6. Aufgabenblatt vom Freitag, den 20. November 2015 zur Vorlesung

MafI I: Logik & Diskrete Mathematik

(F. Hoffmann)

Abgabe: bis Freitag, den 04. Dezember 2015, 10 Uhr

1. **Existenzbeweise** (2 Punkte)
   (a) Ihr Computernetz besteht aus 6 Computern, wobei jeder davon Verbindungen zu keinem oder bis zu 5 anderen Computern im Netz hat. Die Verbindungen sind symmetrisch. Argumentieren Sie, dass es mindestens zwei Computer im Netz gibt, die mit derselben Anzahl von anderen Computern vernetzt sind.
   (b) Seien $n_1, n_2, \ldots, n_t$ positive ganze Zahlen. Angenommen, $n_1 + n_2 + \ldots + n_t - t + 1$ Süßigkeiten werden auf insgesamt t Nikolausstiefel $S_1, S_2, \ldots, S_t$ verteilt. Zeigen Sie, dass es wenigstens einen Stiefel S_i gibt, der mindestens n_i Süßigkeiten enthält.

2. **Bankautomat** (2 Punkte)
   Ihr Lieblingsbankautomat hat einen unbegrenzten Vorrat an 20-Euro- und 50-Euro-Scheinen. Welche Beträge können Sie abheben? Beweisen Sie Ihre Antwort!

3. **Vollständige Induktion I** (2 Punkte)
   Zeigen Sie, dass 21 Teiler von $4^{n+1} + 5^{2n-1}$ für alle positiven ganzen Zahlen n ist.

4. **Vollständige Induktion II** (2 Punkte)
   Sei $f_0 = 0, f_1 = 1, f_n = f_{n-1} + f_{n-2}$ für $n > 1$ die Folge der Fibonacci-Zahlen. Stellen Sie eine Vermutung auf, für welche n die Fibonacci-Zahl f_n eine gerade Zahl ist und beweisen Sie Ihre Vermutung mit verallgemeinerter vollständiger Induktion.

5. **Vollständige Induktion III** (3 Punkte)
   Beweisen Sie, dass n Kreise in der Ebene, mit $n > 0$, die Ebene in $n^2 - n + 2$ Regionen unterteilen, wenn sich je zwei der Kreise in genau 2 Punkten schneiden und je 3 Kreise keinen gemeinsamen Schnittpunkt haben.

6. **Vollständige Induktion IV** (3 Punkte)
   Beweisen Sie mit vollständiger Induktion die folgende Ungleichung für alle natürlichen Zahlen $n \geq 1$.
   $$1 + \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} + \ldots + \frac{1}{\sqrt{n}} > 2(\sqrt{n+1} - 1)$$

Hinweis: Bitte die Übungszettel immer mit den Namen aller Bearbeiter und (!) dem Namen des Tutors (+ welches Tutorium) versehen. Bitte beachten Sie den Abgabetermin!