4. Aufgabenblatt vom Donnerstag, den 05. November 2015 zur Vorlesung

MafI I: Logik & Diskrete Mathematik

(F. Hoffmann)

Abgabe: bis Freitag, den 20. November 2015, 10 Uhr

1. **Schach und Relationen** (3+3 Punkte)

   Gegeben ist ein Schachbrett, dessen Felder wir mit Koordinatenpaaren $(i, j) \in \{1, 2, \ldots, 8\} \times \{1, 2, \ldots, 8\}$ beschreiben. (Z.B. bezeichnet $(1, 1)$ das Feld links unten). Die folgenden Relationen setzen zwei Felder zueinander in Beziehung, wenn das zweite vom ersten Feld aus mit einem Turm-, Läufer- oder Springerzug erreichbar ist:

Turm :	$(a, b)\ T\ (c, d) \Leftrightarrow (a = c \vee b = d) \wedge \lvert a - c\rvert + \lvert b - d\rvert > 0.$
Springer:	$(a, b)\ S\ (c, d) \Leftrightarrow \lvert c - a\rvert \cdot \lvert d - b\rvert = 2.$
Läufer:	$(a, b)\ L\ (c, d) \Leftrightarrow \lvert c - a\rvert = \lvert d - b\rvert \neq 0.$

   (a) Offensichtlich beschreiben die Relationen $T \circ T$, $S \circ S$, $L \circ L$ die Erreichbarkeit in jeweils genau zwei Zügen. Bestimmen Sie die drei Mengen der von $(1, 1)$ mit $T \circ T$, $S \circ S$, und $L \circ L$ erreichbaren Felder.

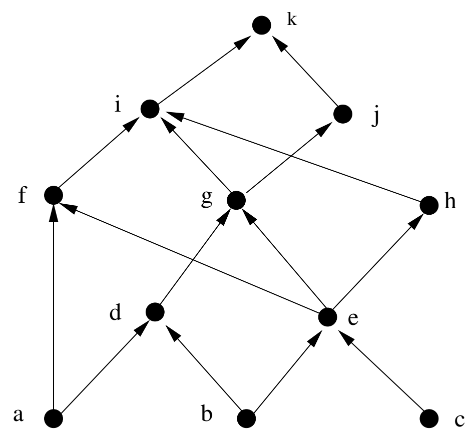
   (b) Welche der Verknüpfungen $T \circ T$, $S \circ S$, $L \circ L$ und $(L \circ L) \cup L$ sind Äquivalenzrelationen?
   Begründen Sie positive Antworten durch Beschreibung der Äquivalenzklassen und negative Antworten durch einen konkreten Nachweis, dass eine Eigenschaft verletzt ist.

2. **Schranken** (2 Punkte)
   Definition: Sei M eine Teilmenge einer Halbordnung $(A, \leq)$ und $b \in A$.

   - $b \in A$ ist obere bzw. untere Schranke von M, falls $b \geq a$ bzw $b \leq a$ für alle $a \in M$.
   - b ist Maximum bzw. Minimum von M, falls $b \in M$ und b ist obere bzw. untere Schranke von M ist.
   - b ist Supremum bzw. Infimum von M, falls b kleinste obere Schranke bzw. größte untere Schranke von M ist.

   Bestimmen Sie die folgenden Maxima, Minima, Suprema und Infima, falls sie existieren. Die Halbordnung ist durch folgendes Hasse-Diagramm gegeben.

Hasse-Diagramm:



min({b,f,h,i})

max({a,b,h,i})

sup({a,c,e,f})

inf({f,h,j})

inf({d,e,f,i})

3. **Funktionen** (4 Punkte)

   $\mathbb{R}^+$ bezeichne die Menge der positiven reellen Zahlen einschließlich der 0. Drei Funktionen $f, g : \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+ \longrightarrow \mathbb{R}^+$ und $h : \mathbb{R}^+ \longrightarrow \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+$ sind definiert durch $f(x, y) = xy$, $g(x, y) = |y - 2x + 1|$ und $h(x) = (x, x^2)$.
   Untersuchen Sie die Funktionen $f \circ h, g \circ h : \mathbb{R}^+ \longrightarrow \mathbb{R}^+$ und $h \circ f, h \circ g : \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+ \longrightarrow \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+$ auf Injektivität, Surjektivität und Bijektivität.

Hinweis: Bitte die Übungszettel immer mit den Namen aller Bearbeiter und (!) dem Namen des Tutors (+ welches Tutorium) versehen. Bitte beachten Sie den Abgabetermin!