Mesterséges Intelligencia

Fuzzy halmazok és logikák

Fő forrás: Botzheim János Dr. - Kóczy T. László Dr. - Tikk Domonkos: Intelligens rendszerek. Győr : Széchenyi István Egyetem, 2008. 287 p. [elektronikus jegyzet (pdf)]

FONTOS

- Az alábbi anyag munkavázlat, hibákat tartalmazhat. Amennyiben hibát találnak, kérem, a portálon keresztül üzenetben jelezzék, hogy melyik heti előadás, vagy jegyzet melyik részében, milyen hibát véltek felfedezni!
- Az anyagok kizárólag a Széchenyi István Egyetem 2021-2022 tavaszi félévében Mesterséges Intelligencia kurzust felvett hallgatói számára készültek, kizárólag az adott félév kurzusaihoz használható fel!
- Az alábbi hivatkozásokon megnyitott minden fájl automatikusan begyűjti a hallgató különböző egyedi azonosítóit, mely alapján beazonosítható lehet. Ennek megfelelően a hivatkozásokat ne osszák meg egymással (különösen a kurzust nem hallgatókkal), mert abból az egyedi azonosítók visszakereshetők és a személyazonosság meghatározható!
-
-

A lecke főbb témakörei

- Logikák
- Fuzzy halmazok
  - tulajdonságaik
  - Műveletek
- Nyelvi változók

Fuzzy halmazok és logikák

Logikák

Logikák

- Halmazalgebrai struktúra
  - Absztrakt algebrák
    - Hálók
- Szoros kapcsolat a halmazok és logikák között
- A logikáknak számos fajtája van

2-értékű logikák

- Igaz/hamis
- Arisztotelészi logika
  - Boole foglalta axiomatikus rendszerbe
- Többféle 2-értékű logika is van
- Predikátum logika

Többértékű logikák

- 3/4/N-értékű logikák
  - Megjelennek új értékek, „eldönthetetlen”, „eldöntetlen”
- A végtelen logika a cél

Fuzzy logika

- Lotfi Zadeh
  - Fuzzy halmaz 1965
- Végtelen értékű logika
  - A Boole logika általánosítása
  - Részleges igazságot is megenged
    - Egy (logikai) állítás nem csak „igaz” és „hamis” lehet, hanem „többé-kevésbé igaz”
- A szimbólumokhoz dimenziónként szubszimbolikus információt rendel
  - Tagsági függvény formájában
- Motiváció a nagy bonyolultságú feladatok megoldása volt
- Az emberi gondolkodásmód könnyebb modellezése
- Bizonytalanság kezelése
  - (*homokkupac)

Fuzzy halmazok és logikák

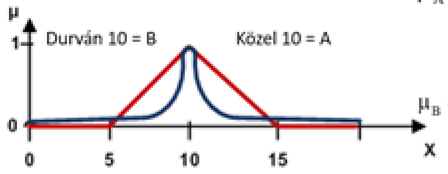
Fuzzy halmazok

Fuzzy halmazok

- Fuzzy halmazok kontextusában a klasszikus, hagyományos halmazokat CRISP halmazoknak hívjuk
- Fuzzy halmazok kontextusában (amennyiben nincsenek más típusú halmazok) nem minden esetben kerül jelölésre a „fuzzy”, vagyis simán halmazoknak hívjuk
- Crisp halmazokat a legáltalánosabb formában a karakterisztikus egyenlet segítségével definiá $\chi_A(x) = \begin{cases} 1, & \text{ha } x \in A \\ 0, & \text{ha } x \notin A \end{cases}$
- Fuzzy halmazokat a tagsági függvénnyel definiálhatunk

$$\mu_A : X \to [0,1]$$

$$A : X \to [0,1]$$



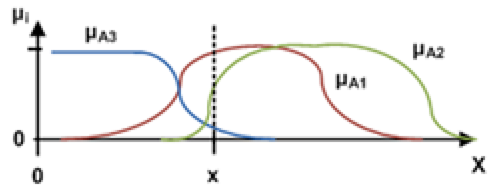
$$\mu_A = \frac{1}{1+5(x-10)^2}$$

$$\mu_B = \begin{cases} 0 & \text{if} \quad x \le 5 \\ 0.2(x-5) & \text{if} \quad x < 5 \le 10 \\ -1/7(x-17) & \text{if} \quad 10 < x \le 17 \\ 0 & \text{if} \quad x > 17 \end{cases}$$

Fuzzy halmazok

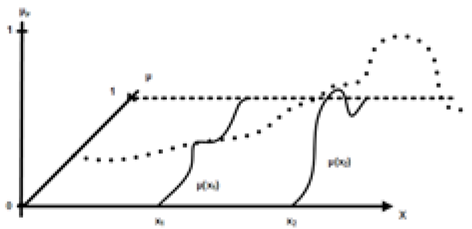
- A fuzzy halmazoknak is van több változata
  - Vektor értékű fuzzy halmazo
  - 2-es típusú fuzzy halmazok
    - …*N*-típusú fuzzy halmazok
  - Intervallum értékű fuzzy halmazok

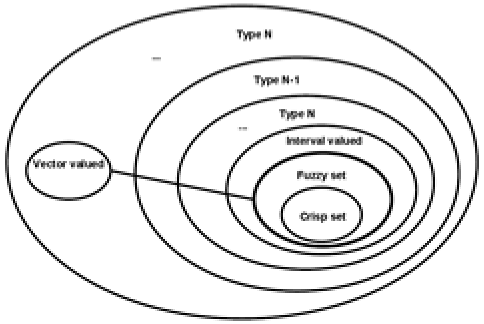
$$\mu_A : X \to [0,1]^n = \underbrace{[0,1]\times\cdots\times[0,1]}_{\text{n times}}$$



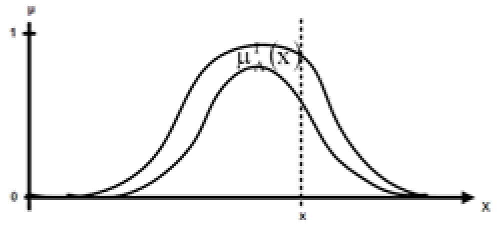
$n = 3 \qquad \mu_A(x) = (0.9, 0.5, 0.2)$

$$\mu : X \to \widetilde{P}([0,1])$$

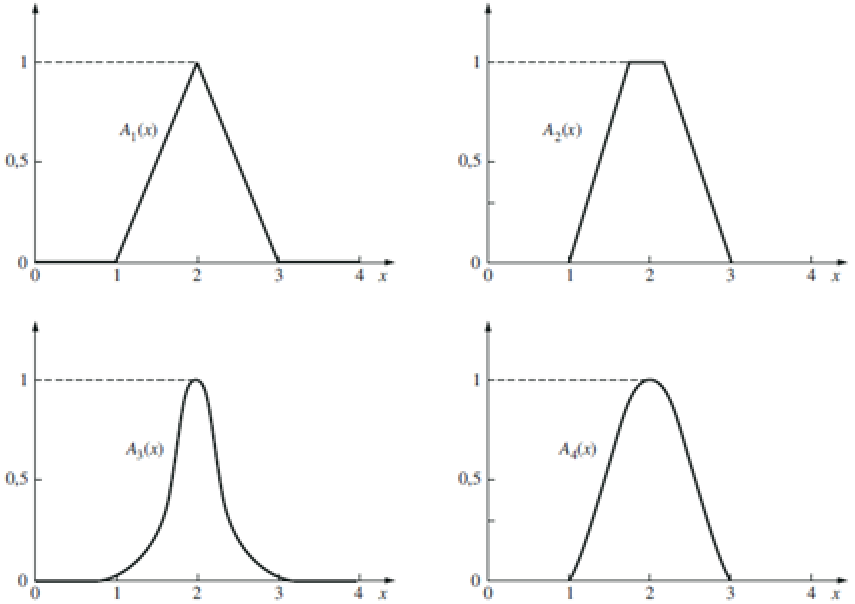




$\mu : X \to P([0,1]) \qquad \mu : X \to e([0,1])$



Gyakori fuzzy halmaz típusok

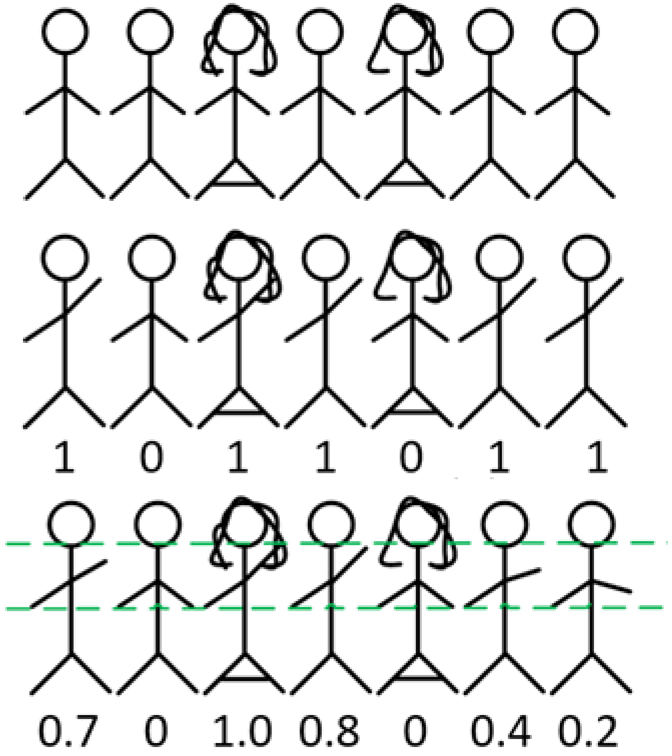


Fuzzy halmaz példa

- Boole logikai kérdés
  - „Kinek van jogosítványa?”
    - Ez egy egyértelműen eldöntendő kérdés („igen”/„nem”)
- Fuzzy logikai kérdés
  - „Ki tud vezetni?”
    - A tudás mértéke eltérő lehet
      - Természetesen van egyértelmű „igen” és „nem” válasz is

Fuzzy halmaz példa

- Az alaphalmaz (X)
  - Az összes lehetséges elem ami szóba kerül
- Crisp válasz
  - Az alaphalmaz egy részhalmaza
  - Karakterisztikus függvény
- Fuzzy válasz
  - Tagsági függvény



Fuzzy halmazok

Fuzzy halmazok tulajdonságai

Fuzzy halmazok tulajdonságai: magasság

- Egy az *X* alaphalmazon (univerzumon) értelmezett *A* fuzzy halmaz magasságán (height) az azt leíró tagsági függvény szuprémumát értjük, azaz

$$\mathrm{height}(A) = \max_{x}(\mu_A(x)) \Rightarrow \sup_{x}(\mu_A(x)) \qquad x \in X$$

Fuzzy halmazok tulajdonságai: tartó

- Egy az *X* univerzumon értelmezett *A* fuzzy halmaz tartóján azon alaphalmazbeli elemeket értjük, melyekre teljesül, hogy a hozzájuk rendelt tagsági érték nagyobb, mint 0, vagyis

$$\mathrm{supp}(A) = \{x \mid \mu_A(x) > 0\}$$

- Ha a fuzzy halmaz magassága 0, akkor az adott halmaz tartója üres halmaz

$$\mathrm{height}(A) = 0 \Leftrightarrow \mathrm{supp}(A) = \emptyset$$

Fuzzy halmazok tulajdonságai: normalitás

- Egy az univerzumon értelmezett *A* fuzzy halmaz normális, ha magassága 1

$$\mathrm{height}(\mathrm{A}) = 1$$

Fuzzy halmazok tulajdonságai: szubnormális

- Egy az alaphalmazon definiált *A* fuzzy halmaz szubnormális, ha annak magassága kisebb, mint 1, azaz

$$\mathrm{height}(\mathrm{A}) < 1$$

Fuzzy halmazok tulajdonságai: mag

- Egy az *X* univerzumon értelmezett *A* fuzzy halmaz magján (core, kernel) azon alaphalmazbeli elemeket értjük, melyekre a tagsági függvény 1 értéket vesz fel, vagyis formálisan

$$\mathrm{kernel}(A) = \{x \mid \mu_A(x) = 1\}$$

- Ha az adott fuzzy halmaz szubnormális, akkor a magja következésképp üres halmaz lesz, mivel nincs olyan alaphalmazbeli elem, melynek tagsági értéke 1 (egy) lenne, azaz

$$\mathrm{kernel}(A) = \emptyset$$

Fuzzy halmazok tulajdonságai: α-vágat

- Egy az *X* univerzumon definiált *A* fuzzy halmaz α-vágatán azon alaphalmazbeli elemeket értjük, melyekre teljesül, hogy a tagsági érték nagyobb vagy egyenlő, mint a megadott α érték, formálisan

$$A_\alpha = \{x \mid \mu_A(x) \geq \alpha\}$$

- Az α értéknek értelemszerűen [0;1] intervallumba kell tartoznia, hiszen az egy adott tagsági fokot jelöl
- Az α-vágat és a mag definíciójából egyértelműen látható, hogy egy fuzzy halmaz magja tulajdonképpen nem más, mint az α = 1 értékű α-vágata, vagyis azon alaphalmazbeli elemek, melyek tagsági értéke nagyobb, vagy egyenlő, mint 1
- Természetesen az 1 értéknél nagyobb tagsági érték nem megengedett, így csak az egyenlőség teljesülhet

Fuzzy halmazok tulajdonságai: szigorú α-vágat

- Az α-vágathoz hasonlóan a szigorú α-vágat alatt egy az *X* univerzumon értelmezett *A* fuzzy halmaz azon alaphalmazbeli elemeit értjük, melyekre teljesül, hogy a tagsági érték nagyobb, mint az adott α érték, azonban itt az egyenlőséget nem engedjük meg, vagyis

$$A_{\bar{\alpha}} = \{x \mid \mu_A(x) > \alpha\}$$

- A fentiek alapján könnyen belátható, hogy az α = 0 értékű szigorú *α*-vágat nem más, mint az adott fuzzy halmaz tartója

Fuzzy halmazok tulajdonságai: konvexitás

- Egy az *X* univerzumon értelmezett *A* fuzzy halmaz akkor és csakis akkor konvex, ha minden *α*-vágata (tetszőleges α értékre) klasszikus értelemben véve konvex. Másképp megfogalmazva tekintsük az *X* alaphalmazt egy *n*-edfokú valós univerzumnak, vagyis

$$X \subseteq R^n$$

- ekkor az ezen definiált *A* fuzzy halmaz akkor és csakis akkor konvex, ha $x, y \in X$ $\lambda \in [0,1]$

$$\mu_A(\lambda x + (1-\lambda) y) \geq \min(\mu_A(x), \mu_A(y))$$

- esetén teljesül, hogy

Fuzzy halmazok, logikák és relációk

Fuzzy komplemens

Fuzzy komplemens

- A fuzzy halmazokon értelmezett *c* komplemens függvény formálisan az alábbi módon adható meg

  $c: [0;1] \rightarrow [0;1]$
- Jelölése

  $\mu_{\overline{A}}(x) = c(\mu_A(x)) \qquad x \in X$
- Axiomatikus váz
  - 1. axióma: a peremfeltételek, melyek biztosítják, hogy a komplemens függvény a peremértékeken a Boole-féle negáció művelettel megegyező eredményt adjon, tehát

    $c(0) = 1 \qquad c(1) = 0$
  - 2. axióma: a *c* komplemens függvény monoton, vagyis

    $c(a) \geq c(b) \qquad a \leq b \qquad \forall a, b \in [0;1]$

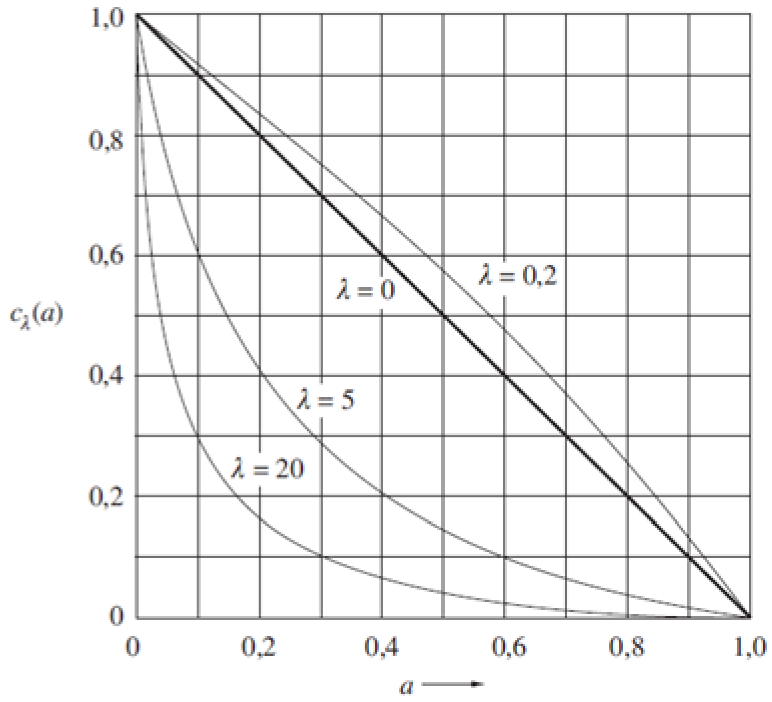
Fuzzy komplemens

- Kiegészítő axiómák
  - 1. kiegészítő axióma: a *c* függvény folytonos
  - 2. kiegészítő axióma: *c* komplemens függvény involutiv, vagyis $\forall a \in [0;1] \quad c(c(a)) = a$
- Zadeh által definiált komplemens $\forall a \in [0;1] \quad c(a) = 1 - a$
- Számos további komplemens létezik
  - Sugeno $c_\lambda = \dfrac{1-a}{1+\lambda a} \quad \lambda \in (-1, \infty)$

    $c_w(a) = (1 - a^w)^{1/w} \quad w \in [0; \infty] \quad a \in [0;1]$
  - Yager

Fuzzy komplemens

- Egyensúlyi pont (ekvilibrium)
  e=c(e)



Fuzzy halmazok és logikák

Fuzzy metszet

Fuzzy metszet (t-norma)

- Az X univerzumon definiált A és B fuzzy halmazokon értelmezett metszet, vagy más néven t-norma (trianguláris norma) egy két (tagsági érték) bemenetű függvényként értelmezhető az egységnégyzet felett, formálisan $t: [0;1] \times [0;1] \to [0;1]$
- Jelölése

$$\mu_{A \cap B} = t[\mu_A(x), \mu_B(x)] \qquad x \in X$$

Fuzzy metszet (t-norma)

- Axiómatikus váz
  - 1. axióma: a peremfeltételek
    $t(1,1) = 1 \quad t(1,0) = t(0,1) = t(0,0) = 0$
  - 2. axióma: *t* kommutatív
    $t(a,b) = t(b,a) \quad a = \mu_A(x) \quad b = \mu_B(x) \quad x \in X \quad a,b \in [0;1]$
  - 3. axióma: *t* asszociatív
    $t(a,t(b,c)) = t(t(a,b),c) \quad a,b,c \in [0;1]$
  - 4. axióma: a *t* függvény monoton
    $t(a,b) \le t(a',b') \quad b \le b' \quad a \le a' \quad a,b,a',b' \in [0;1]$
- Kiegészítő axiómák
  - 1. kiegészítő axióma: A *t* függvény folytonos
  - 2. kiegészítő axióma: A *t* függvény idempotens $t(a,a) = a$
    - vagy szubidempotens

$$t(a,a) < a \quad a \in [0;1]$$

Fuzzy metszet (t-norma)

- Az idempotencia túl szigorú feltétel lenne a t-normák számára
- Megmutatható, hogy az egyetlen idempotens t-norma a Zadeh által definiált t-norma, vagyis a minimum függvény

$$t_{Zadeh}(a, b) = \min(a, b)$$

- Számos további (szubidempotens) t-norma létezik

$$t_{algebrai}(a,b) = a * b$$

Fuzzy halmazok és logikák

Fuzzy unió

Fuzzy unió (t-konorma, s-norma)

- Az *X* univerzumon definiált *A* és *B* fuzzy halmazokon értelmezett unió művelet, más néven s-norma, vagy t-konorma (trigonometrikus társnorma) egy az egységnégyzeten értelmezett két bemenetű függvényként adható meg az alábbiak szerint

$$s : [0;1] \times [0;1] \rightarrow [0;1]$$

- Jelölése

$$\mu_{A \cup B} = s[\mu_A(x), \mu_B(x)] \qquad x \in X$$

Fuzzy unió (t-konorma, s-norma)

- Axiómatikus váz
  - 1. axióma: a peremfeltételek $s(0,0)=0$ $s(1,0)=s(0,1)=s(1,1)=1$
  - 2. axióma: *s* kommutatív $s(a,b)=s(b,a)$ $a=\mu_A(x)$ $b=\mu_B(x)$ $x \in X$ $a,b \in [0;1]$
  - 3. axióma: *s* asszociatív $s(a,s(b,c))=s(s(a,b),c)$ $a,b,c \in [0;1]$
  - 4. axióma: az *s* függvény monoton
    $s(a,b) \le s(a',b')$ $a \le a'$ $b \le b'$ $a,b,a',b' \in [0;1]$
- Kiegészítő axiómák
  - 1. kiegészítő axióma: Az *s* függvény folytonos
  - 2. kiegészítő axióma:
    - Az *s* függvény idempotens $s(a,a)=a$
      - vagy szuperidempotens $s(a,a)>a$ $a \in [0;1]$

Fuzzy unió (t-konorma, s-norma)

- A Zadeh-féle t-normához hasonlóan az s-normákról is megállapítható, hogy az egyetlen idempotens unió művelet a Zadeh által definiált s-norma, vagyis a maximum függvény

$$s_{\text{Zadeh}}(a, b) = \max(a, b)$$

- minden tovább *s* függvény szuperidempotens

$$s_{algebrai}(a, b) = a + b - a * b$$