LABORATOR nr. 9
CALCUL NUMERIC
(titular de curs: prof. univ. dr. Bica Alexandru Mihai)

POLINOMUL DE INTERPOLARE AL LUI LAGRANGE. FORMULA LUI NEWTON

Polinomul de interpolare dat prin formula lui Newton este

$$N_m f(x) = f(x_0) + \sum_{i=1}^{m} (x - x_0) \cdot ... \cdot (x - x_{i-1}) \cdot [x_0, x_1, ..., x_i; f] = \quad (1)$$

$$= f(x_0) + \sum_{i=1}^{m} (x - x_0) \cdot ... \cdot (x - x_{i-1}) \cdot D^i f_0$$

iar restul dat cu ajutorul diferentelor divizate

$$R_m f(x) = u(x) \cdot [x, x_0, x_1, ..., x_m; f].$$

Se observa ca in formula (1) s-au folosit doar diferentele divizate de pe latura superioara a tabloului de diferente.

Observatie: Din formula (1) rezulta ca polinomul de interpolare al lui Newton verifica relatia de recurenta

$$N_i f(x; x_0, ..., x_i) = N_{i-1} f(x; x_0, ..., x_{i-1}) + (x - x_0) \cdot ... \cdot (x - x_{i-1}) \cdot [x_0, ..., x_i; f],$$

$\forall i = \overline{1, m}$, unde $N_0 f(x) = f(x_0)$. Aceasta proprietate permite construirea recurenta a acestui polinom (deci programare mai facila) precum si oprirea algoritmului odata atinsa precizia dorita, dupa ce in prealabil s-au reordonat nodurile in functie de distanta lor pina la punctul in care dorim sa aproximam functia f. Astfel se obtin iterativ polinoamele lui Newton de gradele 1, 2, ...,m. Astfel, daca

$$|N_i f(\alpha) - N_{i-1} f(\alpha)| < \varepsilon$$

atunci algoritmul se opreste la ordinul i, adica la polinomul $N_i f(x; x_0, ..., x_i)$. Insa gradul maxim al polinomului generat de algoritmul de mai jos este m.

Algoritmul polinomului lui Newton:

I. Date de intrare:

m gradul maxim al polinomului de interpolare (data de tip int)

a_i, $i = \overline{0, m}$: nodurile de interpolare (sir de date de tip double)

f expresia functiei, sau valorile ei pe nodurile de interpolare $f(a_i)$, $i = \overline{0, m}$

ε eroarea absoluta maxima admisibila

$\alpha \in [a, b]$ punctul in care se aproximeaza valoarea functiei f

II. Date de iesire:

$N_i f(\alpha)$ valoarea calculata cu precizia ceruta ($i \leq m$ este gradul polinomului pentru care s-a atins aceasta precizie) sau un mesaj de eroare in care se specifica faptul ca in conditiile date nu s-a putut calcula o aproximatie cu precizia dorita.

III. Pasii algoritmului:

1. Se calculeaza diferentele divizate $[a_0,...,a_i;f] = D^i f_0 = d[i,0], \quad i = \overline{0,m}$, astfel

$$d[0,i] := f(a_i), \quad \text{pentru} \quad i = \overline{0,m}$$

Pentru $j = \overline{1,m}$

Pentru $i = \overline{0,m-j}$ calculeaza

$$d[j,i] := \frac{d[j-1,i+1] - d[j-1,i]}{a_{i+j} - a_i}$$

2. $i := 0; \quad N_0 f(\alpha) = f(a_0); \; p[0] := 1$

3. Incepand cu $i \geq 1$ daca $i \leq m$ atunci executa $p[i] := p[i-1] \cdot (\alpha - a_{i-1})$

$$N_i f(\alpha) := N_{i-1} f(\alpha) + p[i] \cdot d[i,0]$$

daca $|N_i f(\alpha) - N_{i-1} f(\alpha)| < \varepsilon$ atunci tipareste $N_i f(\alpha)$. STOP.

4. Daca $|N_m f(\alpha) - N_{m-1} f(\alpha)| < \varepsilon$ atunci tipareste $N_m f(\alpha)$. STOP.

Altfel, tipareste " Nu s-a putut calcula o aproximatie cu precizia dorita ". STOP.

Probleme propuse:

1. Valorile functiei $f(x) = \sqrt[3]{x}$ sunt date pe noduri in tabelul

x	1.0	1.1	1.3	1.5	1.6
$f(x)$	1	1.032	1.091	1.145	1.17

Folosind algoritmul lui Newton, sa se calculeze $f(1.15)$ cu o eroare absoluta maxima de 10^{-2}.

2. Valorile unei functii f sunt date pe noduri prin intermediul tabelului

x	1.00	1.08	1.13	1.20	1.27	1.31	1.38
$f(x)$	1.17520	1.30254	1.38631	1.50946	1.21730	1.22361	1.23470

Folosind algoritmul lui Newton, sa se calculeze cu o precizie de 10^{-3} valorile functiei in punctele 1.134, 1.151, 1.185.

Polinomul lui Lagrange cu metoda lui Newton (trasarea graficului)

In calcule, la constructia formulei de interpolare a lui Newton pentru polinomul lui Lagrange, este util tabloul de diferente divizate:

x	f	Df	$D^2 f$	$D^3 f$	....	$D^{m-1} f$	$D^m f$
x_0	f_0	Df_0	$D^2 f_0$	$D^3 f_0$	....	$D^{m-1} f_0$	$D^m f_0$
x_1	f_1	Df_1	$D^2 f_1$	$D^3 f_1$	....	$D^{m-1} f_1$	
x_2	f_2	Df_2	$D^2 f_2$	$D^3 f_2$	....		
....	....	......	......	.....			
x_{m-2}	f_{m-2}	Df_{m-2}	$D^2 f_{m-2}$				
x_{m-1}	f_{m-1}	Df_{m-1}					
x_m	f_m						

unde $f_i = f(x_i), \quad i = \overline{0,m}$.

La constructia tabelului s-a folosit formula de recurenta

$$D^k f(x_i) = \frac{D^{k-1} f(x_{i+1}) - D^{k-1} f(x_i)}{x_{i+k} - x_i}, \quad k = \overline{1,m}, \quad i = \overline{0, m-k}.$$

Algoritm pentru polinomul de interpolare al lui Lagrange cu metoda lui Newton (cu trasarea graficului)

I. Date de intrare:

m gradul maxim al polinomului de interpolare (data de tip int)

$a[i]$, $i = \overline{0,m}$: nodurile de interpolare (sir de date de tip double)

f expresia functiei, sau valorile ei pe nodurile de interpolare $f[i]$, $i = \overline{0,m}$

$u[j] \in [a[0], a[m]]$, $j = \overline{0,1000}$, punctele in care se aproximeaza valorile functiei f

II. Date de iesire: $N_m f(u[j])$, $j = \overline{0,1000}$, aproximatiile valorilor $f(u[j])$, $j = \overline{0,1000}$, prin polinomul lui Lagrange

III. Pasii algoritmului:

1. Se calculeaza diferentele divizate $D^i f_0 = d[i,0]$, $\quad i = \overline{0,m}$, astfel

$$d[0,i] := f[i], \quad \text{pentru} \quad i = \overline{0,m}$$

Pentru $j = \overline{1,m}$

Pentru $i = \overline{0, m-j}$ calculeaza

$$d[j,i] := \frac{d[j-1, i+1] - d[j-1, i]}{a[i+j] - a[i]}$$

2. Calculeaza $h = \frac{a[m]-a[0]}{1000}$

Pentru $j = \overline{0,1000}$ calculeaza $u[j] := a[0] + j \cdot h$; $N[0,j] = f[0]$; $p[0] := 1$

Pentru $i = \overline{1,m}$ executa

$$p[i] := p[i-1] \cdot (u[j] - a[i-1])$$
$$N[i,j] := N[i-1,j] + p[i] \cdot d[i,0]$$

3. Pentru $j = \overline{0,1000}$ tipareste (deseneaza) punctul $(u[j], N[m,j])$. Stop.

Exemplu:

$m = 4$, se construieste polinomul de grad 4 care interpoleaza datele din tabelul:

x	1.0	1.1	1.3	1.5	1.6
$f(x)$	1	1.032	1.091	1.145	1.17

in vederea aproximarii functiei $f(x) = \sqrt[3]{x}$.