Musterlösung: Nachklausur ProInformatik I vom 07.10.2013

1. Aufgabe: Logik (3+4 Punkte)

Für zwei Wahrheitswerte a und b seien $a \downarrow b$ der NOR-Operator, der genau dann wahr ist, wenn a und b falsch sind, und $a \uparrow b$ der NAND-Operator, der genau dann falsch ist, wenn a und b wahr sind.

(a) Drücken Sie diese beiden Operatoren über der Signatur $\{\neg, \vee\}$ aus.
Untersuchen Sie, ob der NOR-Operator das Assoziativgesetz erfüllt.
Lösung: Es gelten $a \downarrow b \equiv \neg a \wedge \neg b \equiv \neg(a \vee b)$ und $a \uparrow b \equiv \neg(a \wedge b) \equiv \neg a \vee \neg b$. [2 Punkte]
Damit das Assoziativgesetz für $\downarrow$ gilt, muss $(a \downarrow b) \downarrow c \equiv a \downarrow (b \downarrow c)$ sein. Dies ist für die Belegung $a = 0, b = 0, c = 1$ jedoch nicht erfüllt. [1 Punkt]

(b) Finden Sie die kanonische DNF und die kanonische KNF zur Booleschen Formel $(x \uparrow z) \Rightarrow (x \downarrow y)$.
Lösung: Wertetabelle der zugehörigen Booleschen Funktion $f : \mathbb{B}^3 \to \mathbb{B}$: [1 Punkt]

x	y	z	$(x \uparrow z) \Rightarrow (x \downarrow y)$
0	0	0	1
0	0	1	1
0	1	0	0
0	1	1	0
1	0	0	0
1	0	1	1
1	1	0	0
1	1	1	1

Damit ergeben sich die folgenden kanonischen Normalformen von f: [3 Punkte]

$$\text{k-DNF}(f) = (\neg x \wedge \neg y \wedge \neg z) \vee (\neg x \wedge \neg y \wedge z) \vee (x \wedge \neg y \wedge z) \vee (x \wedge y \wedge z)$$
$$\text{k-KNF}(f) = (x \vee \neg y \vee z) \wedge (x \vee \neg y \vee \neg z) \wedge (\neg x \vee y \vee z) \wedge (\neg x \vee \neg y \vee z)$$

2. Aufgabe: Relationen und Beweistechniken (4+3+3 Punkte)

(a) Beweisen Sie $\sum_{k=2}^{n} \frac{2k-3}{3^k} = \frac{1}{3} - \frac{n}{3^n}$ für alle natürlichen Zahlen $n \geq 2$.
Lösung:
IA: $(n = 2)$ Es gilt: $\sum_{k=2}^{2} \frac{2k-3}{3^k} = \frac{1}{9} = \frac{1}{3} - \frac{2}{3^2}$. [1 Punkt]
IV: Vorausgesetzt sei $\sum_{k=2}^{n} \frac{2k-3}{3^k} = \frac{1}{3} - \frac{n}{3^n}$.
IB: Zu zeigen bleibt: $\sum_{k=2}^{n+1} \frac{2k-3}{3^k} = \frac{1}{3} - \frac{n+1}{3^{n+1}}$.
IS: Unter der IV ergibt sich:

$$\begin{aligned}\sum_{k=2}^{n+1} \frac{2k-3}{3^k} &= \sum_{k=2}^{n} \frac{2k-3}{3^k} + \frac{2(n+1)-3}{3^{n+1}} \\ &= \frac{1}{3} - \frac{n}{3^n} + \frac{2(n+1)-3}{3^{n+1}} \\ &= \frac{1}{3} - \frac{n+1}{3^{n+1}}. \text{ [3 Punkte]}\end{aligned}$$

(b) Auf der Menge $M := (\mathbb{N} \cup \{0\})^3$ aller Tripel über $\mathbb{N} \cup \{0\}$ ist durch $\sim$ mit

$$(a, b, c) \sim (d, e, f) :\Leftrightarrow a + b + c = d + e + f$$

eine Äquivalenzrelation definiert.

i. Identifizieren Sie alle Elemente der Äquivalenzklasse von $(1,0,1)$.
ii. Wie viele Elemente aus M stehen mit dem Element $(5,6,7)$ in Relation?
iii. Begründen Sie, dass $\sim$ keine Ordnungsrelation ist.

Lösung:

i. Die Elemente sind: $(2,0,0)$, $(0,2,0)$, $(0,0,2)$, $(1,1,0)$, $(1,0,1)$ und $(0,1,1)$. [1 Punkt]
ii. Da $5+6+7=18$, ist die Anzahl der geordneten Summendarstellungen der Zahl 18 mit genau 3 nicht negativen ganzen Zahlen gesucht. Dies sind $\binom{18+3-1}{3-1} = \binom{20}{2} = 190$. [1 Punkt]
iii. Die Relation ist nicht antisymmetrisch. Dazu genügt es ein Beispiel zu geben, wie etwa $(0,0,1) \sim (1,0,0)$ und $(1,0,0) \sim (0,0,1)$, aber $(1,0,0) \neq (0,0,1)$. [1 Punkt]

(c) Gegeben sei die Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit $x \mapsto x^2 - 2x + 1$.

i. Ist f bijektiv?
ii. Bestimmen Sie das Urbild der Menge $\{-4, 1, 9\}$ unter f.

Lösung:

i. Die Antwort ist nein. Dazu genügt es zu zeigen, dass f nicht injektiv ist, was bspw. mit $f(0) = f(2)$ zu sehen ist. [1 Punkt] Alternativ kann man auch zeigen, dass die Funktion nicht surjektiv ist, was mit $f(x) = (x-1)^2 \geq 0$ klar ist.
ii. Das Bild ist $f(\{-4,1,9\}) = \{0, 25, 64\}$. [1 Punkt] Das Urbild ist $f^{-1}(\{-4,1,9\}) = \{-2, 0, 4\}$. [1 Punkt]

3. Aufgabe: Kombinatorik (2+4+2 Punkte)

(a) Wie viele verschiedene n-stellige Boolesche Funktionen $f : \{0,1\}^n \to \{0,1\}$ gibt es, so dass für beliebige Argumente $(b_1, b_2, \ldots, b_n) \in \{0,1\}^n$ gilt:

$$f(b_1, b_2, \ldots, b_n) = f(\neg b_1, \neg b_2, \ldots, \neg b_n)?$$

Begründen Sie Ihre Aussage!

Lösung: Eine n-stellige Boolesche Funktion ist dadurch festgelegt, dass für jedes der 2^n möglichen Argumente ein Wert aus $\{0,1\}$ zugewiesen wird. Damit gibt es 2^{2^n} solcher Funktionen. Mit der obigen Einschränkung $f(b_1, b_2, \ldots, b_n) = f(\neg b_1, \neg b_2, \ldots, \neg b_n)$, können nun nur noch die Hälfte der möglichen Argumente unabhängig belegt werden. Daher gibt es $2^{2^{n-1}}$ Boolesche Funktionen mit der angegebenen Eigenschaft. [2 Punkte]

(b) Sei $(\Omega, \Pr)$ ein Wahrscheinlichkeitsraum und seien A und B zwei unabhängige Ereignisse. Zeigen Sie, dass dann auch die Komplementärereignisse $\bar{A}$ und $\bar{B}$ unabhängig sind.

Lösung: Für die Lösung erinnern wir uns, dass $\bar{A} = \Omega \setminus A$ und $\bar{B} = \Omega \setminus B$ gilt und dass Unabhängigkeit von A und B bedeutet, dass $\Pr(A \cap B) = \Pr(A)\Pr(B)$. Elementare Mengengesetze und das Prinzip der Inklusion-Exklusion für zwei Mengen liefert damit folgende Gleichungskette: [4 Punkte]

$$\begin{aligned}
\Pr(\bar{A} \cap \bar{B}) &= \Pr((\Omega \setminus A) \cap (\Omega \setminus B)) = \Pr(\Omega \setminus (A \cup B)) = 1 - \Pr(A \cup B) \\
&= 1 - (\Pr(A) + \Pr(B) - \Pr(A \cap B)) \\
&= 1 - \Pr(A) - \Pr(B) + \Pr(A)\Pr(B) = (1 - \Pr(A))(1 - \Pr(B)) \\
&= \Pr(\bar{A})\Pr(\bar{B})
\end{aligned}$$

Dies bedeutet nun aber gerade, dass $\bar{A}$ und $\bar{B}$ ebenso unabhängige Ereignisse sind.

(c) In einer Schachtel befinden sich fünf mit den Zahlwerten $-2, -1, 0, 1$ und 2 beschriftete Kugeln. Es sei X das Produkt der Zahlwerte von zwei zufällig ausgewählten Kugeln, wobei jede Auswahl als gleichwahrscheinlich angenommen wird.

i. Berechnen Sie den Erwartungswert der Zufallsvariable X.

ii. Was ist das kleinste sich ergebende Produkt, das mit Wahrscheinlichkeit mindestens $1/3$ auftritt?

Lösung:

i. Es gibt genau $\binom{5}{2} = 10$ Möglichkeiten, zwei der Kugeln aus den gegebenen fünf zu wählen. Diese Auswahl erfolgt gleichwahrscheinlich, also jeweils mit Wahrscheinlichkeit $\frac{1}{10}$. Der Erwartungswert von X ist daher [1 Punkt]

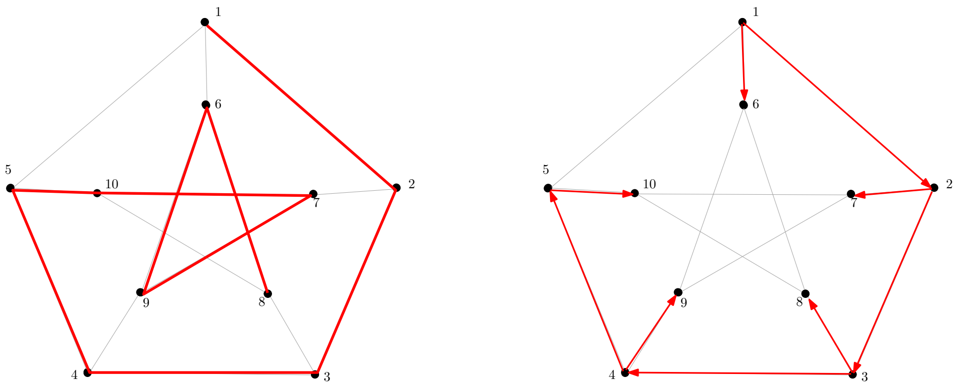
$$E(X) = \frac{1}{10}(2 + 0 - 2 - 4 + 0 - 1 - 2 + 0 + 0 + 2) = -\frac{1}{2}.$$

ii. Die auftretenden Produkte sind $-4, -2, -1, 0$ und 2 mit jeweiligen Auftrittshäufigkeiten $1, 2, 1, 4$ und 2. Daher ist 0 das einzige und damit auch kleinste auftretende Produkt mit Auftrittswahrscheinlichkeit $2/5 > 1/3$. [1 Punkt]

4. Aufgabe: Graphentheorie (2+4+4 Punkte)

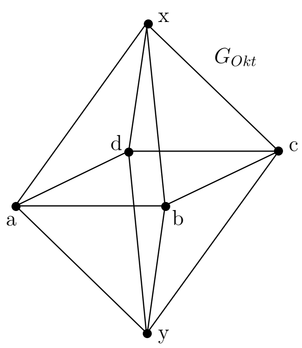
(a) Zeichnen Sie den DFS-Baum von G_{Pet} und den DFS-Baum von $\overrightarrow{G_{Pet}}$, jeweils mit Startknoten 1 und aufsteigend geordneten Adjazenzlisten.

Lösung: Die linke Abbildung zeigt den DFS-Baum von G_{Pet} [1 Punkt], die rechte den DFS-Baum von $\overrightarrow{G_{Pet}}$. [1 Punkt]



(b) i. Wie viele verschiedene Wege enthält G_{Okt}, die in **x** beginnen und in **y** enden, wobei keine Ecke mehrfach enthalten ist? Begründen Sie Ihre Antwort.

ii. Wie viele perfekte Matchings enthält G_{Okt}? Begründen Sie Ihre Antwort.



Lösung:

i. In jedem Weg haben x und y je eine der vier Ecken a, b, c, d als Nachbarn. Ist dieser Nachbar identisch, so ist der Weg komplett (4 Möglichkeiten). Andernfalls ($4 \cdot 3 = 12$ Möglichkeiten) gibt es je zwei verschiedene Varianten diese Nachbarn durch einen Weg in $\{a, b, c, d\}$ zu verbinden. Das ergibt insgesamt $4 + 12 \cdot 2 = 28$ Wege. [2 Punkte]

ii. Da ein perfektes Matching 3 Kanten hat, während genau zwei davon x und y berühren müssen, muss genau eine der Kanten ab, bc, cd, da zum Matching gehören. Egal welche dieser vier Kanten man wählt (bspw. ab), es gibt stets genau zwei Varianten diese zu einem perfekten Matching fortzusetzen (bspw. cx, dy oder cy, dx). Das ergibt $4 \cdot 2 = 8$ perfekte Matchings. [2 Punkte]

(c) Sei $G = (V, E)$ ein zusammenhängender Graph und $e \in E$ eine Kante. Zeigen Sie, dass der Graph $G' = (V, E \setminus \{e\})$ genau dann zusammenhängend ist, wenn G einen Kreis als Untergraphen besitzt, der e enthält.

Beweis:

"$\Rightarrow$"

Vorausgesetzt sei, dass G' zsh. ist. Sei $e = vw$ mit $v, w \in V$. Laut Voraussetzung gibt es in G' einen Weg, der x und y verbindet. Zusammen mit der Kante e ergibt dies einen Kreis in G. [2 Punkte]

"$\Leftarrow$"

Es ist vorausgesetzt, dass die Kante $e = vw$ $(v, w \in V)$ in einem Kreis in G enthalten ist und somit G' einen Weg zwischen v und w enthält. Angenommen G' sei nicht zsh. Durch Entfernen der Kante e zerfiele G dann in zwei Komponenten, die jeweils eine der Ecken v und w enthielten. Insbesondere gäbe es dann ohne die Kante e keinen Weg zwischen den Ecken v und w, im Widerspruch zur Voraussetzung. [2 Punkte]