Lösungen zur Klausur zur Vorlesung

Mathematik für Informatiker I

(Dr. Frank Hoffmann)

Wintersemester 2011/2012 **22. Februar 2012**

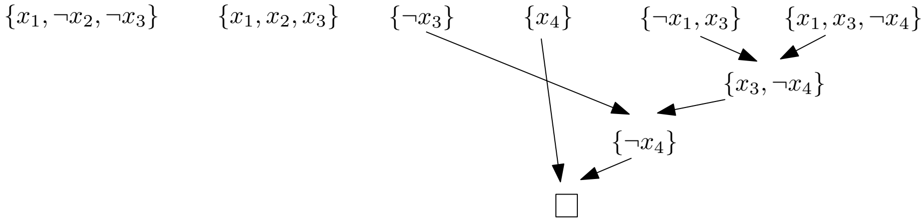
Aufgabe 1 Logisches und Grundsätzliches

/4+4+2

(a) Testen Sie mit dem Resolutionskalkül, ob die Boolesche Formel

$$t = \neg x_4 \vee (x_1 \wedge \neg x_3) \vee (\neg x_1 \wedge \neg x_3 \wedge x_4)$$

eine Folgerung aus $t_1 = x_1 \vee \neg x_2 \vee \neg x_3$ und $t_2 = (x_1 \vee x_2 \vee x_3) \wedge \neg x_3$ ist. Beschreiben Sie kurz, was Sie tun.
Lösung: Es ist zu prüfen, ob $t_1 \wedge t_2 \Rightarrow t$ eine Tautologie ist, oder äquivalent $\neg(t_1 \wedge t_2 \Rightarrow t)$ eine Kontradiktion. $\neg(t_1 \wedge t_2 \Rightarrow t) = t_1 \wedge t_2 \wedge \neg t$. Das liefert folgenden Resolutionsgraphen zur Ableitung der leeren Klausel.
Mithin ist $t_1 \wedge t_2 \Rightarrow t$ eine Tautologie .



(b) Sei $f_0 = 0, f_1 = 1, f_n = f_{n-1} + f_{n-2}$ für $n > 1$ die Folge der Fibonacci-Zahlen. Stellen Sie eine Vermutung auf, für welche n die Fibonacci-Zahl f_n eine gerade Zahl ist und beweisen Sie Ihre Vermutung mit verallgemeinerter vollständiger Induktion.
Lösung: Vermutung: f_n ist gerade genau dann, wenn n Vielfaches von 3 ist.
Verallgemeinerte vollständige Induktion:
Induktionsanfang: $f_0 = 0$ ist gerade; $f_1 = 1$ ungerade.
Induktionsschritt: Sei n eine natürliche Zahl ≥ 2. Wir nehmen an, die Aussage gilt für alle $n' < n$.
Fallunterscheidung:
Fall 1: $n \mod 3 = 0$. Nach Annahme sind f_{n-1} und f_{n-2} ungerade. Also ist $f_n = f_{n-1} + f_{n-2}$ gerade.
Fall 2: $n \mod 3 = 1$. Dann ist f_{n-1} gerade, denn $(n-1) \mod 3 = 0$, und f_{n-2} ist ungerade. Also ist f_n ungerade.
Fall 3: $n \mod 3 = 2$. Dann ist f_{n-1} ungerade und f_{n-2} ist gerade, wegen $(n-2) \mod 3 = 0$, und damit ist f_n ungerade.
Nach dem Prinzip der vollständigen Induktion ist die Aussage für all $n \in \mathbb{N}$ bewiesen.

(c) Der NAND-Operator $|$, also die negierte Konjunktion, ist funktional vollständig. Damit sollten Sie also in der Lage sein, den XOR-Operator $\oplus$ semantisch äquivalent mittels des NAND-Operators $|$ auszudrücken. Tun Sie dies!
Lösung: Es ist $\neg x = x|x$ und $x|y = \neg(x \wedge y)$. Wir haben:

$$x \oplus y = (\neg x \wedge y) \vee (x \wedge \neg y) = \neg(\neg(\neg x \wedge y) \wedge \neg(x \wedge \neg y)) = ((x|x)|y)|(x|(y|y))$$

Aufgabe 2 Zählen und Wahrscheinliches | /2+2+4+2

(a) Was ist die bedingte Wahrscheinlichkeit, dass bei 5 Würfen einer fairen Münze genau 4 Mal Kopf kommt unter der Bedingung, dass der erste Wurf Kopf war.
Lösung: Grundraum Ω hat 2^5 Elementarereignisse mit Geichverteilung.
Ereignis A: Viermal Kopf. $|A| = 5$
Ereignis B: 1. Wurf Kopf $|B| = 2^4$.
Ereignis $A \cap B$: $|A \cap B| = \binom{4}{3} = 4$
Damit ist $Pr(A|B) = \frac{Pr(A \cap B)}{Pr(B)} = \frac{1}{4}$

(b) Bei einem gezinkten Würfel kommt die 4 mit Wahrscheinlichkeit 2/7 die anderen Augenzahlen jeweils mit Wahrscheinlichkeit 1/7. Was ist die erwartete Gesamtaugenzahl, wenn Sie drei Exemplare dieses Würfels 2 Mal werfen.
Lösung: Was ist die erwartete Augenzahl $E(X_1)$ für einen solchen Würfel:

$$E(X_1) = \frac{1}{7}(1+2+3+5+6) + \frac{2}{7} \cdot 4 = \frac{25}{7}$$

Wenn wir drei Exemplare dieses Würfels 2 Mal werfen, entspricht dies 6 Einzelwürfen und wegen der Linearität des Erwartungswertes ergibt sich $E(X) = 6E(X_1) = \frac{150}{7}$ als Erwartungswert für die Gesamtaugenzahl.

(c) Beweisen Sie mit einem kombinatorischen Argument die folgende Identität für natürliche Zahlen $n \geq 1$:

$$\sum_{k=1}^{n} k \binom{n}{k}^2 = n \binom{2n-1}{n-1}$$

Tipp: Betrachten Sie "Komitees" mit n Mitgliedern, davon ein Chef, die man aus n Frauen und n Männern bildet, wobei der Chef eine Frau ist.
Lösung: Die linke Seite:

$$\sum_{k=1}^{n} k \binom{n}{k}^2 = \sum_{k=1}^{n} k \binom{n}{k} \binom{n}{n-k}$$

zählt die Komitees nach der Anzahl k der Frauen. Da der Chef eine Frau ist, gilt $k \geq 1$. Man wählt k aus den insgesamt n Frauen, dazu noch $n-k$ aus den n Männern und macht eine der Frauen zum Chef. Nach der Produktregel haben wir $k\binom{n}{k}\binom{n}{n-k}$ Möglichkeiten.
Die rechte Seite: Man macht eine Frau zum Chef (n Möglichkeiten) und hat noch $n-1$ weitere Mitglieder aus den restlichen $2n-1$ Personen ($n-1$ Frauen und n Männern) zu wählen.

(d) Sie wählen 5 verschiedene Zahlen aus der Menge $\{1, 2, \ldots, 8\}$ und können sicher sein, dass zwei dabei sind, deren Summe 9 ergibt. Warum?
Tipp: Wie kann die 9 als Summe zustande kommen?
Lösung: Schubfachprinzip! Die Schubfächer sind die möglichen 4 Darstellungen der 9.

$$9 = 1+8 = 2+7 = 3+6 = 4+5$$

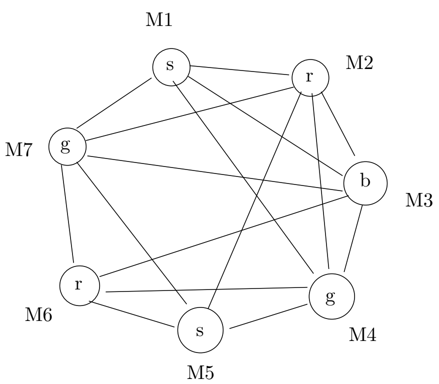
Wählt man 5 Zahlen, so gibt es ein Fach mit $\lceil \frac{5}{4} \rceil = 2$ gezogenen Zahlen.

Aufgabe 3 Graphen

/3+4+3

(a) Ein aufspannender Wald eines ungerichteten schlichten Graphen $G = (V, E)$ mit c Zusammenhangskomponenten besteht aus c aufspannenden Bäumen für die einzelnen Zusammenhangskomponenten. Wie viele Kanten (als Funktion von $|V|, |E|$ und c) muss man aus G entfernen, um einen aufspannenden Wald zu erhalten. Begründen Sie dies.
Lösung: Seien $V_1, \ldots, V_c$ die Knotenmengen der Zusammenhangskomponenten, also $|V| = |V_1| + \ldots + |V_c|$. Dann gilt für die entsprechenden Kantenmengen der aufspannenden Bäume $|E_i| = |V_i| - 1$. Man muss also $|E| - \sum_{i_1}^{c} |E_i| = |E| - |V| + c$ Kanten entfernen, um einen aufspannenden Wald zu erhalten.

(b) Studiendekan Prof. XYZ möchte die Klausurphase des Semesters planen und allen Studenten ermöglichen, an allen Klausuren der von ihnen belegten Veranstaltungen teilzunehmen. Zum anderen möchte er möglichst wenige Klausurtermine vergeben, das heißt, es können mehrere Klausuren zum selben Zeitpunkt stattfinden, wenn es dadurch keine Konflikte gibt.
Es gibt Module $M1, M2, \ldots, M7$.
Die folgenden Kombinationen werden jeweils von keinem Studenten belegt: $M1 - M5, M1 - M6, M2 - M6, M3 - M5, M4 - M7$. Alle anderen Kombinationen treten auf.
Bestimmen und begründen Sie die Minimalanzahl von Klausurterminen, die Prof. XYZ einplanen muss.
Tipp: Als Knotenfärbungsproblem modellieren!
Lösung: Wir konstruieren einen Graphen auf Knotenmenge $\{M1, \ldots, M7\}$ und zeichnen eine Kante zwischen zwei Knoten, falls die beiden Module von jemandem gemeinsam belegt wurden, also die Klausuren an verschiedenen Terminen stattfinden müssen. Das ist also der Komplementärgraph zur obigen Kantenmenge. Wie angegeben kann man die Knoten mit 4 Farben s, r, b, g färben, so dass adjazente Knoten verschiedene Farben haben. Weniger Farben reichen nicht aus, denn M1,M2,M3 und M4 bilden einen vollständigen Untergraphen. Die 4 Farben entsprechen 4 Klausurterminen.



(c) Die Vereinigung zweier nichtleerer ungerichteter schlichter Graphen $G_1 = (V_1, E_1)$, $G_2 = (V_2, E_2)$ ist der Graph $G = (V_1 \cup V_2, E_1 \cup E_2)$. Zeigen Sie mit einem Widerspruchsbeweis, dass, falls G zusammenhängend ist, $V_1 \cap V_2$ nicht leer sein kann.
Lösung: Angenommen G ist zusammenhängend und $V_1 \cap V_2 = \emptyset$. Dann gibt es in G einen Weg p, der einen Knoten aus V_1 mit einem Knoten aus V_2 verbindet. Dann muss es in p auch eine erste Kante $e \in E_1 \cup E_2$ geben, die einen Knoten aus V_1 mit einem Knoten aus V_2 verbindet. Aber $E_1 \subseteq \binom{V_1}{2}$ und $E_2 \subseteq \binom{V_2}{2}$. Also gibt es keine solche Kante. Widerspruch.

Aufgabe 4 Verschiedenes | /2+2+2+2+2

Hier sind kurze Antworten gefragt!

(a) Wie Sie wissen, gibt es insgesamt 2^{2^n} viele verschiedene n–stellige Boolesche Funktionen f. Wie viele Funktionen davon haben die Eigenschaft, dass der Funktionswert $f(b_1, \dots, b_n)$ bei einer Eingabe $(b_1, \dots, b_n)$ nur von der Anzahl der Einsen unter den b_i abhängt und nicht davon, wo diese stehen? Die Majoritätsfunktion ist so ein Beispiel. Kurze Begründung.
Lösung: Es gibt im Eingabetupel zwischen 0 und n viele Einsen. Jedesmal kann man den Funktionswert 0 oder 1 wählen, also 2^{n+1} viele solche Funktionen.

(b) Seien R_1 und R_2 Äquivalenzrelationen in einer Menge A. Ist die symmetrische Differenz $R_1 \oplus R_2$ wieder Äquivalenzrelation? Kurze Begründung.
Lösung: Nein. Die Diagonale ist nicht in $R_1 \oplus R_2$, also nicht reflexiv.

(c) Seien f und $f \circ g$ injektive Funktionen. Ist dann g notwendigerweise injektiv? Kurze Begründung.
Lösung: Ja. Angenommen, g wäre nicht injektiv, d.h. es gibt x, x' mit $x \neq x'$ und $g(x) = g(x')$. Aber dann wäre auch $(f \circ g)(x) = f(g(x)) = f(g(x')) = (f \circ g)(x')$. Widerspruch zur Injektivität von $f \circ g$.

(d) Was versteht man unter der "Linearität des Erwartungswertes"?
Lösung: Für Zufallsvariablen $X_1, X_2 : \Omega \to \mathbb{R}$ und $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$ gilt:
$E(c_1X_1 + c_2X_2) = c_1E(X_1) + c_2E(X_2)$.

(e) Wir betrachten die prädikatenlogische Formeln $\forall x : (P(x) \vee Q(x))$ und $(\forall x : P(x)) \vee (\forall x : Q(x))$. Geben Sie zwei Beispiele für jeweils zwei verschiedene konkrete Prädikate P und Q an, so dass einmal die Formeln semantisch äquivalent und einmal nicht semantisch äquivalent sind.
Lösung:
(1) Grundmenge $\mathbb{N}$, $P(x) : x$ ist ungerade; $Q(x) : x$ ist gerade. Dann sind die Formeln nicht semantisch äquivalent.
(2)Grundmenge $\mathbb{N}$, $P(x) : x = 1, Q(x) : x = 2$. Ergibt beide Mal den Wert false.