Logik und diskrete Mathematik, Übung 7

Andreas Timmermann, Mat: 4994606, Alena Dudarenok, Mat: 4999780, Gruppe: 1

12. Dezember 2015

Aufgabe 1
geg: eine Menge M von n Männern und n Frauen.
ges: Anzahl a der Möglichkeiten der Zusammenstellungen der Menge M, wenn kein Mann neben einem anderen Mann und keine Frau neben einer anderen Frau sein darf.

$a = (n \cdot n) \cdot ((n-1) \cdot (n-1)) \cdot ((n-2) \cdot (n-2)) \cdot \cdots \cdot ((n-(n-1)) \cdot (n-(n-1))) \cdot 2$
$= n^2 \cdot (n-1)^2 \cdot (n-2)^2 \cdot \cdots \cdot (n-(n-1))^2 \cdot 2$
$= (n!)^2 \cdot 2$

Aufgabe 2:
geg: Die Menge T_3 aller dreistelligen Zahlen, die Durch 3 teilbar sind. Und Die Menge T_5 aller dreistelligen Zahlen die durch 5 teilbar sind.
ges:
1) Die Anzahl $m_{3|,5\nmid}$ der Elemente der Menge aller dreistelligen Zahlen, die durch 3 teilbar sind, aber nicht durch 5.
2) Die Anzahl $m_{3|,5|}$ der Elemente der Menge aller dreistelligen Zahlen, die durch 3 teilbar sind oder durch 5.

Hilfsmenge: M_{15} alle Zahlen die sowohl durch 3 als auch durch 5 teilbar sind.
$|M_3| = 299, |M_5| = 180, |M_{15} = 59$
$m_{3|,5\nmid} = |M_3| - |M_{15} = 299 - 59 = 240$
$m_{3|,5|} = |M_3| + |M_5| - |M_{15} = 420$

Aufgabe 3:
geg: Eine Menge $M = \{0, 1, 2, 3, 4, a, b, c, d, e\}$ aus den Ziffern $0 \ldots 4$ und den Buchstaben $a \ldots e$.

1.) Anzahl der Möglichkeiten $n = 10^8$
2.) Anzahl der Möglichkeiten $n = \binom{10}{8} = \frac{10!}{(10-8)! \cdot 8!} = \frac{90}{2} = 45$
3.) Menge $M = \{3, 3, 3, a, a, a, c, c\}$. Anzahl der Möglichkeiten $n = 3! \cdot 3! \cdot 2! = 162$
4.) Bei 8 möglichen Felder gibt es für die 2 $'c'$ eine Verteilung von $(7+6+5+4+3+2+1) = 28$, für die Buchstaben bei $(5+4+3+2+1) = 15$ verbleibenden Felder eine Verteilung von 4^2 und für die Ziffern die Möglichkeiten von $1 \cdot 5^4$ Verteilung

Macht eine Gesamtanzahl der Möglichkeiten von $m = 28 \cdot 15 \cdot 4^2 \cdot 1 \cdot 5^4 = 4200000$.

Aufgabe 4:
geg: $\binom{2 \cdot n}{2} = 2 \cdot \binom{n}{2} + n^2$

$\binom{2 \cdot n}{2} = \frac{(2 \cdot n)!}{(2 \cdot n - 2)! \cdot 2}$
$= \frac{(2 \cdot n) \cdot (2 \cdot n - 1)}{2}$
$= \frac{4 \cdot n^2 - 2 \cdot n}{2}$
$= 2 \cdot n^2 - n$
$= n^2 + n^2 - n$
$= n^2 + n \cdot (n - 1)$
$= n^2 + \frac{n \cdot (n-1) \cdot (n-2)!}{(n-2)!}$
$= n^2 + \frac{n \cdot (n-1) \cdot (n-2)! \cdot 2}{(n-2)! \cdot 2}$
$= n^2 + 2 \cdot \frac{n \cdot (n-1) \cdot (n-2)!}{(n-2)! \cdot 2}$
$= n^2 + 2 \cdot \binom{n}{2}$

Bei allen Schokoladen die hier erwähnt werden, handelt es sich um individuelle Schokoladen, wovon keine der anderen gleich.
Die linke Seite ist klar. Man will wissen wie viele Auswahlmöglichkeiten es bei n weißen und n braunen Schokoladen gibt, wenn man nur 2 auswählen darf.

Bei der rechten Seite hingegen werden erstmal alle Auswahlmöglichkeiten für eine Seite (weiße Schokolade) berechnet $\binom{n}{2}$. Diese dann auch für die braune Schokolade, also $2 \cdot \binom{n}{2}$. Die n^2 die übrig bleiben, sind die Auswahlmöglichkeiten, die entstehen, wenn wir weiße und braune Schokolade bei der Auswahl vermischen. Also jeweils eine weiße und eine braune Schokolade nehmen.

Aufgabe 5:
geg: $\sum_{k=1}^{n} k \cdot \binom{n}{k}^2 = n \cdot \binom{2 \cdot n - 1}{n - 1}$
Bei allen Schokoladen die hier erwähnt werden, handelt es sich um individuelle Schokoladen, wovon keine der anderen gleich.
Wir suchen die Anzahl der Auswahlmöglichkeiten aus n weißen und n braunen Tafeln Schokolade. Wobei wir nur n Schokoladen nehmen dürfen und eine weiße Schokolade als Lieblingsschokolade ausgewählt werden muss.

Rechte Seite ist klar. Es werden von $2 \cdot n$ weißen und braunen Schokoladen eine weiße Schokolade (unsere Lieblingsschokolade) entfernt. So bleiben $2 \cdot n - 1$ Schokoladen. Jetzt wollen wir aus diesen Schokoladen $n - 1$ (-1 weil wir unsere Lieblingsschokolade schon herausgenommen haben) Schokoladen auswählen $\binom{2 \cdot n - 1}{n - 1}$. Jetzt fehlt noch die Auswahl der weißen Schokolade $n \cdot \binom{2 \cdot n - 1}{n - 1}$.

Auf der linken Seite nehmen wir k als Anzahl der weißen Schokoladen die wir nehmen welche von 1 bis n ist. Somit ergibt sich die Auswahlmöglichkeiten von $\binom{n}{k}$. Diese werden mit den Auswahlmöglichkeiten der braunen Schokolade multipliziert $\binom{n}{k} \cdot \binom{n}{n-k} = \binom{n}{k}^2$. Jetzt müssen wir noch beachten, dass jede der weißen Schokolade auch unsere Lieblingsschokolade sein könnte. Somit ergibt sich $k \cdot \binom{n}{k}^2$. Das aufsummiert ergibt die Gesamtauswahlmöglichkeiten $\sum\limits_{k=1}^{n} k \cdot \binom{n}{k}^2$.