что очевидно меньше 5, т.е. это не верхняя грань.

27.11. Возьмем конечную БДД. Тогда будем домножим ее на 10 в той степени, сколько у нее знаков после запятой и получим . Т.к. БДД конечная, то и степень получится конечная. Тогда БДД представима в виде целого числа, деленного на 10 в конечной степени, т.е. в виде рационального числа.

27.12. Верно ли, что $\forall \alpha \in \mathbb{R}, \varepsilon > 0 \exists r_1, r_2 \in \mathbb{Q} \alpha - \varepsilon < r_1 < \alpha < r_2 < \alpha + \varepsilon$?

Возьмем БДД $\alpha - \varepsilon$ и α . Рассмотрим, в каком первом знаке они различаются. Тогда, если обрезать α по этому знаку, получим БДД, меньшую α и большую $\alpha - \varepsilon$. Аналогично и с α и $\alpha + \varepsilon$.

27.13. Докажите, что для любого сечения $\mathbb{Q} = A_1 \sqcup B_1$ имеет место равенство $\sup A_1 = \inf A_2$.

Пусть $\sup A_1 < \inf A_2$. Тогда найдется элемент между ними, а значит не входящий ни в A_1 , ни в A_2 . Этого быть не может. Тогда пусть $\sup A_1 > \inf A_2$. Тогда найдется элемент между ними, значит, он будет входить и в A_1 , и в A_2 , чего быть не может по определению сечения.

27.14. Докажите, что для любого сечения $\mathbb{Q} = A_1 \sqcup A_2$ выполняется ровно одна из трёх возможностей: либо в A_1 есть максимальный элемент, либо в A_2 есть минимальный элемент, либо действительное число $\sup A_1 = \inf A_2$ иррационально.

Пусть не выполняется ни одна. Тогда $\sup A_1 = \inf A_2$ должен быть максимальным элементом A_1 и минимальным элементом A_2 , иначе какие-то элементы этих множеств будут лежать в пересечении. Но оно и

само лежит в пересечении, чего также быть не может. Пусть выполняются 2 из них. Одновременно максимальный и минимальный элементы быть не могут, т.к. они должны быть равны по 27.13. Максимальный и минимальный элементы будут $\sup A_1$ и $\inf A_2$ соответственно, поэтому иррациональность невозможна.

27.15a. *Дайте определение суммы действительных чисел Дедекнда.*

Пусть множество \mathbb{Q} делится на A_1 и A_2 сечением a и на B_1 и B_2 сечением b . Тогда сумма 2-х сечений будет сечением, которое делит \mathbb{Q} на множество тех элементов, которые получаемы в виде суммы некоторого элемента A_1 и некоторого элемента B_1 . Теперь о том, почему полученное множество - сечение \mathbb{Q} . Пусть не сечение - тогда найдется такой элемент между элементами C_1 (результата), который ему не принадлежит. Тогда пусть разность такого элемента с большим принадлежащим элементом ε . Она, очевидно, рациональна. Тогда разделим ε пополам и вычтем из элементов из A_1 и B_1 половины. Получим члены A_1 и A_2 . Значит, тот самый элемент внутри C_1 . Значит, это сечение.

27.15б. *Дайте определение произведения действительных чисел Дедекнда.*

Пусть множество \mathbb{Q} делится на A_1 и A_2 сечением a и на B_1 и B_2 сечением b . Тогда произведение 2-х сечений будет сечением, которое делит \mathbb{Q} на множество тех элементов, которые получаемы в виде произведения некоторого элемента A_1 и некоторого элемента B_1 . Теперь о том, почему полученное множество - сечение \mathbb{Q} . Пусть не сечение - тогда найдется такой элемент между элементами C_1 (результата), который ему не принадлежит. Тогда пусть отношение такого элемента к большему принадлежащему элементу ε . Оно, очевидно, рациональное. Если оно к тому же и положительно, то вместо половины берем квадратный корень, за исключением этого все так же, как и в 27.15а. Если же отношение отрицательно, то возьмем два положительных элемента, составляющих больший элемент. Домножим один из них на -1 , а другой умножим на модуль отношения. Получим тот самый элемент, значит, это сечение.

27.16. *Установите сохраняющую арифметические операции биекцию (изоморфизм) между множеством дедекндовых действительных чисел и множеством действительных чисел? определённых посредством БДД.*

Пусть есть класс БДД. Докажем, что каждому классу БДД соответствует только одно сечение. Каждому БДД пусть соответствует сечение на множество меньших и больших рациональных БДД. Тогда если есть другое сечение, то найдется число, которое будет одновременно больше и меньше БДД, т.е. оно будет равно этой БДД, т.е. получим одно и то же сечение. При этом не найдется такого сечения, которому не соответствует ни одна БДД, и не найдется сечения, которому соответствует 2 БДД, в силу того, что рациональные числа есть на любом интервале.

27.17а. *Исходя только из дедекндова определения действительных чисел докажите теорему о полноте.*

Рассмотрим ограниченные сверху, для ограниченных снизу аналогично. Тогда у таких множеств есть верхняя грани. Пусть ТВГ нет. Выберем 2 сечения - у одного $\inf A_1$ будет меньше какого-то элемента множества (назовем его сечениями I типа), у другого больше (II типа). Возьмем среднее арифметическое этих двух сечений - мы умеем складывать, делить пополам отрезки тоже умеем. Рассмотрим это сечение. Тогда оно подпадает под какой-то тип. Берем тот отрезок, у которого концы - \inf сечений с разными типами и делим его пополам. Так мы получим ТВГ. Почему это ТВГ? Если есть верхняя грань больше, то когда нибудь ее различие с ТВГ превысит длину самого короткого отрезка из упомянутых ранее, а значит она попадет в отрезок с концами одного типа, т.к. различие не поместится в отрезок.

28. Топология прямой - Начало

28.1. *Имеется последовательность отрезков, каждый из которых содержится в предыдущем. Может ли пересечение всех этих отрезков быть пустым?*

Возьмем ТВГ левых концов и ТНГ правых. Пусть ТНГ правых меньше ТВГ левых. Тогда есть отрезок с левым концом больше ТНГ правых концов (пусть расстояние до него ε). Если его длина будет $\frac{\varepsilon}{2}$, то его правый конец будет меньше ТНГ правых, т.е. это не ТНГ. Тогда ТВГ левых будет всегда меньше или равно ТНГ правых. Отрезок с концами в них и будет пересечением, и очевидно, что даже при совпадении концов в перечении будет хотя бы одна точка.

28.2. Изменится ли ответ 28.1, если отрезки заменить интервалами?

Да, изменится. Пусть есть последовательность интервалов такая:

$$\left(\frac{1}{2}; 1\right), \left(\frac{3}{4}; 1\right), \left(\frac{7}{8}; 1\right), \dots$$

Тогда ТВГ ее левых концов - 1, которое не лежит в этих интервалах, значит, пересечение пусто.

28.3а. Группа естествоиспытателей в течении 6 часов наблюдала за (неравномерно) ползущей улиткой так, что она всё это время была под присмотром. Каждый наблюдатель следил за улиткой ровно 1 час без перерывов и зафиксировал, что она проползла за этот час ровно 1 метр. Могла ли улитка за время всего эксперимента проползти 5м?

Могла. Есть минимум 5 временных точек, в которых одновременно наблюдают 2 наблюдателя. Пусть в них улитка телепортируется на 1 м. Тогда каждый наблюдатель видел ее перемещение на 1 м, притом их могло быть на 1 меньше, чем наблюдателей, которых было минимум 6.

28.3б. Группа естествоиспытателей в течении 6 часов наблюдала за (неравномерно) ползущей улиткой так, что она всё это время была под присмотром. Каждый наблюдатель следил за улиткой ровно 1 час без перерывов и зафиксировал, что она проползла за этот час ровно 1 метр. Могла ли улитка за время всего эксперимента проползти 10м?

Очевидно, что могут быть 5 наблюдателей, время наблюдения которыми улитки не пересекалось. Тогда в случае, когда последний из выбранных не донаблюдал до конца эксперимента, можно выбрать еще 5 непесекающихся, каждый из которых будет иметь начало наблюдения во время наблюдения соответствующего из первой группы. Тогда наблюдателей 10. Могла быть ситуация, что у каждого наблюдателя было время, когда он сидит один. Тогда, если улитка телепортировалась в это время, то всего она проползла 10 м.

28.3в. Группа естествоиспытателей в течении 6 часов наблюдала за (неравномерно) ползущей улиткой так, что она всё это время была под присмотром. Каждый наблюдатель следил за улиткой ровно 1 час без перерывов и зафиксировал, что она проползла за этот час ровно 1 метр. Могла ли улитка за время всего эксперимента проползти 12м?

Нет, такого быть не могло. Пусть могло. Тогда перемещение улитки было увидено 12 или более раз. Докажем, что как бы мы не располагали 12 точек на отрезке длины 6, найдется отрезок, содержащий 2 из них. Почему? Пусть можно. Отрежем с концов по отрезку длины 1 - там будет не более 2 точек. Останется отрезок длины 4 с 10 точками. Уберем 2 точки - предполагая, что отрезки, их содержащие, очень мало выступают на остаточный отрезок (чем больше выступают, тем больше средняя плотность точек, тем более невозможно утверждение). Получим отрезок длины 4 с 8 точками. Сделаем аналогичное преобразование, получим отрезок длины 2 с 4 точками. Этот отрезок легко разбить на 2 отрезка с 1 точкой в каждом. Значит 2 точки нигде не лежат, чего быть не может - в них за улиткой, по условию кто-то наблюдал.

28.4. Докажите, что в любом покрытии отрезка интервалами найдётся конечный набор интервалов, покрывающий весь отрезок.

Пусть нельзя. Тогда хотя бы одну половину отрезка нельзя. Будем продолжать так счетное число раз, пока не останется точка (по 28.1., исходя из решения такое возможно). Точка очевидно покрыта некоторым интервалом. Пусть расстояние от точки до ближайшего конца ε . Очевидно, что найдется отрезок, содержащий эту точку, с длиной меньше $\frac{\varepsilon}{2}$. Тогда он покрывается интервалом. Противоречие.

28.5. Из любого ли покрытия отрезка интервалами можно удалить часть так, чтобы оставшиеся интервалы тоже составляли покрытие, но каждую точку накрывало бы не более двух из них?

Сначала уберем вложенные интервалы и оставим из каждой группы вложенных наибольший. Так количество покрытий некоторых точек уменьшится. Теперь возьмем точку, покрываемую тремя или более интервалами. Возьмем эти три интервала и будем левые концы обозначать за А, правые за В. Сама же точка Т. Занумеруем интервалы по порядку их начал. Конец первого лежит до конца второго, конец второго лежит до конца третьего, т.к. иначе какие-то из них будут вложенными. Т.е. получается такая последовательность точек - $A_1, A_2, A_3, T, B_1, B_2, B_3$. Тогда если взять объединение интервалов 1 и 3, то получим интервал, в который вложен второй. Уберем второй и интервалов станет на один меньше, а точка все еще будет покрыта. Будем делать так с самым левым пересечением более чем 2 интервалов, пока его не будет покрывать 2 интервала. После этого рассмотрим следующий интервал. Сделаем так же. Будем делать так на всех пересечениях и в

конце получим требуемое покрытие. Почему все точки будут покрыты хотя бы одним интервалом после этих действий? Т.к. мы убираем интервал, вложенный в объединение некоторых других.

28.6. *Изменится ли что-нибудь в предыдущих двух задачах, если отрезок заменить интервалом?*

В 28.4 изменится. Пусть есть интервал $(0, 1)$. Пример подобен примеру из 28.2:

$$\left(\frac{1}{2}; \frac{7}{8}\right), \left(\frac{3}{4}; \frac{15}{16}\right), \left(\frac{7}{8}; \frac{31}{32}\right), \left(\frac{15}{16}; \frac{63}{64}\right), \dots$$

Очевидно, что конечного покрытия нет.

В 28.5. же не изменится - в доказательстве нигде не используются свойства отрезка, отличающиеся от свойств интервалов.

28.7а. *Всегда ли из покрытия отрезка конечным множеством содержащихся внутри него отрезков можно выкинуть часть отрезков так, чтобы оставшиеся по-прежнему покрывали исходный отрезок и их суммарная длина не превышала бы его удвоенной длины?*

Будем действовать аналогично 28.5. Эта задача отличается только тем, что в каком-то конечном числе точек может быть 3 отрезка - заканчивающийся в ней, начинающийся в ней и покрывающий (но не более - иначе вложенность). Объединим заканчивающийся и начинающийся и сделаем так везде, где такая ситуация есть. Получим конечное число отрезков и конечное число точек, не влияющих на длину, при этом во всех точках изначального отрезка не более 2 отрезков.

28.7б. *Всегда ли из покрытия отрезка множеством содержащихся внутри него отрезков можно выкинуть часть отрезков так, чтобы оставшиеся по-прежнему покрывали исходный отрезок и их суммарная длина не превышала бы его удвоенной длины?*

После удаления вложенных получаем, что в каждой точке может начинаться 1 отрезок, заканчиваться 1 отрезок и покрывать ее тоже 1 отрезок. Пересечение начинающегося и заканчивающегося - точка, т.е. не влияет на длину. Объединим их. Объединив все такие отрезки, получим ситуацию, подобную 28.5, и много точек. Точек этих будет, очевидно, счетно (можно разбить отрезки на две чередующиеся группы непересекающихся, отрезок больше интервала, по 13.13 отрезков не более чем счетно на прямой, значит на подмножестве прямой их тоже не более, чем счетно), т.е. на длину они все еще не влияют. Зато в каждой точке будет не более 2 отрезков, значит в сумме будет не более 2 длин изначального.

28.8. *Убедитесь, что промежутки (а) $(-\infty, a)$; (б) $(a, +\infty)$; (в) (a, b) открыты.*

Здесь у интервалов есть 2 типа концов - бесконечностный и где-то внутри прямой. У первого типа концов открытость очевидна - если есть внутренняя точка k , то рассмотрим ее расстояние r до другого конца. Тогда есть ε -окрестность с $\varepsilon = \frac{r}{2}$. У второго типа концов открытость доказывается очевидно - берем расстояние до ближайшего конца k , далее аналогично.

28.9. *Можно ли разбить интервал в объединение двух непересекающихся открытых множеств?*

Возьмем какую-то максимальную ε -окрестность. Она является интервалом. Возьмем конец этого интервала, не принадлежащий этому множеству, т.к. ε -окрестность максимальная. Он должен принадлежать другому множеству, а значит его ε -окрестность должна быть в нем. Однако это конец интервала - все точки левее него лежат в нем, а значит в этой точке нет нужной окрестности, значит, второе не открытое.

28.10. *Докажите, что объединение любого набора открытых множеств открыто.*

Возьмем любую точку нового множества - она лежит в каком-то изначальном множестве, а значит там есть какая-то нужная ε -окрестность, а значит она есть и в объединении.

28.11 (а) *Докажите, что пересечение конечного набора открытых множеств открыто. (б) Так ли это для пересечений бесконечных наборов?*

Рассмотрим это пересечение. Тогда возьмем минимальную ε -окрестность - она есть в пересечении, т.к. эта окрестность или большая есть в каждом множестве. Если же ε -окрестности нет, то это пересечение пустое, либо одно из множеств не имеет такой окрестности, а значит не открыто.

28.12. Докажите, что всякое открытое множество на прямой представляет собой объединение конечного или счётного набора попарно непересекающихся интервалов, в числе которых допускаются и неограниченные интервалы типа $(-\infty, a)$, $(a, +\infty)$ и $(-\infty, +\infty)$.

Пересекающиеся интервалы объединимы. Объединим же ε -окрестности всех точек. Получаем несколько непересекающихся. По 13.13 очевидно, что если есть разбиение этого множества на непересекающиеся интервалы, то их не более, чем счётно.

28.13а. Может ли бесконечное дискретное множество быть ограниченным?

Может - например, таким будет множество $\{\frac{1}{2^n}\}$. Почему? Потому, что для каждой степени n будет нужная ε -окрестность радиуса $\varepsilon = \frac{1}{2^{n+2}}$.

28.13б. Может ли бесконечное дискретное множество быть несчётным?

Пусть может. Для каждого элемента множества возьмем нужную ε -окрестность. Если каждую такую окрестность поделить пополам, то получим много непересекающихся интервалов. По 13.13 их не более, чем счётно. Значит, и элементов такого множества не более, чем счётно.

29. Топология прямой - Возрождение

29.1. Постройте бесконечное множество $M \subset \mathbb{R}$, множество предельных точек которого: (а) пусто; (б) состоит из одной точки; (в) состоит из двух точек; (г) совпадает с $\mathbb{Z} \subset \mathbb{R}$.

1а. - Множество \mathbb{N} .

1б. - Множество $\{\frac{1}{2^n}\}$. Предельная точка - 0, других, очевидно, нет.

1в. - Множество $\{\frac{1}{2^{n-1}}\} \cup \{2 + \frac{1}{2^{n-1}-1}\}$. Предельные точки 0 и 2 аналогично 29.1б.

1г. - Множество $\{k + \frac{1}{2^{n-1}}\}$, $k \in \mathbb{Z}$. Предельные точки - k для каждого отдельного k .

29.4. Докажите, что отрезок и прямая — замкнуты, а интервал и луч — нет.

У любой предельной точки в любой ε -окрестности есть элемент множества. Рассмотрим с этой точки зрения пункты этой задачи.

Отрезок - Пусть есть предельная точка, не входящая в него. Тогда расстояние от этой точки до одного из концов равно ε . Тогда в ее окрестности радиуса, меньше этого, точки множества не будет. Противоречие.

Прямая - Предельных точек вне прямой нет, т.к. точек вне прямой нет, а любая предельная точка - точка.

Интервал - Конец интервала, очевидно, предельная точка, в нем не лежащая.

Луч - Аналогично интервалу.

29.5а. Бывают ли дискретные незамкнутые множества?

Пример - $\{\frac{1}{2^n}\}$. Единственная предельная точка - 0, не входящая в множество. При этом оно, очевидно, дискретно.

29.6б. Перечислите все одновременно открытые и замкнутые подмножества в \mathbb{R} .

Открытое множество всегда разбивается на непересекающиеся интервалы (28.12). Во всех них будут предельные точки, не входящие в множество, а значит итоговое множество не будет замкнутым. Такого можно избежать двумя способами - сделать интервалом всю прямую или убрать интервалы вовсе. В первом случае получаем прямую, во втором пустое множество. И то, и то замкнуто.

29.7. Докажите, что множество $Z \subset \mathbb{R}$ замкнуто тогда и только тогда, когда его дополнение $\mathbb{R} \setminus Z$ открыто.

Множество, замкнутость которого мы предполагаем, назовем A . Другое же множество - B .

п.1 - Замкнуто, если дополнение открыто. Пусть не замкнуто. Тогда есть предельная точка замкнутого, не принадлежащая ему. Тогда она принадлежит B . Тогда, по определению открытого, она должна быть внутренней, т.е. есть ее ε -окрестность полностью лежит в B . Однако она предельная для A , т.е. в любой ее ε -окрестности есть хотя бы одна точка A , чего одновременно быть не может.

п.2 - Если замкнуто, то дополнение открыто. Пусть не так. Тогда в B есть не внутренняя точка, т.е. у нее нет окрестности, полностью содержащийся в B . Тогда любая ее ε -окрестность содержит точку из A , т.е. она для него предельная. Однако A замкнуто, т.е. содержит все свои предельные точки, а эта - в B .

29.8. Докажите, что пересечение любого набора замкнутых множеств замкнуто.

Пусть не так. Тогда у пересечения есть предельная точка, не содержащаяся в нем. Однако она присутствует во всех пересеченных замкнутых множествах либо не является предельной для них. В первом случае она внутри пересечения. Во втором случае любая ее ε -окрестность содержит точки пересечения, а значит всех пересеченных множеств, т.е. она не может перестать быть предельной.

29.9а. Докажите, что объединение конечного набора замкнутых множеств замкнуто.

Пусть это не так. Тогда его дополнение не открыто. Его дополнение - пересечение дополнений к замкнутым множествам, т.е. пересечение открытых, являющееся открытым. Значит, по 29.8 объединение замкнутых замкнуто.

29.10. Докажите, что любая последовательность вложенных компактов $K_1 \supset K_2 \supset K_3 \supset \dots$ имеет непустое пересечение: $\bigcap K_n \neq \emptyset$.

Пусть пересечение пусто. Тогда объединение вложенных открытых множеств, являющихся дополнениями компактов — прямая. Тогда, в силу их вложенности, найдется дополнение, являющееся прямой. Значит, то, что он дополняет, должно являться пустым множеством. Однако это должен быть компакт, а он не пуст.

29.11. Докажите, что непустое $K \subset \mathbb{R}$ компакт тогда и только тогда, когда любое его покрытие интервалами содержит конечное подпокрытие.

п.1 - Компакт, если любое его покрытие интервалами содержит конечное подпокрытие. Пусть не так. Тогда в K есть предельная точка не внутри K . В любой ее ε -окрестности есть точка из K . Возьмем какую-то из них и разделим ее на слои со все уменьшающейся толщиной (например, $\frac{1}{2^n}$ от самого внешнего). Каждый слой будет объединением 2 интервалов. Теперь расширим каждый слой на один слой во внутреннюю и наружную стороны. Получим некоторое счетное покрытие этой точки, притом, очевидно, без конечного подпокрытия. Из-за того, что на каждом слое есть точка K глубже, то оно будет счетным и для K , что противоречит условию.

п.2 - Если компакт, то любое его покрытие интервалами содержит конечное подпокрытие. По 28.4 любое покрытие интервалами отрезка содержит конечное подпокрытие. Тогда если докажем, что компакт - объединение конечного числа непересекающихся отрезков и изолированных точек, то требуемое утверждение будет верно. Докажем же это. Компакт не имеет предельных точек вне себя. Рассмотрим все предельные точки, не являющиеся внутренними или изолированными. В этих местах и только в этих местах будет "смена" точек, не принадлежащих компакту, и принадлежащих ему, и наоборот. Почему? Что здесь будет смена очевидно, т.к. иначе точка будет либо внутренней, либо изолированной. Смена будет только здесь, т.к. если она произойдет где-то еще, то эта точка не будет ни изолированной, ни внутренней, однако предельной. Тогда, соблюдая четность, разделяем компакт на отрезки, потом прибавляем к этому изолированные точки. Они, очевидно, каждый в отдельности имеют конечное подпокрытие, а значит, что и все вместе имеют конечное подпокрытие.

29.12. Докажите, что канторово множество имеет мощность континуума, но покрывается конечным набором интервалов со сколь угодно малой суммой длин.

Очевидно, что длина каждого следующего компакта изменяется на $\frac{2}{3}$. Т.е. длина K_n равна $(\frac{2}{3})^n$. Тогда последовательность длин этих компактов - БМП. Поэтому для любого количества интервалов в покрытии найдется такое n , длина которого будет меньше, чем суммарная длина интервалов, поделенная на их количество, значит, конечное покрытие найдется. Мощность континуума оно имеет, т.к. это равномощно множеству бесконечных последовательностей из 0 и 1, которое континуум.

29.13а. Содержит ли канторово множество интервалы?

Пусть содержит. Тогда для любой длины интервала найдется компакт, образующий канторово множество, с суммарной длиной меньше него. Значит будут точки интервала, не лежащие в компакте, а значит и в его пересечении с чем угодно, т.е. в канторовом множестве.

29.13б. Содержит ли канторово множество изолированные точки?

Пусть содержит. Количество отрезков в $K_n - 2^n$. Все они, очевидно, равной длины. У изолированной точки с обеих сторон - пустота. Значит, она должна занимать место отрезка. Отрезков - счетное число, значит и изолированных точек будет счетное число. Тогда канторово множество будет счетно, что противоречит 29.12.