LABORATOR nr. 12
CALCUL NUMERIC
(titular de curs: prof. univ. dr. Bica Alexandru Mihai)

FUNCTII SPLINE CUBICE

Algoritmul functiei spline cubice naturale generata de conditii bilocale

I. Date de intrare: a, b capetele intervalului
n numarul de subintervale ale diviziunii
$x[i]$, $i = \overline{0, n}$ nodurile de interpolare
$y[i]$, $i = \overline{0, n}$ valorile pe noduri

II. Date de iesire: punctele $(u[k], s[k])$, $k = \overline{0, 1000}$ in care se calculeaza functia spline

III. Pasii algoritmului

1. Calculeaza $q =: \frac{b-a}{1000}$. Pentru $i = \overline{1, n}$ calculeaza $h_i = x[i] - x[i-1]$
Pentru $i = \overline{1, n-1}$ calculeaza

$$a_i := 2$$

si

$$d_i := \frac{6}{h_i + h_{i+1}} \cdot \left(\frac{y_{i+1} - y_i}{h_{i+1}} - \frac{y_i - y_{i-1}}{h_i} \right).$$

Pentru $i = \overline{2, n-2}$ calculeaza

$$b_i := \frac{h_i}{h_i + h_{i+1}}, \quad c_i := 1 - b_i$$

Executa

$$b_{n-1} := \frac{h_{n-1}}{h_{n-1} + h_n}, \quad c_1 := \frac{h_2}{h_1 + h_2}$$

2. Calculeaza, $\alpha_1 := \frac{c_1}{a_1}$ si pentru $i = \overline{2, n-2}$, calculeaza

$$\omega_i =: a_i - \alpha_{i-1} \cdot b_i, \qquad \alpha_i := \frac{c_i}{\omega_i},$$

3. Calculeaza

$$\omega_{n-1} := a_{n-1} - \alpha_{n-2} \cdot b_{n-1}.$$

4. Calculeaza $z_1 := \frac{d_1}{2}$ si pentru $i = \overline{2, n-1}$, calculeaza

$$z_i := \frac{d_i - b_i \cdot z_{i-1}}{\omega_i}.$$

5. Calculeaza $M_{n-1} := z_{n-1}$ si pentru $i = \overline{n-2, 1}$, calculeaza prin recurenta inapoi,

$$M_i := z_i - \alpha_i \cdot M_{i+1}.$$

Calculeaza $M_0 = M_n = 0$.

6. Pentru $k = \overline{0,1000}$ calculeaza $u[k] := a + k \cdot q$

Pentru $j = \overline{1,n}$

Daca $x[j-1] \leq u[k] \leq x[j]$

atunci calculeaza

$$s[k] := \left[\frac{(u[k] - x_{j-1})^3}{6h_j} - \frac{h_j\,(u[k] - x_{j-1})}{6} \right] \cdot M_j + \left[\frac{(x_j - u[k])^3}{6h_j} - \frac{h_i\,(x_j - u[k])}{6} \right] \cdot M_{j-1} +$$

$$+ \frac{x_j - u[k]}{h_j} \cdot y_{j-1} + \frac{u[k] - x_{j-1}}{h_j} \cdot y_j$$

7. Pentru $k = \overline{0,1000}$ tipareste (deseneaza) punctele $(u[k], s[k])$; STOP.

Exemplu numeric:

La momentele 7.5 (adica ora 7^{30}), 10.5 (ora 10^{30}), 13, 15.5 (ora 15^{30}), 18, 21, 24 si 27 (adica ora 3 A. M. a doua zi) s-au masurat valorile glicemiei, obtinandu-se 130, 121, 128, 96, 122, 138, 114, 90 (masurate in mg/dl). Sa se aproximeze glicemia acestui pacient de la orele 12, 14, si 23 folosind functia spline cubica naturala de interpolare.

Datele de intrare sunt: $n = 7$, $a = 7.5$, $b = 27$, valorile sunt date in tabel

$x_i,\ i = \overline{0,n}$: 7.5	10.5	13	15.5	18	21	24	27
$y_i,\ i = \overline{0,n}$: 130	121	128	96	122	138	114	90

Algoritmul metodei de interpolare a lui Akima

I. Date de intrare: a, b capetele intervalului

n numarul de subintervale ale diviziunii

$x[i]$, $i = \overline{0,n}$ niodurile de interpolare

$y[i]$, $i = \overline{0,n}$ valorile pe noduri

II. Date de iesire: punctele $(u[k], s(k))$, $k = \overline{0,1000}$ in care se calculeaza functia spline

III. Pasii algoritmului

1. Calculeaza $h =: \frac{b-a}{1000}$. Pentru $i = \overline{0,n-1}$ calculeaza pantele

$$p_i := \frac{y_{i+1} - y_i}{x_{i+1} - x_i}$$

2. Calculeaza

$$u := 3p_0 - 2p_1$$

$$v := 2p_0 - p_1$$

$$p_n := 2p_{n-1} - p_{n-2}$$

$$p_{n+1} := 3p_{n-1} - 2p_{n-2}$$

3. Daca $|p_1 - p_0| + |v - u| \neq 0$ atunci calculeaza

$$m_0 := \frac{|p_1 - p_0| \cdot v + |v - u| \cdot p_0}{|p_1 - p_0| + |v - u|}$$

altfel

$$m_0 := \frac{v + p_0}{2}$$

si daca $|p_2 - p_1| + |p_0 - v| \neq 0$ atunci calculeaza

$$m_1 := \frac{|p_2 - p_1| \cdot p_0 + |p_0 - v| \cdot p_1}{|p_2 - p_1| + |p_0 - v|}$$

altfel

$$m_1 := \frac{p_0 + p_1}{2}$$

4. Pentru $i = \overline{2, n}$, daca $|p_{i+1} - p_i| + |p_{i-1} - p_{i-2}| \neq 0$ atunci calculeaza

$$m_i := \frac{|p_{i+1} - p_i| \cdot p_{i-1} + |p_{i-1} - p_{i-2}| \cdot p_i}{|p_{i+1} - p_i| + |p_{i-1} - p_{i-2}|}$$

altfel,

$$m_i := \frac{p_{i-1} + p_i}{2}$$

5. Pentru $k = \overline{0, 1000}$ calculeaza $u[k] := a + k \cdot h$
   Pentru $j = \overline{1, n}$
   Daca $x[j-1] \leq u[k] \leq x[j]$
   atunci calculeaza

$$s[k] := \frac{(x_j - u[k])^2 (u[k] - x_{j-1})}{(x_j - x_{j-1})^2} \cdot m_{j-1} - \frac{(u[k] - x_{j-1})^2 (x_j - u[k])}{(x_j - x_{j-1})^2} \cdot m_j +$$

$$+ \frac{(x_j - u[k])^2 [2 (u[k] - x_{j-1}) + (x_j - x_{j-1})]}{(x_j - x_{j-1})^3} \cdot y_{j-1} + \frac{(u[k] - x_{j-1})^2 [2 (x_j - u[k]) + (x_j - x_{j-1})]}{(x_j - x_{j-1})^3} \cdot y_j$$

6. Pentru $k = \overline{0, 1000}$ tipareste (deseneaza) punctele $(u[k], s[k])$; STOP.

Exemplu numeric:

La momentele 7.5 (adica ora 7^{30}), 10.5 (ora 10^{30}), 13, 15.5 (ora 15^{30}), 18, 21, 24 si 27 (adica ora 3 A. M. a doua zi) s-au masurat valorile glicemiei, obtinandu-se 130, 121, 128, 96, 122, 138, 114, 90 (masurate in mg/dl). Sa se aproximeze glicemia acestui pacient de la orele 12, 14, si 23 folosind functia spline Akima cubica de interpolare.

Datele de intrare sunt: $n = 7$, $a = 7.5$, $b = 27$, valorile sunt date in tabel

x_i, $i = \overline{0, n}$:	7.5	10.5	13	15.5	18	21	24	27
y_i, $i = \overline{0, n}$:	130	121	128	96	122	138	114	90