LABORATOR nr. 10
CALCUL NUMERIC
(titular de curs: prof. univ. dr. Bica Alexandru Mihai)

POLINOMUL DE INTERPOLARE HERMITE CU DOUA NODURI DUBLE

Algoritmul polinomului de interpolare Hermite
I. Date de intrare
a, b : nodurile de interpolare (date de tip double)
fa, fb, dfa, dfb: valorile interpolate (date de tip double)
$x \in (a, b)$: punctul in care se realizeaza interpolarea (data de tip double)
II. Date de iesire: $P(x)$
III. Pasi
1. Calculeaza

$$P(x) := \left(\left((b-x)^2 \cdot (x-a)\right) / (b-a)^2\right) \cdot dfa - \left(\left((x-a)^2 \cdot (b-x)\right) / (b-a)^2\right) \cdot dfb +$$
$$+ \left(\left((b-x)^2 \cdot (2 \cdot (x-a) + (b-a))\right) / (b-a)^3\right) \cdot fa +$$
$$+ \left(\left((x-a)^2 \cdot (2 \cdot (b-x) + (b-a))\right) / (b-a)^3\right) \cdot fb$$

2. Tipareste $P(x)$; Stop.

Exemple numerice:

1. $a = \frac{\pi}{6}$, $b = \frac{\pi}{3}$, $f(a) = \frac{1}{2}$, $f(b) = \frac{\sqrt{3}}{2}$, $df(a) = \frac{\sqrt{3}}{2}$, $df(b) = \frac{1}{2}$, iar pentru x se iau pe rand valorile $\frac{\pi}{4}$ si $\frac{\pi}{5}$. Se aproximeaza valorile functiei $\sin x$.

2. $a = 4$, $b = 9$, $f(a) = 2$, $f(b) = 3$, $df(a) = \frac{1}{4}$, $df(b) = \frac{1}{6}$, iar pentru x se iau pe rand valorile 5, 6, 7 si 8. Se aproximeaza valorile functiei $f(x) = \sqrt{x}$.

Algoritmul polinomului cubic de interpolare Hermite (cu trasarea graficului)

I. Date de intrare

a, b : nodurile de interpolare (date de tip double)

fa, fb, dfa, dfb: valorile interpolate (date de tip double)

II. Date de iesire: graficul polinomului Hermite

III. Pasi

1. Calculeaza $h = \frac{b-a}{1000}$
2. Pentru $j = \overline{0, 1000}$ calculeaza $x[j] := a + j \cdot h$

$$P[j] := \left(\left((b - x[j])^2 \cdot (x[j] - a)\right) / (b - a)^2\right) \cdot dfa-$$

$$-\left(\left((x[j] - a)^2 \cdot (b - x[j])\right) / (b - a)^2\right) \cdot dfb+$$

$$+\left(\left((b - x[j])^2 \cdot (2 \cdot (x[j] - a) + (b - a))\right) / (b - a)^3\right) \cdot fa+$$

$$+\left(\left((x[j] - a)^2 \cdot (2 \cdot (b - x[j]) + (b - a))\right) / (b - a)^3\right) \cdot fb$$

3. Pentru $j = \overline{0, 1000}$ tipareste (deseneaza) punctele $(x[j], P[j])$; Stop.

Exemple numerice:

1. Se dau $a = \frac{\pi}{6}$, $b = \frac{\pi}{2}$, $f(a) = \frac{1}{2}$, $f(b) = 1$, $df(a) = \frac{\sqrt{3}}{2}$, $df(b) = 0$. Se traseaza graficul aproximatiei functiei $f(x) = \sin x$ pe intervalul $[\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{2}]$.

2. $a = 4$, $b = 9$, $f(a) = 2$, $f(b) = 3$, $df(a) = \frac{1}{4}$, $df(b) = \frac{1}{6}$, iar pentru x se iau pe rand valorile 5, 6, 7 si 8. Se traseaza graficul aproximatiei functiei $f(x) = \sqrt{x}$.

POLINOMUL LUI BERNSTEIN

Polinomul lui Bernstein de grad m relativ la functia f este definit prin formula:

$$(B_m f)(x) = \sum_{k=0}^{m} p_{m,k}(x) \cdot f\left(\frac{k}{m}\right), \quad \forall x \in [0,1]$$

unde

$$p_{m,k}(x) = C_m^k x^k (1-x)^{m-k} \geq 0, \quad \forall x \in [0,1], \quad \forall k = \overline{0,m}.$$

In programul de mai jos se implementeaza expresiile polinoamelor Bernstein de gradele 1 (culoarea negru), 2 (albastru), 3 (verde) si 4 (rosu) pentru aproximarea functiilor $f(x) = e^x$ (culoarea gri), (si eventual $g(x) = 1 + \sqrt{x}$), pe intervalul $[0,1]$.

Astfel, se vor calcula:

$$B_1(f)(x) = 1 - x + x \cdot e$$

$$B_2(f)(x) = (1-x)^2 + 2 \cdot x \cdot (1-x) \cdot \sqrt{e} + x^2 \cdot e$$

$$B_3(f)(x) = (1-x)^3 + 3 \cdot (1-x)^2 \cdot x \cdot pow(e, \frac{1}{3}) + 3 \cdot x^2 \cdot (1-x) \cdot pow(e, \frac{2}{3}) + x^3 \cdot e$$

$$B_4(f)(x) = (1-x)^4 + 4 \cdot (1-x)^3 \cdot pow(e, \frac{1}{4}) + 6 \cdot (1-x)^2 \cdot x^2 \cdot \sqrt{e} +$$

$$+ 4 \cdot (1-x) \cdot x^3 \cdot pow(e, \frac{3}{4}) + x^4 \cdot e$$

in punctele $x[j] := a + j \cdot h$ cu $h = \frac{1}{1000}$.