

10. Aufgabenblatt vom Freitag, den 18. Dezember 2015 zur Vorlesung

MafI I: Logik & Diskrete Mathematik
(F. Hoffmann)

Abgabe: bis Freitag, den 15. Januar 2016, 10 Uhr

1. Abzählen und Wahrscheinlichkeit (2+2+2+2 Punkte)

- (a) Wie viele Bitstrings gibt es, die man aus 10 Nullen und zwölf Einsen bilden kann, bei denen auf jede Null eine Eins folgt. Begründung!
- (b) Es werden n unabhängige Versuche eines Bernoulli-Experiments gemacht, jedes hat Erfolgswahrscheinlichkeit p . Was sind die Wahrscheinlichkeiten, dass
- kein einziger Misserfolg eintritt,
 - mindestens ein Misserfolg eintritt,
 - höchstens zwei Misserfolge zu verzeichnen sind,
 - mindestens zwei Misserfolge auftreten?

- (c) Zeigen Sie:

$$\binom{2n}{n} + \binom{2n}{n-1} = (1/2) \binom{2n+2}{n+1}$$

- (d) Beweisen Sie die sogenannte Bonferroni-Ungleichung, die für beliebige Ereignisse E und F in einem Wahrscheinlichkeitsraum (Ω, Pr) sagt:

$$Pr(E \cap F) \geq Pr(E) + Pr(F) - 1$$

Wie kann F in Abhängigkeit von E gewählt werden, damit Gleichheit garantiert ist? Begründen Sie dies kurz.

2. Zufallsvariable (3 Punkte)

Wir betrachten den durch zwei unabhängige und gleichverteilte Würfel erzeugten diskreten Wahrscheinlichkeitsraum (Ω, p) , d.h. jedes $(i, j) \in \Omega = \{1, 2, \dots, 6\} \times \{1, 2, \dots, 6\}$ hat die Wahrscheinlichkeit $\frac{1}{36}$. Wir definieren die Zufallsvariablen X, Y, Z wie folgt:

$$X(i, j) = |i - j|$$

$$Y(i, j) = 5i + j$$

$$Z(i, j) = 5 \cdot \max(i, j) + \min(i, j)$$

Beschreiben Sie die diskreten Verteilungsfunktionen der drei Zufallsvariablen und bestimmen Sie die Erwartungswerte.

3. Schneebälle werfen (3 Punkte)

Alice und Bob werfen Schneebälle auf den kleinen Hans. Alice trifft mit Wahrscheinlichkeit $3/5$ und Bob mit $1/3$. Zuerst wirft Bob einmal und dann immer abwechselnd jeder zweimal, also B,AA,BB,AA,BB,AA usw.

Berechnen Sie den Wert der Wahrscheinlichkeit, dass Bob zuerst trifft?

Hinweis: Bitte die Übungszettel immer mit den Namen aller Bearbeiter und (!) dem Namen des Tutors (+ welches Tutorium) versehen. Bitte beachten Sie den Abgabetermin!