3. Aufgabenblatt vom Donnerstag, den 29. Oktober 2015 zur Vorlesung

MafI I: Logik & Diskrete Mathematik

(F. Hoffmann)

Abgabe: bis Freitag, den 13. November 2015, 10 Uhr

1. **Quantoren** (2 Punkte)
   Sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ein Funktion. Sie erinnern sich an die Grenzwertdefinition: $g = \lim_{x \to a} f(x)$ heißt Grenzwert von f an der Stelle a, falls für jedes reelle $\epsilon > 0$ ein $\delta > 0$ existiert, so dass aus $0 < |x - a| < \delta$ folgt $|f(x) - g| < \epsilon$.
   Schreiben Sie dies als prädikatenlogische Formel mit Quantoren und negieren Sie diese anschließend. In der negierten Form sollte kein $\neg$ und kein Betragszeichen vorkommen.

2. **Symmetrische Differenz** (3 Punkte)
   (a) Beweisen Sie $(A \oplus B) \oplus B = A$.
   (b) Was können Sie über A und B sagen, falls $A \oplus B = A$?
   (c) Richtig oder falsch? Begründung! $(A \cup B) \oplus (C \cup D) \subseteq (A \cup C) \oplus (B \cup D)$

3. **Mengenfamilien** (2 Punkte) Für jede natürliche Zahl $i > 0$ sei die Menge $A_i = \{0, i, 2i, 3i, \ldots\}$, $B_i = \{i, i+1, i+2, \ldots\}$ gegeben. Bestimmen Sie (mit Begründung) die Vereinigungen $\bigcup\limits_{i \in \mathbb{N} \setminus \{0\}} A_i$ und $\bigcup_{i=1}^{n} B_i$ und die Durchschnitte $\bigcap\limits_{i \in \mathbb{N} \setminus \{0\}} A_i$ sowie $\bigcap_{i=1}^{n} B_i$.

4. **Abschluss** (3 Punkte)
   Finden Sie für die folgenden Relationen jeweils den reflexiven Abschluss, den symmetrischen Abschluss und den transitiven Abschluss.
   (a) $\leq$ in $\mathbb{N}$
   (b) R in $\mathbb{R}$ mit xRy falls $y = x + 1$.
   (c) R in $\mathbb{R}$ mit xRy falls $|x - y| < 0.1$.

5. **Äquivalenzrelationen** (4 Punkte)
   Zeigen sie, dass die folgenden Relationen Äquivalenzrelationen sind. Was sind die Äquivalenzklassen?
   (a) Für $x, y \in \mathbb{R}$ sei xRy genau dann, wenn $\cos(x) = \cos(y)$.
   (b) Für $x, y \in \mathbb{R}$ sei xRy genau dann, wenn entweder sind x, y beide positiv oder beide negativ oder beide 0.

Hinweis: Bitte die Übungszettel immer mit den Namen aller Bearbeiter und (!) dem Namen des Tutors (+ welches Tutorium) versehen. Bitte beachten Sie den Abgabetermin!