

Análise Numérica

1º Período 2022/2023, IST

Trabalho Computacional - Parte 1

Notas prévias: O relatório deve ser o mais breve possível, com respostas item a item, e não ultrapassar as 10 páginas. As repostas devem directas excepto quando pedido para comentar/discutir/justificar os resultados. Quando necessário, inclua as representações gráficas e/ou tabelas pedidas no relatório. Os programas e algoritmos utilizados deverão ser implementados em *Matlab* ou em *Octave*. Os scripts correspondentes a cada questão devem ser enviados, em anexo, com extensão .m . Utilize o formato *function* sempre que possível. Nas respostas escritas indique qual ou quais os ficheiros .m que devem ser executados para confirmação dos resultados obtidos.

Pode obter o programa *Matlab* seguindo as instruções em:

<https://si.tecnico.ulisboa.pt/software/matlab>.

Para obter o programa *Octave*, bastará procurar em <https://octave.org/>

Data de entrega: a acertar com alunos

1. Pretende-se interpolar a função definida em $[-3, 3]$ por

$$f(x) = \sum_{m=1}^M \frac{1}{3x^2 + 3 + m \log(m)}$$

utilizando os seus valores nas abcissas $x_k = \frac{3+k}{n}$ com n e M números naturais fixos e $k = 0, \dots, n$, contidos no intervalo $[0, 3]$.

- (a) Escreva um script que, receba como entrada n e M , bem como a função a interpolar e a sua derivada, e que devolva um gráfico do polinómio interpolador de Hermite correspondente, a sua derivada, em comparação com os graficos de f e f' .
- (b) Escreva um script que receba como entrada os mesmos parâmetros da alínea anterior, e devolva o gráfico do spline cúbico com condições na derivada.
- (c) Considere uma amostra de valores para n , que inclua $n = 100$, bem como uma amostra de valores de M que inclua $M = 10^6$, e aplique os programa das alíneas anteriores e comente os resultados, comparando os erros obtidos com as estimativas teóricas. Experimente agora a apresentar o resultado no intervalo $[-3, 3]$ e comente o observado.

2. Considere que cada elemento do vector $\mathbf{f} = \{f_0, \dots, f_{N-1}\}$ é aproximado por

$$\tilde{f}_k = \frac{\cos(8x_k)}{18} \sum_{m=1}^{36} (mx_k - \lfloor mx_k \rfloor)$$

com $x_k = \frac{2\pi k}{N}$ e $\lfloor mx_k \rfloor$ a parte inteira de mx_k .

- (a) Aplique um filtro regularizador discreto $\mu_E^{[0]}$ para obter $\tilde{\mathbf{f}} * \mu^{[0]}$, apresentando os resultados, para alguns valores de N e de E .
 - (b) Determine a interpolação trigonométrica dos dados perturbados \tilde{f}_k explicitando a utilização da Transformada de Fourier, tendo como argumento o N .
 - (c) Implemente a Transformada Rápida de Fourier e aplique a \tilde{f}_k , para vários valores de N . Compare o tempo e a complexidade de cálculo com a alínea anterior.
 - (d) Tomando como pontos de quadratura (x_k, \tilde{f}_k) , e $n = 20$, utilize o filtro regularizador $\mu_\varepsilon^{[1]}$ para obter uma aproximação da derivada f' . Compare os resultados para diferentes ε .
3. Considere o maior número mecanográfico do vosso grupo com maior número de dígitos distintos.
- (a) Determine uma fórmula para o cálculo de $f''(z)$ com base nos valores $f(z + (5 - n_k)h)$, e faça um estudo de erro tendo em conta os erros de arredondamento. Aqui n_1, \dots, n_m representam dígitos diferentes do número mecanográfico citado.
 - (b) Aplique a fórmula deduzida em a) a uma função $f(x) = \cos(3x^2 + 5x)$ e outra escolhida por si, tendo em vista a comparação com os valores exactos para diferentes h , com $z = kh \in [0, 1 + 3/10]$. Comente os resultados.