Freiwilliges 9. Aufgabenblatt vom Freitag, den 11. Dezember 2015 zur Vorlesung

MafI I: Logik & Diskrete Mathematik

(F. Hoffmann)

Abgabe: bis Freitag, den 8. Januar 2016, 10 Uhr

1. **Boolesches** (2 Punkte)

   (a) Gibt es für die folgende unendliche Menge von Booleschen Termen eine Belegung der Variablen derart, dass alle Terme erfüllt werden? Begründen Sie die Antwort.

   $$M = \{x_1 \vee x_2, \neg x_2 \vee \neg x_3, x_3 \vee x_4, \neg x_4 \vee \neg x_5, \ldots\}$$

   (b) Vereinfachen Sie die folgenden Formeln so weit wie möglich durch Anwendung (und Benennung) der verwendeten semantischen Äquivalenzen (Booleschen Gesetze):
   Die Formeln: (1) $(\neg q \vee r) \wedge \neg(q \vee p) \wedge \neg q$
   (2) $[(p \vee q) \wedge (p \Rightarrow r) \wedge (q \Rightarrow r)] \Rightarrow r$

2. **Relationales** (2 Punkte)
   Wir nennen eine Relation $R \subseteq A \times A$ zirkulär, falls gilt:
   $\forall a, b, c \in A : aRb \wedge bRc \Rightarrow cRa.$
   Beweisen Sie: R ist reflexiv und zirkulär genau dann, wenn R Äquivalenzrelation ist.

3. **Grundsätzliches** (2 Punkte)

   (a) Zeigen Sie mittels selbstgewählter Beispiele, dass es binäre Relationen gibt, die
   - reflexiv und symmetrisch aber nicht transitiv
   - symmetrisch und transitiv aber nicht reflexiv
   - reflexiv und transitiv aber nicht symmetrisch

   sind!

   (b) Sei $\mathcal{P}(Z)$ die Potenzmenge der Menge Z. Wann gilt folgendes?

   $$\mathcal{P}(X \setminus Y) = \mathcal{P}(X) \setminus \mathcal{P}(Y)$$

   Begründung!

4. **Vollständige Induktion** (2 Punkte)

   (a) $H_k = 1 + \frac{1}{2} + \ldots + \frac{1}{k}$ für $k \geq 1$ heit k–te Harmonische Zahl. Beweisen Sie mit vollständiger Induktion, dass für $n \geq 0$ gilt : $H_{2^n} \leq 1 + n$.

   (b) Beweisen Sie für natürliche Zahlen $n > 1$ die Ungleichung:

   $$1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{9} + \ldots + \frac{1}{n^2} < 2 - \frac{1}{n}$$

5. **Mafimamamia** (2 Punkte)

   (a) Betrachten Sie das Wort *MAFIMAMAMIA*. Es hat 11 Buchstaben. Auf wie viele Arten kann man genau diese 11 Buchstaben aneinander reihen, so dass verschiedene Strings entstehen?
   Geben Sie zunächst eine allgemeine Formel an für diese Aufgabe: Gegeben ein Wort der Länge n bestehend aus 4 verschiedenen Buchstaben mit den Häufigkeiten n_1, n_2, n_3, n_4. Wie viele verschiedene Strings der Länge n lassen sich daraus bilden. Erläutern Sie kurz Ihre Formel.

   (b) Ein Wort ist ein Palindrom, wenn es von vorn bzw. hinten gelesen identisch ist, zum Beispiel *MAMAIFIAMAM*. Auf wie viele Arten kann man insgesamt aus unserem Wort *MAFIMAMAMIA* ein Palindrom bilden, wenn man alle 11 Buchstaben benutzen muss?

Hinweis: Bitte die Übungszettel immer mit den Namen aller Bearbeiter und (!) dem Namen des Tutors (+ welches Tutorium) versehen. Bitte beachten Sie den Abgabetermin! Die erreichten Punkte werden als Zusatzpunkte gewertet. Es gibt noch einen kurzen regulären Zettel zum 08.01.