Relazione ESERCITAZIONE SUI SISTEMI LINEARI

I componenti del gruppo in ordine alfabetico e i rispettivi numeri di matricola:

Francesco Curcio S4863740

Giacomo Pedemonte S4861715

ESERCIZIO 1:

1. Calcolare la norma ∞ delle seguenti matrici:

   a)
$$A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 7 & -3 & 0 \\ 0 & -3 & 9 & -2 \\ 0 & 0 & 4 & -10 \end{pmatrix}, \qquad A = \begin{pmatrix} 2 & 4 & -2 & 0 \\ 1 & 3 & 0 & 1 \\ 3 & -1 & 1 & 2 \\ 0 & -1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

   b) $A = P$, dove P è la matrice di Pascal $n \times n$ definita nel modo seguente:
$$(P)_{i,j} = \binom{i+j-2}{i-1} = \frac{(i+j-2)!}{(i-1)!(j-1)!} \qquad i,j = 1,\dots,n$$
   con $n = 10$.

   c) $A = T$, dove T è la matrice tridiagonale $n \times n$ definita dalle formule
$$(T)_{i,j} = 2 \quad \text{se} \quad i = j, \qquad (T)_{i,j} = -1 \quad \text{se} \quad |i-j| = 1, \qquad (T)_{i,j} = 0 \quad \text{altrimenti},$$
   e n è fissato nel modo seguente: si consideri il numero di matricola dell'ultimo componente, in ordine alfabetico, del gruppo; si indichi con d_0 e d_1, rispettivamente, l'ultima e la penultima cifra di tale numero di matricola; si ponga $n = 10(d_1 + 1) + d_0$.

Svolgimento:

```
int norma_inf(vector<vector<double>> v)
{
    //terrà conto della massima riga incontrata
    int res = 0;
    // itero righe
    for (int m = 0; m < v.size(); m++)
    {
        int sum = 0;
        //somma dei moduli
        for (int n = 0; n < v[m].size(); n++)
            sum += abs(v[m][n]);

        if (sum > res)
            res = sum;
    }
    return res;
}
```

Questo codice riportato a sinistra rappresenta il calcolo della norma infinito di una matrice.

Abbiamo usato questa funzione per calcolare le matrici dichiarate nel seguente modo:

```
// ESERCIZIO 1A
//dichiaro la prima matrice dell'esercizio 1a:
vector<vector<double>> A1{{3, 1, -1, 0},
                          {0, 7, -3, 0},
                          {0, -3, 9, -2},
                          {0, 0, 4, -10}};
//dichiaro la seconda matrice dell'esercizio 1a:
vector<vector<double>> A2{{2, 4, -2, 0},
                          {1, 3, 0, 1},
                          {3, -1, 1, 2},
                          {0, -1, 2, 1}};
```

Di queste appunto calcoliamo la norma infinito, ovvero il massimo tra le somme dei moduli degli elementi delle righe della matrice:

```
Matrice A1:

3       1       -1      0
0       7       -3      0
0       -3      9       -2
0       0       4       -10


La Norma Infinito di A1 e': 14
```

```
Matrice A2:

2       4       -2      0
1       3       0       1
3       -1      1       2
0       -1      2       1


La Norma Infinito di A2 e': 8
```

- Per la matrice A1 è 14.
- Per la matrice A2 è 8.

Ora invece andiamo ad effettuare il calcolo della norma infinito per A dove A è la matrice P di Pascal (A = P).

```
Matrice A = P dove P è la matrice di Pascal:

1       1       1       1       1       1       1       1       1       1
1       2       3       4       5       6       7       8       9       10
1       3       6       10      15      21      28      36      45      55
1       4       10      20      35      56      84      120     165     220
1       5       15      35      70      126     210     330     495     715
1       6       21      56      126     252     462     792     1287    2002
1       7       28      84      210     462     924     1716    3003    5005
1       8       36      120     330     792     1716    3432    6435    11440
1       9       45      165     495     1287    3003    6435    12870   24310
1       10      55      220     715     2002    5005    11440   24310   48620


La Norma Infinito A = P con n = 10 e': 92378
```

Il risultato ottenuto per questa matrice è appunto 92378.

Eseguiamo infine il calcolo della norma infinito della matrice tridiagonale NxN(nell'esecuzione viene stampata ma date le grandi dimensioni non riportata in relazione): dove N è dato in questo modo:

```
// uso matricola primo componente del gruppo in ordine alfabetico: FRANCESCO CURCIO S4863740
int d0 = 0;
int d1 = 4;
int N2 = (10 * (d1 + 1)) + d0; // come da richiesta
```

```
La Norma Infinito della matrice tridiagonale in questione con n = 50 e': 4
```

Il risultato ottenuto, come si visualizza dall'esecuzione sopra riportata, del calcolo della norma tridiagonale 50x50 ottenuta è 4.

ESERCIZIO 2-3

Testo:

2. Implementare un programma che effettui quanto segue per tutte le quattro matrici definite al punto 1:
   — costruisca la matrice A (senza richiedere all'utente di immettere direttamente gli elementi);
   — assumendo nota la soluzione del sistema
   $$\bar{x} = (1, 1, \dots, 1)^t,$$
   calcoli il corrispondente termine noto dato dal prodotto
   $$b = A \cdot \bar{x};$$
   — risolva in precisione singola il sistema $Ax = b$ tramite l'algoritmo di eliminazione Gaussiana.

   Facoltativi:
   — considerare il pivoting parziale;
   — implementare una procedura che funzioni per matrici di dimensioni arbitrarie (suggerimento: per passare le matrici alla funzione, utilizzare puntatori a puntatori o linearizzare le matrici)

   Verificare il corretto funzionamento dell'algoritmo di eliminazione Gaussiana (la soluzione attesa $\bar{x}$ e la soluzione calcolata x dovrebbero essere "vicine").

3. Risolvere il sistema lineare
$$A\tilde{x} = b + \delta b$$
con le stesse matrici dell'esercizio precedente, considerando per ogni termine noto b il vettore di perturbazioni
$$\delta b = \|b\|_\infty \cdot (-0.01, 0.01, -0.01, ..., 0.01)^t$$
Confrontare le due soluzioni x e $\tilde{x}$ ottenute, corrispondenti ai rispettivi sistemi lineari con termine noto b e $b + \delta b$. Cosa si osserva? In base agli argomenti visti a lezione, come si possono giustificare i risultati ottenuti?

Svolgimento:

(in questo caso non viene riportato il codice data la maggiore concentrazione sull'esecuzione)

Svolg es 2-3

Nell'esercizio 2 e 3 andiamo ad osservare stabilità e coefficienti di amplificazione dell'errore delle matrici inizializzate nell'esercizio 1.

Nella prima parte calcoliamo:

- b tramite la formula B = Ax con x noto
- poi x , tramite l'algoritmo di eliminazione gaussiana.

Il vettore x calcolato nel secondo punto dovrebbe, ed in effetti risulta essere, uguale a quello di partenza, composto da soli elementi uguali ad 1.

A questo punto però procediamo a perturbare b , nel seguente modo: Ax = b + δb Con δ vettore, composto da:

- − 0, 01 per gli elementi di indice pari, partendo da 0 (compreso),
- 0, 01 per gli elementi di indice dispari

Andiamo quindi a calcolare la x perturbata, tramite l'eliminazione gaussiana, e ad analizzare i risultati ottenuti in base alla matrice che si va a scegliere .

La scelta della matrice può avvenire nel menù di inizio esecuzione:

```
Scegli quale matrice usare (da 1 a 4):
1: Matrice A standard.
2: Matrice A2 standard.
3. Matrice di Pascal.
4. Matrice Tridiagonale.
Oppure un valore diverso per uscire dal programma.
```

Andiamo ad inserire 1: quindi analizziamo i risultati ottenuti utilizzando la matrice A standard.

```
1


La matrice A:
3 1 -1 0
0 7 -3 0
0 -3 9 -2
0 0 4 -10


Il vettore b:
3 4 4 -6
```

```
Il vettore b perturbato:
-0.06 0.06 -0.06 0.06


Il vettore b sommato a b perturbato:
2.94 4.06 3.94 -5.94


Il vettore x:
1 1 1 1


Il vettore x perturbato:
0.975868 1.0057 0.993306 0.991322
```

Possiamo notare dall'esecuzione sopra riportata, che la matrice è piuttosto stabile e non amplifica più di tanto l'errore.

Ora invece immettiamo 2 dopo la visualizzazione del menù per agire sulla matrice "A2":

```
2


La matrice A:
2 4 -2 0
1 3 0 1
3 -1 1 2
0 -1 2 1


Il vettore b:
4 5 5 2
```

```
Il vettore b perturbato:
-0.05 0.05 -0.05 0.05


Il vettore b sommato a b perturbato:
3.95 5.05 4.95 2.05


Il vettore x:
1 1 1 1


Il vettore x perturbato:
0.949999 1.015 1.005 1.055
```

Possiamo notare dall'esecuzione sopra riportata, che anche in questo caso la matrice è piuttosto stabile e non amplifica più di tanto l'errore.

Confrontandola però con la precedente esecuzione risulta essere ancora più soggetta a quest'errore.

Inseriamo ora il numero 3 per andare a lavorare sulla matrice di Pascal nel modo seguente:

```
3


La matrice A:
1 1 1 1 1 1 1 1 1 1
1 2 3 4 5 6 7 8 9 10
1 3 6 10 15 21 28 36 45 55
1 4 10 20 35 56 84 120 165 220
1 5 15 35 70 126 210 330 495 715
1 6 21 56 126 252 462 792 1287 2002
1 7 28 84 210 462 924 1716 3003 5005
1 8 36 120 330 792 1716 3432 6435 11440
1 9 45 165 495 1287 3003 6435 12870 24310
1 10 55 220 715 2002 5005 11440 24310 48620
```

In questo caso, dall'esecuzione riportata sotto, si nota subito come il valore del vettore x perturbato ci faccia notare che la matrice è estremamente instabile e amplifica di molto l'errore.

```
Il vettore b:
10 55 220 715 2002 5005 11440 24310 48620 92378



Il vettore b perturbato:
-923.78 923.78 -923.78 923.78 -923.78 923.78 -923.78 923.78 -923.78 923.78



Il vettore b sommato a b perturbato:
-913.78 978.78 -703.78 1638.78 1078.22 5928.78 10516.2 25233.8 47696.2 93301.8



Il vettore x:
1 1 1 1 1 1 1 1 1 1



Il vettore x perturbato:
-945016 7.56941e+06 -2.74287e+07 5.8656e+07 -8.13368e+07 7.57056e+07 -4.72384e+07 1.90373e+07 -4.49327e+06 472976
```

Analizzando invece l'ultima opzione, digitando 4 dal menù, agiamo sulla matrice tridiagonale 50x50:

(matrice non riportata per eccessivo spazio occupato) In questo caso invece, l'esecuzione evince una stabilità piuttosto buona e non amplifica di molto l'errore a differenza di quella esaminata precedentemente.

```
Il vettore b:
1 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 1



Il vettore b perturbato:
-0.01 0.01 -0.01 0.01 -0.01 0.01 -0.01 0.01 -0.01 0.01 -0.01 0.01 -0.01 0.01 -0.01 0.01 -0.01 0.01 -0.01 0.01 -0.01 0.01 -0.01 0
.01 -0.01 0.01 -0.01 0.01 -0.01 0.01 -0.01 0.01 -0.01 0.01 -0.01 0.01 -0.01 0.01 -0.01 0.01 -0.01 0.01 -0.01 0.01 -0.01 0.01 -0.
01 0.01 -0.01 0.01



Il vettore b sommato a b perturbato:
0.99 0.01 -0.01 0.01 -0.01 0.01 -0.01 0.01 -0.01 0.01 -0.01 0.01 -0.01 0.01 -0.01 0.01 -0.01 0.01 -0.01 0.01 -0.01 0.01 -0.01 0.
01 -0.01 0.01 -0.01 0.01 -0.01 0.01 -0.01 0.01 -0.01 0.01 -0.01 0.01 -0.01 0.01 -0.01 0.01 -0.01 0.01 -0.01 0.01 -0.01 0.01 -0.0
1 0.01 -0.01 1.01



Il vettore x:
1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 0.999999 0.999999 0.999999 0.999999 0.999999 0.999999 0.999999 0.999999 0.999999 0.999999 0.999999
 0.999999 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 0.999999 0.999999 0.999999 0.999999 0.999999 0.999999 0.999999 1 1



Il vettore x perturbato:
0.995098 1.0002 0.995294 1.00039 0.99549 1.00059 0.995686 1.00078 0.995882 1.00098 0.996078 1.00118 0.996274 1.00137 0.996471 1.
00157 0.996667 1.00176 0.996863 1.00196 0.997059 1.00216 0.997255 1.00235 0.997451 1.00255 0.997647 1.00275 0.997843 1.00294 0.9
98039 1.00314 0.998236 1.00333 0.998432 1.00353 0.998628 1.00373 0.998824 1.00392 0.999019 1.00412 0.999215 1.00431 0.999411 1.0
0451 0.999607 1.00471 0.999803 1.0049
```