Logik und diskrete Mathematik, Übung 10

Andreas Timmermann, Mat: 4994606, Alena Dudarenok, Mat: 4999780, Gruppe: 3

14. Januar 2016

Aufgabe 1
a)
geg: ein Bitstring mit 10 Nullen (0) und 12 Einsen (1).
ges: Wieviele Kombinationen K gibt es, wenn hinter jeder 0 eine 1 stehen muss?

Der Basisstring ist 1101010101010101010101. Die ersten beiden 1 werden jeweils zwischen 01 geschoben. Das garantiert die Ausgangsbedingung. Also

1101010101010101010101
1011010101010101010101
1010110101010101010101
1010101101010101010101
1010101011010101010101
1010101010110101010101
1010101010101101010101
1010101010101011010101
1010101010101010110101
1010101010101010101101
1010101010101010101011

Dann verschiebe ich beidere vorderen Bits um eine 0 weiter und das Spiel beginnt von vorne.

0111010101010101010101
0110110101010101010101
0110101101010101010101
0110101011010101010101
0110101010110101010101
0110101010101101010101
0110101010101011010101
0110101010101010110101

0110101010101010101101
0110101010101010101011

Und so weiter ... Damit ist die Kombinationsmöglichkeit K bestimmt.
$K = 11 + 10 + 9 + 8 + 7 + 6 + 5 + 4 + 3 + 2 + 1$

b)
geg: n unabhängige Bernoulli Versuche.
Wir benutzen $b(k, n, p) = \binom{n}{k} \cdot p^k \cdot (1-p)^{n-k}$

(1.) Wahrscheinlichkeit p_a für keinen einzigen Misserfolg (ME).

$k = n \Rightarrow p_a = \binom{n}{n} \cdot p^n \cdot (1-p)^0 = p^n$

(2.) Wahrscheinlichkeit p_b für mindestens einen Misserfolg (ME).

Da p_a die Wahrscheinlichkeit für alle Erfolge ist, ist $p_b = 1 - p_a$ die Wahrscheinlichkeit mindestens 1 Misserfolg zu haben.

(3.) Wahrscheinlichkeit p_c für höchstens 2 Misserfolg (ME).

$p_c = b(n, n, p) + b(n-1, n, p) + b(n-2, n, p)$
$= p_a + \binom{n}{n-1} p^{n-1} \cdot (1-p)^{n-(n-1)} + \binom{n}{n-2} p^{n-2} \cdot (1-p)^{n-(n-2)}$
$= p_a + n \cdot p^{n-1} \cdot (1-p) + \binom{n}{n-2} \cdot p^{n-2} \cdot (1-p)^2$
(4.) Wahrscheinlichkeit p_d für mindestens 2 Misserfolg (ME).

$p_d = 1 - (p_a + n \cdot p^{n-1} \cdot (1-p))$

c)
zu zeigen: $\binom{2 \cdot n}{n} + \binom{2 \cdot n}{n-1} = \frac{1}{2} \cdot \binom{2 \cdot n+2}{n+1}$

Als erstes multipliziere ich beide Seiten mit 2, welches ich am Ende wieder rückgängig mache.
$2 \cdot (\binom{2 \cdot n}{n} + \binom{2 \cdot n}{n-1}) = \binom{2 \cdot n+2}{n+1}$

$2 \cdot (\binom{2 \cdot n}{n} + \binom{2 \cdot n}{n-1})$
$= 2 \cdot \binom{2 \cdot n}{n} + 2 \cdot \binom{2 \cdot n}{n-1}$
$= \binom{2 \cdot n}{n} + \binom{2 \cdot n}{n} + \binom{2 \cdot n}{n-1} + \binom{2 \cdot n}{n-1}$
$= \binom{2 \cdot n}{n} + \binom{2 \cdot n}{n-1} + \binom{2 \cdot n}{n} + \binom{2 \cdot n}{n-1}$
$= \binom{2 \cdot n}{n} + \binom{2 \cdot n}{n-1} + \binom{2 \cdot n}{n} + \binom{2 \cdot n}{n+1}$
$= \binom{2 \cdot n+1}{n} + \binom{2 \cdot n+1}{n+1}$
$= \binom{2 \cdot n+2}{n+1}$

Und jetzt wird wieder durch 2 dividiert und das ist $= \frac{1}{2} \binom{2 \cdot n+2}{n+1}$

d)
zu zeigen: $Pr(E \cap F) \geq Pr(E) + Pr(F) - 1$.
geg: $0 \leq Pr(E), Pr(F), Pr(E \cap F) \leq 1$ und $Pr(E \cap F) = Pr(E) \cdot Pr(F)$

Zuerst legen wir alles auf eine Seite, um etwas Übersicht zu bekommen.
$1 - Pr(E) - Pr(F) + Pr(E) \cdot Pr(F) \geq 0$
Jetzt noch etwas zusammenfassen und ...
$1 - 1 \cdot (Pr(E) + Pr(F)) + Pr(E) \cdot Pr(F) \geq 0$
es ist schon eine Struktur erkennbar.
$1^2 - 1 \cdot (Pr(E) + Pr(F)) + Pr(E) \cdot Pr(F) =$
$= (1 - Pr(E)) \cdot (1 - Pr(F)) \geq 0$

Und das ist mit der Voraussetzung gegeben und somit ist dir Formel erfüllt.

Aufgabe 2
geg: Wahrscheinlichkeitsraum (Ω, p) mit $(i, j) \in \Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\} \times \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ und $p = \frac{1}{36}$.
Zufallsvariablen:
$X(i, j) = |i - j|$
$Y(i, j) = 5 \cdot i + j$
$Z(i, j) = 5 \cdot max(i, j) + min(i, j)$

ges: Beschreibung der Verteilungsfunktionen X, Y, Z und Ermittlung der Erwartungswerte $E(X), E(Y), E(Z)$.

Verteilungsfunktion $X(i, j)$

$j \backslash i$	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**
1	0	1	2	3	4	5
2	1	0	1	2	3	4
3	2	1	0	1	2	3
4	3	2	1	0	1	2
5	4	3	2	1	0	1
6	5	4	3	2	1	0

$Im(X) = \{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$
$Pr(0) = \frac{6}{36}$
$Pr(1) = \frac{10}{36}$
$Pr(2) = \frac{8}{36}$
$Pr(3) = \frac{6}{36}$
$Pr(4) = \frac{4}{36}$
$Pr(5) = \frac{2}{36}$
$E(X) = \sum_{\omega \in \Omega} X(\omega) \cdot Pr(\omega) = 1.9\overline{4}$

Verteilungsfunktion $Y(i, j)$

$j \backslash i$	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**
1	6	11	16	21	26	31
2	7	12	17	22	27	32
3	8	13	18	23	28	33
4	9	14	19	24	29	34
5	10	15	20	25	30	35
6	11	16	21	26	31	36

$Im(Y) = \{6, 7, \cdots, 36\}$
$Im(X) = \{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$
$Pr(6) = \frac{1}{36}, Pr(7) = \frac{1}{36}, Pr(8) = \frac{1}{36}, Pr(9) = \frac{1}{36}, Pr(10) = \frac{1}{36}, Pr(11) = \frac{2}{36}$
$Pr(12) = \frac{1}{36}, Pr(13) = \frac{1}{36}, Pr(14) = \frac{1}{36}, Pr(15) = \frac{1}{36}, Pr(16) = \frac{2}{36}, Pr(17) = \frac{1}{36}$
$Pr(18) = \frac{1}{36}, Pr(19) = \frac{1}{36}, Pr(20) = \frac{1}{36}, Pr(21) = \frac{2}{36}, Pr(22) = \frac{1}{36}, Pr(23) = \frac{1}{36}$
$Pr(24) = \frac{1}{36}, Pr(25) = \frac{1}{36}, Pr(26) = \frac{2}{36}, Pr(27) = \frac{1}{36}, Pr(28) = \frac{1}{36}, Pr(29) = \frac{1}{36}$
$Pr(30) = \frac{1}{36}, Pr(31) = \frac{2}{36}, Pr(32) = \frac{1}{36}, Pr(33) = \frac{1}{36}, Pr(34) = \frac{1}{36}, Pr(35) = \frac{1}{36}$
$Pr(36) = \frac{1}{36}$
$E(Y) = \sum\limits_{\omega \in \Omega} X(\omega) \cdot Pr(\omega) = 21$

Verteilungsfunktion $Z(i, j)$

$j \backslash i$	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**
1	6	11	16	21	26	31
2	11	12	17	22	27	32
3	16	17	18	23	28	33
4	21	22	23	24	29	34
5	26	27	28	29	30	35
6	31	32	33	34	35	36

$Im(Z) = \{6, 11, 12, 16, 17, 18, 21, 22, 23, 24, 26, 27, 28, 29, 30, 31, 32, 33, 34, 35, 36\}$
$E(Z) = \sum\limits_{\omega \in \Omega} X(\omega) \cdot Pr(\omega) = 24.\overline{8}$

Aufgabe 3
geg: $Pr(A) = \frac{3}{5}, Pr(B) = \frac{1}{3}$
Riehenfolge: $BAABBAABBAABBAABBA....$
ges: Wahrscheinlichkeit Pr, dass $Bob(B)$ also erstes Trifft.

$Pr = \frac{1}{3} + (\frac{2}{3})^1 \cdot (\frac{2}{5})^2 \cdot \frac{1}{3} + (\frac{2}{3})^2 \cdot (\frac{2}{5})^2 \cdot \frac{1}{3} + (\frac{2}{3})^3 \cdot (\frac{2}{5})^4 \cdot \frac{1}{3} + (\frac{2}{3})^4 \cdot (\frac{2}{5})^4 \cdot \frac{1}{3} + \cdots =$
$= \frac{1}{3} + \sum\limits_{i=0}^{\infty} ((\frac{2}{3})^{2 \cdot i+1} \cdot (\frac{2}{5})^{2 \cdot i+2} \cdot \frac{1}{3} + (\frac{2}{3})^{2 \cdot i+2} \cdot (\frac{2}{5})^{2 \cdot i+2} \cdot \frac{1}{3})$
$= \frac{1}{3} + \frac{1}{3} \cdot \sum\limits_{i=0}^{\infty} ((\frac{2}{3})^{2 \cdot i+1} \cdot (\frac{2}{5})^{2 \cdot i+2} + (\frac{2}{3})^{2 \cdot i+2} \cdot (\frac{2}{5})^{2 \cdot i+2})$
$= \frac{1}{3} + \frac{1}{3} \cdot \sum\limits_{i=0}^{\infty} (\frac{2}{5})^{2 \cdot i+2} \cdot ((\frac{2}{3})^{2 \cdot i+1} + (\frac{2}{3})^{2 \cdot i+2})$
$= \frac{1}{3} + \frac{1}{3} \cdot \sum\limits_{i=0}^{\infty} (\frac{2}{5})^{2 \cdot i+2} \cdot ((\frac{2}{3})^{2 \cdot i+1} + (\frac{2}{3}) \cdot (\frac{2}{3})^{2 \cdot i+1})$

$$
\begin{aligned}
&= \tfrac{1}{3} + \tfrac{1}{3} \cdot \sum_{i=0}^{\infty} (\tfrac{2}{5})^{2\cdot i+2} \cdot (\tfrac{2}{3})^{2\cdot i+1} \cdot (1 + \tfrac{2}{3}) \\
&= \tfrac{1}{3} + \tfrac{1}{3} \cdot \sum_{i=0}^{\infty} (\tfrac{2}{5})^{2\cdot i+2} \cdot (\tfrac{2}{3})^{2\cdot i+1} \cdot \tfrac{5}{3} \\
&= \tfrac{1}{3} + \tfrac{5}{9} \cdot \sum_{i=0}^{\infty} (\tfrac{2}{5})^{2\cdot i+2} \cdot (\tfrac{2}{3})^{2\cdot i+1} \\
&= \tfrac{1}{3} + \tfrac{5}{9} \cdot \sum_{i=0}^{\infty} \tfrac{2}{5} \cdot (\tfrac{2}{5})^{2\cdot i+1} \cdot (\tfrac{2}{3})^{2\cdot i+1} \\
&= \tfrac{1}{3} + \tfrac{10}{45} \cdot \sum_{i=0}^{\infty} (\tfrac{4}{15})^{2\cdot i+1} \\
&= \tfrac{1}{3} + \tfrac{10}{45} \cdot \tfrac{4}{15} \cdot \sum_{i=0}^{\infty} (\tfrac{4}{15})^{2\cdot i} \\
&= \tfrac{1}{3} + \tfrac{10}{45} \cdot \tfrac{4}{15} \cdot \tfrac{1}{1-(\frac{4}{15})^2} \\
&= \tfrac{83}{209}
\end{aligned}
$$