TRE GRAFICI A CONFRONTO

- Mett. It. nel caso in cui m = n ln n per cui il valore atteso di palline ricevute da ogni contenitore è $\mu = \ln n$. Riproduci e commenta le maggiorazioni delle disuguaglianze di Markov, Chebyshev e Chernoff rispetto alla probabilità che un contenitore riceva 5μ palline

DISUGUAGLIANZE FONDAMENTALI

- **MARKOV**: $\forall a > 0 \quad Pr\{X \geq a\} \leq \dfrac{E[X]}{a}$

- **CHEBYSHEV**: $\forall \varepsilon > 0 \quad Pr\{|X - \mu| \geq \varepsilon\} \leq \dfrac{\sigma^2}{\varepsilon^2} \quad \left(E[X] = \mu, Var(X) = \sigma^2\right)$

- **CHERNOFF**: $X_1 \dots X_n$ indicatori INDIPENDENTI

$E[X_i] = p$, $X = \sum X_i$, $E[X] = \mu (= np)$, $Var(X) = \dfrac{\sigma^2}{n}$

$\forall \varepsilon > 0 \quad Pr\{X \geq (1+\varepsilon)\mu\} \leq \left(\dfrac{e^{\varepsilon}}{(1+\varepsilon)^{1+\varepsilon}}\right)^{\mu}$

SOLUZIONE

- **MARKOV**: $E[X] = \log n$; $a = 5 \ln n$

$$Pr\{X \geq 5 \log n\} \leq \frac{\cancel{\log n}}{5 \log n} \leadsto \frac{1}{5}$$

· CHEBYSHEV

$$\mu = \frac{m}{n} = \frac{\cancel{n} \ln n}{\cancel{n}} = \ln n \,, \quad \sigma^2 = \ln n \,, \quad \varepsilon = 4 \ln n$$

$$\Rightarrow \Pr\{X \geq 5 \ln n\} \leq \frac{\sigma^2}{\varepsilon^2} \rightsquigarrow \frac{\ln n}{16 \ln^2 n} \rightsquigarrow$$

$$\rightsquigarrow \frac{1}{16 \ln n} \rightsquigarrow \frac{1}{160}$$

· CHERNOFF

$$\varepsilon = 4 \,, \quad \mu = \log n$$

$$\Rightarrow \Pr\{X \geq 5 \ln n\} \leq \left(\frac{e^4}{5^5}\right)^{\log n}$$ $\rightsquigarrow$ 5^5 e e^8 sono simili

$$\rightsquigarrow \left(\frac{e^4}{e^8}\right)^{\ln n} = \left(\frac{1}{e^4}\right)^{\ln n} \rightsquigarrow \frac{1}{n^4}$$

CONCLUSIONE:

· La disuguaglianza di Chernoff risulta molto più potente ed evidenzia il fatto che le probabilità di grandi variazioni dal valore atteso decresce più velocemente