LABORATOR nr. 2
CALCUL NUMERIC
(titular de curs: prof. univ. dr. Bica Alexandru Mihai)

METODE ITERATIVE PENTRU REZOLVAREA SISTEMELOR LINIARE

Metoda lui Iacobi

Pentru rezolvarea sistemului

$$\begin{cases} a_{11}\cdot x_1 + ... + a_{1n}\cdot x_n = b_1 \\ .... \\ a_{n1}\cdot x_1 + ... + a_{nn}\cdot x_n = b_n \end{cases}$$

scris sub foma vectorială $A\cdot x = b$, unde $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & ... & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & ... & a_{2n} \\ ... & ... & ... & ... \\ a_{n1} & a_{n2} & ... & a_{nn} \end{pmatrix}$, $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ ... \\ x_n \end{pmatrix}$ şi $b = \begin{pmatrix} b_1 \\ ... \\ b_n \end{pmatrix}$, dacă $a_{ii} \neq 0, \quad \forall i = \overline{1,n}$, atunci se împarte fiecare ecuaţie de ordin i cu a_{ii}, iar astfel obţinem sistemul echivalent

$$x_i = \frac{b_i}{a_{ii}} - \frac{a_{i1}}{a_{ii}}\cdot x_1 - ... - \frac{a_{i,i-1}}{a_{ii}}\cdot x_{i-1} - \frac{a_{i,i+1}}{a_{ii}}\cdot x_{i+1} - ... - \frac{a_{in}}{a_{ii}}\cdot x_n, \quad i = \overline{1,n}.$$

Notând

$$\alpha = \begin{pmatrix} 0 & -\frac{a_{12}}{a_{11}} & ... & -\frac{a_{1n}}{a_{11}} \\ -\frac{a_{21}}{a_{22}} & 0 & ... & -\frac{a_{2n}}{a_{22}} \\ ... & ... & ... & ... \\ -\frac{a_{n1}}{a_{nn}} & -\frac{a_{n2}}{a_{nn}} & ... & 0 \end{pmatrix} \quad \text{şi} \quad \beta = \begin{pmatrix} \frac{b_1}{a_{11}} \\ ..... \\ \frac{b_n}{a_{nn}} \end{pmatrix}$$

obţinem noua formă sistemului,

$$x = \alpha\cdot x + \beta$$

care conduce la construirea şirului iterativ

$$x^{(k+1)} = \alpha\cdot x^{(k)} + \beta, \quad k = 0,1,2,...$$

Scierea pe compunente a acestui proces iterativ este:

$$x_i^{(k+1)} = \sum_{j=1}^{n} \alpha_{ij}\cdot x_j^{(k)} + \beta_i = \sum_{j=1, j\neq i}^{n} \left(-\frac{a_{i,j}}{a_{i.i}}\right)\cdot x_j^{(k)} + \frac{b_i}{a_{ii}} \quad , \quad i = \overline{1,n}. \tag{1}$$

Dacă $a_{ii} \neq 0, \quad \forall i = \overline{1,n}$, atunci sistemul liniar are soluţie unică, iar şirului iterativ de mai sus este convergent către această soluţie.

Algoritmul metodei lui Jacobi:

I. Date de intrare: n numărul de ecuaţii şi de necunoscute
matricea sistemului $A = (a_{ij})_{i,j=\overline{1,n}}$
vectorul termenilor liberi $b = (b_1, ..., b_n)$
$\varepsilon > 0$ eroarea admisă

II. Date de ieşire: k, ultima iteraţie, $x[i,k]$, $i = \overline{1,n}$, aproximaţia soluţiei la ultima iteraţie
sau un mesaj de eroare

III. Paşii algoritmului

1. Se citesc n şi ε
2. Se citeşte matricea A şi vectorul b : $a[i,j]$, $i,j = \overline{1,n}$, $b[i]$, $i = \overline{1,n}$
3. Se verifică condiţia de convergenţă:

{
Pentru $i = \overline{1,n}$
$U[i] := 0$
Pentru $j = \overline{1,n}, j \neq i$ calculeaza $U[i] := U[i] + |a[i,j]|$
Daca $|a[i,i]| \leq U[i]$ atunci tipăreşte mesajul " Nu se poate aplica metoda lui Iacobi "; Stop
}

4. Pentru $i = \overline{1,n}$ calculează $x[i,0] := \frac{b[i]}{a[i,i]}$
5. Pentru $k \geq 1$ calculează
Pentru $i = \overline{1,n}$ calculează
$S[i] := 0$
Pentru $j = \overline{1,n}$ calculează
daca $j \neq i$ executa $S[i] := S[i] + a[i,j] \cdot x[j,k-1]$
$x[i,k] := (b[i] - S[i]) / a[i,i]$
Cât timp
$$\max_{i=\overline{1,n}} |x[i,k] - x[i,k-1]| \geq \varepsilon$$
6. Tipăreşte k
Pentru $i = \overline{1,n}$ tipăreşte $x[i,k]$; Stop.

Exemplu numeric:

Cu $\varepsilon = 10^{-3}$ să se aplice algoritmul lui Iacobi (de mai sus) pentru rezolvarea sistemului liniar,
$$\begin{cases} 5x_1 + x_2 + x_3 = 10 \\ x_1 + 6x_2 + 4x_3 = 4 \\ x_1 + x_2 + 10x_3 = -7. \end{cases}$$
Pentru verificare, soluţia exactă este
$$x_1 = 2, \quad x_2 = 1, \quad x_3 = -1.$$

Metoda lui Gauss-Seidel

Daca la fiecare iteraţie k utilizăm termenii vectorului $x^{(k)}$ calculaţi anterior în cadrul acestei iteraţii, se obţine o modificare a metodei lui Iacobi, rezultând algoritmul metodei Gauss-Seidel. Condiţia de convergenţă este aceeaşi: $|a_{i,i}| > \sum_{j=1, j\neq i}^{n} |a_{i,j}|$, $\forall i = \overline{1,n}$.

Scrierea iterativă a şirului $\left(x^{(k)}\right)_{k\in\mathbb{N}}$, $x^{(k+1)} = \alpha \cdot x^{(k)} + \beta, \quad k \in \mathbb{N}$, devine în acest caz:

1. pentru $i = \overline{1,n}$ calculează $x_i^{(0)} := \frac{b_i}{a_{ii}}$,
2. pentru $k \in \mathbb{N}$, calculează

$$x_1^{(k+1)} := \frac{b_1 - \sum_{j=2}^{n} a_{1j} \cdot x_j^{(k)}}{a_{11}} \tag{2}$$

$$x_2^{(k+1)} := \frac{b_2 - a_{21} \cdot x_1^{(k+1)} - \sum_{j=3}^{n} a_{2j} \cdot x_j^{(k)}}{a_{22}} \tag{3}$$

....

$$x_i^{(k+1)} := \frac{b_i - \sum_{j=1}^{i-1} a_{ij} \cdot x_j^{(k+1)} - \sum_{j=i+1}^{n} a_{ij} \cdot x_j^{(k)}}{a_{ii}} \tag{4}$$

....

$$x_n^{(k+1)} := \frac{b_n - \sum_{j=1}^{n-1} a_{nj} \cdot x_j^{(k+1)}}{a_{nn}} \tag{5}$$

Observaţie: Formulele (2), (3), (4), (5) se scriu în mod concentrat astfel:

calculează

$$x_1^{(k+1)} := \frac{b_1 - \sum_{j=2}^{n} a_{1j} \cdot x_j^{(k)}}{a_{11}}$$

iar pentru $i = \overline{2,n}$ calculează

$$x_i^{(k+1)} := \frac{b_i - \sum_{j=1}^{i-1} a_{ij} \cdot x_j^{(k+1)} - \sum_{j=i+1}^{n} a_{ij} \cdot x_j^{(k)}}{a_{ii}}. \tag{6}$$

Pentru implementarea algoritmului, la această metodă iterativă,

$$x_1^{(k+1)} := \frac{b_1 - \sum\limits_{j=2}^{n} a_{1j} \cdot x_j^{(k)}}{a_{11}}, \quad k = 0, 1, 2, ...$$

iar formula (1) devine

$$x_i^{(k+1)} := \frac{b_i - \sum\limits_{j=1}^{i-1} a_{ij} \cdot x_j^{(k+1)} - \sum\limits_{j=i+1}^{n} a_{ij} \cdot x_j^{(k)}}{a_{ii}}, \quad i = \overline{2, n}$$

cu $x_i^{(0)} := \frac{b_i}{a_{ii}}$, $i = \overline{1, n}$.

Exemplu numeric:

Cu $\varepsilon = 10^{-3}$ să se aplice algoritmul Gauss-Seidel pentru rezolvarea sistemului liniar,

$$\begin{cases} 5x_1 + x_2 + x_3 = 10 \\ x_1 + 6x_2 + 4x_3 = 4 \\ x_1 + x_2 + 10x_3 = -7. \end{cases}$$

Pentru verificare, soluţia exactă este

$$x_1 = 2, \quad x_2 = 1, \quad x_3 = -1.$$