

# Forma normal de Chomsky

Clase 22

IIC2223 / IIC2224

Prof. Cristian Riveros

# ¿qué es una forma normal?

## Ejemplo: polinomios

Un polinomio cualquiera:

$$p(x) := (x^3 \cdot ((x - 2) + 3x^2) - (3x^5 - 2x^2)) \cdot 2x + 7$$

Un polinomio cualquiera

cuando **planeamos hacer un algoritmo** sobre polinomios:

$$p(x) := 2x^5 + 4x^3 - 4x + 7$$

Formas normales son útiles en computación  
para **estudiar** un objeto y **diseñar** algoritmos.

# Forma normal de Chomsky

## Definición

Una gramática  $\mathcal{G}$  está en **forma normal de Chomsky** (CNF) si todas sus reglas son de la forma:

- $X \rightarrow YZ$
- $X \rightarrow a$

# Forma normal de Chomsky

¿cuáles gramáticas están en CNF?

■  $S \rightarrow a S b \mid \epsilon$



■  $A \rightarrow A B \mid a \mid \epsilon$   
 $B \rightarrow B A \mid b \mid \epsilon$



■  $S \rightarrow AB \mid AC \mid SS$   
 $C \rightarrow SB$   
 $A \rightarrow a$   
 $B \rightarrow b$



# Forma normal de Chomsky

## Definición

Una gramática  $\mathcal{G}$  está en **forma normal de Chomsky** (CNF) si todas sus reglas son de la forma:

- $X \rightarrow YZ$
- $X \rightarrow a$

Si  $\mathcal{G}$  está en CNF:

- ¿puede aceptar la palabra  $\epsilon$ ?
- ¿puede tener reglas **unitarias**?
- ¿puede tener reglas **en vacío**?

# Toda gramática se puede convertir en CNF

Sea  $\mathcal{G} = (V, \Sigma, P, S)$  una CFG tal que  $\epsilon \notin \mathcal{L}(\mathcal{G})$ .

- Primero, suponga que  $\mathcal{G}$  no contiene reglas en vacío o unitarias.
- Por lo tanto, todas las reglas en  $\mathcal{G}$  son de la forma:
  - $X \rightarrow \gamma$  para  $|\gamma| \geq 2$
  - $X \rightarrow a$

¿cómo transformamos  $\mathcal{G}$  en **forma normal de Chomsky**?

# Hacia la forma normal de Chomsky

Sea una gramática  $\mathcal{G}$  donde las reglas son de la forma:

- $X \rightarrow \gamma$  para  $|\gamma| \geq 2$
- $X \rightarrow a$

Paso 1: Convertir todas las reglas a la forma:

- $X \rightarrow Y_1 Y_2 \dots Y_k$  para  $k \geq 2$
- $X \rightarrow a$

Paso 2: Convertir todas las reglas a la forma:

- $X \rightarrow YZ$
- $X \rightarrow a$

¿cómo hacemos el Paso 1? ¿y el Paso 2?

# Hacia la forma normal de Chomsky (Paso 1)

## Paso 1

Convertir todas las reglas a la forma:

- $X \rightarrow Y_1 Y_2 \dots Y_k$  para  $k \geq 2$
- $X \rightarrow a$

Solución:

- Para cada  $a \in \Sigma$ ,  
agregar una nueva variable  $X_a$  y una regla  $X_a \rightarrow a$ .
- Reemplazar todas las ocurrencias antiguas de  $a$  por  $X_a$ .



# Hacia la forma normal de Chomsky (Paso 1)

## Ejemplo del Paso 1

$$S \rightarrow a S b \mid ab$$

---

$$S \rightarrow A S B \mid AB$$
$$A \rightarrow a$$
$$B \rightarrow b$$

# Hacia la forma normal de Chomsky (Paso 1)

## Paso 1

Convertir todas las reglas a la forma  $X \rightarrow Y_1 Y_2 \dots Y_k$  para  $k \geq 2$  o  $X \rightarrow a$ .

## Solución:

- Para cada  $a \in \Sigma$ ,  
agregar una nueva variable  $X_a$  y una regla  $X_a \rightarrow a$ .
- Reemplazar todas las ocurrencias antiguas de  $a$  por  $X_a$ .

## Correctitud

Si  $\mathcal{G}'$  es la gramática resultante, entonces se cumple que  $\mathcal{L}(\mathcal{G}') = \mathcal{L}(\mathcal{G})$ .

# Hacia la forma normal de Chomsky (Paso 2)

## Paso 2

Convertir todas las reglas a la forma:

- $X \rightarrow YZ$
- $X \rightarrow a$

## Solución:

Para cada regla  $p : X \rightarrow Y_1 Y_2 \dots Y_k$  con  $k \geq 3$ :

- Agregamos una **nueva** variable  $Z$ .
- Reemplazamos la regla  $p$  por **dos reglas**:

$$X \rightarrow Y_1 Z \quad \text{y} \quad Z \rightarrow Y_2 \dots Y_k$$

**Repetimos** este paso hasta llegar a la forma normal de Chomsky.

# Hacia la forma normal de Chomsky (Paso 2)

## Ejemplo del Paso 2 (continuación)

El resultado del Paso 1 es:

$$S \rightarrow A S B \mid AB$$
$$A \rightarrow a$$
$$B \rightarrow b$$

---

$$S \rightarrow A Z \mid AB$$
$$Z \rightarrow S B$$
$$A \rightarrow a$$
$$B \rightarrow b$$

# Hacia la forma normal de Chomsky (Paso 2)

## Paso 2

Convertir todas las reglas a la forma:  $X \rightarrow YZ$  o  $X \rightarrow a$ .

Solución:

Para cada regla  $p : X \rightarrow Y_1 Y_2 \dots Y_k$  con  $k \geq 3$ :

- Agregamos una **nueva** variable  $Z$ .
- Reemplazamos la regla  $p$  por **dos reglas**:

$$X \rightarrow Y_1 Z \quad \text{y} \quad Z \rightarrow Y_2 \dots Y_k$$

**Repetimos** este paso hasta llegar a la forma normal de Chomsky.

## Correctitud

Si  $\mathcal{G}''$  es la gramática resultante, entonces se cumple que  $\mathcal{L}(\mathcal{G}'') = \mathcal{L}(\mathcal{G}')$ .

# Toda gramática se puede convertir en CNF

Sea  $\mathcal{G} = (V, \Sigma, P, S)$  una CFG tal que  $\epsilon \notin \mathcal{L}(\mathcal{G})$ .

## Teorema

Existe una gramática  $\mathcal{G}'$  en forma normal de Chomsky tal que:

$$\mathcal{L}(\mathcal{G}') = \mathcal{L}(\mathcal{G})$$

Si  $\mathcal{G}'$  no tiene reglas unitarias ni en vacío,  
entonces  $\mathcal{G}'$  es de **tamaño polinomial** con respecto a  $\mathcal{G}$ .

# Cierre de clase

En esta clase vimos:

- Forma normal de Chomsky (CNF)
- Como convertir una gramática a CNF

**Próxima clase:** Uso de CNF para lema de bombeo