Logik und diskrete Mathematik, Übung 6

Andreas Timmermann, Mat: 4994606, Alena Dudarenok, Mat: 4999780, Gruppe: 1

9. Dezember 2015

Aufgabe 1a:
geg: sind 6 Computer mit jeweil 0 bis 5 Verbindungen zu jeweils anderen Computer.
Die Verbindungen sind bidirektional.
zu zeigen: Es gibt mindestens 2 Computer mit der gleichen Anzahl von Verbindungen.

Widerspruchsbeweis:

Nehmen an, dass es keine 2 Computer gibt, die die gleiche Verbindungsanzahl haben und führen das zum Widerspruch.

Eine veranschaulichung für eine beispielhafte Verbingung der Computer a bis b untereinander.

a	b	c	d	e	f
(a,b)	(b,a)	(c,a)	(d,a)	(e,a)	
(a,c)	(b,c)	(c,b)	(d,b)		
(a,d)	(b,d)				
(a,e)					

Wir versuchen ein extremes Beispiel zu konstruieren, indem wir jedem Computer eine andere Anzahl von Verbindungen geben.
Fall 1:
Verbindungen der Computer zu anderen:
$|a| = 4, |b| = 3, |c| = 2, |d| = 1, |e| = [0..4], |f| = 0 \Rightarrow$ e muss [0..4] Verbindungen haben, weil 5 geht nicht, da ein Computer keine Verbindungen hat und der Computer zu sich selber keine Verbindung aufbauen kann.
Fall 2:
Verbindungen der Computer zu anderen:
$|a| = 5, |b| = 4, |c| = 3, |d| = 2, |e| = [1..5], |f| = 1 \Rightarrow$ e muss[1..5] Verbindungen haben, da es keinen Computer mit 0 Verbindungen gibt und somit jeder mindestens 1 Verbindung haben muss.
Fall 3:
Alle Computer haben weniger als 4 Verbindungen. $\Rightarrow$ Trivial. Hier muss es mindestens 2 Computer mit der gleichen Anzahl an Verbindungen geben.

Da die Widerspruchsannahme zum Widerspruch geführt wurde, muss die angenommene Aussage wahr sein.

Aufgabe 1b:
geg: seien $n_1, n_2, \cdots, n_t \in \mathbb{N}^+$
sei $N = n_1 + n_2 + \cdots + n_t - t + 1$ die Anzahl der Süßigkeiten.
t ist dabei die Anzahl der Stiefel.
$S_1, S_2, \cdots, S_t$ sind die Stiefel.

zu zeigen:
mindestens 1 S_i hat mindestens n_i Süßigkeiten.
Widerspruchsbeweis
$N = n_1 + n_2 + \cdots + n_t - t + 1 = (n_1 - 1) + (n_2 - 1) + \cdots + (n_t - 1) + 1$
Um den Widerspruch zu erfüllen, darf in jedem S_i maximal $n_i - 1$ Süßigkeiten drin sein. Da aber N +1 Süßigkeiten mehr hat, muss 1 S_i eine Süßgkeit mehr bekommen. Somit ist der Widerspruch falsch und die Aussage wahr.

Aufgabe 2:
geg:
$G = 20 \cdot a + 50 \cdot b$
ges:
Die Menge der G's.
Behauptung:
Menge der auszahlbaren Geldbeträge ist: $M_G = \{n\mathbb{N} : 10|n, n \geq 20, n \neq 30\}$

Induktionsanfang:
$a = 1, b = 0, G = 20 \cdot 1 + 50 \cdot 0 \in M_G$
$a = 0, b = 1, G = 20 \cdot 0 + 50 \cdot 1 \in M_G$
$a = 1, b = 1, G = 20 \cdot 1 + 50 \cdot 1 \in M_G$
Induktionsvorraussetzung:
$G = 20 \cdot a + 50 \cdot b$
Induktionsschluss:
Fall 1: $G = 20 \cdot (a + 1) + 50 \cdot b = (20 \cdot a + 50 \cdot b) + (20 \cdot 1 + 50 \cdot 0) \in M_G$
Fall 2: $G = 20 \cdot a + 50 \cdot (b + 1) = (20 \cdot a + 50 \cdot b) + (20 \cdot 0 + 50 \cdot 1) \in M_G$
Fall 3: $G = 20 \cdot (a + 1) + 50 \cdot (b + 1) = (20 \cdot a + 50 \cdot b) + (20 \cdot 1 + 50 \cdot 1) \in M_G$

Im Allgemeinen gilt also $(20 \cdot a + 50 \cdot b) + (20 \cdot a_n + 50 \cdot b_n) \in M_G$, mit $a_n, b_n \in \mathbb{N}$ Damit ist die Behauptung bewiesen.

Aufgabe 3:
zu zeigen: $21|(4^{n+1} + 5^{2 \cdot n - 1})$

Induktionsanfang:
$n = 1 \Rightarrow 21|(4^{1+1} + 5^{2 \cdot 1 - 1}) = 21$

Induktionvorraussetzung:

$21|(4^{n+1} + 5^{2\cdot n-1}) =$ I.V.

Induktionsschluss:
$n+1 : 4^{n+1+1} + 5^{2\cdot(n+1)-1} =$
$= 4^{n+2} + 5^{2\cdot n+1} =$
$= 4 \cdot 4^{n+1} + 25 \cdot 5^{2\cdot n-1} =$
$= 4 \cdot 4^{n+1} + 4 \cdot 5^{2\cdot n-1} + 21 \cdot 5^{2\cdot n-1} =$
$= 4 \cdot (4^{n+1} + 5^{2\cdot n-1}) + 21 \cdot 5^{2\cdot n-1} =$
$4 \cdot (4^{n+1} + 5^{2\cdot n-1}) = 4\cdot$ I.V. (ist durch 21 teilbar) und $21|(21 \cdot 5^{2\cdot n-1})$
q.e.d.

Aufgabe 4:
ges: alle n der f_n aller geraden $(2|f_n)$ Fibonaccizahlen.
Behauptung: Menge der n aller gerade Fibonaccizahlen ist:
$M_f = \{n : n = 3 \cdot i - 1, i \in \mathbb{N}\}$

Induktionsanfang:
$i = 1, n = 3 \cdot i - 1 = 2$
$f_{n-2} = 0 \Rightarrow 2 \mid f_0 \Rightarrow n \in M_f$
$f_{n-1} = 1 \Rightarrow 2 \nmid f_1 \Rightarrow n \notin M_f$
$f_n = f_1 + f_0 = 1 \Rightarrow 2 \nmid f_2 \Rightarrow n \notin M_f$

Induktionsvorraussetzung:
$n = 3 \cdot i - 1, i \in \mathbb{N}$
$f_n = f_{n-1} + f_{n-2}$

Induktionsschluss:
o.B.d.A fangen wir bei $i = 0, n = 2$ an. Das können wir machen, da 2 der kleine Index für eine gerade Fibonaccizahl ist. Für die nachfolgenden dreier Zahlenfolgen gilt dann...
Fall 1: $f_{n+1} = f_n + f_{n-1} \Rightarrow 2 \mid f_n \wedge 2 \nmid f_{n-1} \Rightarrow 2 \nmid f_{n+1}$
Fall 2: $f_{n+2} = f_{n+1} + f_n \Rightarrow 2 \nmid f_{n+1} \wedge 2 \mid f_n \Rightarrow 2 \nmid f_{n+2}$
Fall 3: $f_{n+3} = f_{n+2} + f_{n+1} \Rightarrow 2 \mid f_{n+2} \wedge 2 \mid f_{n+1} \Rightarrow 2 \mid f_{n+3}$

$n + 3 = (i + 1) \cdot 3 - 1$
Somit ist gezeigt, dass jede dritte Fibonaccizahl ab der 2, durch 3 teilbar ist.

Aufgabe 5:

	Ebene	Kreis 1	Kreis 2	Kreis 3	Kreis 4
neue Part.	1	1	2	4	6
insg. Part	1	2	4	8	14

Durch einen neuen Kreis entstehen neue Partition in den anderen Kreisen und in der Ebene.
- $n-1$ Partitionen entstehen durch den Schnitt mit allen anderen Kreisen.
- $n-1-1$ Partitionen entstehen durch den Schnitt mit den Schnitten des voran gegangenen Kreises.

- +1 der Kreis.

Anzahl der neuen Partitionen: $p = n + 1 + n - 1 - 1 + 1 = 2 \cdot n - 2 + 1 = 2 \cdot (n - 1)$
Anzahl aller Partitionen: $P = 1 + 1 + \sum\limits_{2}^{n} 2 \cdot (i - 1)$
Induktionsanfang:
$n = 2, 1 + 1 + \sum\limits_{2}^{2} 2 \cdot (2 - 1) = 4 = 2^2 - 2 + 2$
Induktionsvorraussetzung:
$p_n = 1 + 1 + \sum\limits_{2}^{2} 2 \cdot (i - 1), \forall n \in \mathbb{N}, n \geq 2$
Induktionsschluss:
$p_{n+1} = 1+1+\sum\limits_{2}^{n+1} 2\cdot(i-1) = 1+1+\sum\limits_{2}^{n} 2\cdot(i-1)+2\cdot(n+1-1) = n^2-n+2+2\cdot n = n^2+n+2 =$
$= n^2 + 2 \cdot n - n + 1 - 2 + 2 = (n + 1)^2 - (n + 1) + 2$

Aufgabe 6:
zu zeigen: $1 + \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{n}} > 2 \cdot (\sqrt{n+1} - 1)$

Induktionsanfang:
$n = 0 \Rightarrow 1 > 2 \cdot (\sqrt{1} - 1) = 0$

Induktionsvorraussetzung:
$1 + \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{n}} = \sum\limits_{k=0}^{n} \frac{1}{\sqrt{k}} > 2 \cdot (\sqrt{n+1} - 1)$

Induktionsschritt:
$\sum\limits_{k=0}^{n+1} \frac{1}{\sqrt{k}} > 2 \cdot (\sqrt{n+2} - 1)$
$\equiv \sum\limits_{k=0}^{n} \frac{1}{\sqrt{k}} + \frac{1}{\sqrt{n+1}} > 2 \cdot (\sqrt{n+2} - 1)$
$\equiv \sum\limits_{k=0}^{n} \frac{1}{\sqrt{k}} + \frac{1}{\sqrt{n+1}} > 2 \cdot (\sqrt{n+1} - 1) + \frac{1}{\sqrt{n+2}} > 2 \cdot (\sqrt{n+2} - 1)$
$\equiv 2 \cdot (\sqrt{n+1} - 1) + \frac{1}{\sqrt{n+1}} > 2 \cdot (\sqrt{n+2} - 1)$
$\equiv \frac{1}{\sqrt{n+1}} > 2 \cdot (\sqrt{n+2} - 1) - 2 \cdot (\sqrt{n+1} - 1)$
$\equiv \frac{1}{\sqrt{n+1}} > 2 \cdot (\sqrt{n+2} - \sqrt{n+1})$; wir wenden an $\rightarrow \cdot(\sqrt{n+2} + \sqrt{n+1})$
$\equiv \frac{\sqrt{n+2}+\sqrt{n+1}}{\sqrt{n+1}} > 2 \cdot (\sqrt{n+2} - \sqrt{n+1}) \cdot (\sqrt{n+2} + \sqrt{n+1})$
$\equiv \frac{\sqrt{n+2}}{\sqrt{n+1}} + 1 > 2$
Da $\sqrt{n+2} > \sqrt{n+1} \geq 1$ ist auch die Summe > 2 und die Behauptung bewiesen.