lehrstuhl für programmiersysteme
Prof. Dr. Bernhard Steffen

technische universität dortmund

Dipl.Inf. Malte Isberner – Dr. Oliver Rüthing – Dipl.Inf. Melanie Schmidt – Dr. Hubert Wagner

Übungen zur Vorlesung

Mathematik für Informatiker 1

Wintersemester 2013/14

Übungsblatt 1

Die Lösungshinweise dienen primär der **internen** Kommunikation der Lösungen zu den Übungsaufgaben. Sie sind geeignet, das Vorgehen zur Lösung zu illustrieren und die zur Lösung erforderlichen Ideen und Denkanstöße zu vermitteln.
Bitte beachten Sie jedoch, dass es sich hierbei **nicht** um *Muster*lösungen handelt in dem Sinne, dass sie eine mustergültige Verschriftlichung des jeweiligen Lösungsweges darstellen. Insbesondere sind aus Platzgründen einige der Lösungswege nur abgekürzt dargestellt. Daraus leitet sich jedoch nicht ab, dass ein entsprechendes Vorgehen in der Klausur automatisch zur vollen Punktzahl führt!

Für die Abgabe der Bearbeitungen stehen den Übungsgruppen zu „Mathematik für Informatiker I“ Briefkästen im Raum E06 der Otto-Hahn-Straße 20 zur Verfügung.
Die den einzelnen Übungsgruppen zugeteilten Briefkästen sind durch die Gruppennummer gekennzeichnet. Sie sind ferner mit dem Namen der Veranstaltung sowie Zeit und Ort der Übung kenntlich gemacht.

Bitte werfen Sie Ihre Bearbeitungen in den Ihrer Übungsgruppe zugeteilten Briefkasten bis zur unten aufgeführten Abgabefrist ein!

Schreiben Sie unbedingt immer Ihren vollständigen Namen, Ihre Matrikelnummer und Ihre Gruppennummer auf Ihre Abgaben!

Abgabefrist: 25.10.2013, 14:00 Uhr

Aufgabe 1.1 *Aussagenlogik* (Präsenzaufgabe)

Alex, Bea und Chris wollen die MafI 1-Klausur im Anschluss an das jetzige Wintersemester (Termin: Samstag, 29.3.2014) oder nach dem kommenden Sommersemester (Termin: Juli 2014) mitschreiben. Sie wissen aber noch nicht, wer von ihnen den Märztermin wahrnimmt. Allerdings wissen wir:

(a) Wenn Chris am Märztermin mitschreibt, traut sich auch Alex zu diesem Termin.

(b) Bea und Chris teilen sich einen Nebenjob am Samstag. Deshalb können nicht beide am Märztermin mitschreiben.

(c) Wegen einer Wette in ihrer WG ist es ausgeschlossen, dass sowohl Alex als auch Chris die Klausur im März nicht mitschreiben.

(d) Weil Bea bei Alex im Auto mitfahren will, hat sie beschlossen, genau dann im März mitzuschreiben, wenn auch Alex an diesem Termin mitschreibt.

1. Modellieren Sie die Aussagen (a)–(d) mittels aussagenlogischer Formeln. Verwenden Sie dazu die elementaren Aussagen $\mathcal{A}, \mathcal{B}, \mathcal{C}$ (für Alex, Bea und Chris), die genau dann den Wert w (wahr) haben, wenn die betreffende Person die Klausur am ersten Termin mitschreibt, und f (falsch) sonst.

   Lösung:

   Die Aussagen (a)–(d) lassen sich folgendermaßen ausdrücken:

   a) $\mathcal{D} \ \equiv_{df} \ \mathcal{C} \Rightarrow \mathcal{A}$

   b) $\mathcal{E} \ \equiv_{df} \ \neg(\mathcal{B} \wedge \mathcal{C})$

   c) $\mathcal{F} \ \equiv_{df} \ \neg(\neg\mathcal{A} \wedge \neg\mathcal{C})$

   d) $\mathcal{G} \ \equiv_{df} \ \mathcal{A} \Leftrightarrow \mathcal{B}$

2. Finden Sie mit Hilfe einer Wahrheitstafel heraus, wer von diesen Dreien die Klausur im März 2014 schreibt.

   Lösung:

   Die Gesamtaussage ist die Konjunktion der Aussagen (a)–(d), d.h. die Formel $\mathcal{D} \wedge \mathcal{E} \wedge \mathcal{F} \wedge \mathcal{G}$. Es ergibt sich folgende Wahrheitstafel:

$\mathcal{A}$	$\mathcal{B}$	$\mathcal{C}$	$\mathcal{D}$	$\mathcal{E}$	$\mathcal{F}$	$\mathcal{G}$	$\mathcal{D} \wedge \mathcal{E} \wedge \mathcal{F} \wedge \mathcal{G}$
f	f	f	w	w	f	w	f
f	f	w	f	w	w	w	f
f	w	f	w	w	f	f	f
w	f	f	w	w	w	f	f
f	w	w	f	f	w	f	f
w	f	w	w	w	w	f	f
w	w	f	w	w	w	w	w
w	w	w	w	f	w	w	f

   Also schreiben Alex und Bea am Märztermin mit.

Aufgabe 1.2 *Logische Umformungen* (6+4 Punkte)

1. In Lemma 2.6 (S. 16) des Skriptes (Buch: Lemma 2.1, S. 22) wurde gezeigt, dass die folgenden Äquivalenzen für beliebige Aussagen $\mathcal{A}, \mathcal{B}$ und $\mathcal{C}$ gelten:

$$\begin{aligned} \mathcal{A} \wedge \mathcal{B} &\equiv \mathcal{B} \wedge \mathcal{A} && \text{(Kommutativität)} \\ \mathcal{A} \vee \mathcal{B} &\equiv \mathcal{B} \vee \mathcal{A} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \mathcal{A} \wedge (\mathcal{B} \wedge \mathcal{C}) &\equiv (\mathcal{A} \wedge \mathcal{B}) \wedge \mathcal{C} && \text{(Assoziativität)} \\ \mathcal{A} \vee (\mathcal{B} \vee \mathcal{C}) &\equiv (\mathcal{A} \vee \mathcal{B}) \vee \mathcal{C} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \mathcal{A} \wedge (\mathcal{A} \vee \mathcal{B}) &\equiv \mathcal{A} && \text{(Absorption)} \\ \mathcal{A} \vee (\mathcal{A} \wedge \mathcal{B}) &\equiv \mathcal{A} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \mathcal{A} \wedge (\mathcal{B} \vee \mathcal{C}) &\equiv (\mathcal{A} \wedge \mathcal{B}) \vee (\mathcal{A} \wedge \mathcal{C}) && \text{(Distributivität)} \\ \mathcal{A} \vee (\mathcal{B} \wedge \mathcal{C}) &\equiv (\mathcal{A} \vee \mathcal{B}) \wedge (\mathcal{A} \vee \mathcal{C}) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \mathcal{A} \wedge \neg\mathcal{A} &\equiv \mathsf{F} && \text{(Negation)} \\ \mathcal{A} \vee \neg\mathcal{A} &\equiv \mathsf{T} \end{aligned}$$

Zeigen Sie die folgenden Aussagen unter ausschließlicher Verwendung dieser Regeln über semantische Äquivalenz. Halten Sie sich dabei an die Vorgehensweise des *axiomatischen Beweisens*, wie in Abschnitt 2.1.4 (S. 21) des Skripts exemplarisch ausgeführt (Buch: Abschnitt 2.1.3, S. 28).

a) Neutralität:

$$\mathsf{T} \wedge \mathcal{A} \equiv \mathcal{A}$$
$$\mathsf{F} \vee \mathcal{A} \equiv \mathcal{A}$$

Lösung:

$$\begin{aligned} \mathsf{T} \wedge \mathcal{A} &\equiv \mathcal{A} \wedge \mathsf{T} && \text{(Komutativität)} \\ &\equiv \mathcal{A} \wedge (\mathcal{A} \vee \neg\mathcal{A}) && \text{(Negation)} \\ &\equiv \mathcal{A} && \text{(Absorption)} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \mathsf{F} \vee \mathcal{A} &\equiv \mathcal{A} \vee \mathsf{F} && \text{(Komutativität)} \\ &\equiv \mathcal{A} \vee (\mathcal{A} \wedge \neg\mathcal{A}) && \text{(Negation)} \\ &\equiv \mathcal{A} && \text{(Absorption)} \end{aligned}$$

b) Idempotenz:

$$\mathcal{A} \wedge \mathcal{A} \equiv \mathcal{A}$$
$$\mathcal{A} \vee \mathcal{A} \equiv \mathcal{A}$$

Lösung:

$$\begin{aligned} \mathcal{A} &\equiv \mathcal{A} \wedge (\mathcal{A} \vee (\mathcal{A} \wedge \mathcal{A})) && \text{(Absorption)} \\ &\equiv \mathcal{A} \wedge \mathcal{A} && \text{(Absorption)} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \mathcal{A} &\equiv \mathcal{A} \vee (\mathcal{A} \wedge (\mathcal{A} \vee \mathcal{A})) && \text{(Absorption)} \\ &\equiv \mathcal{A} \vee \mathcal{A} && \text{(Absorption)} \end{aligned}$$

c) Doppelnegation:

$$\neg\neg\mathcal{A} \equiv \mathcal{A}$$

Lösung: Es gilt

$$\begin{aligned} \neg\neg\mathcal{A} &\equiv \mathsf{T} \wedge \neg\neg\mathcal{A} && \text{(Neutralität)} \\ &\equiv (\mathcal{A} \vee \neg\mathcal{A}) \wedge \neg\neg\mathcal{A} && \text{(Negation)} \\ &\equiv \neg\neg\mathcal{A} \wedge (\mathcal{A} \vee \neg\mathcal{A}) && \text{(Kommutativität)} \\ &\equiv (\neg\neg\mathcal{A} \wedge \mathcal{A}) \vee (\neg\neg\mathcal{A} \wedge \neg\mathcal{A}) && \text{(Distributivität)} \\ &\equiv (\neg\neg\mathcal{A} \wedge \mathcal{A}) \vee (\neg\mathcal{A} \wedge \neg\neg\mathcal{A}) && \text{(Kommutativität)} \\ &\equiv (\neg\neg\mathcal{A} \wedge \mathcal{A}) \vee F && \text{(Negation)} \\ &\equiv \mathsf{F} \vee (\mathcal{A} \wedge \neg\neg\mathcal{A}) && \text{(Kommutativität)} \\ &\equiv (\mathcal{A} \wedge \neg\mathcal{A}) \vee (\mathcal{A} \wedge \neg\neg\mathcal{A}) && \text{(Negation)} \\ &\equiv \mathcal{A} \wedge (\neg\mathcal{A} \vee \neg\neg\mathcal{A}) && \text{(Distributivität)} \\ &\equiv \mathcal{A} \wedge \mathsf{T} && \text{(Negation)} \\ &\equiv \mathsf{T} \wedge \mathcal{A} && \text{(Kommutativität)} \\ &\equiv \mathcal{A} && \text{(Neutralität)} \end{aligned}$$

2. Beweisen Sie, dass für beliebige Mengen A, B und C gilt

$$A \setminus (B \cup C) = (A \setminus B) \cap \ (A \setminus C).$$

Neben den Definitionen der Mengenoperationen (siehe Definition 2.13, S. 24; Buch: Def. 2.6, S. 33) dürfen Sie die in Lemma 2.6 aufgeführten semantischen Äquivalenzen von Aussagen benutzen.

Lösung:

$$\begin{aligned} A \setminus (B \cup C) &= \{x \mid x \in A \wedge x \notin B \cup C\} && \text{(Definition von } \setminus) \\ &= \{x \mid x \in A \wedge \neg (x \in B \cup C)\} && \text{(Definition von } \notin) \\ &= \{x \mid x \in A \wedge \neg (x \in B \vee x \in C)\} && \text{(Definition von } \cup) \\ &= \{x \mid x \in A \wedge (x \notin B \wedge x \notin C)\} && \text{(De Morgan für } \vee \text{, Definition von } \notin) \\ &= \{x \mid (x \in A \wedge x \notin B) \wedge (x \in A \wedge x \notin C)\} && \text{(Idemp. von } \wedge \text{, Assoz., Komm.)} \\ &= \{x \mid (x \in A \setminus B) \wedge (x \in A \setminus C)\} && \text{(Definition von } \setminus) \\ &= \{x \mid x \in A \setminus B\} \cap \{x \mid x \in A \setminus C\} && \text{(Definition von } \cap) \\ &= (A \setminus B) \cap (A \setminus C) \end{aligned}$$

Aufgabe 1.3 *Mengen und Mengenäquivalenzen* (Präsenzaufgabe)

A, B, D und E seien Teilmengen einer gemeinsamen Grundmenge M.

1. Zeigen Sie unter ausschließlicher Verwendung der Mengengesetze, die in Lemma 2.15 (S. 26) des Skripts (Buch: Lemma 2.3, S. 35) aufgeführt sind, die beiden folgenden Mengengleichungen.

   a) $\left(A^\complement \cup B^\complement\right)^\complement \cup \left(A^\complement \cup B\right)^\complement = A.$

   Lösung: Es gilt

$$\begin{aligned}(A^\complement \cup B^\complement)^\complement \cup (A^\complement \cup B)^\complement &= ((A^\complement)^\complement \cap (B^\complement)^\complement) \cup ((A^\complement)^\complement \cap B^\complement)) && \text{(De Morganschen Gesetze)}\\ &= (A \cap B) \cup (A \cap B^\complement) && \text{(Doppelkomplement)}\\ &= A \cap (B \cup B^\complement) && \text{(Distributivität)}\\ &= A \cap M && \text{(Komplement)}\\ &= A && \text{(Neutralität)}\end{aligned}$$

   b) $((A \cup B)^\complement \cap E)^\complement \cup (D \cap A) = A \cup B \cup E^\complement.$

   Lösung:

$$\begin{aligned}((A \cup B)^\complement \cap E)^\complement \cup (D \cap A) &= (\left((A \cup B)^\complement\right)^\complement \cup E^\complement) \cup (D \cap A) && \text{(De Morgan)}\\ &= \left((A \cup B) \cup E^\complement\right) \cup (D \cap A) && \text{(Doppelkompl., Ass.)}\\ &= (A \cup (A \cap D)) \cup \left(B \cup E^\complement\right) && \text{(Kommut., Assoz.)}\\ &= A \cup B \cup E^\complement && \text{(Absorption, Assoz.)}\end{aligned}$$

2. Zeigen Sie: $A = B$ genau dann, wenn $\mathfrak{P}(A) = \mathfrak{P}(B)$.
   (Zur Erinnerung: für eine Menge X bezeichnet $\mathfrak{P}(X)$ die Potenzmenge von X.)

   Lösung:

   Aus $A = B$ folgt $\mathfrak{P}(A) = \mathfrak{P}(B)$:

   Es gelte $A = B$. Es ist dann

$$\begin{aligned}\mathfrak{P}(A) &= \{X \mid X \subseteq A\}\\ &= \{X \mid X \subseteq B\} && \text{(da } A = B\text{)}\\ &= \mathfrak{P}(B)\,.\end{aligned}$$

   Aus $\mathfrak{P}(A) = \mathfrak{P}(B)$ folgt $A = B$:

   Wir zeigen die Kontraposition, d.h. die Aussage: aus $A \neq B$ folgt $\mathfrak{P}(A) \neq \mathfrak{P}(B)$.

   Sei $A \neq B$. O.B.d.A. gibt es dann ein $a \in A \setminus B$. Es ist dann $\{a\} \subseteq A$, $\{a\}$ ist aber keine Teilmenge von B. Das bedeutet $\{a\} \in \mathfrak{P}(A)$ und $\{a\} \notin \mathfrak{P}(B)$, also $\mathfrak{P}(A) \neq \mathfrak{P}(B)$.