

MC_TRACE Pedemonte Giacomo s4861715 Relazione

Premessa: introduciamo la media campionaria e le sue proprietà che ci serviranno in seguito nel metodo Monte Carlo per calcolare una Traccia di una matrice, ovvero la somma degli elementi diagonali di A (dove A matrice semidefinita positiva). Questo algoritmo si chiama MCTrace.

$$\mathbb{E}[X_m] = \mu \quad \text{e} \quad \text{Var}(X_m) = \mathbb{E}[(X_m - \mu)^2] = \sigma^2,$$

$$\langle X \rangle_M = \frac{1}{M} \sum_{m=1}^M X_m.$$

$$\mathbb{E}[\langle X \rangle_M] = \mathbb{E}\left[\frac{1}{M} \sum_{m=1}^M X_m\right] = \frac{1}{M} \mathbb{E}\left[\sum_{m=1}^M X_m\right] = \frac{1}{M} \sum_{m=1}^M \mathbb{E}[X_m] = \frac{1}{M} M \mu = \mu$$

$$\text{Var}(\langle X \rangle_M) = \text{Var}\left(\frac{1}{M} \sum_{m=1}^M X_m\right) = \frac{1}{M^2} \sum_{m=1}^M \text{Var}(X_m) = \frac{1}{M^2} M \sigma^2 = \frac{\sigma^2}{M}$$

Quindi vuol dire che la varianza decresce al crescere di M .

Tuttavia, dalla disuguaglianza di Chebyshev si vede che M dipende da $1/\sigma^2$ (se è richiesta una precisione molto spinta, il numero M di esperimenti potrebbe risultare insensatamente grande.)

Quindi, possiamo concludere che:

$$\sigma_M^2 = \frac{1}{M-1} \sum_{m=1}^M (X_m - \langle X \rangle_M)^2$$

Queste proprietà vengono utilizzate nell'algoritmo MonteCarloTrace nel seguente modo:

Input: \mathbf{A} , matrice $n \times n$ semi-definita positiva e M , numeri di campioni

Output: $\langle X \rangle_M$, stima di $\text{Tr}(\mathbf{A})$ e σ_M^2 , varianza campionaria della stima

$\bar{X}_0 = 0$

for $m = 1, \dots, M$

1. campiona $\mathbf{u} = [u_1, \dots, u_n] \in \mathbb{R}^n$ vettore di Rademacher

2. ottieni $X_m = \mathbf{u}^\top \mathbf{A} \mathbf{u}$ dall'oracolo

3. $\langle X \rangle_m = \langle X \rangle_{m-1} + (X_m - \langle X \rangle_{m-1})/m$

$\sigma_M^2 = \sum_{m=1}^M (X_m - \langle X \rangle_M)^2 / (M-1)$

Questo, viene implementato nel file "MC_trace.cpp" per risolvere il compito 9.1 che consiste:

- Genera una matrice 300×300 B con B_{ij} campionato uniformemente nell'intervallo $[0, 1]$.
- La matrice $A = B^\top B$ è semidefinita positiva.
- Calcola $\|\mathbf{A}\|_F^2$ e $\text{Tr}(\mathbf{A})$ dalle definizioni.

Usare quindi MonteCarloTrace per:

- stimare 100 volte $\text{Tr}(A)$ con $M = 5, 10, 25$ e 100 .
- Costruire un istogramma con le stime ottenute e commentare il significato delle posizioni nell'istogramma occupate da $\text{Tr}(A)$ e $\text{Tr}(A) \pm \sigma_M$ (considerando uno dei 100 σ_M ottenuti per ogni valore di M).
- Confronta σ_M^2 con $\|A\|_F^2 / M$

Eseguendo il codice ottengo questi risultati per i casi richiesti:

```
Traccia: 30006.4
Norma di Frobenius al quadrato: 5.10331e+008

M= 5
Traccia stimata media ----> 30965.8
Quadrato della norma di Frobenius ----> 5.10331e+008
Varianza campionaria media della stima ----> 3.81961e+009
Due volte il quadrato della norma di Frobenius fratto M equivale a: 2.04133e+008

M= 10
Traccia stimata media ----> 30850.3
Quadrato della norma di Frobenius ----> 5.10331e+008
Varianza campionaria media della stima ----> 2.02387e+009
Due volte il quadrato della norma di Frobenius fratto M equivale a: 1.02066e+008

M= 25
Traccia stimata media ----> 30859.7
Quadrato della norma di Frobenius ----> 5.10331e+008
Varianza campionaria media della stima ----> 9.39646e+008
Due volte il quadrato della norma di Frobenius fratto M equivale a: 4.08265e+007

M= 100
Traccia stimata media ----> 30601
Quadrato della norma di Frobenius ----> 5.10331e+008
Varianza campionaria media della stima ----> 2.34173e+009
Due volte il quadrato della norma di Frobenius fratto M equivale a: 1.02066e+007
```

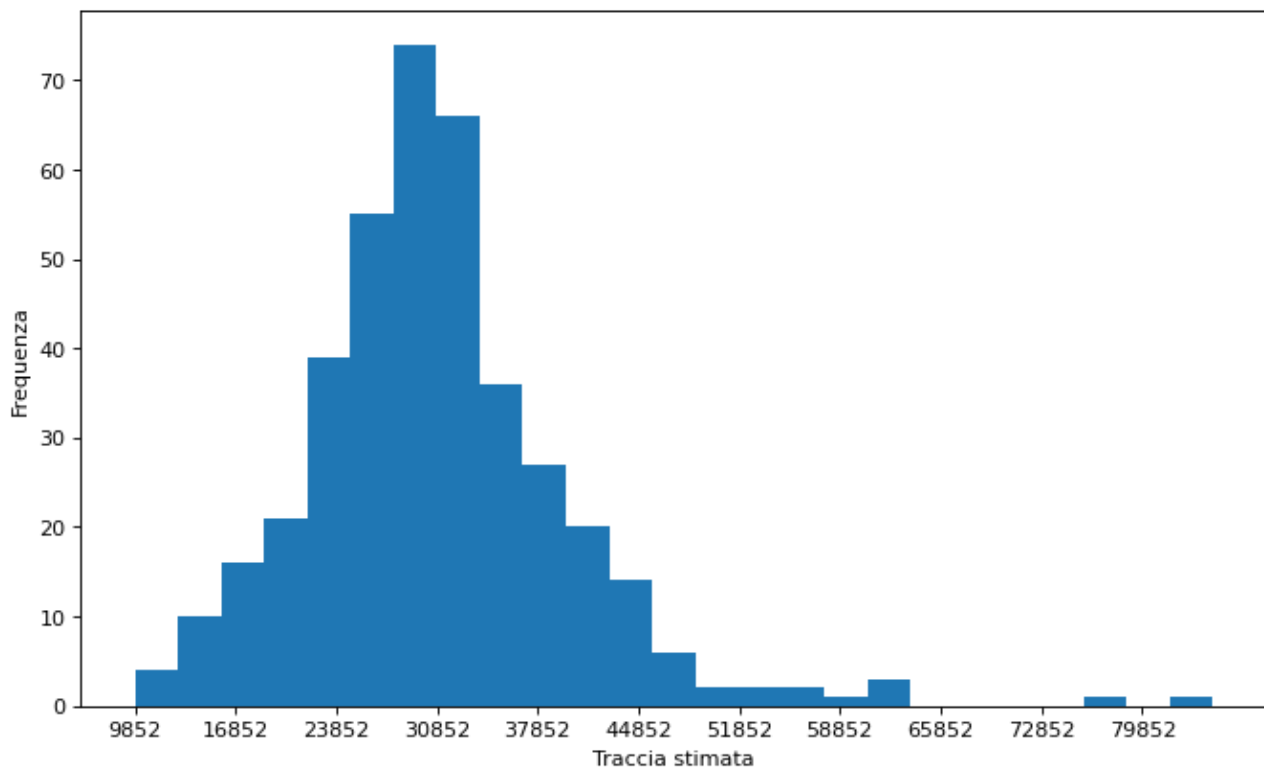
Come possiamo notare la traccia della matrice rimane sempre intorno ai 30000.

La varianza campionaria media della stima è sempre minore o uguale del doppio della norma di Frobenius al quadrato fratto M .

Quindi:

$$\sigma_M^2 \leq \|A\|_F^2 / M$$

Il grafico ottenuto con i dati presenti all'interno nel file che si genera al momento dell'esecuzione del codice "datimctrace.txt" è il seguente:



La frequenza maggiore dei valori della traccia stimata si aggira ai 30000 come ci aspettavamo.