4 Derivabilità

Abbiamo una funzione $f(x)$ definita in un intorno completo di un punto x_0.
La **derivata destra** $f'_+(x_0)$ della funzione $f(x)$ nel punto x_0 è definita come:

$$\lim_{h \to 0^+} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} = f'_+(x_0) \tag{4.1}$$

quando il limite esiste ed è finito.
La **derivata sinistra** $f'_-(x_0)$ della funzione $f(x)$ nel punto x_0 è definita come:

$$\lim_{h \to 0^-} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} = f'_-(x_0) \tag{4.2}$$

quando il limite esiste ed è finito.

Evidentemente una funzione è derivabile in un punto quando la derivata destra e sinistra coincidono e sono finite. Specificare i due aspetti del limite ci consente di avere un criterio di derivabilità anche per punti nei quali non riusciamo a esprimere direttamente la derivata o per classificare i punti in cui la derivata non esiste proprio.

Criterio di derivabilità
Abbiamo una funzione $f(x)$ continua in un intervallo $[a, b]$ e derivabile in (a, b) tranne al più il punto $x_0 \in (a, b)$. Se esistono finite e uguali le derivate destra e sinistra della funzione nel punto:

$$\lim_{x \to x_0^+} f'(x) = f'_-(x_0) = l = \lim_{x \to x_0^-} f'(x) = f'_+(x_0) \tag{4.3}$$

allora la funzione è derivabile in x_0 e risulta $f'(x) = l$.

Esiste un legame fondamentale tra derivabilità e continuità di una funzione in un punto.

Derivabilità e continuità
Se una funzione $f(x)$ è derivabile in un punto x_0, allora in quel punto è anche continua.

La continuità di una funzione in un punto invece *non implica* la sua derivabilità, ma ne è condizione necessaria.

4.1 Studio della derivabilità

Se la funzione è definita in un punto, *per il quale esista un intorno completo*, ma lì non è derivabile e *neanche continua*, classifichiamo il punto a seconda del valore delle derivate destra e sinistra.

Punti di non derivabilità

1. **Punto angoloso**: se almeno una delle derivate destra o sinistra nel punto esiste ed è finita.
2. **Cuspide**: se la derivata destra e sinistra nel punto tendono entrambe all'infinito, ma con segno discorde.
3. **Flesso a tangente verticale**: se la derivata destra e sinistra nel punto tendono entrambe all'infinito, ma con segno concorde

Se invece abbiamo solo un intorno destro o sinistro del punto allora normalmente non lo classifichiamo tra i punti di non derivabilità, ma evidenziamo eventualmente quanto segue:

Tangente verticale: se siamo agli estremi del campo di esistenza in un punto finito e possiamo fare la derivata solo da destra o da sinistra e la derivata tende all'infinito.

Studio della derivabilità e dei punti di non derivabilità di una funzione

1. Troviamo il dominio della funzione.
2. Studiamo la continuità della funzione, in particolare facendo il limite agli estremi del campo di esistenza là dove la funzione non è definita.
3. Facciamo la derivata e ne determiniamo il rispettivo dominio, escludendo gli intervalli che escono dal dominio della funzione e quelli un cui la funzione è definita, ma non continua.
4. Studiamo i punti di non derivabilità, in particolare facendo il limite agli estremi del campo di esistenza, là dove la funzione non è definita, e nei punti di transizione tra una espressione della derivata e un'altra.

Trovare parametro per cui una funzione è continua
Trovare parametro per cui una funzione è derivabile