2. Aufgabenblatt vom Donnerstag, den 22. Oktober 2015 zur Vorlesung

MafI I: Logik & Diskrete Mathematik

(F. Hoffmann)

Abgabe: bis Freitag, den 06. November 2015, 10 Uhr

1. **DNF,KNF I** (2 Punkte) Betrachten Sie den Booleschen Ausdruck:

$$(x \wedge \neg y \vee \neg z) \Rightarrow (x \wedge y)$$

Geben Sie zunächst die vollständige Klammerung für diesen Ausdruck an. Bilden Sie dazu die kanonische DNF und die kanonische KNF.

2. **DNF,KNF II** (3 Punkte)
Finden Sie zu den folgenden Formeln semantisch äquivalente Terme in DNF bzw. KNF.

   (a) $(p \Rightarrow (q \vee r)) \wedge \neg q \wedge \neg r$

   (b) $\neg(p \Leftrightarrow q) \Leftrightarrow r$

   (c) $\neg r \Rightarrow (((p \vee q) \Rightarrow r) \Rightarrow \neg q)$

3. **Funktionale Vollständigkeit I** (2 Punkte)

   (a) Zeigen Sie, dass die Signatur $\{\oplus\}$ funktional unvollständig ist.

   (b) Zeigen Sie, dass wegen der Unvollständigkeit der Signatur $\{\oplus, \neg\}$ (das brauchen Sie nicht zu zeigen) auch die Signatur $\{\oplus, \neg, \Leftrightarrow, True\}$ nicht funktional vollständig ist.

4. **Funktionale Vollständigkeit II** (2 Punkte)
Drücken Sie den Term $t = (x \vee \neg z) \oplus (x \wedge y)$ semantisch äquivalent mit dem funktional vollständigen NAND–Operator aus.

5. **Monotone Boolesche Funktionen** (4 Punkte)
Definitionen:
1) Auf der Menge n-Tupel $(b_1, \ldots, b_n) \in \mathbb{B}^n$ führen wir die folgende Ordnungsrelation ein: $(b_1, \ldots, b_n) \preceq (c_1, \ldots, c_n)$ genau dann, wenn $b_i \leq c_i$ für alle $i = 1, \ldots, n$, wobei sich das $\leq$ von den Zahlen auf die Wahrheitswerte überträgt.
2) Man nennt eine Boolesche Funktion $f : \mathbb{B}^n \to \mathbb{B}$ **monoton**, wenn für zwei beliebige Tupel aus der Bedingung $(b_1, \ldots, b_n) \preceq (c_1, \ldots, c_n)$ folgt, dass $f(b_1, \ldots, b_n) \leq f(c_1, \ldots, c_n)$.

   (a) Untersuchen Sie, ob die zweistelligen Booleschen Funktionen für die Disjunktion, Implikation und Äquivalenz monoton sind.

(b) Zu den bekannten Standardbeispielen von n-stelligen Booleschen Funktionen gehören die Paritätsfunktion , die Majoritätsfunktion und die Schwellenfunktionen th_n^k. Die Paritätsfunktion nimmt auf einem Tupel $(b_1, \ldots, b_n)$ genau dann den Wert 1 an, wenn die Anzahl der Stellen des Tupels mit dem Wert 1 ungerade ist. Die Majoritätsfunktion wird genau dann 1, wenn mindestens die Hälfte der Stellen des Tupels den Wert 1 haben und bei der Schwellenfunktion th_n^k müssen mindesten k Stellen den Wert 1 haben.
Welche der genannten Funktionen sind monoton?

(c) Angenommen die Terme t_1 und t_2 repräsentieren zwei monotone Boolesche Funktionen. Zeigen Sie dass dann auch die Terme $s = t_1 \vee t_2$ und $t = t_1 \wedge t_2$ monotone Boolesche Funktionen repräsentieren.

(d) Was kann man über einen Term t sagen, bei dem sowohl t als auch $\neg t$ monotone Boolesche Funktionen repräsentieren?

(e) (3 Zusatzpunkte) Zeigen Sie, dass man jede monotone Boolesche Funktion mittels der Signatur $\{\wedge, \vee, True, False\}$ realisieren kann. Tipp: Schauen Sie sich die kanonische dnf genauer an.

Hinweis: Bitte die Übungszettel immer mit den Namen aller Bearbeiter und (!) dem Namen des Tutors (+ welches Tutorium) versehen. Bitte beachten Sie den Abgabetermin!