

8. Aufgabenblatt vom Freitag, den 04. Dezember 2015 zur Vorlesung

MafI I: Logik & Diskrete Mathematik
(F. Hoffmann)

Abgabe: bis Freitag, den 18. Dezember 2015, 10 Uhr

1. Binomialkoeffizienten (4 Punkte)

(a) Beweisen Sie $\binom{n}{k} = \sum_{m=k-1}^{n-1} \binom{m}{k-1}$ für $1 \leq k \leq n$ mit Induktion über $d := n - k$

(b) Zeigen Sie mit Hilfe des Binomischen Satzes, dass der Wert

$$(1 - \sqrt{5})^n + (1 + \sqrt{5})^n$$

für jedes $n \in \mathbb{N}$ ganzzahlig ist.

2. Lucas-Zahlen (2 Punkte)

Die Folge der Lucas-Zahlen sind definiert durch $l_0 = 2, l_1 = 1$ und $l_n = l_{n-1} + l_{n-2}$ für $n \geq 2$.

Beweisen Sie $l_0^2 + l_1^2 + \dots + l_n^2 = l_n \cdot l_{n+1} + 2$

3. Abzählen I (2 Punkte)

(a) Ein Dozent vergibt insgesamt 80 Punkte für 10 Fragen, für jede Frage mindestens 4 Punkte. Wieviele Punktverteilungen sind möglich?

(b) Wieviele verschiedene Lösungen hat die Gleichung:

$$x + y + z + w = 16 \quad \text{mit} \quad x, y, z, w \in \mathbb{N}$$

4. Poker und Bridge (3 Punkte)

Beim Poker hat man 5 von 52 Karten in der Hand, ein sogenanntes Blatt. Beim Bridge gibt es 4 Spieler Nord, Ost, Süd und West mit je 13 Karten.

(a) Wieviele Möglichkeiten gibt es, dass im Poker-Blatt genau 4 Karten von der gleichen Farbe sind?

(b) Wie oft gibt es ein Blatt mit einem Full House beim Poker, das heißt, es enthält drei Karten verschiedener Farbe mit identischem Wert (z.B. 3 Asse), plus zwei andere Karten mit gleichem Wert (z.B. 2 Sieben)?

(c) Wieviele verschiedene Ausgangssituationen gibt es beim Bridge?

5. Abzählen II (3 Punkte)

Der Jungunternehmer Nico Laus ist Chef einer aufstrebenden Weihnachtsmann-Agentur, die in diesem Jahr bereits 30 Aufträge erhalten hat.

- (a) Wieviele Möglichkeiten zur Aufstellung eines Dienstplans gibt es, mit dem die Arbeit auf die 9 Weihnachtsmänner der Firma aufgeteilt wird. Wieviele Möglichkeiten gibt es, wenn jeder Weihnachtsmann mindestens einen Auftrag erhalten soll? Die Antworten können in Gestalt von Formeln gegeben werden.
- (b) Die Aufstellung von Weihnachtsbäumen ist ein zweites Geschäftsfeld. Es sind 5 Bäume (an 5 verschiedenen Plätzen) aufzustellen. Im Lager steht ein Vorrat von 200 roten Einheitskugeln zur Verfügung. Wieviele Möglichkeiten zur Verteilung gibt es? Wie ändert sich diese Anzahl, wenn jeder Baum mindestens 30 Kugeln erhalten soll? Hier sind nicht nur die Formeln, sondern konkrete Anzahlen gefragt!
- (c) Nach getaner Arbeit treffen sich die 9 Weihnachtsmänner in einer Bar, die für ihre Karte mit 30 verschiedenen Longdrinks berühmt ist. Jeder hat vom Chef einen Gutschein für ein Freigetränk nach Wahl erhalten. Sie geben Ihre Bestellung gemeinsam auf. Wieviele Möglichkeiten für eine solche Sammelbestellung gibt es (man kann dabei nicht mehr erkennen, wer ein bestimmtes Getränk bestellt hat)?

Hinweis: Bitte die Übungszettel immer mit den Namen aller Bearbeiter und (!) dem Namen des Tutors (+ welches Tutorium) versehen. Bitte beachten Sie den Abgabetermin!