Nachname: **Vorname**: **Matrikelnr.**:

Tutor: ◻ Daniel ◻ Martin

Klausur zur Vorlesung

Pro Informatik: Logik und Diskrete Mathematik

(Dr. Frank Hoffmann, Dr. Klaus Kriegel)

Sommersemester 2009 **26. November 2009**

Beginn: $16^{\underline{15}}$, Ende: $17^{\underline{45}}$ (90 min)

1.	2.	3.	4.	Σ
/8	/8	/8	/8	/32

Ich bin einverstanden, dass mein Punktergebnis zusammen mit der Matrikelnummer auf einer FU–internen Webseite erscheint: ◻ **Ja**

Außer Schreibutensilien und einer handbeschriebenen DIN A4 Seite sind keine Hilfsmittel erlaubt!

Auf diesem Klausurbogen ist genügend Platz, um die Lösungen der Aufgaben aufzuschreiben. Auch die Rückseiten der Blätter können verwendet werden. Bitte geheftet lassen! **Zusätzliche lose Blätter** müssen mit der Matrikelnummer, Namen und Aufgabennummer versehen werden. Auf einem Zusatzblatt jeweils nur eine Aufgabe bearbeiten. Nicht mit Bleistift und nicht mit Rot schreiben.*Der Klausurbogen ist auf jeden Fall abzugeben!*

Viel Erfolg!

Aufgabe 1 Logik

/5+3

(a) Die Boolesche Funktion $f : \mathbb{B}^3 \longrightarrow \mathbb{B}$ nimmt genau dann den Wert 1 an, wenn der Ausdruck $\sum_{i=1}^{3}(i \cdot x_i)$ durch 3 teilbar ist (der Ausdruck beschreibt die Summe der Indizes aller Variablen mit dem Wert 1).
Verwenden Sie die nachfolgende Tabelle zur Beschreibung von f und erzeugen Sie die zugehörige kanonische KNF und DNF. Vereinfachen Sie beide soweit das möglich ist!

(b) Welche der nachfolgenden logischen Signaturen ist funktional vollständig und welche nicht.

$$\Sigma_1 = \{\, 0 \,, \Rightarrow \} \qquad \Sigma_2 = \{\, 1 \,, \Rightarrow \}$$

Die Unvollständigkeit kann durch Angabe einer nicht realisierbaren Funktion begründet werden.

a)

x_1	x_2	x_3	$\sum_{i=1}^{3}(i \cdot x_i)$	$f(x_1, x_2, x_3)$
0	0	0		
0	0	1		
0	1	0		
0	1	1		
1	0	0		
1	0	1		
1	1	0		
1	1	1		

Aufgabe 2 Äquivalenzrelationen und Kombinatorik | /5+3

(a) Sei $M = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ und $X = \binom{M}{3}$ die Menge aller 3-elementigen Teilmengen von M. Die Äquivalenzrelation $\sim \subseteq X \times X$ ist wie folgt definiert:

$$\{a_1, a_2, a_3\} \sim \{b_1, b_2, b_3\} \quad \Longleftrightarrow \quad a_1 + a_2 + a_3 = b_1 + b_2 + b_3$$

Wieviele Äquivalenzklassen hat die Relation $\sim$? Geben Sie ein Repräsentantensystem der Relation an und bestimmen Sie die Äquivalenzklassen $[\{1, 2, 5\}]_\sim$ und $[\{1, 3, 6\}]_\sim$

Hinweis: Überlegen Sie welche Summen sich über 3-elementigen Teilmengen von M ergeben können.

(b) Wieviele Äquivalenzklassen hat die Relation $\sim$, wenn man die Menge M durch die Menge aller Zahlen von 1 bis n ersetzt? Begründen Sie, dass es in diesem Fall mindestens eine Äquivalenzklasse geben muss, in der mindestens $\left\lceil \frac{n(n-1)}{18} \right\rceil$ Teilmengen von X liegen.

Aufgabe 3 Graphen

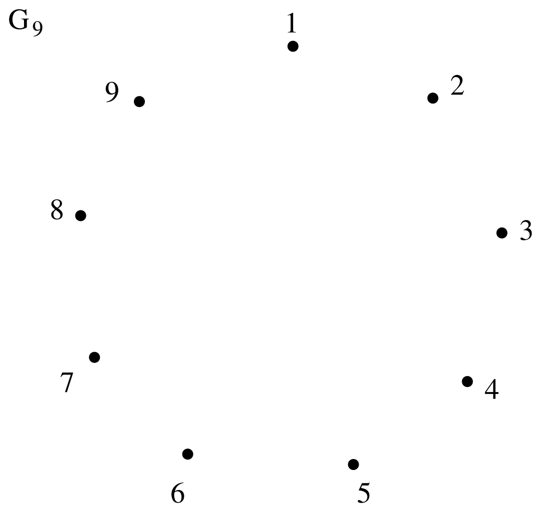
/4+4

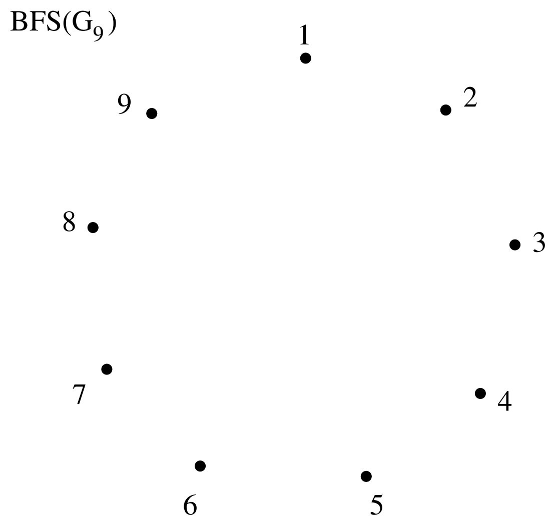
(a) Der Graph G_n habe die Knotenmenge $V_n = \{1, 2, \ldots, n\}$ und alle Kanten $\{i, j\}$, für die $max(i, j) \leq 2 \cdot min(i, j)$ gilt.
Zeichnen Sie den Graphen G_9 in das folgende Schema und bilden Sie den BFS–Baum von G_9 mit Startknoten 1 und aufsteigend geordneten Adjazenzlisten.

(b) Zeigen Sie mit vollständiger Induktion, dass für die Anzahl der Kanten von G_n die folgende Formel gilt:

$$|E_n| = \begin{cases} \frac{n^2}{4} & \text{falls } n \text{ gerade} \\ \\ \frac{n^2-1}{4} & \text{falls } n \text{ ungerade} \end{cases}$$

a)





Aufgabe 4 Verschiedenes

/3+3+2

(a) Wir betrachten ein Experiment von 6 Münzwürfen (unabhängig und gleichverteilt). Sei A das Ereignis, dass der erste und letzte Münzwurf das gleiche Ergebnis haben, und B das Ereignis, dass genau fünfmal Zahl geworfen wird. Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeiten von A und B und untersuchen Sie, ob diese Ereignisse unabhängig sind.

(b) Zeigen Sie, dass in einem endlichen, gerichteten Graphen, in dem jeder Knoten mindesten eine ausgehende Kante hat, immer ein gerichteter Kreis existiert.

(c) Wieviele surjektive, n-stellige Boolesche Funktionen gibt es? Geben Sie eine kurze Begründung an!