Logik und diskrete Mathematik, Übung 9

Andreas Timmermann, Mat: 4994606, Alena Dudarenok, Mat: 4999780, Gruppe: 3

4. Januar 2016

Aufgabe 1
a)

$$x_{n+1} = \neg x_n \Leftrightarrow x_{n+1} = \begin{cases} 0, & \text{falls } x_n = 1 \\ 1, & \text{falls } x_n = 0 \end{cases}$$

Da immer einer der beiden Terme x_n oder x_{n+1} *true* sein muss, wähle ich eine alternierende Methode, da auch die Ergebnisse der einzelnen Terme aus alternierenden Termen berechnet werden.

b)

(1) $(\neg q \vee r) \wedge \neg(q \vee p) \wedge \neg q = (\neg q \vee r) \wedge \neg q \wedge \neg p = (\neg q \wedge \neg p) \vee (r \wedge \neg q \wedge \neg p) = \neg q \wedge \neg p$

(2) $[(p \vee q) \wedge (p \Rightarrow r) \wedge (q \Rightarrow r)] \Rightarrow r =$
$= \neg[(p \vee q) \wedge (\neg p \vee r) \wedge (\neg q \vee r)] \vee r =$
$= [\neg(p \vee q) \vee \neg(\neg p \vee r) \vee \neg(\neg q \vee r)] \vee r =$
$= [(\neg p \wedge \neg q) \vee (p \wedge \neg r) \vee (q \wedge \neg r)] \vee r =$
$= (\neg p \wedge \neg q) \vee r \vee (p \vee q) \wedge \neg r = 1$

Aufgabe 2

Beweisen Sie: R ist reflexiv und zirkulär genau dann, wenn R Äquivalenzrelation ist.

"$\Rightarrow$"
zu zeigen ist nur die Symmetrie: $aRb \wedge bRb \Rightarrow bRa$

"$\Leftarrow$"
zu zeigen ist nur die Zirkularität: $aRb \wedge bRc \Rightarrow \underbrace{aRc \Rightarrow cRa}_{Symmetrie}$

Aufgabe 3
a)

<u>reflexiv und symmetrisch aber nicht transitiv:</u>
Relation: $R =$ Mensch a ist befreundet mit Mensch b.
reflexiv: aRa. Jeder Mensch ist befreundet mit sich selbst.
symmetrisch: $aRb \Rightarrow bRa$. Wenn Mensch a befreundet ist mit Mensch b, dann ist auch Mensch b mit Mensch a befreundet.

transitiv: $aRb \wedge bRc \Rightarrow aRc$ ↯. Wenn Mensch a mit Mensch b befreundet ist und Mensch b mit Mensch c befreundet ist, muss Mensch a nicht mit Mensch c befreundet sein.

<u>nicht reflexiv aber symmetrisch und transitiv:</u>
a ist Bruder von b.

<u>reflexiv und transitiv aber nicht symmetrisch:</u>
Relation: $R =$"$\leq$"
reflexiv: $a \leq a$.
symmetrisch: $a \leq b \Rightarrow b \leq a$ ↯.
transitiv: $a \leq b \wedge b \leq c \Rightarrow a \leq c$.

b)
$P(Z)$ ist eine Potenzmenge und $X, Y \subseteq Z$.
Wann gilt $P(X \setminus Y) = P(X) \setminus P(Y)$?
gilt nie, da: $\emptyset \in P(X \setminus Y)$, aber $\emptyset \notin (P(X) \setminus P(Y))$

Aufgabe 4
a)
geg: $H_k = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{k}, k \geq 1, k$-te harmonische Zahl
zu zeigen: $n \geq 0, H_{2^n} \leq 1 + n$

<u>Induktionsanfang:</u> $n = 0, H_{2^0} = H_1 = 1 \leq 1 + 0$
<u>Induktionsvoraussetzung:</u> $H_{2^i} \leq 1 + i, 0 \leq i \leq n$
<u>Induktionsschritt:</u> $H_{2^{n+1}} = \underbrace{1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{2^n}}_{Induktionsvoraussetzung} + \frac{1}{2^n+1} + \cdots + \frac{1}{2^{n+1}}$

$\leq 1 + n + \underbrace{\frac{1}{2^n+1} + \cdots + \frac{1}{2^{n+1}}}_{2^n - viele}$

$\leq 1 + n + 2^n \cdot \frac{1}{2^n+1} = 1 + n + \frac{2^n}{2^n+1}$
$\leq 1 + (n + 1)$

q.e.d.

b)
zu zeigen: $1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \cdots + \frac{1}{n^2} < 2 - \frac{1}{n}, n > 1$
<u>Induktionsanfang:</u> $1 + \frac{1}{2^2} = 1.25 < 2 - \frac{1}{2} = 1.5$
<u>Induktionsvoraussetzung:</u> $1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \cdots + \frac{1}{2^i} < 2 - \frac{1}{i}, 1 < i \leq n$
<u>Induktionsschritt:</u> $n + 1 \Rightarrow \underbrace{1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{9} + \cdots + \frac{1}{n^2}}_{Induktionsvorraussetzung} + \frac{1}{(n+1)^2} < 2 - \frac{1}{n} + \frac{1}{(n+1)^2}$

Jetzt zeigen wir noch: $2 - \frac{1}{n} + \frac{1}{(n+1)^2} < 2 - \frac{1}{n+1}$

$$
\begin{array}{rcl|l}
2-\frac{1}{n}+\frac{1}{(n+1)^2} & < & 2-\frac{1}{n+1} & -2 \\
-\frac{1}{n}+\frac{1}{(n+1)^2} & < & -\frac{1}{n+1} & +\frac{1}{n},+\frac{1}{n+1} \\
\frac{1}{(n+1)^2}+\frac{1}{n+1} & < & \frac{1}{n} & \frac{1}{n+1}\cdot\frac{n+1}{n+1} \\
\frac{1}{(n+1)^2}+\frac{n+1}{(n+1)^2} & < & \frac{1}{n} & \\
\frac{n+2}{(n+1)^2} & < & \frac{1}{n} & \cdot n \\
\frac{n\cdot(n+2)}{(n+1)^2} & < & 1 & \\
\frac{n^2+2\cdot n}{(n+1)^2} & < & 1 & \\
\frac{n^2+2\cdot n+1-1}{(n+1)^2} & < & 1 & \\
\frac{(n+1)^2-1}{(n+1)^2} & < & 1 & \\
\frac{(n+1)^2-1}{(n+1)^2} & < & 1 & \\
\frac{(n+1)^2}{(n+1)^2}-\frac{1}{(n+1)^2} & < & 1 & \\
1-\frac{1}{(n+1)^2} & < & 1 &
\end{array}
$$

q.e.d.

Aufgabe 5
a)
(1) $4 \times M, 11$ mögliche Positionen sind frei. $\Rightarrow \binom{11}{4}$ Kompinationsmöglichkeiten.
(2) $4 \times A, 7$ mögliche Positionen sind frei. $\Rightarrow \binom{7}{4}$ Kompinationsmöglichkeiten.
(3) $2 \times I, 3$ mögliche Positionen sind frei. $\Rightarrow \binom{3}{2}$ Kompinationsmöglichkeiten.
(4) $1 \times F, 1$ mögliche Positionen sind frei. $\Rightarrow \binom{1}{1}$ Kompinationsmöglichkeiten.

$\binom{11}{4} \cdot \binom{7}{4} \cdot \binom{3}{2} \cdot \binom{1}{1}$ Möglichkeiten die Buchstaben anzuordnen.

Allgemein: $\binom{n}{n_1} \cdot \binom{n-n_1}{n_2} \cdot \binom{n-n_1-n_2}{n_3} \cdot \binom{n-n_1-n_2-n_3}{n_4}$

b) $\binom{5}{2} \cdot \binom{3}{2} \cdot \binom{1}{1}$ Möglichkeiten $MAFIMAMAMIA$ Palindrom darzustellen.