5. Aufgabenblatt vom Freitag, den 13. November 2015 zur Vorlesung

MafI I: Logik & Diskrete Mathematik

(F. Hoffmann)

Abgabe: bis Freitag, den 27. November 2015, 10 Uhr

1. **Injektive Funktionen** (2 Punkte)
   Es sei $f : A \to B$ eine Abbildung mit der folgenden Eigenschaft: Für beliebige $S, T \subseteq A$ gilt $f(S \cap T) = f(S) \cap f(T)$. Zeigen Sie, dass f injektiv ist.

2. **Injektiv-Surjektiv** (4 Punkte)
   Sei $f : A \to B$ eine beliebige Funktion.
   Wir definieren eine neue Funktion $g : \mathcal{P}(B) \to \mathcal{P}(A)$. Für $N \subseteq B$ sei $g(N) = f^{-1}(N)$.
   Beweisen Sie, dass f surjektiv ist genau dann, wenn g injektiv ist.

3. **Funktionen** (3 Punkte)
   Für diese Aufgabe sollten Sie Ihr Schulwissen über stetige Funktionen reaktivieren.
   Im Folgenden sei $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ eine Funktion und $M \subseteq \mathbb{R}$ eine Teilmenge der reellen Zahlen. M ist beschränkt, wenn ein $K \in \mathbb{R}$ existiert, so dass $|x| \leq K$ für alle $x \in M$.
   Die Funktion f ist monoton wachsend (bzw. fallend), falls

   $$\forall x, y \in \mathbb{R} : x \leq y \Rightarrow f(x) \leq f(y)(\text{bzw.} f(x) \geq f(y))$$

   und f wird monoton genannt, wenn sie eine dieser beiden Eigenschaften hat. Entsprechend wird die Funktion f streng monoton wachsend (bzw. fallend) genannt, falls

   $$\forall x, y \in \mathbb{R}\ x < y \Rightarrow f(x) < f(y)(\text{bzw.} f(x) > f(y))$$

   und streng monoton, wenn sie eine dieser beiden Eigenschaften hat. Welche der foldenden Implikationen sind wahr bzw. falsch? Jeweils kurze Begründung bzw. Gegenbeispiel.

   (a) Wenn f stetig und streng monoton wachsend ist, so auch surjektiv.
   (b) Wenn f stetig und bijektiv ist, so ist es auch monoton.
   (c) Wenn M beschränkt ist, so ist $f(M)$ auch beschränkt.
   (d) Wenn f stetig und M beschränkt ist, so ist $f(M) \neq \mathbb{R}$.
   (e) Wenn f monoton ist und $f(M) = \mathbb{R}$, so ist $M = \mathbb{R}$.
   (f) Wenn f injektiv ist, so ist f streng monoton.

4. **0–1–Sequenzen** (2 Punkte)

   (a) Zeigen Sie, dass die Menge aller endlichen 0–1–Sequenzen abzählbar unendlich ist.
   (b) Zeigen Sie, dass die Menge aller unendlichen 0–1–Sequenzen gleichmächtig mit $\mathcal{P}(\mathbb{N})$ ist, also überabzählbar unendlich ist.

5. **Kontraposition** (2 Punkte)
   Beweisen Sie die folgende Aussage durch Kontraposition: Sei (mindestens) eine von zwei ganzen Zahlen n und m nicht durch 3 teilbar, dann ist auch die Summe oder die Differenz von n und m nicht durch 3 teilbar.

Hinweis: Bitte die Übungszettel immer mit den Namen aller Bearbeiter und (!) dem Namen des Tutors (+ welches Tutorium) versehen. Bitte beachten Sie den Abgabetermin!