LABORATOR nr. 13
CALCUL NUMERIC
(titular de curs: prof. univ. dr. Bica Alexandru Mihai)

FORMULE DE CUADRATURA DE TIP TRAPEZOIDAL

1. **Algoritmul cuadraturii dreptunghiului:**

I. Date de intrare:
    a, b: capetele intervalului
    n: numarul de subintervale al diviziunii
    f : expresia functiei de sub integrala

II. Date de iesire: $D-$valoarea aproximativa a acestei integrale.

III. Pasii algoritmului:

1. Se citesc datele: a, b, n
2. Se creaza procedura de introducere a functiei f
3. Se construiesc nodurile diviziunii:
    Pentru $i = \overline{0, n}$ calculeaza

$$x[i] = a + \frac{i \cdot (b-a)}{n}$$

4. Calculul sumei integrale:
    $S := 0$
    Pentru $i = \overline{1, n}$ calculeaza

$$S := S + f(x[i])$$

5. Calculul aproximatiei integralei:

$$D := \left(\frac{(b-a)}{n}\right) \cdot S$$

6. Afisarea rezultatului: Tipareste D; STOP.

Exemple numerice:

1. Sa se utilizeze formula de cuadratura a dreptunghiului cu $a = 0$, $b = 1$, $f(x) = \frac{1}{x+1}$, pentru n=100 la calculul integralei

$$\int_0^1 \frac{1}{x+1} dx$$

si sa se compare rezultatul cu valoarea exacta a acestei integrale, $\ln 2 \simeq 0.69315$.

2. Sa se utilizeze formula de cuadratura a dreptunghiului $a = 0$, $b = 1$, $f(x) = \frac{4}{x^2+1}$, pentru n=100 la calculul integralei

$$\pi = \int_0^1 \frac{4}{x^2+1} dx$$

si sa se compare rezultatul cu valoarea exacta a acestei integrale $\pi \simeq 3.14159265359$.

Algoritmul cuadraturii trapezului

I. Date de intrare:

a, b: capetele intervalului

n: numarul de subintervale al diviziunii

f : expresia functiei de sub integrala

II. Date de iesire: $T-$valoarea aproximativa a acestei integrale.

III. Pasii algoritmului:

1. Se citesc datele: a,b,n
2. Se creaza procedura de introducere a functiei f
3. Se construiesc nodurile diviziunii:

Pentru $i = \overline{0, n}$ calculeaza

$$x[i] = a + \frac{i \cdot (b-a)}{n}$$

4. Calculul sumei integrale:

$S := 0$

Pentru $i = \overline{1, n}$ calculeaza

$$S := S + (f(x[i]) + f(x[i-1]))$$

5. Calculul aproximatiei integralei:

$$T := \left(\frac{(b-a)}{2 \cdot n}\right) \cdot S$$

6. Afisarea rezultatului: Tipareste T; STOP.

Exemple numerice:

1. Sa se utilizeze formula de cuadratura a trapezului cu $a = 0$, $b = 1$, $f(x) = \frac{1}{x+1}$, pentru n=10 si n=100 la calculul integralei

$$\int_0^1 \frac{1}{x+1} dx$$

si sa se compare rezultatul cu valoarea exacta a acestei integrale, $\ln 2 \simeq 0.69315$. Sa se compare rezultatul cu cel furnizat de cuadratura dreptunghiului.

2. Sa se utilizeze formula de cuadratura a trapezului cu $a = 0$, $b = 1$, $f(x) = \frac{4}{x^2+1}$, pentru n=10 si n=100 la calculul integralei

$$\int_0^1 \frac{4}{x^2+1} dx$$

si sa se compare rezultatul cu valoarea exacta a acestei integrale $\pi \simeq 3.14159265359$. Sa se compare rezultatul cu cel furnizat de cuadratura dreptunghiului.

3. Sa se utilizeze formula de cuadratura a trapezului cu $a = 0$, $b = 1.5$, $f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot e^{-\frac{x^2}{2}}$ pentru n=10 si n=100, la calculul integralei lui Laplace

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{1.5} e^{-\frac{x^2}{2}} dx.$$

4. Sa se utilizeze formula de cuadratura a trapezului pentru n=20 la calculul integralei

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1 - \epsilon^2 \sin^2 x} dx$$

cu $\epsilon = 0,016729$ si apoi sa se calculeze o aproximatie pentru lungimea orbitei Pamantului in jurul Soarelui

$$L(P) = 4c \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1 - \epsilon^2 \sin^2 x} dx,$$

unde $c = 149,6 \times 10^6$ km. Se va lua $a = 0$, $b = \frac{\pi}{2}$, $f(x) = 4c \cdot \sqrt{1 - \epsilon^2 \sin^2 x}$

Algoritmul cuadraturii corectate a trapezului

I. Date de intrare:

a,b capetele intervalului de integrare

dfa, dfb : valorile derivatei pe noduri

n, numarul nodurilor

f functia ce se integreaza

II. Date de iesire : S, valoarea aproximativa a integralei $\int_a^b f(x)dx$

III. Pasii algoritmului

1. Pentru $i = \overline{0,n}$ calculeaza

$$x_i := a + i \cdot \frac{b-a}{n}$$

2. Calculeaza

$$T := 0$$

Pentru $i = \overline{1,n}$ calculeaza

$$T := T + [f(x_{i-1}) + f(x_i)]$$

3. Calculeaza

$$S := \left(\frac{(b-a)}{2 \cdot n}\right) \cdot T - \left(\frac{(b-a)^2}{12 \cdot n^2}\right) \cdot (dfb - dfa)$$

4. Tipareste S. STOP.

Exemple numerice:

1. Sa se utilizeze formula de cuadratura corectata a trapezului cu $a = 0$, $b = 1$, $f(x) = \frac{1}{x+1}$, pentru n=10 si $dfa = -1$, $dfb = -\frac{1}{4}$, la calculul integralei

$$\int_0^1 \frac{1}{x+1} dx$$

si sa se compare rezultatul cu valoarea exacta a acestei integrale, $\ln 2 \simeq 0.69315$. Sa se compare rezultatul cu cel furnizat de cuadratura trapezului.

2. Sa se utilizeze formula de cuadratura corectata a trapezului cu $a = 0$, $b = 1$, $f(x) = \frac{4}{x^2+1}$, pentru n=10, n=100, si $dfa = 0$, $dfb = -2$, la calculul integralei

$$\int_0^1 \frac{4}{x^2+1} dx$$

si sa se compare rezultatul cu valoarea exacta a acestei integrale $\pi \simeq 3.14159265359$. Sa se compare rezultatul cu cel furnizat de cuadratura trapezului.

3. Sa se utilizeze formula de cuadratura corectata a trapezului cu $a = 0$, $b = 1.5$, $f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot e^{-\frac{x^2}{2}}$ pentru n=10, n=100 si $dfa = 0$, $dfb = -0.19428$, la calculul integralei lui Laplace

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{1.5} e^{-\frac{x^2}{2}} dx.$$

Sa se compare rezultatul cu cel furnizat de cuadratura trapezului.

4. Sa se utilizeze formula de cuadratura corectata a trapezului pentru n=20 si $dfa = 0$, $dfb = 0$ la calculul integralei

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1 - \epsilon^2 \sin^2 x} dx$$

cu $\epsilon = 0,016729$ si apoi sa se calculeze o aproximatie pentru lungimea orbitei Pamantului in jurul Soarelui

$$L(P) = 4c \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1 - \epsilon^2 \sin^2 x} dx,$$

unde $c = 149,6 \times 10^6$ km. Sa se compare rezultatul cu cel furnizat de cuadratura trapezului. Se va lua $a = 0$, $b = \frac{\pi}{2}$, $f(x) = 4c \cdot \sqrt{1 - \epsilon^2 \sin^2 x}$