LABORATOR nr. 8
CALCUL NUMERIC
(titular de curs: prof. univ. dr. Bica Alexandru Mihai)

POLINOMUL LUI TAYLOR

Polinomul lui Taylor in vecinatatea $[a-h, a+h]$ a punctului $x = a$ este,

$$T_n f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{(x-a)^k}{k!} \cdot f^{(k)}(a) \tag{1}$$

iar estimarea erorii de aproximare a functiei f va fi

$$|R_n f(x)| \leq \frac{1}{(n+1)!} \cdot |x-a|^{n+1} \cdot \left\| f^{(n+1)} \right\|_C \qquad \text{daca} \quad f \in C^{n+1}[a-h, a+h].$$

Din formula (1) se observa ca polinomul lui Taylor poate fi obtinut recurent prin

$$T_0 f(x) = f(a)$$

$$T_k f(x) = T_{k-1} f(x) + \frac{(x-a)^k}{k!} \cdot f^{(k)}(a), \qquad \text{pentru} \qquad k = \overline{1,n}.$$

Astfel, se obtine algoritmul urmator :

Algoritm pentru polinomul lui Taylor

I. Date de intrare:

n gradul polinomului de interpolare

a nodul de interpolare

$f^{(k)}(a)$, $k = \overline{0,n}$, valorile pe nodul a

$u \in [a, b]$ punctul in care se aproximeaza valoarea functiei f

II. Date de iesire:

$T_n f(u)$ aproximatia lui $f(u)$ prin polinomul lui Taylor

III. Pasii algoritmului:

1. fie $f_0 := f(a)$, $p(0) := 1$ si pentru $k = \overline{1,n}$

$$f_k := f^{(k)}(a)$$

$$p(k) := p(k-1) \cdot k$$

2. fie $T_0 f(u) = f(a)$ si pentru $k = \overline{1,n}$

$$T_k f(u) = T_{k-1} f(u) + \frac{1}{p(k)} \cdot (u-a)^k \cdot f_k$$

3. Tipareste $T_n f(u)$. STOP.

Exemple numerice:

1. Pentru $n = 7, a = 0, u = 1,\ f^{(k)}(a) = 1, \quad k = \overline{0, n}$ sa se calculeze $T_7 f(u)$ si sa se compare rezultatul cu e. Se obtine aici o aproximare a numarului e folosind polinomul lui Taylor pentru interpolarea functiei $f(x) = e^x$.

2. Pentru $n = 7,\ u = \frac{\pi}{4},\ a = 0, f^{(0)}(a) = 0, f^{(1)}(a) = 1, f^{(2)}(a) = 0, f^{(3)}(a) = -1, f^{(4)}(a) = 0, f^{(5)}(a) = 1, f^{(6)}(a) = 0, f^{(7)}(a) = -1$ sa se calculeze $T_7 f(u)$ si sa se compare rezultatul cu $\sin \frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}$. Se obtine o aproximare a numarului $\sqrt{2}$ folosind polinomul lui Taylor pentru interpolarea functiei $f(x) = \sin x$. Sa se aplice apoi algoritmul pentru $u = \frac{\pi}{18} = 10^0$ aproximand astfel numarul $\sin\left(10^0\right)$.

3. Sa se construiasca o problema similara pentru $f(x) = \cos x$, $n = 8$ si $u = \frac{\pi}{6}$ cu $a = 0, f^{(0)}(a) = 1,\ f^{(1)}(a) = 0, f^{(2)}(a) = -1, f^{(3)}(a) = 0, f^{(4)}(a) = 1, f^{(5)}(a) = 0, f^{(6)}(a) = -1, f^{(7)}(a) = 0, f^{(8)}(a) = 1$ (comparand rezultatul obtinut cu $\cos \frac{\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}}{2}$ se va obtine o aproximatie pentru $\sqrt{3}$).

Observatie: Se poate construi si algoritmul pentru trasarea graficului polinomului de aproximare locala Taylor.

Algoritm pentru polinomul lui Taylor (cu trasarea graficului)

I. Date de intrare:

n gradul polinomului de interpolare

a nodul de interpolare, b capatul drept al intervalului

$f[k], \quad k = \overline{0, n},$ valorile derivatei pe nodul a

$u[j] \in [a, b],\ j = \overline{0, 1000}:$ punctele in care se aproximeaza valoarea functiei f

II. Date de iesire:

$T[n, j],\ j = \overline{0, 1000}$ aproximatia lui $f(u[j])$ prin polinomul lui Taylor

III. Pasii algoritmului:

1. fie $p[0] := 1,\ h = \frac{b-a}{1000}$
2. Pentru $j = \overline{0, 1000}$ calculeaza $u[j] = a + j \cdot h$ si fie $T[0, j] = f[0]$

pentru $k = \overline{1, n}$

$$p[k] := p[k-1] \cdot k$$

$$T[k, j] = T[k-1, j] + \frac{1}{p[k]} \cdot (u[j] - a)^k \cdot f[k]$$

3. Tipareste (deseneaza punctul $(u[j], T[n, j])$, pentru $j = \overline{0, 1000}$; STOP.

Observatie: Se vor putea implementa polinoamele T1 (verde), T3 (rosu), si T5 (albastru), pentru sinus (negru), respectiv T2, T4, T6 pentru cosinus, precizand valoarea lui n in cazul fiecaruia la pasii 2 si 3 ai algoritmului.

Date numerice:1) Pentru $f(x) = \sin x,\ n = 7,\ a = 0,\ b = \pi,\ f[0] = 0, f[1] = 1,\ f[2] = 0,\ f[3] = -1,\ f[4] = 0,\ f[5] = 1,\ f[6] =0,\ f[7] = -1$

2) Pentru $f(x) = \cos x,\ n = 6,\ a = 0,\ b = \pi,\ f[0] = 1,\ f[1] = 0,\ f[2] = -1, f[3] = 0,\ f[4] = 1,\ f[5] = 0,\ f[6] = -1$