LABORATOR nr. 1
CALCUL NUMERIC
(titular de curs: prof. univ. dr. Bica Alexandru Mihai)

REZOLVAREA SISTEMELOR LINIARE. METODE DIRECTE (exacte)

Considerăm sistemul liniar

$$\begin{cases} a_{11} \cdot x_1 + ... + a_{1n} \cdot x_n = b_1 \\ .... \\ a_{n1} \cdot x_1 + ... + a_{nn} \cdot x_n = b_n \end{cases}$$

ce poate fi scris sub forma vectorială $A{\cdot}x = b$, unde $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & ... & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & ... & a_{2n} \\ ... & ... & ... & ... \\ a_{n1} & a_{n2} & ... & a_{nn} \end{pmatrix}$,

$x = \begin{pmatrix} x_1 \\ ... \\ x_n \end{pmatrix}$ şi $b = \begin{pmatrix} b_1 \\ ... \\ b_n \end{pmatrix}$. Presupunem că $\det A \neq 0$.

1) **Sisteme superior triunghiulare**

In cazul sistemelor superior triunghiulare matricea A are forma

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & ... & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & a_{23} & ... & a_{2n} \\ 0 & 0 & a_{33} & ... & a_{3n} \\ ... & ... & ... & \ddots & ... \\ 0 & 0 & 0 & ... & a_{nn} \end{pmatrix}$$

cu toate elementele nule sub diagonala principala. In acest caz conditia $\det A \neq 0$ este echivalenta cu a cere $a_{ii} \neq 0$, $\forall i = \overline{1,n}$.

Algoritmul "Sistem superior triunghiular"

I. Date de intrare:
n (int)
$a[i,j]$, $i,j = \overline{1,n}$, astfel incat $a[i,j] = 0$ pentru $i > j$ (double)
b_i, $i = \overline{1,n}$ (double)
II. Iesire: $x[k]$, $k = \overline{1,n}$
III. Pasi:
1. Executa $x[n] := b[n]/a[n,n]$
2. Pentru $k = \overline{n-1,1}$ executa
   $S := 0$
      Pentru $i = \overline{k+1,n}$ executa $S := S + a[k,i] \cdot x[i]$
   $x[k] := (b[k] - S)/a[k,k]$
3. Pentru $k = \overline{1,n}$ tipareste $x[k]$. Stop.

Exemplu: $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -2 & 4 \\ 0 & 0 & 6 \end{pmatrix}$, $b = \begin{pmatrix} 5 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$

2) **Sisteme inferior triunghiulare**

In cazul sistemelor inferior triunghiulare matricea A are forma

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & 0 & 0 & ... & 0 \\ a_{21} & a_{22} & 0 & ... & 0 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & ... & 0 \\ ... & ... & ... & \ddots & ... \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & ... & a_{nn} \end{pmatrix}$$

cu toate elementele nule deasupra diagonalei principale. In acest caz conditia $\det A \neq 0$ este echivalenta cu a cere $a_{ii} \neq 0$, $\forall i = \overline{1,n}$.

Algoritm

I. Date de intrare:

n (int)

$a[i,j]$, $i,j = \overline{1,n}$, astfel incat $a[i,j] = 0$ pentru $i < j$ (double)

b_i, $i = \overline{1,n}$ (double)

II. Iesire: $x[k]$, $k = \overline{1,n}$

III. Pasi:

1. Executa $x[1] := b[1]/a[1,1]$
2. Pentru $k = \overline{2,n}$ executa
   $S := 0$
   Pentru $i = \overline{1,k-1}$ executa $S := S + a[k,i] \cdot x[i]$
   $x[k] := (b[k] - S)/a[k,k]$
3. Pentru $k = \overline{1,n}$ tipareste $x[k]$. Stop.

Exemplu: $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 3 & 0 \\ 4 & -1 & 6 \end{pmatrix}$, $b = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix}$

3) **Metoda eliminarii a lui Gauss**

Se aplica atunci cand reusim sa transformam sistemul astfel incat toate elementele de pe diagonala principala a matricii sistemului sa fie nenule.

Algoritm

I. Date de intrare:

n (int)

$a[i,j]$, $i,j = \overline{1,n}$, (double)

b_i, $i = \overline{1,n}$ (double)

II. Date de iesire: $x[k]$, $k = \overline{1,n}$

III. Pasi:

1. Pentru $k = \overline{1,n-1}$ executa
   daca $a[k,k] \neq 0$ atunci $p := a[k,k]$, altfel Stop;
   Pentru $j = \overline{k,n}$ executa $a[k,j] := \frac{a[k,j]}{p}$
   $b[k] := \frac{b[k]}{p}$

Pentru $i = \overline{k+1, n}$ executa

Pentru $j = \overline{k+1, n}$ executa $a[i,j] := a[i,j] - a[k,j] \cdot a[i,k]$

$b[i] := b[i] - b[k] \cdot a[i,k]$

2. Aplica algoritmul "Sistem superior triunghiular"
3. Pentru $k = \overline{1, n}$ tipareste $x[k]$.

Stop.

$\}$*Exemple numerice*:

1. Sistemul prezentat in cadrul implementarii algoritmului de mai sus este

$$\begin{cases} 10x_1 + 2x_2 - x_3 = 9 \\ -3x_1 + x_2 - 5x_3 = -8 \\ -2x_1 - 5x_2 + x_3 = -1 \end{cases}$$

pentru verificare solutia este: $x_1 = 1$, $x_2 = 0$, $x_3 = 1$

4) **Rezolvarea sistemelor tridiagonale**

In cazul sistemelor tridiagonale matricea sistemului are elemente nenule doar pe diagonala principala si pe cele doua "mini-diagonale" situate una imediat sub diagonala, iar cealalta imediat deasupra diagonalei. Celelalte elemente ale matricii sunt toate nule. Astfel matricea are forma

$$A = \begin{pmatrix} a_0 & c_0 & 0 & 0 & ... & ... & 0 \\ b_1 & a_1 & c_1 & 0 & ... & ... & 0 \\ ... & \ddots & \ddots & \ddots & ... & ... & .. \\ 0 & ...0 & b_i & a_i & c_i & 0... & 0 \\ ... & ... & ... & \ddots & \ddots & \ddots & ... \\ 0 & ... & ... & 0 & b_{n-1} & a_{n-1} & c_{n-1} \\ 0 & ... & ... & 0 & 0 & b_n & a_n \end{pmatrix}$$

iar un astfel de sistem este scris sub forma

$$\begin{cases} a_0x_0 + c_0x_1 = d_0 \\ .... \\ b_ix_{i-1} + a_ix_i + c_ix_{i+1} = d_i, \quad i = \overline{1, n-1} \\ .... \\ b_nx_{n-1} + a_nx_n = d_n \end{cases}$$

Se rezolva sistemul prin metoda eliminarii a lui Gauss care in acest caz genereaza un algoritm iterativ de obtinere a solutiei exacte.

Algoritm

I. Date de intrare:

a_i, d_i, $i = \overline{0, n}$; b_i, $i = \overline{1, n}$; c_i, $i = \overline{0, n-1}$ (double)

II. Iesire: $x[k]$, $k = \overline{0, n}$

III. Pasi:

1. Executa $u_0 := c_0/a_0$
2. Pentru $i = \overline{1, n-1}$ executa

$\{$
$w_i := a_i - u_{i-1} \cdot b_i$
$u_i := c_i / w_i$
$\}$

3. Executa $w_n := a_n - u_{n-1} \cdot b_n$
4. Executa $z_0 := d_0 / a_0$
   Pentru $i = \overline{1, n}$ executa $z_i := (d_i - b_i \cdot z_{i-1}) / w_i$
5. Executa $x_n := z_n$
   Pentru $i = \overline{n-1, 0}$ executa $x_i := z_i - u_i \cdot x_{i+1}$
6. Pentru $k = \overline{0, n}$ tipareste x_k . Stop.

Exemplu:
Sa se rezolve sistemul tridiagonal

$$\begin{cases} x_0 - \frac{1}{4}x_1 = -\frac{21}{2} \\ -\frac{1}{8}x_0 + x_1 - \frac{1}{8}x_2 = \frac{29}{4} \\ -\frac{1}{8}x_1 + x_2 - \frac{1}{8}x_3 = \frac{139}{16} \\ -\frac{1}{8}x_2 + x_3 - \frac{1}{8}x_4 = -\frac{51}{4} \\ -\frac{1}{8}x_3 + x_4 - \frac{1}{8}x_5 = \frac{157}{16} \\ -\frac{1}{4}x_4 + x_5 = -\frac{13}{2} \end{cases}$$

Pentru verificare, solutia cu aproximatie la 4 cifre semnificative exacte este:

$$x_0 = -8.7018, \quad x_1 = 7.1929, \quad x_2 = 8.2452$$

$$x_3 = -10.731, \quad x_4 = 7.9057, \quad x_5 = -4.5236$$