

Palabras y autómatas

Clase 01

IIC2223 / IIC2224

Prof. Cristian Riveros

Outline

Palabras

Autómatas

Outline

Palabras

Autómatas

Alfabetos, letras y palabras

Definiciones

- Un **alfabeto** Σ es un conjunto finito.
- Un elemento de Σ lo llamaremos una **letra** o **símbolo**.
- Una **palabra** o **string** sobre Σ es una secuencia finita de letras en Σ .

Ejemplo

- $\Sigma = \{ a, b, c \}$
- Palabras sobre Σ :

aaaaabb , bcaabab , a , bbbbbb , ...

¿cuál es el alfabeto preferido en computación?

Alfabetos, letras y palabras

Más definiciones

- El **largo** $|w|$ de una palabra w es el número de letras.

$$|w| \stackrel{\text{def}}{=} \# \text{ de letras en } w$$

- Denotaremos ϵ como la **palabra sin símbolos** de largo 0.

$$|\epsilon| \stackrel{\text{def}}{=} 0$$

- Denotaremos por Σ^* como el **conjunto de todas las palabras** sobre Σ .

Ejemplo

Para $\Sigma = \{0, 1\}$:

- $|00011001| = ?$
- $\Sigma^* = ?$

Concatenación entre palabras

Definición

Dado dos palabras $u, v \in \Sigma^*$ tal que $u = a_1 \dots a_n$ y $v = b_1 \dots b_m$:

$$u \cdot v \stackrel{\text{def}}{=} a_1 \dots a_n b_1 \dots b_m$$

Decimos que $u \cdot v$ es la palabra “ u **concatenada** con v ”.

Ejemplo

Para $\Sigma = \{0, 1, 2, \dots, 9\}$:

■ $0123 \cdot 9938 = ?$

■ $3493 \cdot \epsilon = ?$

Concatenación sobre palabras

Definición

Dado dos palabras $u, v \in \Sigma^*$ tal que $u = a_1 \dots a_n$ y $v = b_1 \dots b_m$:

$$u \cdot v \stackrel{\text{def}}{=} a_1 \dots a_n b_1 \dots b_m$$

Decimos que $u \cdot v$ es la palabra “ u **concatenada** con v ”.

Algunas propiedades:

- ¿es la concatenación **asociativa**: $(u \cdot v) \cdot w = u \cdot (v \cdot w)$?
- ¿es la concatenación **conmutativa**: $u \cdot v = v \cdot u$?
- ¿es verdad que $|u \cdot v| = |u| + |v|$?

Lenguajes

Definición

Sea Σ un alfabeto y $L \subseteq \Sigma^*$.

Decimos que L es un **lenguaje** sobre el alfabeto Σ .

Ejemplos de lenguajes

Sea $\Sigma = \{a, b\}$:

- $L_0 = \{\epsilon, a, aa, b, ba\}$
- $L_1 = \{\epsilon, b, bb, bbb, bbbb, \dots\}$
- $L_2 = \{w \mid \exists u \in L_1. w = a \cdot u\}$
- $L_3 = \{w \mid \exists u, v \in \Sigma^*. w = u \cdot abba \cdot v\}$
- $L_4 = \{w \mid \exists u \in \Sigma^*. w = u \cdot u\}$

Un **lenguaje** puede ser visto como una **propiedad** de palabras

Ocuparemos estas definiciones durante TODO el curso

Convenciones

Durante todo el curso:

- Para **letras** usaremos los símbolos: a, b, c, d, e, \dots
- Para **palabras** usaremos los símbolos: w, u, v, x, y, z, \dots
- Para **alfabetos** usaremos los símbolos: Σ, Γ, \dots
- Para **lenguajes** usaremos los símbolos: L, M, N, \dots
- Para **números** usaremos los símbolos: i, k, j, l, m, n, \dots

No olvidar!

Outline

Palabras

Autómatas

Autómatas finitos

- Modelo de computación más sencillo, basado en una cantidad **finita** de memoria.
- Procesa cada **palabra** de principio a fin en **una sola pasada**.
- Al terminar, el autómatata decide si **acepta** o **rechaza** el input.

Usaremos los autómatas finitos para definir **lenguajes**

Autómata finito determinista

Definición

Un **autómata finito determinista** (DFA) es una tupla:

$$\mathcal{A} = (Q, \Sigma, \delta, q_0, F)$$

- Q es un conjunto finito de **estados**.
- Σ es el alfabeto de **input**.
- $\delta : Q \times \Sigma \rightarrow Q$ es la función de **transición**.
- $q_0 \in Q$ es el **estado inicial**.
- $F \subseteq Q$ es el conjunto de **estados finales** (o aceptación).

Autómata finito determinista

Ejemplo $(Q, \Sigma, \delta, q_0, F)$

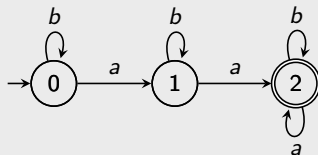
- $Q = \{0, 1, 2\}$
- $\Sigma = \{a, b\}$
- $\delta : Q \times \Sigma \rightarrow Q$ se define como:

$$\delta(0, a) = 1$$

$$\delta(1, a) = 2$$

$$\delta(2, a) = 2$$

$$\delta(q, b) = q \quad \forall q \in \{0, 1, 2\}$$



- $q_0 = 0$
- $F = \{2\}$

$(Q, \Sigma, \delta, q_0, F)$ es el **código** de la máquina

¿cómo se ejecuta un autómatata sobre una palabra?

Sea:

- Un autómatata $\mathcal{A} = (Q, \Sigma, \delta, q_0, F)$.
- Un input $w = a_1 a_2 \dots a_n \in \Sigma^*$.

Definición

Una **ejecución** (o run) ρ de \mathcal{A} sobre w es una secuencia:

$$\rho: p_0 \xrightarrow{a_1} p_1 \xrightarrow{a_2} p_2 \xrightarrow{a_3} \dots \xrightarrow{a_n} p_n$$

1. $p_0 = q_0$ y
2. para todo $i \in \{0, 1, \dots, n-1\}$, $\delta(p_i, a_{i+1}) = p_{i+1}$.

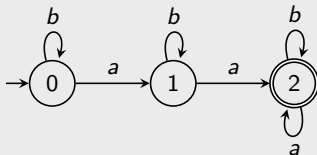
¿cómo se ejecuta un autómata sobre una palabra?

Una **ejecución** (o run) ρ de \mathcal{A} sobre w es una secuencia:

$$\rho: p_0 \xrightarrow{a_1} p_1 \xrightarrow{a_2} p_2 \xrightarrow{a_3} \dots \xrightarrow{a_n} p_n$$

1. $p_0 = q_0$ y
2. para todo $i \in \{0, 1, \dots, n-1\}$, $\delta(p_i, a_{i+1}) = p_{i+1}$.

Ejemplo



- ¿cuál es una ejecución de \mathcal{A} sobre bba ?
- ¿cuál es una ejecución de \mathcal{A} sobre aba ?

¿cuál es una ejecución de \mathcal{A} sobre ϵ ?

¿cómo se ejecuta un autómata sobre una palabra?

Una **ejecución** (o run) ρ de \mathcal{A} sobre w es una secuencia:

$$\rho: p_0 \xrightarrow{a_1} p_1 \xrightarrow{a_2} p_2 \xrightarrow{a_3} \dots \xrightarrow{a_n} p_n$$

1. $p_0 = q_0$ y
2. para todo $i \in \{0, 1, \dots, n-1\}$, $\delta(p_i, a_{i+1}) = p_{i+1}$.

Dado \mathcal{A} y w , ¿cuántas **ejecuciones** existen de \mathcal{A} sobre w ?

(Demostración por inducción)

Una ejecución ρ de \mathcal{A} sobre w es de **aceptación** si:

$$p_n \in F.$$

En el ejemplo anterior, ¿cuáles ejecuciones son de **aceptación**?

Lenguaje aceptado por un autómata

Sea un autómata $\mathcal{A} = (Q, \Sigma, \delta, q_0, F)$ y $w \in \Sigma^*$.

Definiciones

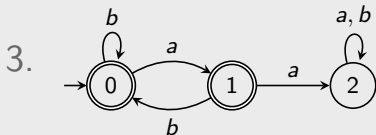
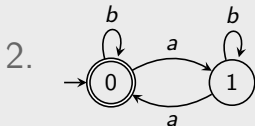
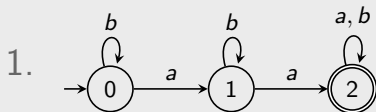
- \mathcal{A} **acepta** w si la ejecución de \mathcal{A} sobre w es de aceptación.
- \mathcal{A} **rechaza** w si la ejecución de \mathcal{A} sobre w NO es de aceptación.
- El **lenguaje aceptado** por \mathcal{A} se define como:

$$\mathcal{L}(\mathcal{A}) = \{w \in \Sigma^* \mid \mathcal{A} \text{ acepta } w\}$$

$\mathcal{L}(\mathcal{A})$ es la **semántica** del autómata \mathcal{A} .

Lenguaje aceptado por un autómata

¿qué lenguaje acepta/define cada autómata?



Lenguaje aceptado por un autómata

Defina un autómata para los siguientes lenguajes

1. Todas las palabras sobre $\{a, b\}$ tal que cada a -letra esta seguida de una b -letra.
2. Todas las palabras sobre $\{a, b\}$ que terminan con ab .
3. Todas las palabras sobre $\{a, b\}$ con una cantidad par de a -letras tal que no hay dos a -letras seguidas.

Lenguaje aceptado por un autómata

Sea un autómata $\mathcal{A} = (Q, \Sigma, \delta, q_0, F)$ y $w \in \Sigma^*$.

Definiciones

- El **lenguaje aceptado** por \mathcal{A} se define como:

$$\mathcal{L}(\mathcal{A}) = \{w \in \Sigma^* \mid \mathcal{A} \text{ acepta } w\}$$

- Un lenguaje $L \subseteq \Sigma^*$ se dice **regular** si, y solo si, **existe** un autómata finito determinista \mathcal{A} tal que:

$$L = \mathcal{L}(\mathcal{A})$$

Los **lenguajes regulares** serán nuestro principal objeto de estudio.

Cierre de la clase

Durante esta clase vimos:

- Palabras y lenguajes.
- Autómata finito determinista.
- Ejecución y lenguaje de un autómata.
- Programación de autómatas.
- Repaso de matemáticas discretas.

Próxima clase: construcción de autómatas.