Script für das bayerische Abitur im Fach Mathematik (eA)

Nico Schneider

25. September 2025

Inhaltsverzeichnis

1 Stammfunktionen und weitere Ableitungsregeln 6

1.1 Funktionsscharen . . . 6

1.1.1 Definition . . . 6

1.2 Stammfunktionen . . . 6

1.2.1 Definition . . . 6

1.2.2 Satz . . . 6

1.3 Ableitung von Sinus- und Kosinusfunktion . . . 6

1.3.1 Satz . . . 6

1.4 Produktregel . . . 6

1.4.1 Satz (Produktregel) . . . 6

1.4.2 Beweis . . . 7

1.5 Verkettung von Funktionen und Kettenregel . . . 7

1.5.1 Definition . . . 7

1.5.2 Satz (Kettenregel) . . . 7

2 Natürliche Exponentialfunktion 8

2.1 Die natürliche Exponentialfunktion und ihre Ableitung . . . 8

2.1.1 Definition . . . 8

2.1.2 Satz . . . 8

2.1.3 Definition . . . 8

2.2 Ableitungsregeln zur natürlichen Exponentialfunktion . . . 8

2.2.1 Satz . . . 8

2.2.2 Bemerkung . . . 8

2.2.3 Satz . . . 8

2.2.4 Bemerkung . . . 8

2.3 Grenzwerte von Verknüpfungen mit der natürlichen Exponentialfunktion 9

2.3.1 Satz . . . 9

2.3.2 Bemerkung . . . 9

2.4 Natürlicher Logarithmus und Exponentialgleichungen . . . 9

2.4.1 Definition . . . 9

2.4.2 Bemerkung . . . 9

2.5 Modellieren von Wachstums- und Abklingvorgängen . . . 10

2.5.1 Definition . . . 10

2.5.2 Satz . . . 10

3 Zufallsgrößen und Binomialverteilung 11

3.1 Zufallsgrößen und deren Wahrscheinlichkeitsverteilung . . . 11

3.1.1 Definition . . . 11

3.1.2 Definition . . . 11

3.1.3 Definition 11
3.2 Erwartungswert und Varianz einer Zufallsgröße 11
3.2.1 Definition 11
3.2.2 Bemerkung 11
3.2.3 Definition 11
3.2.4 Definition 12
3.2.5 Bemerkung 12
3.3 Ziehen aus einer Urne mit Beachtung der Reihenfolge 12
3.3.1 Satz 12
3.3.2 Bemerkung 12
3.4 Ziehen aus einer Urne ohne Beachtung der Reihenfolge 12
3.4.1 Satz 12
3.4.2 Definition (Binomialkoeffizient) 12
3.4.3 Bemerkung 12
3.4.4 Satz 13
3.5 Bernoulli-Experimente mit Bernoulli-Ketten 13
3.5.1 Definition 13
3.6 Binomialverteilung 13
3.6.1 Satz (Formel von Bernoulli) 13
3.6.2 Bemerkung 13
3.6.3 Definition 14
3.6.4 Vorgehen beim Modellieren 14
3.7 Erwartungswert und Varianz der Binomialverteilung 14
3.7.1 Satz 14
3.8 Axiomatische Definition von Wahrscheinlichkeit 14
3.8.1 Definition (Axiome von Kolmogorow) 14

4 Beurteilende Statistik **15**
4.1 Einseitiger Hypotesentest 15
4.1.1 Grundwissen 15
4.1.2 Bemerkung 15
4.1.3 Definition 15
4.1.4 Fehler erster Art 15
4.1.5 Fehler zweiter Art 15
4.1.6 Einflussnahmen auf α' und β' 16
4.2 Konstruktion eines einseitigen Signifikanztestes 16
4.2.1 Definition 16
4.2.2 Bemerkung 16
4.2.3 Konstruktion eines einseitigen Signifikanztests 16
4.2.4 Bemerkung 16

5 Quotientenregel und Funktionsuntersuchungen **17**
5.1 Die Quotientenregel bei gebrochen-rationalen Funktionen 17
5.1.1 Satz (Quotientenregel) 17
5.1.2 Satz 17
5.1.3 Aspekte bei der Untersuchung einer Funktion f und ihren Graphen G_f 17
5.1.4 Satz (Regel von L'Hôpital) 18

6 Wurzelfunktion **19**
6.1 Die Umkehrfunktion 19
6.1.1 Definition 19
6.1.2 Satz (Umkehrbarkeitskriterium 19
6.2 Potenzfunktionen mit rationalem Exponenten und ihre Ableitung . . 19
6.2.1 Definition 19
6.2.2 Satz (Ableitungsregel für Potenzfunktionen 19

7 Natürliche Logarithmusfunktion **20**
7.1 Die natürliche Logarithmusfunktion und ihre Ableitung 20
7.1.1 Definition 20
7.1.2 Satz 20
7.1.3 Satz (Rechenregeln für den natürlichen Logarithmus) 20
7.2 Ableitung und Grenzwerte von Verknüpfungen mit der ln-Funktion . 20
7.2.1 Satz 20
7.2.2 Satz 20

8 Grundlagen der Koordinatengeometrie im Raum **21**
8.1 Vektoren 21
8.1.1 Definition 21
8.1.2 Satz 21
8.1.3 Definition 21
8.1.4 Definition 21
8.1.5 Satz 21
8.2 Addition und Subtraktion von Vektoren 21
8.2.1 Definition 21
8.3 skalare Multiplikation eines Vektors 22
8.3.1 Definition 22
8.3.2 Definition 22
8.3.3 Definition 22
8.4 Skalarprodukt 22
8.4.1 Definition 22
8.4.2 Satz 23

8.5 Das Kreuzprodukt (Vektorprodukt) 23
8.5.1 Definition 23
8.5.2 Satz 23
8.5.3 Satz 23

1 Stammfunktionen und weitere Ableitungsregeln

1.1 Funktionsscharen

1.1.1 Definition

Hat die Funktion $f : x \mapsto f(x)$ eine von x unabhängige Variable t, so existiert zu jedem Wert des *Parameters* t eine Funktion $f_t : x \mapsto f_t(x)$. Die Menge aller Funktionen $f_t : x \mapsto f_t(x)$ wird als *Funktionenschar* bezeichnet.

1.2 Stammfunktionen

1.2.1 Definition

Sei $F : x \mapsto F(x)$ eine differenzierbare Funktion, so heißt die Funktion F genau dann Stammfunktion von f, wenn für alle $x \in D_f$ gilt:

$$F'(x) = f(x)$$

1.2.2 Satz

Sei $f : x \mapsto f(x)$ eine in $\mathbb{R}$ definierte Funktion und $C \in \mathbb{R}$, so gilt zum Aufleiten der Funktion f:

1. $f(x) = x^n \ (n \in \mathbb{N}) \ \Rightarrow \ F(x) = \frac{1}{n+1} \cdot x^{n+1} + C$
2. $f(x) = \cos(x) \ \Rightarrow \ F(x) = \sin(x) + C$
3. $f(x) = \sin(x) \ \Rightarrow \ F(x) = -\cos(x) + C$

1.3 Ableitung von Sinus- und Kosinusfunktion

1.3.1 Satz

Sei $f : x \mapsto \sin(x), x \in \mathbb{R}$, so gilt:

$$f'(x) = \cos(x), \ f''(x) = -\sin(x), \ f'''(x) = -\cos(x) \text{ und } f^4(x) = \sin(x)$$

1.4 Produktregel

1.4.1 Satz (Produktregel)

Sind die Funktionen $u(x)$ und $v(x)$ mit $x \in D$ differenzierbar, so gilt für die Funktion $f(x) = u(x) \cdot v(x)$:

$$f'(x) = u'(x) \cdot v(x) + u(x) \cdot v'(x)$$

1.4.2 Beweis

Gegeben sei die Funktion f mit $f(x) = u(x) \cdot v(x)$. Die Ableitung von f an einer Stelle x ist dann durch den Grenzwert des Differenzenquotienten

$$\lim_{h \to 0} \frac{u(x+h) \cdot v(x+h) - u(x) \cdot v(x)}{h}$$

gegeben. Durch Addition und Subtraktion des Terms $\dfrac{u(x) \cdot v(x+h)}{h}$ erhalten wir

$$\lim_{h \to 0} \frac{u(x+h) \cdot v(x+h) - u(x) \cdot v(x+h) + u(x) \cdot v(x+h) - u(x) \cdot v(x)}{h}.$$

Durch geschicktes Umformen vereinfachen wir und kommen auf

$$f'(x) = u'(x) \cdot v(x) + u(x) \cdot v'(x).$$

■

1.5 Verkettung von Funktionen und Kettenregel

1.5.1 Definition

Für zwei Funktionen u und v gibt es zwei mögliche Verkettungen:
Die *Verkettung u nach v*: $u \circ v : x \mapsto u(v(x))$.
Die *Verkettung v nach u*: $v \circ u : x \mapsto v(u(x))$.
Das Verketten zweier Funktionen ist allgemein *nicht* kommutativ!

1.5.2 Satz (Kettenregel)

Sei $f = u \circ v$ und weiterhin u und v differenzierbar, so ist auch $f(x) = u(v(x))$ differenzierbar und es gilt

$$f'(x) = u'(v(x)) \cdot v'(x).$$

2 Natürliche Exponentialfunktion

2.1 Die natürliche Exponentialfunktion und ihre Ableitung

2.1.1 Definition

Wir definieiren die Euler'sche Zahl e wiefolgt:

$$\mathrm{e} = \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = \sum_{i=0}^{\infty}\frac{1}{i!}$$

2.1.2 Satz

Die Euler'sche Zahl e ist irrational: $\mathrm{e} \notin \mathbb{Q}$.

2.1.3 Definition

Sei $f : x \mapsto \mathrm{e}^x$, so heißt f *natürliche Exponentialfunktion*.

2.2 Ableitungsregeln zur natürlichen Exponentialfunktion

2.2.1 Satz

Sei $f : x \mapsto \mathrm{e}^x$ mit $x \in \mathbb{R}$, so gilt $f' : x \mapsto \mathrm{e}^x$.

2.2.2 Bemerkung

(1) Alle Funktionen $F_C : x \mapsto \mathrm{e}^x + C$ mit $C \in \mathbb{R}$ sind also Stammfunktionen von f.

(2) Die Ableitung einer Funktion $f_a : x \mapsto a \cdot \mathrm{e}^x$ ist nach der Produktregel also $f_a' : x \mapsto a \cdot \mathrm{e}^x = f_a(x)$

2.2.3 Satz

Sei $v(x)$ eine differenzierbare Funktion und weiterhin $f(x)$ und $g(x)$ die verknüpften Funktionen $f(x) = \mathrm{e}^{v(x)}$ bzw. $g(x) = \mathrm{e}^x \cdot v(x)$. So gilt:

(i) $f'(x) = \mathrm{e}^{v(x)} \cdot v(x)$ (Kettenregel)

(ii) $g'(x) = \mathrm{e}^x \cdot (x) + \mathrm{e}^x \cdot v'(x) = \mathrm{e}^x \cdot (v(x) + v'(x))$

2.2.4 Bemerkung

Im Falle von (i) überträgt sich das Monotonieverhalten der Funktion $v(x)$ auf die Funktion $f(x)$.

2.3 Grenzwerte von Verknüpfungen mit der natürlichen Exponentialfunktion

2.3.1 Satz

Es gelten folgende Grenzwerte von Verknüpfungen mit der natürlichen Exponentialfunktion ($n \in \mathbb{N}$):

(i) $\lim\limits_{x \to -\infty} (x^n \cdot e^x) = 0$

(ii) $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{x^n}{e^x} = \lim\limits_{x \to -\infty} (x^n \cdot e^{-x}) = 0$

(iii) $\lim\limits_{x \to +\infty} (e^x - x^n) = +\infty$

2.3.2 Bemerkung

(1) Anschaulich bedeutet das also, dass e^x für $x \to \infty$ „schneller" wächst als jede Potenz x^n.

(2) Da das Grenzwertverhalten einer ganzrationalen Funktion $p : x \mapsto a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + ... + a_1 x + a_0$ nur von Summanden mit der höchsten Potenz $a_n x^n$ bestimmt wird, gelten die Grenzwerte anstelle von einer Potenz x^n auch für Polynome $p(x)$.

2.4 Natürlicher Logarithmus und Exponentialgleichungen

2.4.1 Definition

Die Lösung der *Exponentialgleichung* $\mathrm{e}^x = b$ mit $b \in \mathbb{R}^+$ und $x \in \mathbb{R}$ bezeichnet man als *natürlichen Logarithmus von b*. Man schreibt:

$$x = \ln(b) \Leftrightarrow \mathrm{e}^x = b$$

2.4.2 Bemerkung

(1) Aus der Definition des natürlichen Logarithmus folgt $\mathrm{e}^{\ln(x)} = x$ für $x > 0$ und $\ln(\mathrm{e}^x) = x$.

(2) Weiterhin gilt $\ln(1) = 0$ und $\ln(e) = 1$.

(3) Für das Rechnen mit dem natürlichen Logarithmus gilt $\ln(b^x) = x \cdot \ln(b)$.

2.5 Modellieren von Wachstums- und Abklingvorgängen

2.5.1 Definition

Wir nennen die Funktion $f : t \mapsto b \cdot a^t (a \in \mathbb{R}^+ \backslash \{1\})$ mit Wachstumsfaktor a und Anfangsbestand $b = f(0)$ *Wachstumsfunktion*. Eine alternative Darstellung ist:

$$f : t \mapsto b \cdot \mathrm{e}^{\ln(a) \cdot t}$$

2.5.2 Satz

Aus der Wachstumsfunktion $f : t \mapsto \mathrm{e}^{k \cdot t}$ ergibt sich unmittelbar die Halbwerts- bzw. Verdopplungszeit.

(i) $k > 0 : T_V = \frac{\ln(2)}{k}$

(ii) $k < 0 : T_H = -\frac{\ln(2)}{k}$

3 Zufallsgrößen und Binomialverteilung

3.1 Zufallsgrößen und deren Wahrscheinlichkeitsverteilung

3.1.1 Definition

Eine Funktion X, die jedem Ergebnis $\omega \in \Omega$ eines Zufallsexperiments eine reelle Zahl $X(\omega)$ zuordnet, heißt *Zufallsgröße* oder *Zufallsvariable* auf Ω. Kurz: $X : \omega \mapsto X(\omega)$ mit $\omega \in \Omega$ und $X(\omega) \in \mathbb{R}$.

3.1.2 Definition

Die Funktion W, die jedem Wert x_i einer Zufallsgröße X die Wahrscheinlichkeit $P(X = x_i)$ zuordnet, heißt *Wahrscheinlichkeitsfunktion der Zufallsgröße X* oder *Wahrscheinlichkeitsverteilung der Zufallsgröße X* oder knapp Verteilung von X. Kurz: $W : x_i \mapsto P(X = x_i)$.

3.1.3 Definition

Die Funktion F, die bei gegebener Zufallsgröße X jeder reellen Zahl x die Wahrscheinlichkeit $P(X \leq x)$ zuordnet, heißt *kumulative Verteilungsfunktion der Zufallsgröße* X. Kurz: $F : x \mapsto P(X \leq x)$ mit $x \in \mathbb{R}$ und $P(X \leq x) \in [0; 1]$.

3.2 Erwartungswert und Varianz einer Zufallsgröße

3.2.1 Definition

$$E(x) = \mu = \sum_{i=1}^{n} x_i \cdot P(X = x_i)$$

In Worten: Ist X eine Zufallsgröße, deren mögliche Werte $x_1, x_2, ..., x_n$ sind, so heißt die reelle Zahl $E(X) = x_1 \cdot P(X = x_1) + x_2 \cdot P(X = x_2) + ... + x_n \cdot P(X = x_n)$ *Erwartungswert der Zufallsgröße X*. Der Erwartungswert ist immer der mittlere Wert der Zufallsgröße pro Versuch auf lange Sicht.

3.2.2 Bemerkung

Ein Spiel heißt *fair*, wenn der Erwartungswert des Gewinns für jeden Spieler 0 ist.

3.2.3 Definition

Ist X eine Zufallsgröße, deren mögliche Werte $x_1, x_2, ..., x_n$ sind und die den Erwartungswert $E(X) = \mu$ hat, so heißt die reelle Zahl $Var(X) = (x_1 - \mu)^2 \cdot P(X = x_1) + (x_2 - \mu)^2 \cdot P(X = x_2) + ... + (x_n - \mu)^2 \cdot P(X = x_n)$ *Varianz der Zufallsgröße X*.

3.2.4 Definition

Die reelle Zahl $\sqrt{Var(X)}$ heißt *Standardabweichung der Zufallsgröße* X.

3.2.5 Bemerkung

Statt $\sqrt{Var(X)}$ schreibt man auch σ und folglich gilt für die Varianz $Var(X) = \sigma^2$.

3.3 Ziehen aus einer Urne mit Beachtung der Reihenfolge

3.3.1 Satz

Unter der Beachtung der Reihenfolge unterscheidet man grundlegend zwei Zufallsexperimente. Für das Ziehen aus einer Urne mit n unterscheidbaren Kugeln und k-maligem Ziehen gilt...

(i) ...mit Zurücklegen: Es sind n^k Ergebnisse möglich.

(ii) ...ohne Zurücklegen: Es sind $n \cdot (n-1) \cdot ... \cdot (n-k+1)$ verschiedene Ergebnisse möglich.

3.3.2 Bemerkung

Jede Anordnung einer Reihenfolge wird als *Permutation* bezeichnet.

3.4 Ziehen aus einer Urne ohne Beachtung der Reihenfolge

3.4.1 Satz

Zieht man ohne Zurücklegen und ohne Beachtung der Reihenfolge aus n unterschiedlichen Kugeln k-mal, so gibt es

$$\frac{n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot ... \cdot (n-k+1)}{k!}$$

mögliche Ergebnisse.

3.4.2 Definition (Binomialkoeffizient)

Für $k, n \in \mathbb{N}$ und $k \leq n$ heißt $\binom{n}{k} = \frac{n!}{k! \cdot (n-k)!}$ *Binomialkoeffizient.*

3.4.3 Bemerkung

(1) Es ist bekannt, dass $0! = 1$ gilt.

(2) Wir erkennen die Symmetrie $\binom{n}{n-k} = \binom{n}{k}$ des Binomialkoeffizienten. Der Beweis kann durch Umformen nachvollzogen werden und ist dem Leser überlassen.

3.4.4 Satz

Aus einer Urne mit N Kugeln, von denen S schwarz sind, werden n Kugeln ohne zurücklegen und ohne Beachtung der Reihenfolge, z.B. mit einem Griff, gezogen. Die Zufallsgröße X gibt die Anzahl s der gezogenen schwarzen Kugeln an. Dann gilt:

$$P(X = s) = \frac{\binom{S}{s} \cdot \binom{N-S}{n-s}}{\binom{N}{n}}$$

3.5 Bernoulli-Experimente mit Bernoulli-Ketten

3.5.1 Definition

Ein Zufallsexperiment mit genau zwei Ergebnissen heißt *Bernoulli-Experiment*. Die Wahrscheinlichkeit für einen Treffer wird mit p, die für eine Niete mit q bezeichnet, wobei $q = 1 - p$ ist. Ein Zufallsexperiment, das aus n unabhängigen Durchführungen desselben Bernoulli-Experiments besteht, heißt *Bernoulli-Kette* der Länge n mit dem Parameter p.

3.6 Binomialverteilung

3.6.1 Satz (Formel von Bernoulli)

Gegeben ist eine Bernoulli-Kette der Länge n, $n \in \mathbb{N}\backslash\{0\}$ mit Trefferwahrscheinlichkeit p. Die Zufallsgröße X gibt die Anzahl der Treffer an. Dann beträgt die *Wahrscheinlichkeit für genau k Treffer* mit $k \in \{0; 1; ...; n\}$:

$$P(X = k) = \binom{n}{k} \cdot p^k \cdot (1-p)^{n-k}$$

3.6.2 Bemerkung

Die Schreibweisen

(a) $B(n; p)$,

(b) $P(X = x)$ und

(c) $P_p^n(X = x)$

sind äquivalent.

3.6.3 Definition

Eine Zufallsgröße X heißt *binomialverteilt* nach $B(n;p)$ oder $B(n;p)$-verteilt, wenn gilt

(i) X kann die Werte $0;1;2;...;n$ mit $n \in \mathbb{N}\backslash\{0\}$ annehmen und

(ii) $P(X=k) = \binom{n}{k} \cdot p^k \cdot (1-p)^{n-k}$ mit $0 \leq p \leq 1$.

3.6.4 Vorgehen beim Modellieren

- Man prüft, ob das Zufallsexperiment als Bernoulli-Kette der Länge n mit der Wahrscheinlichkeit p für Treffer angesehen werden kann.
- Ist dies der Fall, führt man eine $B(n;p)$-verteilte Zufallsgröße X ein.
- Man bestimmt die gesuchte Wahrscheinlichkeit mithilfe der Binomialverteilung.

3.7 Erwartungswert und Varianz der Binomialverteilung

3.7.1 Satz

Für die nach Kenngrößen einer nach $B(n;p)$-verteilten Zufallsgröße X gilt

(i) für den Erwartungswert $\mu = n \cdot p$,

(ii) für die Varianz $\sigma^2 = n \cdot p \cdot q$ mit $q = 1-p$ und

(iii) für die Standardabweichung $\sigma = \sqrt{n \cdot p \cdot q}$.

3.8 Axiomatische Definition von Wahrscheinlichkeit

3.8.1 Definition (Axiome von Kolmogorow)

Eine Funktion $P : A \mapsto P(A)$ mit $A \subset \mathbb{Q}$ und $P(A) \in \mathbb{R}$ heißt *Wahrscheinlichkeitsverteilung* und $P(A)$ *Wahrscheinlichkeit* von A, wenn P folgende Bedingungen erfüllt sind:

(i) $P(A) \geq 0$

(ii) $P(\Omega) = 1$

(iii) $A \cap B = \{\} \Rightarrow P(A \cup B) = P(A) + P(B)$

4 Beurteilende Statistik

4.1 Einseitiger Hypotesentest

4.1.1 Grundwissen

Zu einem Sachverhalt werden zwei sich ausschließende Hypothesen betrachtet: die *Nullhypothese* H_0 und die *Gegenhypothese* H_1. Die Anzahl der Treffer einer *Stichprobe* mit festgelegter Länge bildet die *Testgröße*. Der Wertebereich der Testgröße wird in den *kritischen Bereich* K (*Ablehnungsbereich*) und den *nichtkritischen Bereich* $\overline{K}$ zerlegt. Liegt der durch die Stichprobe gewonnene Wert der Testgröße in K, dann wird H_0 verworfen, ansonsten wird H_0 nicht verworfen (*Entscheidungsregel*).

4.1.2 Bemerkung

(1) Es ist möglich, dass die Nullhypothese verworfen wird, obwohl sie in Wirklichkeit wahr ist.

(2) Ist K links von $\overline{K}$, so spricht man von einem linksseitigen Hypothesentest. Andersherum, also wenn K rechts von $\overline{K}$ liegt, spricht man von einem rechtsseitigen Hypothesentest.

4.1.3 Definition

Einen Hypothesentest mit einem kritischen Bereich K, der aus einem einzigen Intervall besteht, bezeichnet man als *einseitigen Hypothesentest*.

Linksseitiger Hypothesentest	Rechtsseitiger Hypothesentest
$H_0 : p = p_0$ (oder $p \geq p_0$) $H_1 : p < p_0$	$H_0 : p = p_0$ (oder $p \leq p_0$) $H_1 : p > p_0$

4.1.4 Fehler erster Art

Die Nullhypothese H_0 wird abgelehnt ($Z \in K$), obwohl sie eigentlich wahr ist. Fehler erster Art werden mit α' bezeichnet. Für die Berechnung genügt es bei einseitigen Hypothesentests, mit der Wahrscheinlichkeit $p = p_0$ zu rechnen, da alle Werte bei einem linksseitigen Hypothesentest für $p > p_0$ (rechtsseitig: $p < p_0$) eine kleinere Wahrscheinlichkeit haben.

4.1.5 Fehler zweiter Art

Die Nullhypothese H_0 wird nicht abgelehnt ($Z \in \overline{K}$), obwohl eigentlich die Gegenhypothese H_1 zutrifft. Fehler zweiter Art werden mit β' bezeichnet. Man kann β' nur berechnen, wenn für die Testgröße Z eine bestimmte Wahrscheinlichkeitsverteilung (und damit auch p) angenommen wird.

4.1.6 Einflussnahmen auf α' und β'

Vergrößert man den *Ablehnungsbereich*, wird β' zwar kleiner, aber α' damit zwangsläufig größer und umgekehrt. Durch die Vergrößerung des *Stichprobenumfangs* kann man Fehler erster Art als auch Fehler zweiter Art verkleinern.

4.2 Konstruktion eines einseitigen Signifikanztestes

4.2.1 Definition

Ein Hypothesentest mit einem zuvor festgelegten *Signifikanztest* α und einem Ablehnungsbereich K, der aus einem einzigen Intervall besteht, bezeichnet man als *einseitigen Signifikanztest.*

4.2.2 Bemerkung

Meist wird für α der Wert $1\%, 2\%$ oder 5% angenommen.

4.2.3 Konstruktion eines einseitigen Signifikanztests

(1) Festlegen der Testgröße Z und des Stichprobenumfangs n.

(2) Mathematische Formulierung der Nullhypothese H_0 und der Gegenhypothese H_1.

(3) Festlegen des Signifikanzniveaus α gemäß der in der Anwendungssituation maximal tolerierten Wahrscheinlichkeit für den Fehler erster Art.

(4) Bestimmen der Entscheidungsregel, d.h. Konstruktion des Ablehnungsbereichs K.

Linksseitiger Test: Ablehnungsbereich $K = \{0; 1; ...; g\}$ wobei g die größte natürliche Zahl ist mit $\alpha' = P^n_{p_0}(Z \leq g) \leq \alpha$	*Rechtsseitiger Test* Ablehnungsbereich $K = \{g; g+1; ...; n\}$ wobei g die kleinste natürliche Zahl ist mit $\alpha' = P^n_{p_0}(Z \geq g) \leq \alpha$

4.2.4 Bemerkung

Beim rechtsseitigen Signifikanztest muss man beim Ermitteln von g auf Folgendes achten:

$$\alpha' \leq \alpha \Leftrightarrow P^n_{p_0}(Z \geq g) \leq \alpha \Leftrightarrow 1 - P^n_{p_0}(Z \leq g-1) \leq \alpha \Leftrightarrow P^n_{p_0}(Z \leq g-1) \geq 1 - \alpha$$

Für Bestimmung von g muss auf $g - 1$ noch 1 addiert werden.

5 Quotientenregel und Funktionsuntersuchungen

5.1 Die Quotientenregel bei gebrochen-rationalen Funktionen

5.1.1 Satz (Quotientenregel)

Sind die Funktionen u und v differenzierbar, dann ist $f : x \mapsto \dfrac{u(x)}{v(x)}$ für alle x mit $v(x) \neq 0$ differenzierbar und es gilt $f'(x) = \dfrac{u'(x) \cdot v(x) - u(x) \cdot v'(x)}{[v(x)]^2}$.

5.1.2 Satz

Sei $f : x \mapsto x^k,\ (k \in \mathbb{Z}^-)$, so ist $f(x)$ auf $\mathbb{R}\backslash\{0\}$ differenzierbar mit

$$f'(x) = k \cdot x^{k-1}.$$

5.1.3 Aspekte bei der Untersuchung einer Funktion f und ihren Graphen G_f

Beim Untersuchen einer Funktion $f : x \mapsto f(x)$ mit Definitionsmenge $D_f \subseteq \mathbb{R}$ gilt es, folgende Untersuchungen zu tätigen.

(1) Definitionsmenge D_f von f

(2) Symmetrieverhalten von G_f (Ansatz: $f(-x)$ einsetzen)

(3) Nullstellen von f ($0 = f(x)$ auflösen)

(4) Schnittpunkte von G_f mit der y-Achse (Untersuchung nach $f(0)$)

(5) Verhalten von f an den Rändern von D_f (Grenzwerte betrachten)

(6) Asymptoten von G_f (beachte vertikale und horizontale, z.B. über Grenzwerte)

(7) Extrempunkte von G_f (Prüfen nach $f'(x) = 0$ und $f''(x) \neq 0$)

(8) Monotonieverhalten von f (1. Ableitung)

(9) Wendepunkte von G_f ($f''(x) = 0$ und $f'''(x) \neq 0$)

(10) Krümmungsverhalten von G_f (Prüfen ob $f''(x)$ größer oder kleiner als 0 ist)

5.1.4 Satz (Regel von L'Hôpital)

Gegeben sei ein offenes Intervall I mit einer Stelle $a \in I$. Seien u und v nun zwei Funktionen, die auf $I \backslash \{a\}$ differenzierbar seien und außerdem gelte für alle $x \in I \backslash \{a\}$ $v'(x) \neq 0$. Existiert nun der Grenzwert $\lim\limits_{x \to a} \frac{u'(x)}{v'(x)}$, so gilt:

$$\left[\left(\lim_{x \to a} u(x) = \lim_{x \to a} v(x)\right) \vee \left(\lim_{x \to a} u(x) = \lim_{x \to a} v(x) = \pm\infty\right)\right] \Rightarrow \lim_{x \to a} \frac{u(x)}{v(x)} = \lim_{x \to a} \frac{u'(x)}{v'(x)}$$

$\vee$ heißt hierbei „oder“im mathematischen Sinne.

6 Wurzelfunktion

6.1 Die Umkehrfunktion

6.1.1 Definition

Sei $f : x \mapsto f(x)$ mit Definitionsmenge D_f und Wertemenge W_f. $f(x)$ heißt genau dann *umkehrbar*, wenn für alle $y \in W_f$ genau ein $x \in D_f$ mit $y = f(x)$ existiert. Diese umgekehrte Zuordnung nennt man *Umkehrfunktion* von f oder kurz f^{-1}.

6.1.2 Satz (Umkehrbarkeitskriterium

Gegeben sei eine Funktion $f : x \mapsto f(x)$ im Intervall I, so ist $f(x)$ stets umkehrbar, wenn für alle $x \in I$ die Bedingung $f'(x) > 0$ oder $f'(x) < 0$ erfüllt ist.

6.2 Potenzfunktionen mit rationalem Exponenten und ihre Ableitung

6.2.1 Definition

Sei $f : x \mapsto a \cdot x^{\frac{p}{q}} = a \cdot \sqrt[q]{x^p}$ mit $a \in \mathbb{R}$, $p \in \mathbb{Z}$ und $q \in \mathbb{N}\backslash\{0\}$, so heißt f Potenzfunktion mit rationalem Exponenten.

6.2.2 Satz (Ableitungsregel für Potenzfunktionen

(i) $f : x \mapsto x^r \Rightarrow f' : x \mapsto r \cdot x^{r-1}$ $(r \in \mathbb{Q})$

(ii) $f : x \mapsto x^r \Rightarrow F : x \mapsto \dfrac{1}{r+1} x^{r+1}$ $(r \in \mathbb{Q}\backslash\{-1\})$

7 Natürliche Logarithmusfunktion

7.1 Die natürliche Logarithmusfunktion und ihre Ableitung

7.1.1 Definition

Sei $f : x \mapsto \ln(x)$ mit $D = \mathbb{R}^+$, so heißt f natürliche Logarithmusfunktion.

7.1.2 Satz

Sei $f : x \mapsto \ln(x)$ mit $D_f = \mathbb{R}^+$, so gilt $f' : x \mapsto \dfrac{1}{x}$ mit $D_{f'} = \mathbb{R}$. Weiterhin gilt: $f : x \mapsto \dfrac{1}{x} \Rightarrow F : x \mapsto \ln(|x|) + C$ $(D_f = D_F = \mathbb{R}\backslash\{0\}, C \in /R$

7.1.3 Satz (Rechenregeln für den natürlichen Logarithmus)

Sei $b, c \in \mathbb{R}^+$ und $r \in \mathbb{R}$, so gilt

(i) $\ln(b \cdot c) = \ln(b) + \ln(c)$,

(ii) $\ln(\frac{b}{c}) = \ln(b) - \ln(c)$ und

(iii) $\ln(b^r) = r \cdot \ln(b)$.

7.2 Ableitung und Grenzwerte von Verknüpfungen mit der ln-Funktion

7.2.1 Satz

Sei v differenzierbar und $v'(x) > 0$, so gilt

$$f : x \mapsto \ln(v(x)) \Rightarrow f' : x \mapsto \frac{v'(x)}{v(x)}.$$

7.2.2 Satz

$$\forall r \in \mathbb{Q}^+ : \left[\lim_{x \to +\infty} \frac{\ln(x)}{x^r} = 0 \wedge \lim_{x \to 0} (x^r \cdot \ln(x)) = 0 \right]$$

$\forall$ heißt hierbei: „Für alle".

8 Grundlagen der Koordinatengeometrie im Raum

8.1 Vektoren

8.1.1 Definition

Die Menge aller gleichlanger, zueinander paralleler und gleichgerichteter Pfeile nennt man Vektor. Jeder Pfeil ist ein Repräsentant dieses Vektors. Man bezeichnet sie mit $\vec{v}$.

Im zweidimensionalen Koordinatensystem hat jeder Vektor $\vec{v}$ zwei Koordinaten $\vec{v} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$. Im Dreidimensionalen schreibt man $\vec{v} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$.

8.1.2 Satz

Zwischen zwei Punkten A und B konstruiert man den Vektor $\overrightarrow{AB}$ von A nach B wiefolgt: $\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} b_1 - a_1 \\ b_2 - a_2 \\ b_3 - a_3 \end{pmatrix}$

8.1.3 Definition

Der Pfeil vom Koordinatenursprung O zum Punkt B heißt Repräsentant des Ortsvektors B. $\overrightarrow{OB} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix}$ bzw. $\overrightarrow{OB} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}$

8.1.4 Definition

Die Länge eines Repräsentanten eines Vektors $\vec{v}$ nennt man Betrag des Vektors.

8.1.5 Satz

Der Betrag eines Vektors $\vec{v}$ ist $|\vec{v}| = \sqrt{v_1^2 + v_2^2}$ im Zweidimensionalen und $|\vec{v}| = \sqrt{v_1^2 + v_2^2 + v_3^2}$ im Dreidimensionalen.

8.2 Addition und Subtraktion von Vektoren

8.2.1 Definition

Zwei Vektoren $\vec{a}$ und $\vec{b}$ werden wiefolgt addiert:

$\vec{a} + \vec{b} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 + b_1 \\ a_2 + b_2 \end{pmatrix}$ bzw.

$$\vec{a} + \vec{b} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 + b_1 \\ a_2 + b_2 \\ a_3 + b_3 \end{pmatrix}.$$

Die Subtraktion $\vec{a} - \vec{b}$ kann als Addition mit dem Gegenvektor $-\vec{b}$ aufgefasst werden. So gilt: $\vec{a} - \vec{b} = \vec{a} + -\vec{b}$.

8.3 skalare Multiplikation eines Vektors

8.3.1 Definition

Sei $\lambda \in \mathbb{R}$ eine beliebige reelle Zahl (*Skalar*). Dann ist der Vektor $\lambda \cdot \vec{v}$ genau $|\lambda|$-mal so lang wie der Vektor $\vec{v}$ und parallel zu $\vec{v}$. Weiterhin wird definiert: $0 \cdot \vec{v} = \vec{0}$ und $\lambda \cdot \vec{0} = \vec{0}$.

Für einen Vektor $\vec{v} = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix}$ definiert man nun die skalare Multiplikation wiefolgt.

$$\lambda \cdot \vec{v} = \lambda \cdot \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda \cdot v_1 \\ \lambda \cdot v_2 \\ \lambda \cdot v_3 \end{pmatrix}$$

Analog gilt für einen zweidimensionalen Vektor:

$$\lambda \cdot \vec{v} = \lambda \cdot \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda \cdot v_1 \\ \lambda \cdot v_2 \end{pmatrix}$$

8.3.2 Definition

Sei $\vec{v}$ ein beliebiger Vektor, so heißt $(-1) \cdot \vec{v} = -\vec{v}$ *Gegenvektor* von $\vec{v}$.

8.3.3 Definition

Sei $\vec{v}$ ein beliebiger vom Nullvektor verschiedener Vektor, so heißt der Vektor $\vec{v_0} = \frac{1}{|\vec{v}|} \cdot \vec{v}$ *Einheitsvektor* von $\vec{v}$. Er hat stets die Länge $|\vec{v_0}| = 1$.

8.4 Skalarprodukt

8.4.1 Definition

Für die Vektoren $\vec{a}$, $\vec{b} \neq \vec{0}$ nennen wir die reelle Zahl $\vec{a} \circ \vec{b} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \cos(\varphi)$ *Skalarprodukt* von $\vec{a}$ und $\vec{b}$.

Im $\mathbb{R}^2$ Vektorraum gilt:

$$\vec{a} \circ \vec{b} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \cos(\varphi) = a_1 \cdot b_1 + a_2 \cdot b_2$$

Im dreidimensionalen Raum gilt analog dazu:

$$\vec{a} \circ \vec{b} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \cos(\varphi) = a_1 \cdot b_1 + a_2 \cdot b_2 + a_3 \cdot b_3$$

8.4.2 Satz

Die Vektoren $\vec{a},\ \vec{b} \neq \vec{0}$ sind genau dann orthogonal zueinander, wenn gilt $\vec{a} \circ \vec{b} = 0$.

8.5 Das Kreuzprodukt (Vektorprodukt)

8.5.1 Definition

Für die Vektoren $\vec{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}$ und $\vec{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}$ definieren wir das Kreuzprodukt als

$$\vec{a} \times \vec{b} = \begin{pmatrix} a_2b_3 - a_3b_2 \\ a_3b_1 - a_1b_3 \\ a_1b_2 - a_2b_1 \end{pmatrix} /text.$$

8.5.2 Satz

$(\vec{a} \times \vec{b}) \neq \vec{0} \Rightarrow (\vec{a} \times \vec{b}) \perp \vec{a} \wedge (\vec{a} \times \vec{b}) \perp \vec{b}$

8.5.3 Satz

Der Flächeninhalt des Parallelogramms, das von den Vektoren $\vec{a},\ \vec{b} \neq \vec{0}$ unter dem Winkel φ aufgespannt wird, beträgt $\left|\vec{a} \times \vec{b}\right| = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \sin(\varphi)$.

Das Volumen des Spates, der von den Vektoren $\vec{a},\ \vec{b},\ \vec{c} \neq \vec{0}$ aufgespannt wird, beträgt $\left|\left(\vec{a} \times \vec{b}\right) \circ \vec{c}\right|$.