LABORATOR nr. 7
CALCUL NUMERIC
(titular de curs: prof. univ. dr. Bica Alexandru Mihai)

METODA GAUSS-SEIDEL PENTRU SISTEME DE ECUATII NELINIARE

Consideram sistemul neliniar

$$\begin{cases} x = F_1(x, y, z) \\ y = F_2(x, y, z) \\ z = F_3(x, y, z) \end{cases}$$

pentru care sirul iterativ generat de metoda Gauss-Seidel este

$$\begin{cases} x_{n+1} = F_1(x_n, y_n, z_n) \\ y_{n+1} = F_2(x_{n+1}, y_n, z_n) \\ z_{n+1} = F_3(x_{n+1}, y_{n+1}, z_n) \end{cases}, \quad n \in \mathbb{N}$$

obtinand urmatorul algoritm.

Algoritmul metodei Gauss-Seidel

I. Date de intrare: coordonatele punctului iniţial x_0, y_0, z_0 (date de tip double)

expresiile functiilor F_1, F_2, F_3 de trei variabile reale declarate ca date de tip double

$\varepsilon > 0$ eroarea admisă

II. Date de ieşire: n, numărul de iteraţii efectuate

x_n, y_n, z_n aproximaţia soluţiei

III. Paşii algoritmului

1. Calculeaza

$$\begin{cases} x_1 = F_1(x_0, y_0, z_0) \\ y_1 = F_2(x_0, y_0, z_0) \\ z_1 = F_3(x_0, y_0, z_0) \end{cases}$$

2. Pornind cu $n \geq 1$, cât timp

$$|x_n - x_{n-1}| \geq \varepsilon \text{ sau } |y_n - y_{n-1}| \geq \varepsilon \text{ sau } |z_n - z_{n-1}| \geq \varepsilon$$

Calculează

$$\begin{cases} x_{n+1} = F_1(x_n, y_n, z_n) \\ y_{n+1} = F_2(x_{n+1}, y_n, z_n) \\ z_{n+1} = F_3(x_{n+1}, y_{n+1}, z_n) \end{cases}$$

3. Tipăreşte n, x_n, y_n, z_n; STOP.

Exemplu numeric:

Pentru sistemul
$$\begin{cases} 2x^2 - yz - 5x + 1 = 0 \\ y^2 - 2x - \ln z = 0 \\ z^2 - xy - 2z - 8 = 0 \end{cases}$$
adus in forma echivalenta
$$\begin{cases} x = \sqrt{0.5\,(yz + 5x - 1)} \\ y = \sqrt{2x + \ln z} \\ z = \sqrt{xy + 2z + 8} \end{cases}$$
se alege punctul initial $(x_0, y_0, z_0) = (10, 10, 10)$ se construieste sirul iterativ
$$\begin{cases} x_{n+1} = \sqrt{0.5\,(y_n z_n + 5x_n - 1)} \\ y_{n+1} = \sqrt{2x_{n+1} + \ln z_n} \\ z_{n+1} = \sqrt{x_{n+1} y_{n+1} + 2z_n + 8} \end{cases}, \quad n \in \mathbb{N}.$$
Sa se aplice algoritmul Gauss-Seidel considerand $\varepsilon = 0.001$.

Observatie: In cazul sistemelor de doua ecuatii neliniare
$$\begin{cases} x = F(x, y) \\ y = G(x, y) \end{cases}$$
sirul iterativ al metodei Gauss-Seidel va fi
$$\begin{cases} x_{n+1} = F\,(x_n, y_n) \\ y_{n+1} = G(x_{n+1}, y_n) \end{cases}, \quad n \in \mathbb{N}$$
iar algoritmul anterior se modifica astfel:

I. Date de intrare:

x_0 şi y_0 iteraţia iniţială (date de tip double)

F şi G funcţii de doua variabile de tip double

$\varepsilon > 0$ eroarea admisă (dată de tip double)

II. Date de ieşire: n, numărul de iteraţii efectuate

x_n şi y_n ultima iteratie ce aproximeaza soluţia cu eroarea admisă

III. Paşii algoritmului

1. Calculează
$$\begin{cases} x_1 := F(x_0, y_0) \\ y_1 := G(x_0, y_0), \end{cases}$$

2. Pornind cu $n \geq 1$, cât timp
$$|x_n - x_{n-1}| \geq \varepsilon \text{ sau } |y_n - y_{n-1}| \geq \varepsilon$$
Calculează
$$\begin{cases} x_{n+1} := F(x_n, y_n) \\ y_{n+1} := G(x_{n+1}, y_n), \end{cases}$$

3. Tipăreşte n, x_n, y_n. STOP.

Exemplu numeric:

Sistemul neliniar simetric

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 5 \\ xy = 2 \end{cases}$$

are soluţiile $(-2,-1)\,,(-1,-2)\,,(1,2)\,,(2,1)$ şi in vecinatatea punctului $(2,1)$ se scrie sub forma

$$\begin{cases} x = \sqrt{5-y^2} = F\,(x,y) \\ y = \frac{2}{x} = G\,(x,y) \end{cases}.$$

Sa se aplice algoritmul lui Gauss-Seidel considerand punctul initial $(x_0, y_0) = (1.5, 1.5)$ si $\varepsilon = 10^{-4}$ si sa se compare numarul de iteratii obtinute cu cel furnizat de metoda clasica a aproximatiilor succesive.

METODA LUI NEWTON PENTRU SISTEME DE ECUATII NELINIARE

Consideram sistemul de ecuatii neliniare

$$\begin{cases} F\,(x,y) = 0 \\ G\,(x,y) = 0 \end{cases}$$

si aproximam solutia acestui sistem utilizand metoda iterativa a lui Newton.

Algoritmul metodei lui Newton pentru sisteme neliniare

I. Date de intrare: coordonatele punctului iniţial x_0, y_0

expresia funcţiei F, expresia funcţiei G

expresiile funcţiilor $dfx = \frac{\partial F}{\partial x}$, $dfy = \frac{\partial F}{\partial y}$, $dgx = \frac{\partial G}{\partial x}$, $dgy = \frac{\partial G}{\partial y}$ (toate cele 6 functii sunt de doua variabile reale)

$\varepsilon > 0$ eroarea admisă

II. Date de ieşire: n, numărul de iteraţii efectuate

x_n, y_n aproximaţia soluţiei

III. Paşii algoritmului

1. Se citesc x_0, y_0, ε
2. Se definesc funcţiile F, G, $\frac{\partial F}{\partial x}$, $\frac{\partial F}{\partial y}$, $\frac{\partial G}{\partial x}$, $\frac{\partial G}{\partial y}$
3. Calculează

$$J\,(x_0,y_0) := \frac{\partial F}{\partial x}\,(x_0,y_0)\cdot\frac{\partial G}{\partial y}\,(x_0,y_0) - \frac{\partial F}{\partial y}\,(x_0,y_0)\cdot\frac{\partial G}{\partial x}\,(x_0,y_0)$$

Calculează

$$x_1 := x_0 - \left(\frac{1}{J\,(x_0,y_0)}\right)\cdot\left[F\,(x_0,y_0)\cdot\frac{\partial G}{\partial y}\,(x_0,y_0) - G\,(x_0,y_0)\cdot\frac{\partial F}{\partial y}\,(x_0,y_0)\right]$$

$$y_1 := y_0 - \left(\frac{1}{J\,(x_0,y_0)}\right)\cdot\left[\frac{\partial F}{\partial x}\,(x_0,y_0)\cdot G\,(x_0,y_0) - \frac{\partial G}{\partial x}\,(x_0,y_0)\cdot F\,(x_0,y_0)\right]$$

4. Pornind cu $n \geq 1$, cât timp

$$|x_n - x_{n-1}| \geq \varepsilon \ \text{ sau } \ |y_n - y_{n-1}| \geq \varepsilon$$

Calculează

$$J(x_n, y_n) := \frac{\partial F}{\partial x}(x_n, y_n) \cdot \frac{\partial G}{\partial y}(x_n, y_n) - \frac{\partial F}{\partial y}(x_n, y_n) \cdot \frac{\partial G}{\partial x}(x_n, y_n)$$

$$x_{n+1} := x_n - \left(\frac{1}{J(x_n, y_n)}\right) \cdot \left[F(x_n, y_n) \cdot \frac{\partial G}{\partial y}(x_n, y_n) - G(x_n, y_n) \cdot \frac{\partial F}{\partial y}(x_n, y_n)\right]$$

$$y_{n+1} := y_n - \left(\frac{1}{J(x_n, y_n)}\right) \cdot \left[\frac{\partial F}{\partial x}(x_n, y_n) \cdot G(x_n, y_n) - \frac{\partial G}{\partial x}(x_n, y_n) \cdot F(x_n, y_n)\right]$$

5. Tipăreşte n, x_n, y_n. STOP.

Exemple numerice:

1. Cu metoda lui Newton sa se gaseasca solutia aproximativa a sistemului

$$\begin{cases} 2x^3 - y^2 - 1 = 0 \\ xy^3 - y - 4 = 0 \end{cases}$$

pornind de la punctul initial $(x_0, y_0) = (1.2, 1.7)$ cu $\varepsilon = 10^{-4}$. Se va considera $F(x, y) = 2x^3 - y^2 - 1$, $G(x, y) = xy^3 - y - 4$, $\frac{\partial F}{\partial x}(x, y) = 6x^2$, $\frac{\partial F}{\partial y}(x, y) = -2y$, $\frac{\partial G}{\partial x}(x, y) = y^3$ si $\frac{\partial G}{\partial y}(x, y) = 3xy^2 - 1$.

2. Cu metoda lui Newton sa se gaseasca solutia aproximativa a sistemului

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 10 \\ \sqrt{x + y} = 2 \end{cases}.$$

pornind odata de la punctul initial $(x_0, y_0) = (0.9, 3.1)$ si apoi de la punctul initial $(x_0, y_0) = (2.9, 1.1)$ cu $\varepsilon = 10^{-4}$ si sa se compare rezultatul obtinut cu solutia exacta $(1, 3)$, respectiv $(3, 1)$. Se va considera $F(x, y) = x^2 + y^2 - 10$, $G(x, y) = \sqrt{x + y} - 2$, $\frac{\partial F}{\partial x}(x, y) = 2x$, $\frac{\partial F}{\partial y}(x, y) = 2y$, $\frac{\partial G}{\partial x}(x, y) = \frac{1}{2\sqrt{x+y}}$ si $\frac{\partial G}{\partial y}(x, y) = \frac{1}{2\sqrt{x+y}}$.

Observatie: Pentru implementare metodei modificate a lui Newton se modifica pasul 4. in algoritmul de mai sus astfel:

Pasul 4': Pornind cu $n \geq 1$, cât timp

$$|x_n - x_{n-1}| \geq \varepsilon \ \text{ sau } \ |y_n - y_{n-1}| \geq \varepsilon$$

Calculează

$$x_{n+1} := x_n - \left(\frac{1}{J(x_0, y_0)}\right) \cdot \left[F(x_n, y_n) \cdot \frac{\partial G}{\partial y}(x_n, y_n) - G(x_n, y_n) \cdot \frac{\partial F}{\partial y}(x_n, y_n)\right]$$

$$y_{n+1} := y_n - \left(\frac{1}{J(x_0, y_0)}\right) \cdot \left[\frac{\partial F}{\partial x}(x_n, y_n) \cdot G(x_n, y_n) - \frac{\partial G}{\partial x}(x_n, y_n) \cdot F(x_n, y_n)\right]$$

unde

$$J\left(x_0, y_0\right) := \frac{\partial F}{\partial x}\left(x_0, y_0\right) \cdot \frac{\partial G}{\partial y}\left(x_0, y_0\right) - \frac{\partial F}{\partial y}\left(x_0, y_0\right) \cdot \frac{\partial G}{\partial x}\left(x_0, y_0\right)$$

Exemplu: Sa se implementeze metoda modificata a lui Newton pentru sistemul

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 10 \\ \sqrt{x+y} = 2 \end{cases}$$

de la exemplul al doilea si sa se compare rezultatul si numarul de iteratii facute cu cel de la metoda lui Newton.