MEEC, MAero

Controlo por Computador

2015/2016

Primeiro Teste

4 de Novembro de 2015, 20 horas – salas F2, F3, F4.

Quotação: P1-a)2b)1c)2d)1, P2-a)4 b)1, P3-4, P4 a)1 b)1 c)1 d)1 e)1

Duração: 2 horas. Não é permitida a consulta de quaisquer elementos.

P1. Pretende-se determinar o modelo em tempo discreto de um motor de corrente contínua, de íman permanente, que acciona uma junta de um braço robot, tal como se mostra na figura. A relação entre a tensão eléctrica $u(t)$ aplicada ao motor e a posição ângular $y(t)$ do seu veio, no tempo contínuo t, estão relacionadas pela função de transferência

$$G(s) = \frac{1}{s(s+1)} \,. \qquad \text{(P1-1)}$$

Para simplificar os cálculos, usam-se unidades escaladas (quer dizer, este modelo é muito mais lento do que um motor real típico). Responda às perguntas seguintes (mostre todos os cálculos):

a) Determine a função de transferência discreta equivalente vista aos terminais de conversores D/S e A/D ligados ao motor, que operam sincronamente e com um intervalo de amostragem de 1s.

b) Escreva a equação de diferenças que relaciona a entrada com a saída em tempo discreto.

c) Escreva na forma matricial as equações de estado correspondentes.

d) Diga justificadamente se considera que 1s é um intervalo de amostragem conveniente para este motor.

Ajuda: $Z(1,\ para\ k \geq 0) = \dfrac{z}{z-1}$ $\quad Z(kh) = \dfrac{hz}{(z-1)^2}$ $\quad Z\left(e^{-kh/T}\right) = \dfrac{z}{z-e^{-h/T}}$ $\quad \frac{1}{e} \cong 0{,}37$

P2. Relativamente a um queimador de uma fornalha de um grupo termoeléctrico, pretende-se construir um modelo que relaciona o comando u do sistema de aquecimento do óleo de queima com o logaritmo da viscosidade do óleo, y. A figura P2-F1 mostra uma vista simplificada do sistema.

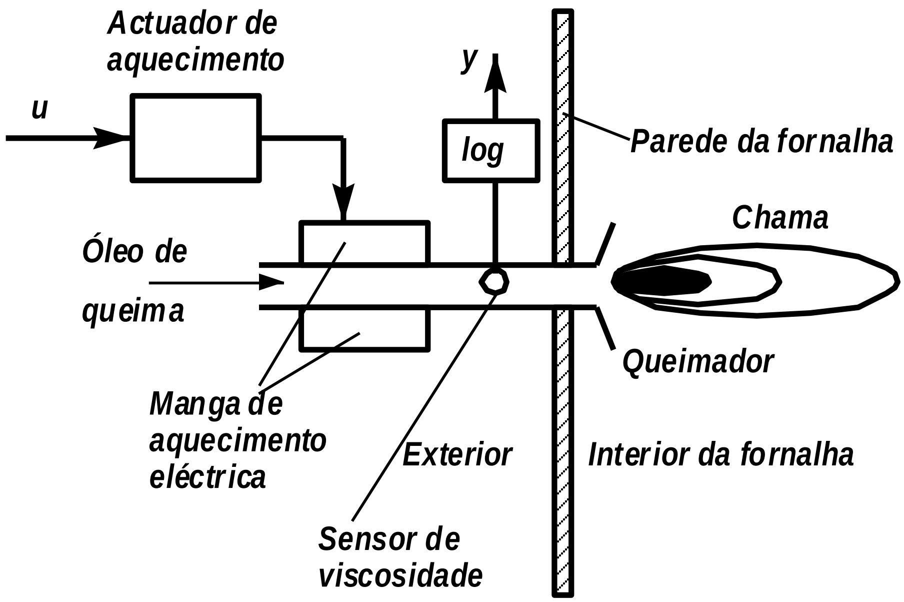


Figura P2-F1. Vista esquemática de um queimador da fornalha de um grupo Termoeléctrico, com o sistema de aquecimento do óleo de queima.

Admite-se que o sistema pode ser modelado pela equação de diferenças:

$$y(t) = -ay(t-1) + bu(t-1) + e(t) \qquad \text{(P2-1)}$$

em que e é um sinal branco, gaussiano, de média nula e variância unitária. É efectuada uma experiência no sistema para estimar os parâmetros a e b. Com os dados obtidos para u e y calcularam-se as seguintes quantidades:

$$\sum_{i=1}^{999} y^2(i-1) = 28 \quad \sum_{i=1}^{999} u^2(i-1) = 52 \quad \sum_{i=1}^{999} y(i)y(i-1) = 1$$

$$\sum_{i=1}^{999} y(i-1)u(i-1) = 19 \quad \sum_{i=1}^{999} y(i)u(i-1) = -36$$

a) Determine a estimativa de mínimos quadrados dos parâmetros a e b. Apresente os cálculos intermédios.

b) Diga, justificando quantitativamente, qual das estimativas é mais precisa.

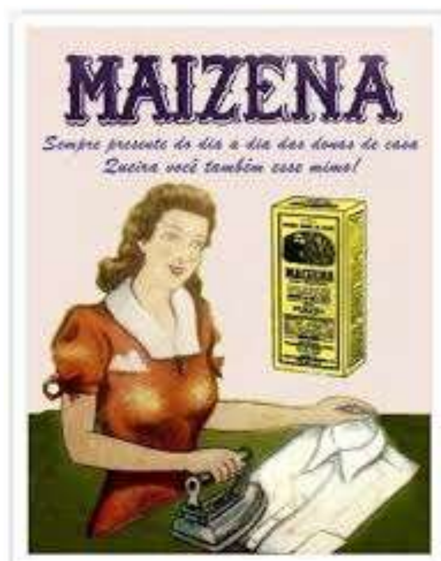
P3. São feitas N observações $y_1, y_2, \ldots, y_N$ de uma variável aleatória gaussiana de média nula, mas com variância desconhecida σ^2. Sabe-se portanto que (com algum abuso de notação)

$$p(y_i) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} exp\left\{-\frac{y_i^2}{2\sigma^2}\right\} \quad \text{(P3-1)}$$

Admitindo que as observações são independentes, determine a estimativa de máxima verosimilhança do parâmetro σ em função dos valores de $y_1, y_2, \ldots, y_N$.

Ajuda: $\frac{d}{dx}\log(x) = \frac{1}{x}$

P4. A Brutópia é, como o nome indica, um encantador país de simpáticos habitantes, situado algures entre a Bechuanalândia e a Patatávia. Uma das suas principais riquezas é a produção de milho, que os brutopianos usam para vários fins, tais como encher colchões, produzir combustível ecológico, atirar uns aos outros, alimentar pombos, passar camisas a ferro (ver figura!) ou mesmo como alimento (é a base da multi-cultural Farinha Maizena, muito popular na Brutópia e com que tradicionalmente se fazem deliciosos doces).



Os produtores de milho da Brutópia observaram que a procura $d(k)$ de milho no mercado num determinado ano k é uma função linear do preço $p(k)$ no mesmo ano, dada por

$$d(k) = d_0 - ap(k), \quad \text{(P4-1)}$$

em que d_0 e a são parâmetros positivos conhecidos (através de estudos dos competentes economistas brutopianos).

Por outro lado, é também conhecido que a produção de milho $s(k)$ no ano k é uma função do preço $p(k-1)$ praticado no ano anterior, dada por

$$s(k) = s_0 + bp(k-1), \qquad \text{(P4-2)}$$

em que s_0 e b são parâmetros conhecidos, com $b > 0$.

a) Suponha que no ano genérico k o preço é ajustado de modo a que toda a produção de milho disponível nesse ano (que depende do preço no ano anterior) seja vendida. Escreva uma equação de diferenças que relacione o preço em dois anos consecutivos (ou seja, que relacione $p(k-1)$ com $p(k)$).

b) Determine em função dos parâmetros que regulam o mercado do milho na Brutópia (ou seja, em função de d_0, a, s_0 e b) qual o preço $\bar{p}$ de equilíbrio do milho. Ou seja, diga qual o preço $\bar{p}$ do milho tal que, se se verificar num dado ano, vai permanecer igual nos anos subsequentes.

c) Seja $E(k)$ o desvio do preço $p(k)$ no ano k em relação ao preço de equilíbrio $\bar{p}$, ou seja

$$E(k) = p(k) - \bar{p} \qquad \text{(P4-3)}$$

Deduza uma equação de diferenças verificada pelo desvio $E(k)$.

d) Com base na equação que deduziu para o desvio $E(k)$ na alínea c), dê uma condição nos parâmetros que garanta que $p(k)$ se aproxima do equilíbrio $\bar{p}$ quando k aumenta.

e) Diga justificadamente se, quando há variações do preço $p(k)$, estas são monótonas (sempre crescentes ou sempre descrescentes) ou se há oscilações.