Logik und diskrete Mathematik, Übung 11

Andreas Timmermann, Mat: 4994606, Alena Dudarenok, Mat: 4999780, Gruppe: 3

21. Januar 2016

Aufgabe 1
geg: A ist die Menge der Äpfel. $|A| = 100$. M ist die Menge der madigen Äpfel.
$M \subseteq A, |M| = 20$. F ist die Menge der fleckigen Äpfel. $F \subseteq A, |F| = 15$. Desweiteren wissen wir, dass $|M \cap F| = 10$.
ges: Anzahl der Äpfel, die weder madig noch fleckig sind.

Die gesuchte Menge an Äpfeln nennen wir B und
$|B| = |A| - |M| - |F| + |M \cap F| = 100 - 20 - 15 + 10 = 75$.
75 Äpfel können verkauft werden.

Aufgabe 2
geg: $f(n) = a_1 \cdot f(n-1) + a_2 \cdot f(x-2)$
$f(n) = x^n$
$x^n = a_1 \cdot x^{n-1} + a_2 \cdot x^{n-2}, | : x^{n-2}$
$x^2 = a_1 \cdot x + a_2$
$0 = x^2 - a_1 \cdot x - a_2$
$x_{1,2} = \frac{a_1}{2} \pm \sqrt{(\frac{a_1}{2})^2 + a_2}$
Da $x_{1,2}$ eine doppelte Nullstelle ist $\Rightarrow x_1 = x_2 \Rightarrow a_2 = \frac{a_1^2}{4}$
$\forall c_1, c_2 \in \mathbb{R}$ gilt ...
$\Rightarrow r^n = c_1 \cdot (\frac{a_1}{2})^n + n \cdot c_2 \cdot (\frac{a_1}{2})^n$
$r^n = f(n) = (c_1 + n \cdot c_2) \cdot (\frac{a_1}{2})^n$
$f(0) = (c_1 + 0 \cdot c_2) \cdot (\frac{a_1}{2})^0 = c_1$
$f(1) = (c_1 + c_2) \cdot \frac{a_1}{2} = (f(0) + c_2) \cdot \frac{a_1}{2} \Rightarrow c_2 = \frac{f(1) \cdot 2}{a_1} - f(0)$

Nur geraten. Leider.

Aufgabe 3
geg: $x_n = 6 \cdot x_{n-1} - 11 \cdot x_{n-2} + 6 \cdot x_{n-3}$, Anfangsbedingungen: $x_0 = 2, x_1 = 5, x_2 = 15$

$x_n = y^n \Rightarrow y^n = 6 \cdot y^{n-1} - 11 \cdot y^{n-2} + 6 \cdot y^{n-3}, | : y^{n-3}$
$y^3 = 6 \cdot y^2 - 11 \cdot y + 6$

$0 = y^3 - 6 \cdot y^2 + 11 \cdot y - 6$
Erste Nullstelle geraten: $y_1 = 3$
$\Rightarrow 0 = (y-3) \cdot (y^2 - 3 \cdot y + 2)$
Quadratische Ergänzung: $y_2 = 1, y_3 = 2$
$\Rightarrow 0 = (y-3) \cdot (y-1) \cdot (y-2)$
Nutzen wir die Anfangsbedingungen und formen ....
$y_n = c_1 \cdot y_1^n + c_2 \cdot y_2^n + c_3 \cdot y_3^n$
$2 = c_1 \cdot 3 + c_2 + c_3 \cdot 2$
$5 = c_1 \cdot 9 + c_2 + c_3 \cdot 4$
$15 = c_1 \cdot 27 + c_2 + c_3 \cdot 8$
Nach Auflösung durch Gauss ...
$4 = c_1 \cdot 6 + 0 + 0$
$-2 = 0 - c_2 \cdot 2 + 0$
$1 = 0 + 0 - c_3 \cdot 2$
So ergibt sich $c_1 = \frac{2}{3}, c_2 = 1, c_3 = -\frac{1}{2}$ und ...
$x_{n-1} = \frac{2}{3} \cdot 3^n + 1 - \frac{1}{2} \cdot 2^n$

Aufgabe 4
geg: $x_n = 2 \cdot x_{n-1} + 2^n, x_0 = 2$
Erste Tests:
$x_1 = 6$
$x_2 = 16$
$x_3 = 40$
$x_4 = 96$
Als nächsten verwenden wir das Einsetzungsverfahren:
$x_n = 2 \cdot x_{n-1} + 2^n$
$x_n = 2 \cdot (2 \cdot x_{n-2} + 2^{n-1}) + 2^n = 4 \cdot x_{n-2} + 2 \cdot 2^n$
$x_n = 4 \cdot (2 \cdot x_{n-3} + 2^{n-2}) + 2 \cdot 2^n = 8 \cdot x_{n-3} + 3 \cdot 2^n$
$n_n = 8 \cdot (2 \cdot x_{n-4} + 2^{n-3}) + 3 \cdot 2^n = 16 \cdot x_{n-4} + 4 \cdot 2^n$
Nach dem zusammenfassen ...
$x_n = 2^n \cdot 2 + n \cdot 2^n$

Aufgabe 5
geg: $x_n = 2 \cdot x_{n-1} + n + 5, x_0 = 4$
Erste Tests:
$x_1 = 14$
$x_2 = 35$
$x_3 = 78$
Als nächsten verwenden wir das Einsetzungsverfahren:
$x_n = 2 \cdot x_{n-1} + n + 5$
$x_n = 2 \cdot (2 \cdot x_{n-2} + (n-1) + 5) + n + 5 = 4 \cdot x_{n-2} + 2 \cdot (n-1) + n + 3 \cdot 5$
$x_n = 4 \cdot (2 \cdot x_{n-3} + (n-2) + 5) + 2 \cdot (n-1) + n + 3 \cdot 5 = 8 \cdot x_{n-3} + 4 \cdot (n-2) + 2 \cdot (n-1) + n + 7 \cdot 5$
Nach dem zusammenfassen ...
$x_n = 2^n \cdot 4 + \sum_{i=1}^{n} 2^{n-i} \cdot i + (2^n - 1) \cdot 5$