LABORATOR nr. 6
CALCUL NUMERIC
(titular de curs: prof. univ. dr. Bica Alexandru Mihai)

Metoda aproximatiilor succesive pentru sisteme de ecuatii neliniare

Metoda aproximatiilor succesive pentru sisteme neliniare

Algoritmul metodei aproximaţiilor succesive pentru sisteme neliniare

I. Date de intrare:
x_0 şi y_0 iteraţia iniţială (date de tip double)
F şi G funcţii de doua variabile de tip double
$\varepsilon > 0$ eroarea admisă (dată de tip double)
II. Date de ieşire:
x_n şi y_n ultima iteratie ce aproximeaza soluţia cu eroarea admisă
III. Paşii algoritmului
1. Calculează

$$\begin{cases} x_1 := F(x_0, y_0) \\ y_1 := G(x_0, y_0), \end{cases}$$

2. Pornind cu $n \geq 1$, cât timp

$$|x_n - x_{n-1}| \geq \varepsilon \ \text{ sau } \ |y_n - y_{n-1}| \geq \varepsilon$$

Calculează

$$\begin{cases} x_{n+1} := F(x_n, y_n) \\ y_{n+1} := G(x_n, y_n), \end{cases}$$

3. Tipăreşte n, x_n, y_n. STOP.

Exemple numerice:
1. Sa se aproximeze solutia, cu ambele coordonate pozitive, a sistemului

$$\begin{cases} f(x, y) = 2x^2 - xy - 5x + 1 = 0 \\ g(x, y) = x + 3\lg x - y^2 = 0. \end{cases}$$

Se va considera

$$F(x, y) = \sqrt{\frac{x(y+5) - 1}{2}}$$

si $G(x, y) = \sqrt{x + 3\lg x}$ si atunci sistemul devine

$$\begin{cases} x = \sqrt{\frac{x(y+5)-1}{2}} \\ y = \sqrt{x + 3\lg x} \end{cases}$$

luandu-se ca prima aproximatie punctul $(x_0, y_0) = (3.5, 2.2)$. Se va considera vecinatatea lui (x_0, y_0) ca fiind

$$V = \{(x, y) : |x - x_0| \leq 0.1, |y - y_0| \leq 0.1\}$$

si pe acest domeniu, vom avea $M = \max\{0.54 + 0.27, 0.42 + 0\} = 0.81 < 1$. Aplicand procedeul iterativ

$$\begin{cases} x_{n+1} := F(x_n, y_n) \\ y_{n+1} := G(x_n, y_n), \end{cases}$$

vom obtine aproximatia cu patru cifre semnificative exacte $(x_6, y_6) = (3.487, 2.262)$.

2. Sa se verifice metoda pe sistemul simetric

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 5 \\ xy = 2 \end{cases}$$

care are soluţiile $(-2, -1), (-1, -2), (1, 2), (2, 1)$ şi care se scrie sub forma

$$\begin{cases} x = \sqrt{5 - y^2} = F(x, y) \\ y = \frac{2}{x} = G(x, y) \end{cases}$$

în vecinătatea V a punctului $(2, 1)$,

$$V = \{(x, y) : |x - 2| \leq 0.1, |y - 1| \leq 0.1\},$$

unde sunt îndeplinite condiţiile din teorema 1. Se va lua $\varepsilon = 10^{-4}$.

Observatie: Sistemul precedent are solutiile $(2, 1), (1, 2), (-1, -2), (-2, -1)$ si in vecinatatea fiecarei solutii se considera cate o pereche de functii F, G. Astfel, in vecinatatea punctului $(1, 2)$ se ia $F(x, y) = \frac{2}{y}$ si $G(x, y) = \sqrt{5 - x^2}$. Pentru solutia $(-1, -2)$ avem $F(x, y) = \frac{2}{y}$ si $G(x, y) = -\sqrt{5 - x^2}$, iar pentru solutia $(-2, -1)$ avem $F(x, y) = -\sqrt{5 - y^2}$ si $G(x, y) = \frac{2}{x}$.

METODA GAUSS-SEIDEL PENTRU SISTEME DE ECUATII NELINIARE

Consideram sistemul neliniar

$$\begin{cases} x = F_1(x, y, z) \\ y = F_2(x, y, z) \\ z = F_3(x, y, z) \end{cases}$$

pentru care sirul iterativ generat de metoda Gauss-Seidel este

$$\begin{cases} x_{n+1} = F_1(x_n, y_n, z_n) \\ y_{n+1} = F_2(x_{n+1}, y_n, z_n) \\ z_{n+1} = F_3(x_{n+1}, y_{n+1}, z_n) \end{cases}, \quad n \in \mathbb{N}$$

obtinand urmatorul algoritm.

Algoritmul metodei Gauss-Seidel

I. Date de intrare: coordonatele punctului iniţial x_0, y_0, z_0 (date de tip double)

expresiile functiilor F_1, F_2, F_3 de trei variabile reale declarate ca date de tip double

$\varepsilon > 0$ eroarea admisă

II. Date de ieşire: n, numărul de iteraţii efectuate

x_n, y_n, z_n aproximaţia soluţiei

III. Paşii algoritmului

1. Calculeaza

$$\begin{cases} x_1 = F_1(x_0, y_0, z_0) \\ y_1 = F_2(x_0, y_0, z_0) \\ z_1 = F_3(x_0, y_0, z_0) \end{cases}$$

2. Pornind cu $n \geq 1$, cât timp

$$|x_n - x_{n-1}| \geq \varepsilon \quad \text{sau} \quad |y_n - y_{n-1}| \geq \varepsilon \quad \text{sau} \quad |z_n - z_{n-1}| \geq \varepsilon$$

Calculează

$$\begin{cases} x_{n+1} = F_1(x_n, y_n, z_n) \\ y_{n+1} = F_2(x_{n+1}, y_n, z_n) \\ z_{n+1} = F_3(x_{n+1}, y_{n+1}, z_n) \end{cases}$$

3. Tipăreşte n, x_n, y_n, z_n; STOP.

Exemplu numeric:

Pentru sistemul

$$\begin{cases} 2x^2 - yz - 5x + 1 = 0 \\ y^2 - 2x - \ln z = 0 \\ z^2 - xy - 2z - 8 = 0 \end{cases}$$

adus in forma echivalenta

$$\begin{cases} x = \sqrt{0.5\,(yz + 5x - 1)} \\ y = \sqrt{2x + \ln z} \\ z = \sqrt{xy + 2z + 8} \end{cases}$$

se alege punctul initial $(x_0, y_0, z_0) = (10, 10, 10)$ se construieste sirul iterativ

$$\begin{cases} x_{n+1} = \sqrt{0.5\,(y_n z_n + 5x_n - 1)} \\ y_{n+1} = \sqrt{2x_{n+1} + \ln z_n} \\ z_{n+1} = \sqrt{x_{n+1} y_{n+1} + 2z_n + 8} \end{cases}, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Sa se aplice algoritmul Gauss-Seidel considerand $\varepsilon = 0.001$.

Observatie: In cazul sistemelor de doua ecuatii neliniare

$$\begin{cases} x = F(x, y) \\ y = G(x, y) \end{cases}$$

sirul iterativ al metodei Gauss-Seidel va fi

$$\begin{cases} x_{n+1} = F(x_n, y_n) \\ y_{n+1} = G(x_{n+1}, y_n) \end{cases}, \quad n \in \mathbb{N}$$

iar algoritmul anterior se modifica astfel:

I. Date de intrare:

x_0 şi y_0 iteraţia iniţială (date de tip double)

F şi G funcţii de doua variabile de tip double

$\varepsilon > 0$ eroarea admisă (dată de tip double)

II. Date de ieşire: n, numărul de iteraţii efectuate

x_n şi y_n ultima iteratie ce aproximeaza soluţia cu eroarea admisă

III. Paşii algoritmului

1. Calculează

$$\begin{cases} x_1 := F(x_0, y_0) \\ y_1 := G(x_0, y_0), \end{cases}$$

2. Pornind cu $n \geq 1$, cât timp

$$|x_n - x_{n-1}| \geq \varepsilon \ \text{ sau } \ |y_n - y_{n-1}| \geq \varepsilon$$

Calculează

$$\begin{cases} x_{n+1} := F(x_n, y_n) \\ y_{n+1} := G(x_{n+1}, y_n), \end{cases}$$

3. Tipăreşte n, x_n, y_n. STOP.