Secção de Matemática Aplicada e Análise Numérica
Departamento de Matemática/Instituto Superior Técnico

Matemática Computacional (LMAC) – Projeto 3

Data de Entrega: 07:59 de 25 de Abril

Instruções

Cada grupo deve entregar um relatório e os *scripts* de Matlab por e-mail para

`jvideman@math.tecnico.ulisboa.pt`.

O relatório, em pdf, não deve ultrapassar as 15 páginas e deve conter as respostas às questões e alguns exemplos do funcionamento dos programas implementados. Os grupos podem elaborar o relatório em Word ou LaTex, desde que o submetam em pdf. Se quiserem usar LaTex podem pedir um template ao professor.

1. [6 valores] Os polinómios de Legendre P_n definem-se recursivamente pelas fórmulas

$$P_{n+1}(x) = \frac{2n+1}{n+1}\, x\, P_n(x) - \frac{n}{n+1}\, P_{n-1}(x)\,, \quad n = 1, 2, \ldots\,, \qquad P_0(x) = 1\,, \quad P_1(x) = x\,.$$

a) Trace os gráficos dos polinómios de Legendre P_k, $k = 1, \ldots, 8$, no intervalo $[-1, 1]$. Verifique graficamente que cada P_k tem k zeros reais e distintos (marque-os no gráfico), todos eles situados no intervalo $]-1, 1[$ de forma simétrica em relação à origem. Verifique ainda, com o comando `integral`, que (para $k, j \leq 8$)

$$\int_{-1}^{1} P_k(x)\, P_j(x)\, dx = \begin{cases} \dfrac{2}{2k+1}\,, & \text{se } k = j \\ 0\,, & \text{se } k \neq j\,. \end{cases}$$

b) Defina uma função `Matlab` que receba um inteiro $n \geq 1$ e devolva uma lista com os n zeros do polinómio de Legendre P_n.

Seja $I(f) = \int_{-1}^{1} f(x)\, dx$ e seja

$$Q_n(f) = \sum_{j=0}^{n} A_j\, f(x_j) \quad n \geq 0\,,$$

uma quadratura numérica para a aproximação de $I(f)$ em que os nodos de integração $x_j, j = 0, \ldots, n$, são os $n+1$ zeros do polinómio de Legendre P_{n+1}. Se os pesos da quadratura Q_n forem determinados através das condições que garantem que Q_n é exata para polinómios de maior grau possível, obtemos a quadratura de Gauss-Legendre com grau de precisão igual a $2n+1$.

c) Escreva um código `Matlab` que receba um inteiro $n \geq 1$ e devolva os pesos $A_j, j = 0, \ldots, n$, da quadratura de Gauss-Legendre Q_n. Os pesos da quadratura devem ser calculados pelo método dos coeficientes indeterminados. Note-se que, automaticamente

$$0 = I(x^k) = Q_n(x^k)\,, \quad k = 1, 3, \ldots, 2n-1, 2n+1\,,$$

ou seja, o método dos coeficientes indeterminados conduz a um sistema linear de $n+1$ equações a $n+1$ incógnitas formado pelas condições

$$I(x^k) = Q_n(x^k)\,, \quad k = 0, 2, \ldots, 2n\,.$$

d) Escreva um programa `Matlab` que receba um inteiro $n \geq 1$ e uma função f, e devolva um valor aproximado do integral $I(f) = \int_{-1}^{1} f(x)\,\mathrm{d}x$, calculado pela quadratura de Gauss-Legendre $Q_n(f)$.

e) Utilize o seu programa para aproximar os integrais

$$\int_{-1}^{1} \frac{x^2}{1+25x^2}\,\mathrm{d}x\,, \qquad \int_{0}^{\pi} \sin(\sin 5x)\,\mathrm{d}x\,.$$

Considere $n = 1, 2, \ldots, 8$. Compare com os valores obtidos pela instrução `integral`. Repare que o segundo integral deve primeiro ser transformado para o intervalo $[-1, 1]$, utilizando a mudança de variável

$$[a, b] \ni t \mapsto x \in [-1, 1]\,: \qquad t = \frac{b-a}{2}\,x + \frac{b+a}{2}\,.$$

2. [6 valores] Dadas as funções $K : [a, b] \times [a, b] \to \mathbb{R}$ e $f : [a, b] \to \mathbb{R}$, considere a equação integral

$$y(x) + \int_a^b K(x,t)\,y(t)\,dt = f(x), \qquad a \leq x \leq b, \tag{1}$$

onde $y : [a, b] \to \mathbb{R}$ é a função incógnita. Define o integral

$$I(K, y)(x) := \int_a^b K(x,t)\,y(t)\,dt,$$

e considere a seguinte aproximação de $I(K, y)$ por uma quadratura numérica

$$I(K, y)(x) \approx I_n(K, y)(x) = \sum_{i=0}^{n} w_i\,K(x, t_i)\,y(t_i)\,,$$

onde $w_i \in \mathbb{R}$ são os pesos e $t_i \in [a, b]$ os nodos da fórmula de quadratura I_n.

Seja $\tilde{y} = \tilde{y}(x)$ a função que satisfaz a equação

$$\tilde{y}(x) + I_n(K, \tilde{y})(x) = f(x), \qquad a \leq x \leq b\,. \tag{2}$$

Nos nodos de integração t_i, a equação (2) reduz-se a um sistema linear

$$\tilde{y}(t_j) + I_n(K, \tilde{y})(t_j) = f(t_j), \qquad j = 0, \ldots, n\,. \tag{3}$$

Resolvendo o sistema (3) e utilizando os valores $\tilde{y}(t_j)$ na quadratura I_n em (2), obtém-se uma expressão para a solução aproximada $\tilde{y}$ em todo o intervalo $[a, b]$:

$$\tilde{y}(x) = f(x) - I_n(K, \tilde{y})(x)\,, \qquad a \leq x \leq b.$$

a) Escreva um código `Matlab` que, dados a, b, K, f, n, produza uma aproximação da solução da equação (1) pelo método descrito acima. Para testar o seu programa, considere a equação integral

$$\frac{x\sqrt{x}}{1+x} + 2\int_0^1 \frac{\sqrt{x\,t}}{(1+x\,t^2)^2}\,y(t)\,dt = y(x)\,, \qquad 0 \leq x \leq 1\,, \tag{4}$$

e aproxime o integral $I(K, y)$ pelas seguintes regras de quadratura:

i. a regra dos trapézios composta com $2, 4, 8, 16$ e 32 pontos (usando a função `trapz` do `Matlab`);

ii. a regra de Simpson composta com $3, 5, 7, 11, 15$ e 19 pontos (programando a regra de Simpson);

iii. a regra de Gauss-Legendre com $n = 2, 3, 4$ e 5 (recorrendo ao código do Problema 1).

b) Confirme que $y(x) = \sqrt{x}$ satisfaz a equação (4). Trace os gráficos das soluções exata e aproximada.

c) Apresente, numa tabela, os pontos t_j, os valores $\tilde{y}(t_j)$ e $y(t_j)$, e os erros $|y(t_j) - \tilde{y}(t_j)|$, $j = 0, \ldots, n$.

d) Analise a ordem da convergência dos métodos compostos **i** e **ii**. Comente.

3. [8 valores] Considere o problema de valor inicial

$$\begin{cases} y'''(t) = f(t, y(t), y'(t), y''(t)) \,, & t > a \,, \\ y(a) = \alpha \,, \quad y'(a) = \beta \,, \quad y''(a) = \gamma \,. \end{cases} \tag{5}$$

a) Escreva o problema (5) na forma

$$\begin{cases} \mathbf{y}'(t) = \mathbf{F}(t, \mathbf{y}) \,, & t > a \,, \\ \mathbf{y}(a) = \mathbf{y}_0 \,, \end{cases} \tag{6}$$

onde $\mathbf{F} : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ e $\mathbf{y} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$ e $\mathbf{y}_0 \in \mathbb{R}^3$.

Considere o seguinte método de Runge-Kutta de 3 etapas para a resolução numérica de (6)

$$\begin{cases} \mathbf{y}_{j+1} = \mathbf{y}_j + \dfrac{h}{8}\Big(2\,\mathbf{k}_1 + 3\mathbf{k}_2 + 3\mathbf{k}_3\Big) \,, \quad j = 0, 1, \ldots \,, \\ \mathbf{k}_1 = \mathbf{F}(t_j, \mathbf{y}_j) \,, \qquad \mathbf{k}_2 = \mathbf{F}\left(t_j + \dfrac{2h}{3}, \mathbf{y}_j + \dfrac{2h}{3}\,\mathbf{k}_1\right) \,, \\ \mathbf{k}_3 = \mathbf{F}\left(t_j + \dfrac{2h}{3}, \mathbf{y}_j + \dfrac{2h}{3}\,\mathbf{k}_2\right) \,, \end{cases} \tag{7}$$

b) Sejam

$$f(t, y, y', y'') = -8\,y^2\, y' - \frac{4\,t}{1+t^2}\, y'' \,, \qquad a = 0 \,, \quad \alpha = 1 \,, \quad \beta = 0 \,, \quad \gamma = -2 \,,$$

$$t_j = jh \,, \quad j = 0, \ldots, n \,. \qquad h = \frac{T}{n} \,.$$

i. Verifique que $y(t) = (1+t^2)^{-1}$ satisfaz o problema (5).

ii. Escreva um código `Matlab` que, recebendo $f, a, \alpha, \beta, \gamma$ e n, devolve uma aproximação numérica da solução do problema (5) no intervalo $[0, T]$, obtida pelo método (7). Considere $T = 10$ e $n = 5, 10, 20, 40, \ldots$.

c) Trace os gráficos das soluções aproximadas e da solução exata. Apresente, numa tabela, os pontos t_k, os valores y_k e $y(t_k)$ e os erros $|y(t_k) - y_k|$, $k = 1, \ldots, n$.

d) Estude, com base nos resultados obtidos, a ordem de convergência do método.