13. und letztes reguläres Aufgabenblatt vom Freitag, den 22. Januar 2016 zur Vorlesung

MafI I: Logik & Diskrete Mathematik

(F. Hoffmann)

Abgabe: bis Freitag, den 05. Februar 2016, 10 Uhr

1. **Ungerichtete Graphen** (1+2+2 Punkte)
   (a) Ein aufspannender Wald eines ungerichteten schlichten Graphen $G = (V, E)$ mit c Zusammenhangskomponenten besteht aus c aufspannenden Bäumen für die einzelnen Zusammenhangskomponenten. Wie viele Kanten (als Funktion von $|V|, |E|$ und c) muss man aus G entfernen, um einen aufspannenden Wald zu erhalten. Begründen Sie dies.
   (b) Zeigen Sie, dass ein schlichter ungerichteter Graph auf n Knoten mit mehr als $\frac{(n-1)(n-2)}{2}$ Kanten notwendigerweise zusammenhängend ist.
   (c) Studiendekan Prof. XYZ möchte die Klausurphase des Semesters planen und allen Studenten ermöglichen, an allen Klausuren der von ihnen belegten Veranstaltungen teilzunehmen. Zum anderen möchte er möglichst wenige Klausurtermine vergeben, das heißt, es können mehrere Klausuren zum selben Zeitpunkt stattfinden, wenn es dadurch keine Konflikte gibt.
   Es gibt Module $M1, M2, \ldots, M7$.
   Die folgenden Kombinationen werden jeweils von keinem Studenten belegt: $M1 - M5, M1 - M6, M2 - M6, M3 - M5, M4 - M7$. Alle anderen Kombinationen treten auf.
   Bestimmen und begründen Sie die Minimalanzahl von Klausurterminen, die Prof. XYZ einplanen muss.
   Tipp: Als Knotenfärbungsproblem modellieren!

2. **Entscheidungsbäume** (3 Punkte)
   Sie haben 4 gleichaussehende Münzen, von denen leider genau eine falsch ist. Die falsche Münze kann leichter oder schwerer sein als die anderen. Stellen Sie dies algorithmisch (was ist die Fälschung und ist sie leichter oder schwerer) mit einer Balkenwaage fest! Wie viele Wägungen benötigt Ihr Algorithmus? Stellen Sie diesen als Entscheidungsbaum dar.

3. **Fibonacci-Bäume** (2 Punkte)
   Wir definieren rekursiv die Folge der gewurzelten Fibonacci-Bäume T_n. T_1 und T_2 bestehen jeweils nur aus der Wurzel. T_n für $n \geq 3$ besteht aus der Wurzel mit T_{n-1} und T_{n-2} als linken und rechten Unterbaum. Bestimmen Sie geschlossene Formeln für Knotenzahl, Kantenzahl und Höhe von T_n.

4. **Resolution** (4 Punkte)
   Zeigen Sie mit der Resolutionsmethode (!), dass die Formel

$$F = (\neg x_2 \wedge \neg x_3 \wedge x_1) \vee (\neg x_2 \wedge \neg x_1) \vee (x_3 \wedge x_1) \vee x_2$$

eine Tautologie ist.
Und wie ist es mit der Unerfüllbarkeit der folgenden Klauselmenge:

$$\{\{\neg x_1, x_2, x_3\}, \{\neg x_1, x_2, \neg x_3\}, \{x_1, x_2\}, \{\neg x_2, \neg x_3\}, \{\neg x_2, x_3\}\}$$

Benutzen Sie auch hier den Resolutionskalkül.

Hinweis: Bitte die Übungszettel immer mit den Namen aller Bearbeiter und (!) dem Namen des Tutors (+ welches Tutorium) versehen. Bitte beachten Sie den Abgabetermin!