# Mathematik für Informatiker I im WS08/09

**Klausur** **19.02.2009**

**Name:** ........................................

**Matrikelnummer:** ..................

| Aufgabe | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | Gesamt |
|---|---|---|---|---|---|---|
| Punkte | /6 | /7 | $/4+4$ | /8 | /9 | $/34+4$ |

Tutor:

☐ Tobias Gehroldt ☐ Alexander Haucke

☐ Felix Lehmann ☐ Jan Supko

☐ alte Zulassung

Ich bin einverstanden, dass mein Klausurergebnis mit Matrikelnummer auf einer FU-internen Webseite einzusehen ist:

JA ◯ NEIN ◯

---

**Wichtige Hinweise:**

1) Wenn die Lösung einer Aufgabe nicht auf den entsprechenden Zettel bzw. auf die freie Seite daneben passt, bitte einen Hinweis auf das Zusatzblatt geben.

2) Bitte nur mit Kugelschreiber oder Tinte schreiben und keine rote Farbe verwenden.

3) Alle Lösungen sind kurz (stichpunktartig), aber inhaltlich ausreichend zu kommentieren!

4) Einziges erlaubtes Hilfsmittel ist ein **einseitig, handschriftlich** gefülltes A4-Blatt mit Fakten und Formeln eigener Wahl.

---

**Aufgabe 1:** **Logik** $2+4$ **Punkte**

a) Untersuchen Sie, ob die Formeln $\alpha = (x \leftrightarrow y) \rightarrow z$ und $\beta = (x \rightarrow z) \leftrightarrow (y \rightarrow z)$ logisch äquivalent sind. Sie können dazu die folgende vorbereitete Tabelle verwenden:

| $x$ | $y$ | $z$ | |
|---|---|---|---|
| 0 | 0 | 0 | |
| 0 | 0 | 1 | |
| 0 | 1 | 0 | |
| 0 | 1 | 1 | |
| 1 | 0 | 0 | |
| 1 | 0 | 1 | |
| 1 | 1 | 0 | |
| 1 | 1 | 1 | |

$\alpha$ und $\beta$ **sind / sind nicht** (nichtzutreffendes Streichen) logisch äquivalent, weil

......

b) Bilden Sie zur Formel $\alpha$ die äquivalente kanonische DNF und die äquivalente kanonische KNF. Vereinfachen Sie beide Normalformen durch Termzusammenfassung soweit das möglich ist.

**Aufgabe 2:** **Äquivalenzrelationen und Matchings** $4+3$ **Punkte**

Bezeichne $K_n = (V_n, E_n)$ den vollständigen Graphen über der Knotenmenge $V_n = \{1, 2, \ldots, n\}$ und $\sim_n \subseteq E_n \times E_n$ die wie folgt definierte Äquivalenzrelation auf $E_n$:

$$\{i, j\} \sim_n \{k, l\} \iff i + j = k + l \qquad \text{für alle } \{i, j\}, \{k, l\} \in E_n.$$

a) Wieviele Äquivalenzklassen hat die Relation $\sim_{12}$ und wie groß sind die Äquivalenzklassen $[\{3, 8\}]_{\sim_{12}}$, $[\{3, 7\}]_{\sim_{12}}$ und $[\{4, 11\}]_{\sim_{12}}$.

b) Zeigen Sie, dass jede Äquivalenzklasse der Relation $\sim_n$ ein Matching von $K_n$ ist und dass es für alle geraden $n$ eine Äquivalenzklasse gibt, die ein perfektes Matching ist (d.h. alle Knoten sind saturiert).

**Aufgabe 3:** **Induktion und Rekursion** 4 **Punkte,** 4 **Zusatzpunkte**

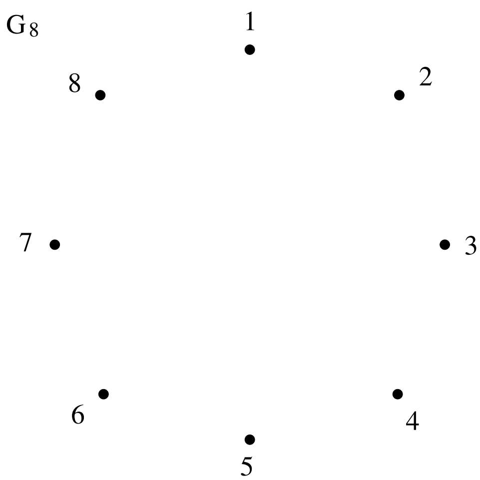
a) Beweisen Sie mit vollständiger Induktion, dass die ganze Zahl $a_n = n^3 - 4n$ für alle $n \in \mathbb{N}$ durch 3 teilbar ist.

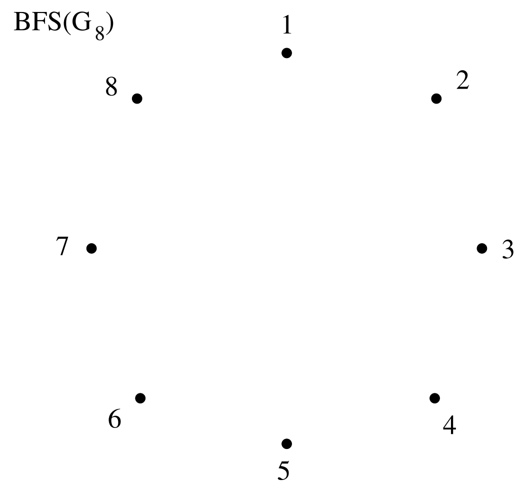
b) **Zusatzaufgabe:** Was zählt die Stirling–Zahl $S_{n,2}$?
Beweisen Sie die Formel $S_{n,2} = 2^{n-1} - 1$ für alle $n \geq 2$ mit vollständiger Induktion.

**Aufgabe 4:** **Graphen** $4 + 4$ **Punkte**

Der Graph $G_n$ habe die Knotenmenge $V_n = \{1, 2, \ldots, n\}$ und alle Kanten $\{i, j\}$, für die $max(i, j) \leq 2 \cdot min(i, j)$ gilt.

a) Zeichnen Sie den Graphen $G_8$ in das folgende Schema und bilden Sie den BFS–Baum von $G_8$ mit Startknoten 1 und aufsteigend geordneten Adjazenzlisten.




b) Zeigen Sie, dass für die Anzahl der Kanten von $G_n$ die folgende Formel gilt:

$$|E_n| = \begin{cases} \frac{n^2}{4} & \text{falls } n \text{ gerade} \\ \frac{n^2-1}{4} & \text{falls } n \text{ ungerade} \end{cases}$$

Hinweis: Man kann die Formel mit Abzählargumenten oder mit vollständiger Induktion beweisen.

**Aufgabe 5: Kombinatorik und Wahrscheinlichkeiten $2+2+2+3$ Punkte**

Alle Antworten auf die folgenden Fragen können in Form von Ausdrücken wie z.B. $2^{100}$ oder $100^6 \cdot \binom{100}{6}$ gegeben werden. Stichwortartige Begründungen reichen aus.

In einer Klausur mit 100 Teilnehmern ($T_1$ bis $T_{100}$) werden 8 Aufgaben gestellt, von denen sich jeder Teilnehmer 6 zum Lösen aussuchen kann.

a) Wie viele Möglichkeiten der Verteilung der Aufgaben auf die 100 Teilnehmer gibt es? Zeigen Sie, dass bei jeder Verteilung mindestens 4 Teilnehmer die gleiche Auswahl getroffen haben.

b) Wie viele Möglichkeiten der Verteilung der Aufgaben auf die 100 Teilnehmer gibt es, wenn alle Teilnehmer die Aufgaben 1 und 2 wählen? Auf welchen Wert erhöht sich jetzt die Anzahl der Teilnehmer, die garantiert die gleiche Auswahl getroffen haben?

c) Wir nehmen jetzt an, dass die Aufgabenverteilung von einem Zufallsgenerator übernommen wurde (weiterhin 6 Aufgaben pro Teilnehmer gleichverteilt und unabhängig). Wie groß ist die erwartete Anzahl von Teilnehmern, welche die Aufgaben 1 bis 6 erhalten haben?

d) Sei bei der zufälligen Verteilung $A$ das Ereignis, dass Teilnehmer $T_1$ die Aufgabe 1 erhält und $B$ das Ereignis, dass Teilnehmer $T_1$ nicht die Aufgabe 8 erhält. Bestimmen Sie $\Pr(A)$, $\Pr(B)$ und $\Pr(A \cap B)$ und stellen Sie fest, ob $A$ und $B$ unabhängige Ereignisse sind!
Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass jeder Teilnehmer die Aufgabe 1, aber keiner die Aufgabe 8 erhält?