Freiwilliges 14. Aufgabenblatt vom Freitag, den 29. Januar 2016 zur Vorlesung

MafI I: Logik & Diskrete Mathematik

(F. Hoffmann)

Abgabe: bis Freitag, den 12. Februar 2016, 10 Uhr

Das Folgende entspricht vom Umfang und Inhalt einer 120min-Klausur, jede Aufgabe 10 Punkte. 40 Punkte entsprechen Note 1,0 und bei 20 Punkten hat man bestanden.
Hinweis: Bei Aufgabe 3 und 4 gibt es bei Bedarf noch 10 Zusatzpunkte fürs laufende Semester zu holen.

1. **Logisches**

   (a) Untersuchen Sie, ob der Sheffer-Strich $|$ assoziativ ist. (Das ist der NAND-Operator)
   Betrachten Sie die durch den Term $t = (x|y)|z$ definierte 3-stellige Boolesche Funktion. Geben Sie die kanonische DNF dazu an und fassen Sie, wenn möglich, Minterme zusammen.

   (b) Sei t eine KNF-Formel über der Variablenmenge $V = \{x_1, \ldots, x_n\}$. Begründen Sie, dass das Resolutionsverfahren angewendet auf t auf jeden Fall terminiert. Das heißt, es entstehen nach endlicher Zeit keine neuen Resolventen mehr.

   (c) Schreiben Sie eine prädikatenlogische Formel, die aussagt: Für beliebige, verschiedene reelle Zahlen x, y gibt es eine von beiden verschiedene rationale Zahl z, die echt zwischen x und y liegt.
   Schreiben Sie dann die dazu negierte Formel hin und zwar ohne das logische Negationszeichen $\neg$.

2. **Vollständige Induktion, Funktionen und Relationen**

   (a) Beweisen Sie mit vollständiger Induktion: Seien $A_1, \ldots, A_n$ Untermengen einer Grundmenge U. Es gilt:
   $$\overline{\cup_{i=1}^{n} A_i} = \cap_{i=1}^{n} \overline{A_i}$$

   (b) Was ist falsch an folgendem Beweis:
   Wir wollen zeigen, dass jede Relation $R \subseteq A \times A$, die symmetrisch und transitiv ist, automatisch auch reflexiv ist:
   Wir wählen für jedes beliebige x ein y mit xRy. Wegen der Symmetrie gilt auch yRx und schließlich wegen der Transitivität auch xRx.
   Geben Sie auch ein explizites Gegenbeispiel an.

   (c) Beweisen Sie durch Angabe einer expliziten Bijektion f, dass die beiden offenen reellen Intervalle $(0, 2)$ und $(1, 5)$ gleichmächtig sind. Weisen Sie insbesondere die Bijektivität Ihrer Funktion nach.

(d) Sei $A = \{1,2,3,4,5,6\}$ und $S, T \subseteq A \times A$ die folgenden Relationen.

$$S = \{(i,j) | i + 3 \leq j\} \qquad T = \{(i,j) | i + j \text{ ist prim}\}$$

Geben Sie die Relation $S \circ T$ durch Auflistung der Paare an.

3. **Abzählbares**

(a) (3 Zusatzpunkte) Wie viele nichtnegative ganzzahlige Lösungen (x_1, x_2, x_3, x_4) hat die Gleichung

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 20$$

mit den Nebenbedingungen $x_1 < 8$ und $x_2 < 6$? Beschreiben Sie den Lösungsweg und geben Sie die entsprechende Formel an, Sie müssen sie nicht auswerten.
Tipp: Komplementärmenge.

(b) (4 Zusatzpunkte) Von den 20 Teilehmern eines Tutoriums sind A,B,C,D,E,F enge Freunde. Der Tutor wählt zufällig (Gleichverteilung) 3 Tutanden aus den 20 Teilnehmern zum Vorrechnen aus.
(i) Was ist die Wahrscheinlichkeit, dass A dabei ist?
(ii) Was ist die Wahrscheinlichkeit, dass A dabei und B nicht dabei ist?
(iii) Was ist die Wahrscheinlichkeit, dass genau 2 der 6 Freunde ausgewählt werden?
(iv) Was ist die Wahrscheinlichkeit, dass keiner der 6 Freunde ausgewählt wird?
Hinweis: Die Wahrscheinlichkeiten müssen nicht explizit ausgerechnet werden, es ist ausreichend, den jeweiligen Ausdruck hinzuschreiben und mit einem kurzen Satz zu begründen.

4. **Graphisches**

(a) (2 Zusatzpunkte) Der Graph $G_n = (V_n, E_n)$ habe die Knotenmenge $V_n = \{0,1,2\}^n$ also alle Tupel der Länge n über $\Sigma = \{0,1,2\}$. Zwei Knoten (Tupel) sind benachbart, wenn sie sich an einer Stelle unterscheiden und an allen anderen Stellen identisch sind. Bestimmen Sie die Knotenzahl, die Kantenanzahl und den Durchmesser des Graphen G_n (mit kurzen Begründungen)!

(b) Ein ungerichteter schlichter Graph $G = (V, E)$ habe 30 Kanten, sein Komplement G^c habe 15 Kanten. Wie viele Knoten hat der Graph? Begründung!

(c) (1 Zusatzpunkt) Zeigen Sie, dass man die Kanten eines 3-dimensionalen Würfels nicht so mit den Zahlen von 1 bis 12 markieren kann (jede Zahl auf genau einer Kante), dass für alle Ecken die Summe der Markierungen aller inzidenten Kanten gleich ist.

5. **Verschiedenes**

(a) Sei $\mathcal{P}(Z)$ die Potenzmenge der Menge Z. Für welche Mengen X, Y gilt:

$$\mathcal{P}(X \setminus Y) = \mathcal{P}(X) \setminus \mathcal{P}(Y)$$

(b) Zwei faire Würfel, einer rot und einer blau, werden geworfen. Sei A das Ereignis, dass die rote und die blaue Augenzahl übereinstimmen. B sei das Ereignis, dass der blaue Würfel eine 1 oder 5 zeigt. Sind A und B unabhängig?

(c) Welche Äquivalenzrelationen (angegeben durch die Äquivalenzklassen) auf der Menge $\{a, b, c, d\}$ enthalten die Menge $\{(a, c), (d, c)\}$?

(d) Zeichnen Sie zwei ungerichtete nichtisomorphe Graphen, die die gleiche Anzahl Knoten, die gleiche Anzahl Kanten und die gleiche Anzahl von Knoten jedes Grades haben. Begründen Sie die Nichtisomorphie.

(e) Richtig oder falsch? Jeder zusammenhängende schlichte Graph auf n Knoten enthält einen Baum auf n Knoten als induzierten Untergraphen. Begründen Sie die Antwort.

Hinweis: Bitte die Übungszettel immer mit den Namen aller Bearbeiter und (!) dem Namen des Tutors (+ welches Tutorium) versehen. Bitte beachten Sie den Abgabetermin!