Deckblatt in Druckschrift ausfüllen!

Nachname: **Vorname:** **Matrikelnr.:**

Übungsleistungen WS 2015/16):□ Ja
Tutor:□ Daniel □ Benjamin □ Christoph □ Matthias

Benotete Klausur:□ Ja
Studiengang, falls nicht Bachelor Informatik:

Klausur zur Vorlesung Musterlösung

Mathematik für Informatiker I

(Dr. Frank Hoffmann)

Wintersemester 2015/2016 **16. Februar 2016**

Beginn: $11^{\underline{20}}$, Ende: $13^{\underline{20}}$ (120 min)

1.	2.	3.	4.	5.	Σ
/10	/10	/10	/10	/10	/50

Außer Schreibutensilien und einer handbeschriebenen DIN A4 Seite sind keine Hilfsmittel erlaubt!

Auf diesem Klausurbogen ist genügend Platz, um die Lösungen der Aufgaben aufzuschreiben. Auch die Rückseiten der Blätter können verwendet werden (bitte auf der Vorderseite anmerken). Bitte geheftet lassen! **Zusätzliche lose Blätter** müssen mit der Matrikelnummer, Namen und Aufgabennummer versehen werden. Auf einem Zusatzblatt jeweils nur eine Aufgabe bearbeiten. Nicht mit Bleistift und nicht mit Rot schreiben. *Der Klausurbogen ist auf jeden Fall abzugeben!*

Viel Erfolg!

Aufgabe 1 Logisches

/4+4+2

(a) Bilden Sie die kanonische DNF und KNF für die Formel $t = (x \Rightarrow z) \Leftrightarrow y$.

(b) Untersuchen Sie mit dem **Resolutionskalkül**, ob die folgende Formel β eine Tautologie ist:

$$\beta = (x_1 \wedge \neg x_2) \vee x_2 \vee (\neg x_1 \wedge \neg x_2 \wedge x_3) \vee (\neg x_1 \wedge \neg x_2 \wedge \neg x_3)$$

(c) Dies ist die Lieblingseröffnungsfrage von Prof. A. in mündlichen Prüfungen: Die Goldbachsche Vermutung lautet:

„Jede gerade natürliche Zahl größer als 2 ist die Summe von 2 Primzahlen."

Formulieren Sie dies als mathematische Aussage mit Quantoren (Prädikatenlogische Formel). Sie können dabei ein Prädikat isPrim(n) benutzen, das genau dann wahr ist, wenn n Primzahl ist, und das Prädikat isEven(n), das angibt, ob n gerade ist. Negieren Sie dann die Formel und formen sie so um, dass Negationszeichen sich nur auf Prädikate beziehen.

(a) Zugehörige Funktionstabelle:

x	y	z	$f_t(x,y,z)$
0	0	0	0
0	0	1	0
0	1	0	1
0	1	1	1
1	0	0	1
1	0	1	0
1	1	0	0
1	1	1	1

$dnf(f_t) = (\neg x \wedge y \wedge \neg z) \vee (\neg x \wedge y \wedge z) \vee (x \wedge \neg y \wedge \neg z) \vee (x \wedge y \wedge z)$

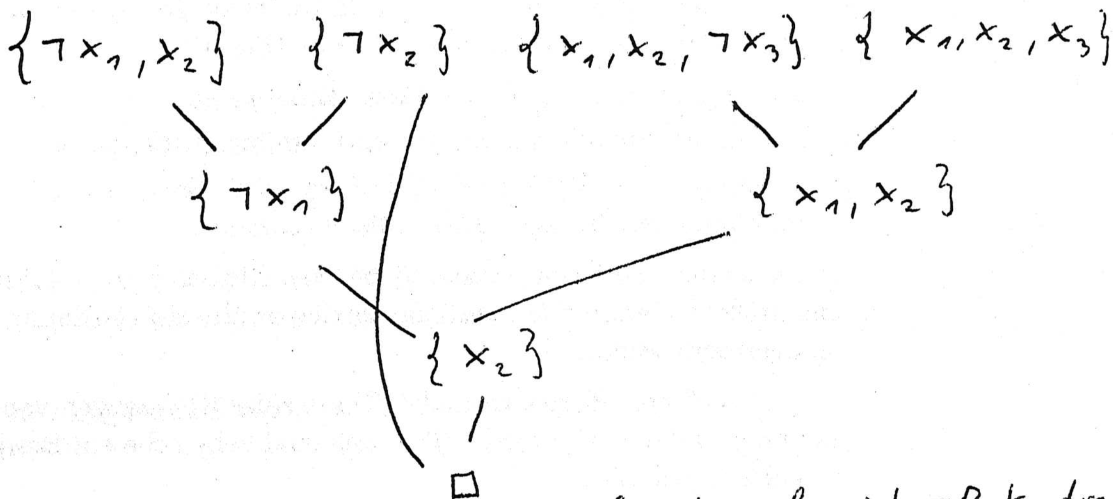
$knf(f_t) = (x \vee y \vee z) \wedge (x \vee y \vee \neg z) \wedge (\neg x \vee y \vee \neg z) \wedge (\neg x \vee \neg y \vee z)$

(b) Term β ist Tautologie $\Leftrightarrow$ $\neg\beta$ ist kontradiktion

$\neg\beta$ in KNF-Form

$$\neg\beta \equiv (\neg x_1 \vee x_2) \wedge \neg x_2 \wedge (x_1 \vee x_2 \vee \neg x_3) \wedge (x_1 \vee x_2 \vee x_3)$$

zugehörige Klauselmenge und Resolution:



Die leere Klausel ist Resolvent, also ist $\neg\beta$ kontradiktion, also ist β Tautologie.

(c) $\forall n \in \mathbb{N}: (n > 2 \wedge isEven(n)) \Rightarrow \exists p, q \in \mathbb{N}:$
$(isPrim(p) \wedge isPrim(q) \wedge p+q = n)$.

negiert

$\exists n \in \mathbb{N}: (n > 2 \wedge isEven(n)) \wedge \forall p, q \in \mathbb{N}: \neg isPrim(p) \vee \neg isPrim(q)$
$\vee (p+q \neq n)$

Aufgabe 2 Vollständige Induktion, Funktionen und Relationen | /4+2+1+3 |

(a) Sie kennen die Folge der Fibonacci–Zahlen, definiert durch $F_0 = F_1 = 1$ und $F_n = F_{n-1} + F_{n-2}$ für $n > 1$. Beweisen Sie die folgende Identität für $n \geq 0$:

$$\sum_{i=0}^{n} F_i = F_{n+2} - 1$$

(b) Betrachten Sie die Menge $X = \{3, 5, 9, 15, 18, 24, 45\}$ zusammen mit der Teilbarkeitsrelation $|$ als halbgeordnete Menge (Poset).

i. Zeichnen Sie das zugehörige Hasse-Diagramm.

ii. Bestimmen Sie alle maximalen und minimalen Elemente.

iii. Bestimmen Sie alle oberen Schranken der Menge $\{3, 5\}$ in X sowie das Supremum der Menge $\{3, 5\}$, falls es existiert.

(c) Wir betrachten die Permutation 362541 der Menge $\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$. Was ist die nächstgrößere Permutation bezüglich lexikographischer Ordnung und was ist die Vorgängerpermutation?

(d) Sei $f : A \to B$ eine Funktion und S, T beliebige Teilmengen von A. Zeigen Sie, dass immer $f(S \cap T) \subseteq f(S) \cap f(T)$ gilt und geben Sie ein Beispiel an, bei der die Inklusion echt ist.

(a) Wir führen den Beweis mit vollständiger Induktion.

Induktionsanfang: $n = 0$

$$\sum_{i=0}^{0} F_i = F_0 = F_{0+2} - 1 = 2 - 1 = 1 \quad \checkmark$$

Induktionsschritt

(I.V.) Nehmen an, die Aussage gilt für ein beliebiges, gewähltes $n \geq 0$.

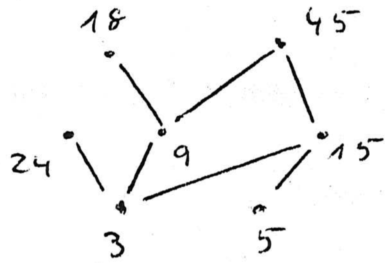
(Ind.behauptung): Dann gilt $\sum_{i=0}^{n+1} F_i = F_{n+3} - 1$.

Wir haben: $\sum_{i=0}^{n+1} F_i = \sum_{i=0}^{n} F_i + F_{n+1} \underset{\text{I.V}}{=} F_{n+2} - 1 + F_{n+1}$

$\underset{\text{Def. der Fibon.-Folge}}{=} F_{n+3} - 1$.

Nach dem Prinzip der vollständigen Induktion gilt somit die Aussage für alle natürlichen Zahlen.

(b) Hasse - Diagramm



max. Elemente $\{18, 24, 45\}$

min. Elemente $\{3, 5\}$

obere Schranken für $\{3,5\}$: $\{15, 45\}$

15 ist kleinste obere Schranke $\leadsto$ 15 ist Supremum für $\{3,5\}$.

(c) Bezüglich lexikograf. Ordnung folgt auf 362541 als Nachfolger 364125. Der Vorgänger ist 362514.

(d) Zu zeigen ist: Aus $b \in f(S \cap T)$ folgt $b \in f(S) \cap f(T)$.

<u>Beweis</u>: Sei $b \in f(S \cap T)$. D.h., $\exists a \in S \cap T : f(a) = b$.

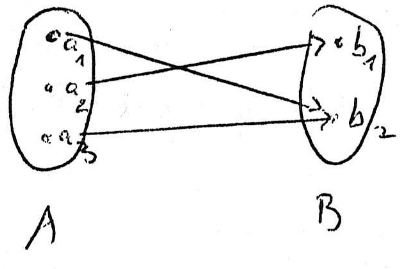
$a \in S \cap T$ ist äquivalent zu $a \in S$ und $a \in T$.

Damit ist $f(a) = b \in f(S)$ und $f(a) = b \in f(T)$.

Also ist $b \in f(S) \cap f(T)$. $\square$

<u>Bsp</u>: $A = \{a_1, a_2, a_3\}$ $B = \{b_1, b_2\}$

$S = \{a_1, a_2\}, T = \{a_2, a_3\}$



$f(S \cap T) = \{b_1\}$

$f(S) \cap f(T) = \{b_1, b_2\}$

Aufgabe 3 Abzählbares und Wahrscheinliches

$/3+2+5$

(a) Wie viele verschiedene Lösungen (x, y, z, w) (genaue Anzahl!, mit Herleitung) hat die Gleichung:

$$x + y + z + w = 18 \text{ mit } x, y, z, w \in \mathbb{N}$$

und $x > 2, z > 1$?

(b) Wie viele verschiedene Boolesche Funktionen $f : \mathbb{B}^3 \to \mathbb{B}$ gibt es mit der Eigenschaft, dass für beliebige x, y, z stets $f(x, y, z) = f(\neg x, \neg y, \neg z)$ gilt? Begründung.

(c) Bei einer Nach–Klausur–Party spielen 5 Leute folgendes Spiel. Jeder hat eine faire Münze, die er wirft. Ist das Ergebnis bei jemandem verschieden von allen 4 anderen Ergebnissen, so muss er eine Runde bezahlen.
Was ist die Wahrscheinlichkeit, dass beim einmaligen Werfen der Münzen einer die nächste Runde übernimmt?
Im richtigen Leben wird das Experiment natürlich wiederholt. Wie oft muss das Experiment durchgeführt werden, damit mit Wahrscheinlichkeit mindestens 1/2 zum ersten Mal eine Runde spendiert werden muss. Bestimmen Sie diese Zahl. Was sind die Chancen, dass es bei 4–maligen Münzwerfen mindestens zweimal was zu trinken gibt? Hier reicht die Formel.

(a) Brauchen $x \geq 3$, $z \geq 2$.
Damit ist Summe $18 - 5 = 13$ in 4 Summanden (geordnet, jeder ≥ 0) aufzuteilen.

$$\binom{13+3}{3} = \binom{16}{3} = \frac{16 \cdot 15 \cdot 14}{2 \cdot 3} = \underline{560}$$

(b) Wegen $f(x,y,z) = f(\neg x, \neg y, \neg z)$ müssen nur noch 4 statt 8 Zeilen in Funktionstabelle ausgefüllt werden. Dafür gibt es $2^4 = 16$ viele Möglichkeiten. Also 16 verschiedene 3-stell. Boolesche Funktionen mit dieser Eigenschaft.

(c) • Elementarereignisse : Kopf-Zahl-Strings Länge 5

$\rightsquigarrow$ Davon gibt es 32.

Bei 10 Ereignissen $\rightsquigarrow$ Runde zahlen

kZZZZ
ZkkkK $\rightsquigarrow$ 1. Person zahlt

⋮ ⋮

ZZZZk
kkkkZ $\rightsquigarrow$ 5. Person zahlt

$\rightsquigarrow$ Wkt. für eine Runde $\frac{10}{32} = \frac{5}{16}$.

• Wie oft wiederholen ?

$$\underbrace{\frac{5}{16}}_{\text{1. Versuch}} + \underbrace{\frac{11}{16} \cdot \frac{5}{16}}_{\text{2. Versuch}} = \underline{\underline{\frac{135}{256}}} > \frac{1}{2}$$

Mit dem 2. Versuch ist Wkt. für Runde schon $> \frac{1}{2}$.

• Bei 4-maligen Werfen mindestens 2 × Erfolg ?
(binomial-verteilt)

$$\binom{4}{4} \cdot \left(\frac{5}{16}\right)^4 + \binom{4}{3} \cdot \left(\frac{5}{16}\right)^3 \frac{11}{16} + \binom{4}{2}\left(\frac{5}{16}\right)^2 \cdot \left(\frac{11}{16}\right)^2.$$

Aufgabe 4 Graphisches

$\boxed{\quad /4+4+2}$

(a) Die ungerichteten Graphen $G_n = (V_n, E_n)$ und $H_n = (V_n, F_n)$ haben die Knotenmenge $V_n = \{0, 1, 2, \ldots, n-1\}$
und die Kantenmenge $E_n = \{\, \{i,j\} \mid i,j \in V_n, i \neq j \text{ und } |i-j| \leq 2 \,\}$ bzw.
$F_n = \{\, \{i,j\} \mid i,j \in V_n, i \neq j \text{ und } |i-j| \text{ ist eine gerade Zahl} \,\}$.
Zeichnen Sie zunächst den G_7 und den H_7. Bestimmen Sie dann Formeln für die Größen $|E_n|$ und $|F_n|$ sowie den Durchmesser von G_n für alle ungeraden Werte von n und begründen Sie diese Formeln.

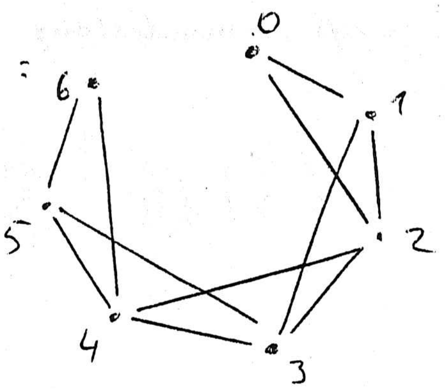
(b) Sei G ein schlichter Graph mit n Knoten, n gerade, in dem jeder Knoten mindestens den Grad 2 hat. Bezeichne l_G die Länge eines längsten Weges in G und s_G die Länge eines kürzesten Kreises in G. Zeigen Sie, dass dann Folgendes gilt:

$$max\,(\,l_G, (n - s_G)\,) \geq \frac{n}{2}.$$

Hinweis: Starten Sie Ihre Betrachtungen mit einem Weg maximaler Länge ...

(c) Ein Turnier ist ein schleifenloser gerichteter Graph , in dem für je zwei Knoten u und v entweder (u, v) oder (v, u) Kante im Graph ist. Wie viele verschiedene Turniere auf der Knotenmenge $V = \{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$ gibt es? Begründung!

(a) G_7 :



$\leadsto$ 2 Knoten Grad 2
+ 2 Knoten Grad 3
+ $(n-4)$ Knoten Grad 4

Handschlaglemma :

$2|E_n| = 4 + 6 + 4(n-4)$
$= 4n - 6$

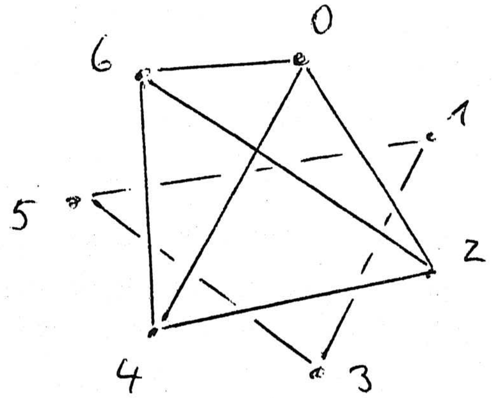
$\leadsto |E_n| = 2n - 3$

kleine Werte für n : $n = 1$ $|E_1| = 0$
$n = 3$ $|E_3| = 3$

Durchmesser : Realisiert durch kürzesten Weg von Knoten 0 zu Knoten $n-1$

$\leadsto \frac{n-1}{2}$.

H_7:



$\rightsquigarrow$ • haben vollständigen Graphen auf $\frac{n+1}{2}$ Knoten mit gerader Nummer

• plus vollständigen Graphen auf $\frac{n-1}{2}$ "ungeraden" Knoten

$$\rightsquigarrow |F_n| = \binom{\frac{n+1}{2}}{2} + \binom{\frac{n-1}{2}}{2} =$$

$$= \frac{1}{2} \cdot \frac{n+1}{2} \cdot \frac{n-1}{2} + \frac{1}{2} \frac{n-1}{2} \cdot \frac{n-3}{2} = \underline{\frac{(n-1)^2}{4}}$$

(b) Fallunterscheidung:

• Falls $l_G \geq \frac{n}{2}$. Fertig.

• Falls $l_G < \frac{n}{2}$. Betrachte Nachbarn der Endknoten eines längsten Weges. Diese liegen auf Weg und schließen Kreis der Länge $\leq \frac{n}{2}$.

Damit $n - s_G \geq n - \frac{n}{2} \geq \underline{\underline{\frac{n}{2}}}$ ✓.

(c) Die $\binom{n}{2}$ ungerichteten Kanten des vollständigen Graphen repräsentieren alle Matches des Turniers. Jedes Match hat 2 mögliche Ergebnisse.

insgesamt: $\underline{2^{\binom{n}{2}} = 2^{\frac{n \cdot (n-1)}{2}}}$

viele Turniere.

Aufgabe 5 Verschiedenes

/2+2+2+2+2

(a) Richtig oder falsch? Für reflexive Relationen R gilt $R \subseteq R \circ R$. Begründung!

(b) Gibt es Äquivalenzrelationen, die auch Halbordnungsrelationen sind? Begründung! Wenn ja, wie sieht deren Hasse–Diagramm aus?

(c) Seien $f : A \to B$ und $g : B \to C$ Funktionen.
Falls f und $g \circ f$ injektiv sind, ist dann g notwendigerweise injektiv? Falls f und $g \circ f$ bijektiv sind, ist dann g notwendigerweise bijektiv?

(d) Nennen Sie zwei Klassen von KNF-Formeln, für die es effiziente Resolutionsverfahren gibt. Beschreiben Sie kurz (in zwei Sätzen), wie das für eine der Klassen funktioniert.

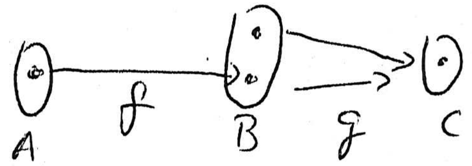
(e) Was versteht man unter der "Linearität des Erwartungswertes"? Benutzen Sie diese um $E((X - E(X))^2)$ für eine Zufallsvariable X zu vereinfachen.

(a) Richtig. Zu zeigen: Aus aRb folgt $a\, R \circ R\, b$.
Wegen aRb und bRb (reflexiv) ist $a\, R\circ R\, b$.

(b) Ja, zum Beispiel die identische Relation $Id_A \subset A \times A$.
Hasse-Diagramm besteht aus isolierten Knoten.

(c) • Nein, g ist nicht notwendigerweise injektiv.

Bsp.



• Ja, g ist bijektiv.
Inverse Abb. f^{-1} zu f existiert und ist bijektiv.
Komposition bijekt. Abbildungen ist bijektiv!

$$g = \underline{(g \circ f) \circ f^{-1}} = g \circ (f \circ f^{-1}) = g$$

(d) – Hornformeln: Formeln in KNF, bei denen in jeder Klausel höchstens ein positives Literal vorkommt.
→ Resolution mit Markierungsalgorithmus.
– 2-SAT: KNF-Formeln mit ≤ 2 ~~Variabl~~ Literalen pro Klausel.

(e) $X, Y : \Omega \to \mathbb{R}$, $c \in \mathbb{R}$, $E(c \cdot X) = c \cdot E(X)$, $E(X+Y) = E(X) + E(Y)$

$$E((X - E(X))^2) = E(X^2 - 2E(X) \cdot X + (E(X))^2) = E(X^2) - (E(X))^2$$