Logik und diskrete Mathematik, Übung 8

Andreas Timmermann, Mat: 4994606, Alena Dudarenok, Mat: 4999780, Gruppe: 3

17. Dezember 2015

Aufgabe 1
a)

geg: $\binom{n}{k} = \sum\limits_{m=k-1}^{n-1} \binom{m}{k-1}$ für alle $1 \leq k \leq n$

I.A.: $k = 1, \binom{n}{1} = n = \sum\limits_{m=0}^{n-1} \binom{m}{0} = n \cdot 1$

I.V.: $\binom{n}{x} = \sum\limits_{m=x-1}^{n-1} \binom{m}{x-1}, 1 \leq x \leq k$

I.S.:

$\binom{n}{k+1} = \binom{n-1}{k+1} + \binom{n-1}{k}$

$= \binom{n-1}{k+1} + \binom{n}{k} - \binom{n-1}{k-1}$

$= \binom{n}{k} + \binom{n-1}{k+1} - \binom{n-1}{k-1}$

$= \sum\limits_{m=k-1}^{n-1} \binom{m}{k-1} + \sum\limits_{m=k}^{n-2} \binom{m}{k} - \sum\limits_{m=k-2}^{n-2} \binom{m}{k-2}$

$= \sum\limits_{m=k-1}^{n-1} \binom{m}{k-1} - \sum\limits_{m=k-1}^{n-1} \binom{m-1}{k-2} + \sum\limits_{m=k}^{n-2} \binom{m}{k}$

$= \sum\limits_{m=k-1}^{n-1} (\binom{m}{k-1} - \binom{m-1}{k-2}) + \sum\limits_{m=k}^{n-2} \binom{m}{k}$

$= \sum\limits_{m=k-1}^{n-1} \binom{m-1}{k-1} + \sum\limits_{m=k}^{n-2} \binom{m}{k}$

$= \sum\limits_{m=k-1}^{n-1} \binom{m-1}{k-1} + \sum\limits_{m=k-1}^{n-1} \binom{m-1}{k}$

$= \sum\limits_{m=k-1}^{n-1} (\binom{m-1}{k-1} + \binom{m-1}{k})$

$= \sum\limits_{m=k-1}^{n-1} \binom{m}{k}$

$= \sum\limits_{m=k}^{n-1} \binom{m}{k} = \binom{n}{k+1}$

b)

zu zeigen: $(1-\sqrt{5})^n + (1+\sqrt{5})^n$ ist ganzzahlig.
Beweis:
$(1-\sqrt{5})^n + (1+\sqrt{5})^n = \sum\limits_{k=0}^{n} \binom{n}{k} 1^{n-k} \cdot ((-1)\cdot\sqrt{5})^k + \sum\limits_{k=0}^{n} \binom{n}{k} 1^{n-k} \cdot (\sqrt{5})^k$
$= \sum\limits_{k=0}^{n} (\binom{n}{k} 1^{n-k} \cdot ((-1)\cdot\sqrt{5})^k + \binom{n}{k} 1^{n-k} \cdot (\sqrt{5})^k)$
$= \sum\limits_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (1^{n-k} \cdot ((-1)\cdot\sqrt{5})^k + 1^{n-k} \cdot (\sqrt{5})^k)$
$= \sum\limits_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (1^{n-k} \cdot (((-1)\cdot\sqrt{5})^k + (\sqrt{5})^k))$
$= \sum\limits_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (1^{n-k} \cdot (\sqrt{5})^k \cdot ((-1)^k + 1))$
$\Rightarrow \forall k$ mit $2|k$ gilt $\binom{n}{k}(1 \cdot (5^{\frac{k}{2}} \cdot (1+1)))$ ist ganzzahlig und $\forall k$ mit $2 \nmid k$ gilt $\binom{n}{k}(1 \cdot (\sqrt{5}^k \cdot (-1+1))) = 0$ ist auch ganzzahlig.
$\Rightarrow \sum\limits_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (1^{n-k} \cdot (\sqrt{5})^k \cdot ((-1)^k + 1))$ ist ganzzahlig.

Aufgabe 2
geg: Lucas Zahlen $L_0 = 2, L_1 = 1, L_n = L_{n-1} + L_{n-2}, n \geq 2$
ges: $\sum\limits_{i=0}^{n} L_i^2 = L_n \cdot L_{n+1} + 2$

I.A.: $n = 2$, $\sum\limits_{i=0}^{2} L_i^2 = 2^2 + 1^2 + 3^2 = 14 = 3 \cdot 4 + 2 = 14$

I.V.: $\sum\limits_{i=0}^{m} L_i^2 = L_m \cdot L_{m+1} + 2, 2 \leq m \leq n$

I.S.:
$\sum\limits_{i=0}^{n+1} L_i^2 = \sum\limits_{i=0}^{n} L_i^2 + L_{n+1}^2$
$= L_n \cdot L_{n+1} + 2 + L_{n+1}^2 = L_{n+1} \cdot (L_n + L_{n+1}) + 2$
$= L_{n+1} \cdot L_{n+2} + 2$

Aufgabe 3
a)
Wir reservieren für jede Frage 4 Punkte. $80 - 4 * 10 = 40$ Punkte bleiben noch zu verteilen.
Wir haben uns nach dem Script Seite 60 für die Formel für beliebig (N nicht unterscheidbar, R unterscheidbar) entschieden.
Verteilungsmöglichkeiten bleiben dann $\binom{40+10-1}{10-1} = \frac{49!}{40! \cdot 10!} = 2054455634$ Möglichkeiten die Punkte zu verteilen

b)
geg: $x + y + z + w = 16, x, y, z, w \in \mathbb{N}$

Wieder haben wir uns nach dem Script Seite 60 für die Formel für beliebig (N nicht unterscheidbar, R unterscheidbar) entschieden.
$\binom{n+r-1}{r-1} = \binom{19}{3} = 969$

Aufgabe 4
Poker: 5 Karten aus 52 mit 4 verschiedenen Farben.

a)
geg: 5 Karten aus 52
Lösung:
(1) als erstes haben wir schonmal 2 Karten mit der gleichen Farbe auf der Hand. (Schubfachprinzip)
(2) $\binom{11}{2}$ Möglichkeiten 2 Farben mit der Farbe zu ziehen von der wir schon 2 Karten haben.
(3) $\binom{(52-4)-(13-4)}{1} = \binom{39}{1} = 39$ Möglichkeiten eine Karte zu haben, die nicht die Farbe hat, die man braucht.
(4) $1 \cdot \binom{11}{2} \cdot 39 = 2145$ gesamte Möglichkeiten ein Blatt mit 4 Karten gleicher Farbe und eine Karte anderer Farbe zu bekommen.

b)
ges: Möglichkeiten ein Fullhouse zu bekommen. 3 Farben der gleichen Werte und 2 Karten einer anderen gleichen Werte.

1) $13 \cdot \binom{4}{3}$ Möglichkeiten 3 Karten der selben Werte zu bekommen.
2) $12 \cdot \binom{4}{2}$ Möglichkeiten 2 Karten der selben Werte aber anderen Wert als bei 1) zu bekommen.
3) Insgesamt $13 \cdot \binom{4}{3} \cdot 12 \cdot \binom{4}{2} = 624$ Möglichkeiten einen Fullhouse zu bekommen.

c)
$\binom{52}{13} \cdot 4!$ Möglichkeiten Bridgekarten zu bekommen bei 4 unterscheidbaren Spielern.

Aufgabe 5
30 Aufträge für 9 Weihnachtsmänner.
a)
$9! \cdot \binom{30}{9}$ viele Möglichkeiten 30 Aufträge an 9 Weihnachtsmänner zu verteilen.
$9! \cdot \binom{30-9}{9} = 9! \cdot \binom{21}{9}$ viele Möglichkeiten 30 Aufträge an 9 Weihnachtsmänner zu verteilen, wenn jeder mindestens 1 Autrag bearbeiten soll.

b)
5 Bäume an 5 Plätzen. Und 200 Einheitskugeln
$\binom{200}{5} = \frac{200!}{195! \cdot 5!} = 2535650040$ Möglichkeiten die 200 Kugeln auf die 5 Bäume zu verteilen.
$\binom{200-5*30}{5} = 2118760$ Möglichkeiten die 200 Kugeln auf die 5 Bäume zu verteilen, wenn jeder mindestens 30 Kugeln haben soll.
c)
30^9 Möglichkeiten für 9 Arbeiter aus 30 Getränken zu bestellen.