LABORATOR nr. 4
CALCUL NUMERIC
(titular de curs: prof. univ. dr. Bica Alexandru Mihai)

METODA TANGENTEI. CALCULUL RADICALILOR. METODA MODIFICATA A TANGENTEI

Metoda tangentei

Pentru aproximarea solutiei ecuatiei $f(x) = 0$, $x \in [a, b]$, prin metoda tangentei se construieste sirul iterativ

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}, \quad n \in \mathbb{N}$$

alegandu-se iteratia initiala

$$x_0 = \begin{cases} a, & \text{dacă } f(a) \cdot f''(a) > 0 \\ b, & \text{dacă } f(b) \cdot f''(b) > 0. \end{cases}$$

Algoritmul metodei tangentei (a lui Newton)

Algoritmul calculează o aproximaţie a soluţiei izolate $x^* \in (a, b)$ a ecuaţiei $f(x) = 0$, $f \in C[a, b]$, prin metoda lui Newton.

I. Date de intrare:

a, b-capetele intervalului (date de tip *double*)

expresia funcţiei f (de argument real, declarata ca data de tip *double*)

df- expresia derivatei funcţiei f

eps- precizia dorită (data de tip *double*)

dda - valoarea derivatei a doua f'' în a (data de tip *double*)

II. Date de iesire: n, $x[n]$

III. Pasii algoritmului

1: Daca $f(a) \cdot dda > 0$ atunci $x[0] := a$
altfel $x[0] := b$

2: Calculeaza

$$x[1] = x[0] - \frac{f(x[0])}{df(x[0])}$$

3: Pornind cu $n \geq 1$, cat timp : $|x[n] - x[n-1]| \geq eps$
Calculeaza

$$x[n+1] = x[n] - \frac{f(x[n])}{df(x[n])}$$

4. Tipareste n. Tipareste $x[n]$. Stop.

Exemple numerice:

1. Folosind metoda tangentei sa se aproximeze radacina reala a ecuatiei

$$x^3 - x - 1 = 0$$

considerand $f(x) = x^3 - x - 1$, $df(x) = 3x^2 - 1$, $a = 1$, $b = 2$, $dda = 6$ si luand succesiv $\varepsilon = 10^{-4}$, $\varepsilon = 10^{-8}$, $\varepsilon = 10^{-12}$, pentru a vedea numarul de iteratii necesare.

2. Folosind metoda tangentei sa se aproximeze radacina reala a ecuatiei

$$x^5 - 5x + 1 = 0$$

situata in intervalul $(-1, 1)$. Se va lua $f(x) = x^5 - 5x + 1$, $df(x) = 5x^4 - 5$, $a = 0$, $b = 1$, $dda = 11$ si $\varepsilon = 10^{-4}$. Ce constatati ?

Aproximarea radicalilor

Pentru a aproxima $\sqrt[k]{c}$ se poate adapta metoda tangentei folosind functia $f : [0, b] \to \mathbb{R}$ definita prin $f(x) = x^k - c$, unde $b = \max\{1, c\}$. Se obtine sirul recurent

$$x_n = x_{n-1} - \frac{x_{n-1}^k - c}{k x_{n-1}^{k-1}} = \frac{1}{k}\left[(k-1)\, x_{n-1} + \frac{c}{x_{n-1}^{k-1}}\right], \quad n \in \mathbb{N}^*$$

luand $x_0 = b$.

La implementarea algoritmului se va lua $f(x) = x^k - c$ si $df(x) = kx^{k-1}$, iar pasul 1 se va modifica astfel:

"*Daca* $c > 1$ *atunci* $x[0] := c$
altfel $x[0] := 1$"

Exemple numerice:

Sa se aproximeze valorile radicalilor $\sqrt{2}$, $\sqrt{3}$, $\sqrt{5}$, cu metoda tangentei. Sa se aproximeze $\sqrt[3]{2}$, $\sqrt[3]{3}$, si $\sqrt[3]{\frac{1}{2}}$ prin metoda tangentei.

Metoda modificata a tangentei

In loc de a calcula la fiecare iteratie valoarea $f'(x_n)$, se poate utiliza sirul iterativ

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_0)}, \quad n \in \mathbb{N}$$

generat de metoda modificata a tangentei in care la fiecare iteratie se foloseste valoarea $f'(x_0)$ calculata pentru prima iteratie, nefiind necesara definirea expresiei primei derivate.

Algoritmul metodei modificate a tangentei

I. Date de intrare:

a, b-capetele intervalului (date de tip *double*)

expresia funcţiei f (de argument real, declarata ca data de tip *double*)

eps- precizia dorită (data de tip *double*)

dda - valoarea derivatei a doua f'' în a (data de tip *double*)

II. Date de iesire: n, $x[n]$

III. Pasii algoritmului

1: Daca $f(a) \cdot dda > 0$ atunci $x[0] := a$

altfel $x[0] := b$

2: Se precizeaza valoarea primei derivate pe iteratia initiala $d0 := f'(x_0)$

3: Calculeaza

$$x[1] = x[0] - \frac{f(x[0])}{d0}$$

4: Pornind cu $n \geq 1$, cat timp : $|x[n] - x[n-1]| \geq eps$

Calculeaza

$$x[n+1] = x[n] - \frac{f(x[n])}{d0}$$

5. Tipareste n. Tipareste $x[n]$. Stop.

Exemplu numeric:

Se considera $f(x) = x^3 - x - 1$, $a = 1$, $b = 2$, $dda = 6$ si $d0 = 11$. Se va lua succesiv $\varepsilon = 10^{-4}$, $\varepsilon = 10^{-8}$, $\varepsilon = 10^{-12}$, pentru a vedea numarul de iteratii necesare la fiecare alegere a erorii de toleranta ε.