

12. Aufgabenblatt vom Freitag, den 15. Januar 2016 zur Vorlesung

MafI I: Logik & Diskrete Mathematik
(F. Hoffmann)

Abgabe: bis Freitag, den 29. Januar 2016, 10 Uhr

1. **Richtig oder falsch ?** (1 Punkt)

Es gibt einen ungerichteten Graphen (ohne Doppelkanten) mit 12 Knoten, 66 Kanten und 3 Zusammenhangskomponenten. Begründung!

2. **Zusammenhang** (2 Punkte)

Die Vereinigung zweier nichtleerer ungerichteter schlichter Graphen $G_1 = (V_1, E_1)$, $G_2 = (V_2, E_2)$ ist der Graph $G = (V_1 \cup V_2, E_1 \cup E_2)$. Zeigen Sie mit einem Widerspruchsbeweis, dass, falls G zusammenhängend ist, $V_1 \cap V_2$ nicht leer sein kann.

3. **Bäume** (2+1 Punkte)

- (a) Sei T ein Baum mit Wurzel, bei dem die Kanten von der Wurzel weg hin zu den Blättern gerichtet sind. So ein T heißt q -närer Baum, wenn von jedem inneren Knoten genau q Kanten abgehen. Was ist die Anzahl i von inneren Knoten und was ist die Anzahl l der Blätter in einem q -nären Baum mit insgesamt n Knoten?
- (b) Sei F ein Wald mit insgesamt n Knoten. Was können Sie über die minimale und maximale Anzahl m der Kanten sagen?

4. **Totale Senke finden** (3 Punkte) Ein *totale Senke* in einem gerichteten Graphen $G = (V, E)$ ohne Schleifen ist ein Knoten mit Ingrad $|V| - 1$ und Ausgrad 0. Der Graph sei in Adjazenzmatrixdarstellung (mit $|V|^2$ Einträgen) gegeben. Argumentieren Sie, dass man nur linear in $|V|$ viele Anfragen an Matrixeinträge stellen muss, um zu entscheiden, ob G eine totale Senke besitzt.

5. **Turnier-Champion** (3 Punkte)

Ein Turnier auf n Knoten ist ein gerichteter Graph, der dadurch entsteht, dass man den ungerichteten Kanten des vollständigen Graphen K_n Richtungen zuweist. Wir interpretieren die Richtung $v \rightarrow w$ als Spieler v schlägt Spieler w . Außerdem sagen wir, dass v den Spieler w dominiert, falls er ihn schlägt oder es einen Spieler z gibt, so dass $v \rightarrow z$ und $z \rightarrow w$ Kanten im Turnier sind. Ein Spieler heißt Champion, falls er jeden anderen Spieler dominiert.

Beweisen Sie, dass jedes Turnier mit $n \geq 1$ Spielern wenigstens einen Champion hat.

Hinweis: Bitte die Übungszettel immer mit den Namen aller Bearbeiter und (!) dem Namen des Tutors (+ welches Tutorium) versehen. Bitte beachten Sie den Abgabetermin!