Teillösungen zum 5. Aufgabenblatt vom Donnerstag, den 12. November 2009 zur Vorlesung

MafI I: Logik & Diskrete Mathematik

(Autor: Maike Esmann)

1. **Relationen und Funktionen** (4 Punkte)

   In der folgenden Tabelle sind 15 Relationen $R \subseteq A \times A$ dargestellt, die sich durch Kombination von 5 definierenden Aussageformen und 3 Zahlbereichen für A ergeben ($\mathbb{N}$ – die natürlichen Zahlen mit 0, $\mathbb{Q}$ – die rationalen Zahlen und $\mathbb{R}^+$ – die positiven reellen Zahlen ohne Null). Man untersuche welche dieser Relationen Funktionen sind und wenn ja, ob sie injektiv, surjektiv oder bijektiv sind. Dazu können folgende Symbole benutzt werden:

   - b falls die Relation eine bijektive Funktion von A auf A ist
   - i falls die Relation eine injektive Funktion von A in A, aber nicht bijektiv ist
   - s falls die Relation eine surjektive Funktion von A auf A, aber nicht bijektiv ist
   - f falls die Relation eine Funktion von A in A, aber weder injektiv noch surjektiv ist
   - $\times$ falls die Relation keine Funktion von A in A ist

definierende Aussageform	$A = \mathbb{N}$	$A = \mathbb{Q}$	$A = \mathbb{R}^+$
$\{(x,y) \in A \times A \mid \frac{y}{x+1} = 3\}$	i	$\times$	i
$\{(x,y) \in A \times A \mid \frac{x}{y+1} = 3\}$	$\times$	$\times$	$\times$
$\{(x,y) \in A \times A \mid x^2 - y - 2 = 0\}$	$\times$	f	$\times$
$\{(x,y) \in A \times A \mid x - y^2 + 2 = 0\}$	$\times$	$\times$	i
$\{(x,y) \in A \times A \mid x^2 - y^2 = 0\}$	b	$\times$	b

2. **Injektive Funktionen I** (2 Punkte)

   Es sei $f : A \to B$ eine Abbildung mit der folgenden Eigenschaft: Für beliebige $S, T \subseteq A$ gilt $f(S \cap T) = f(S) \cap f(T)$. Zeigen Sie, dass f injektiv ist.

3. **Injektive Funktionen II** (2 Punkte)
   Beweisen Sie den folgenden Satz: Eine Abbildung $f\colon A \to B$ ist genau dann injektiv, wenn eine Funktion $h\colon B \to A$ existiert, für die $h \circ f = \mathsf{id_A}$ gilt.

   Lösung:
   „$\Rightarrow$“
   Sei $f : A \to B$ injektiv ,dann gilt für alle $a_1, a_2 \in A$: $f(a_1) = f(a_2) \Rightarrow a_1 = a_2$.
   Also ist das Urbild für jedes Element $b \in B$ entweder leer oder einelementig. Jedem $b = f(a)$ lässt sich somit ein eindeutiges Element $a \in A$ zuordnen.
   Wir fixieren ein beliebiges $a_0 \in A$ und definieren folgende Funktion $h : B \to A$:

   $$h(b) = \begin{cases} a, & \text{wenn } b = f(a), \\ a_0, & \text{wenn} f^{-1}(b) = \emptyset \end{cases}$$

   Dann gilt für alle $a \in A$
   $$h \circ f(a) = h(f(a)) = a,$$
   also $h \circ f = \mathsf{id_A}$.

   „ $\Leftarrow$“
   Sei $h \circ f = \mathsf{id_A}$, d.h. $h(f(a)) = a$ für alle $a \in A$.
   Angenommen $f(a_1) = f(a_2)$ für $a_1, a_2 \in A$.
   Dann ist $h(f(a_1)) = h(f(a_2))$ also auch $a_1 = a_2$.
   Also ist f injektiv.

4. **Injektiv-Surjektiv** (4 Punkte)
   Sei $f : A \to B$ eine beliebige Funktion.
   Wir definieren eine neue Funktion $g : \mathcal{P}(B) \to \mathcal{P}(A)$. Für $N \subseteq B$ sei $g(N) = f^{-1}(N)$.
   Beweisen Sie, dass f surjektiv ist genau dann, wenn g injektiv ist.

   Lösung:
   „$\Rightarrow$“ Beweis durch Kontraposition (g nicht injektiv $\Rightarrow$ f nicht surjektiv)
   Sei also g nicht injektiv.
   Dann gilt: $\exists\, N_1, N_2 \subseteq B$ mit $N_1 \neq N_2$ und $g(N_1) = g(N_2)$
   Nach Definition von g ist dann $f^{-1}(N_1) = f^{-1}(N_2)$.
   Die Mengen N_1 und N_2 sind verschieden, o.B.d.A. nehmen wir an: $\exists\, b_2 \in N_2 \setminus N_1$.
   Aber für dieses Element gilt $b_2 \notin f(A)$. Denn hätte b_2 ein nichtleeres Urbild mit einem Element a, so wäre a auch im Urbild eines $b_1 \in N_1$. Das geht aber nicht, denn f ist eine Funktion und $f(a)$ besteht aus genau einem Element.
   Also ist f nicht surjektiv.

   „ $\Leftarrow$“ Beweis durch Kontraposition (f nicht surjektiv $\Rightarrow$ g nicht injektiv)
   Sei f nicht surjektiv, das heißt: $\exists\, b_0 \in B : b_0 \notin f(A)$.
   Aber dann ist $g(B) = g(B \setminus \{b_0\}) = A$ und $B \neq B \setminus \{b_0\}$.
   Damit ist g nicht injektiv.

5. **Bijektion** (4 Punkte)
Zeigen sie, dass die Funktion $f : (0,1) \to \mathbb{R}$ gegeben durch $f(x) = (1/2 - x)/(x(1-x))$ eine Bijektion ist.
Tipp: Dies erfordert ein bisschen Schulmathematik! Die Injektivität von f folgt z.B. aus der Tatsache, dass die Funktion streng monoton fallend ist. Zeigen Sie dies!

Lösung:
Um zu zeigen, dass die Funktion f eine Bijektion ist, müssen wir sowohl die Injektivität als auch die Surjektivität zeigen.

(i) f ist injektiv:
Wir zeigen , dass f im offenen Intervall (0,1) streng monoton fallend ist, d.h. für alle $x < y$ aus dem Intervall $(0,1)$ folgt $f(x) > f(y)$.
Sei also $x < y$ und damit $2x + y < x + 2y$. Daraus folgt $-x - y/2 > -y - x/2$. Wir addieren anschließend auf beiden Seiten $1/2 + xy$:

$$1/2 - x - y/2 + xy > 1/2 - y - x/2 + xy$$

Die beiden Seiten der Ungleichung schreiben wir jeweils als Produkt und multiplizieren links mit y und rechts mit x. Das ergibt:

$$(1/2 - x)(1 - y)y > (1/2 - y)(1 - x)x$$

und schließlich

$$(1/2 - x)/(x(1 - x)) > (1/2 - y)/(y(1 - y))$$

Also ist f injektiv.

(ii) f ist surjektiv.
Da f im Intervall $(0,1)$ stetig ist, $\lim_{x\to 1} f(x) = -\infty$ und $\lim_{x\to -1} f(x) = \infty$ gilt, nimmt f jeden Wert in $\mathbb{R}$ an.
Die Funktion f ist somit surjektiv.

6. **0–1–Sequenzen** (4 Punkte)

   (a) Zeigen Sie, dass die Menge aller endlichen 0–1–Sequenzen abzählbar unendlich ist.

   (b) Zeigen Sie, dass die Menge aller unendlichen 0–1–Sequenzen gleichmächtig mit $\mathcal{P}(\mathbb{N})$ ist, also überabzählbar unendlich ist.