Autómatas en dos direcciones

Clase 13

IIC2223 / IIC2224

Prof. Cristian Riveros

¿cuánto se parece un autómata a un algoritmo?

¿cuáles son las diferencias?

1. Memoria.
2. "Movimiento" de la máquina.

En esta clase, veremos como agregar **movimiento en dos direcciones**

Outline

2DFA

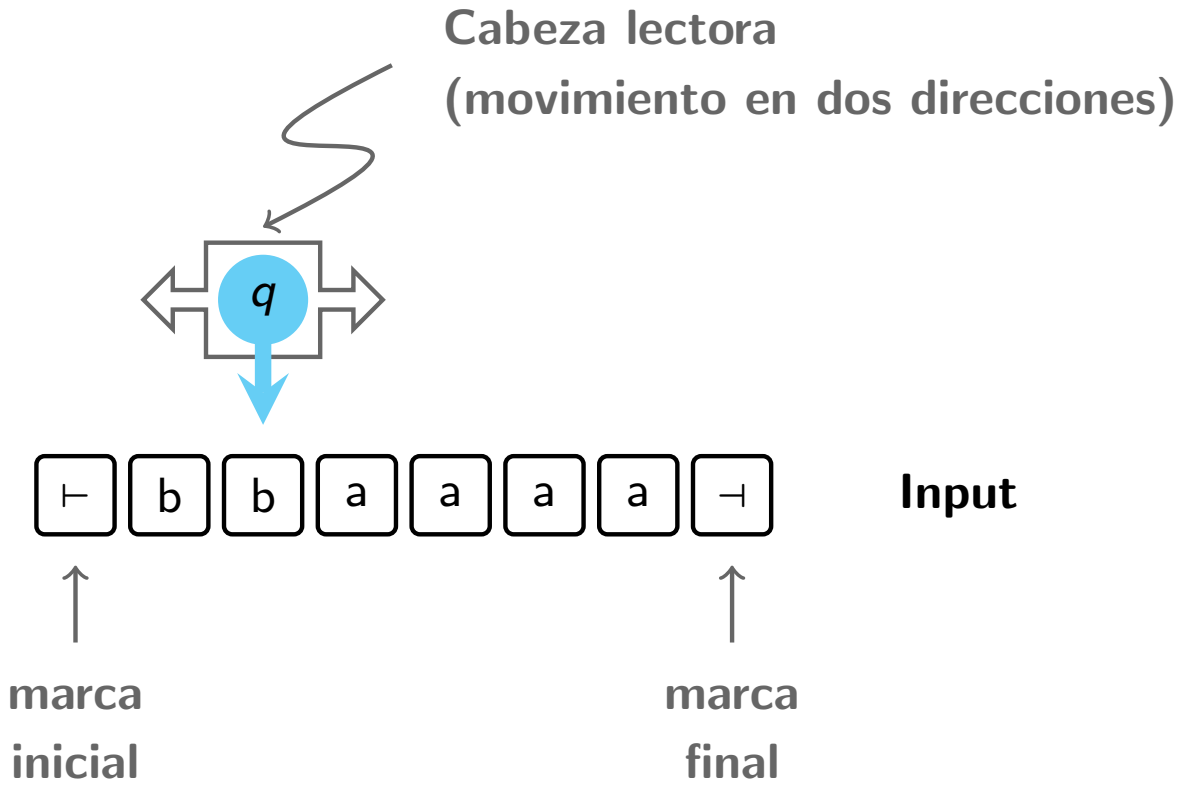
2DFA vs DFA

Outline

2DFA

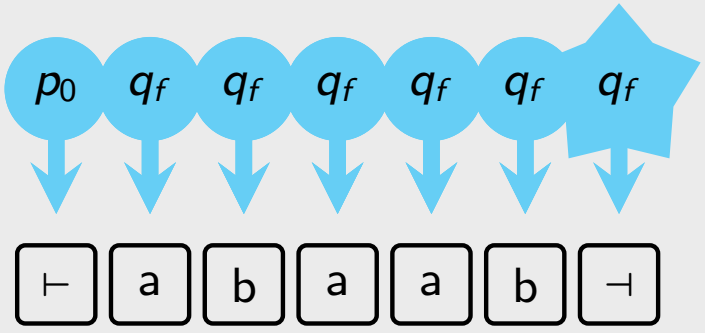
2DFA vs DFA

Autómatas finitos deterministas en **dos direcciones**



Autómatas finitos deterministas en dos direcciones

Ejemplo



Autómatas finitos deterministas en dos direcciones

Definición

Un autómata finito determinista en 2 direcciones (2DFA) es una estructura:

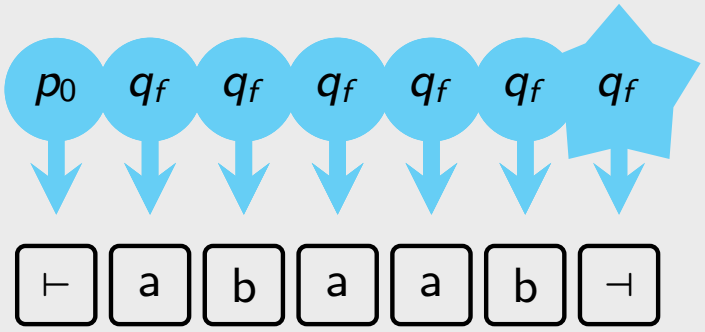
$$\mathcal{A} \quad = \quad (Q, \Sigma, \vdash, \dashv, \delta, q_0, q_f)$$

- Q es un conjunto finito de estados.
- Σ es el alfabeto de input.
- $\vdash$ y $\dashv$ son las marcas (simbolos) iniciales y finales.
- $\delta : Q \times \big(\Sigma \cup \{\vdash, \dashv\}\big) \rightharpoonup Q \times \{\leftarrow, \rightarrow\}$ es la **función parcial de transición**.
- q_0 es el estado inicial.
- q_f es el estado final.

Autómatas finitos deterministas en dos direcciones

Ejemplo

$$L = \left\{ w \in \Sigma^* \mid \left(\#a(w) = 0 \mod 3\right) \text{ y } \left(\#b(w) = 0 \mod 2\right) \right\}$$



	$\vdash$	a	b	$\dashv$
q_0	$(q_0, \rightarrow)$	$(q_1, \rightarrow)$	$(q_0, \rightarrow)$	$(p_0, \leftarrow)$
q_1	-	$(q_2, \rightarrow)$	$(q_1, \rightarrow)$	-
q_2	-	$(q_0, \rightarrow)$	$(q_2, \rightarrow)$	-
p_0	$(q_f, \rightarrow)$	$(p_0, \leftarrow)$	$(p_1, \leftarrow)$	-
p_1	-	$(p_1, \leftarrow)$	$(p_0, \leftarrow)$	-
q_f	-	$(q_f, \rightarrow)$	$(q_f, \rightarrow)$	-

Configuración de un 2DFA

Sea:

- Un 2DFA $\mathcal{A} = (Q, \Sigma, \vdash, \dashv, \delta, q_0, q_f)$.
- Una palabra $w = a_1 a_2 \dots a_n \in \Sigma^*$.

Defina $a_0 = \vdash$ y $a_{n+1} = \dashv$ tal que el input se define como:

$$a_0\, a_1\, \dots\, a_n\, a_{n+1} \;=\; \vdash \cdot w \cdot \dashv$$

Una **configuración** de $\mathcal{A}$ sobre w viene dado por un par:

$$(q, i) \;\in\; Q \times \{0, \dots, n+1\}$$

- q es el **estado actual** del autómata.
- i es la **posición actual** de la cabeza lectora.

Configuración de un 2DFA

Sea:

- Un 2DFA $\mathcal{A} = (Q, \Sigma, \vdash, \dashv, \delta, q_0, q_f)$.
- Una palabra $w = a_1 a_2 \ldots a_n \in \Sigma^*$.

Se define la relación de **siguiente configuración** $\overset{\mathcal{A}}{\longmapsto}$ de $\mathcal{A}$ sobre w como:

$$(p, i) \overset{\mathcal{A}}{\longmapsto} (q, j)$$

tal que:

- Si $\delta(p, a_i) = (q, \rightarrow)$, entonces $(p, i) \overset{\mathcal{A}}{\longmapsto} (q, i + 1)$.
- Si $\delta(p, a_i) = (q, \leftarrow)$, entonces $(p, i) \overset{\mathcal{A}}{\longmapsto} (q, i - 1)$.

¿cómo ejecuto mi 2DFA?

Sea:

- Un 2DFA $\mathcal{A} = (Q, \Sigma, \vdash, \dashv, \delta, q_0, q_f)$.
- El input $w = a_1 a_2 \dots a_n \in \Sigma^*$.

Una **ejecución** (o run) ρ de $\mathcal{A}$ sobre w es una secuencia de configuraciones:

$$\rho : (p_0, i_0) \to (p_1, i_1) \to \dots \to (p_m, i_m)$$

- $p_0 = q_0$ y $i_0 = 0$.
- $(p_j, i_j) \overset{\mathcal{A}}{\longmapsto} (p_{j+1}, i_{j+1}) \quad \forall\, j \in [0, m-1]$

Una ejecución ρ de $\mathcal{A}$ sobre w es de **aceptación** si:

$$p_m = q_f \quad \text{y} \quad i_m = n + 1$$

Lenguaje aceptado por un 2DFA

Sea un autómata $\mathcal{A} = (Q, \Sigma, \vdash, \dashv, \delta, q_0, q_f)$ y $w \in \Sigma^*$.

Definiciones

- $\mathcal{A}$ **acepta** w si hay una ejecución de $\mathcal{A}$ sobre w que es de **aceptación**.
- El **lenguaje aceptado por** $\mathcal{A}$ se define como:

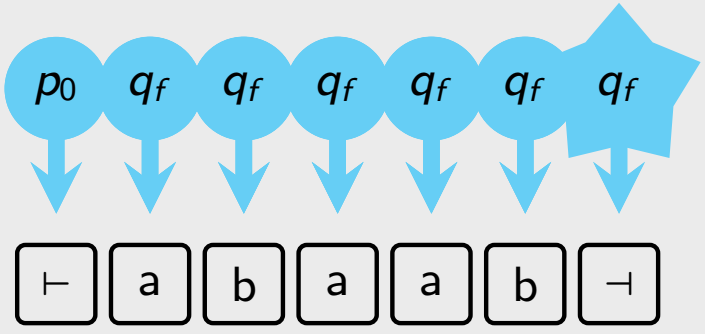
$$\mathcal{L}(\mathcal{A}) = \{w \in \Sigma^* \mid \mathcal{A} \text{ acepta } w\}$$

Un 2DFA puede parar por error o NO parar nunca!

¿cuál es la ejecución de este autómata?

Ejemplo

$$L = \left\{ w \in \Sigma^* \mid \left(\#a(w) = 0 \mod 3\right) \text{ y } \left(\#b(w) = 0 \mod 2\right) \right\}$$



	$\vdash$	a	b	$\dashv$
q_0	$(q_0, \rightarrow)$	$(q_1, \rightarrow)$	$(q_0, \rightarrow)$	$(p_0, \leftarrow)$
q_1	-	$(q_2, \rightarrow)$	$(q_1, \rightarrow)$	-
q_2	-	$(q_0, \rightarrow)$	$(q_2, \rightarrow)$	-
p_0	$(q_f, \rightarrow)$	$(p_0, \leftarrow)$	$(p_1, \leftarrow)$	-
p_1	-	$(p_1, \leftarrow)$	$(p_0, \leftarrow)$	-
q_f	-	$(q_f, \rightarrow)$	$(q_f, \rightarrow)$	-

Outline

2DFA

2DFA vs DFA

2DFA vs lenguajes regulares

Para todo lenguaje regular L existe un 2DFA $\mathcal{A}$:

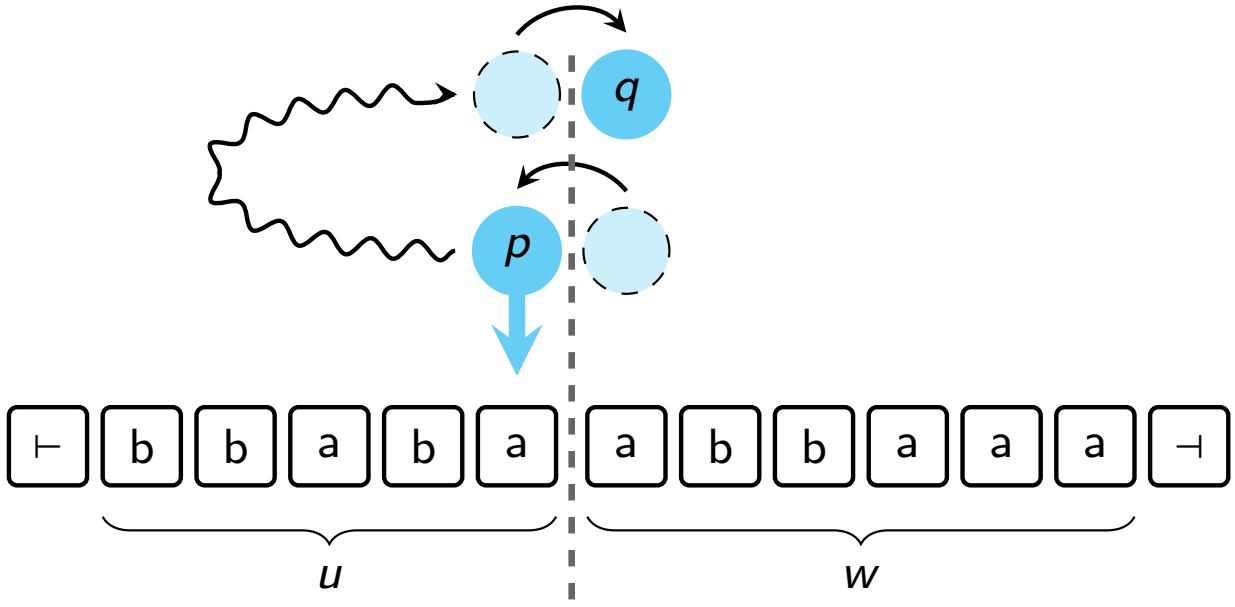
$$L = \mathcal{L}(\mathcal{A})$$

En otras palabras, DFA $\subseteq$ 2DFA.

¿són los 2DFA mas poderosos que los DFA?

Demostraremos que NO!

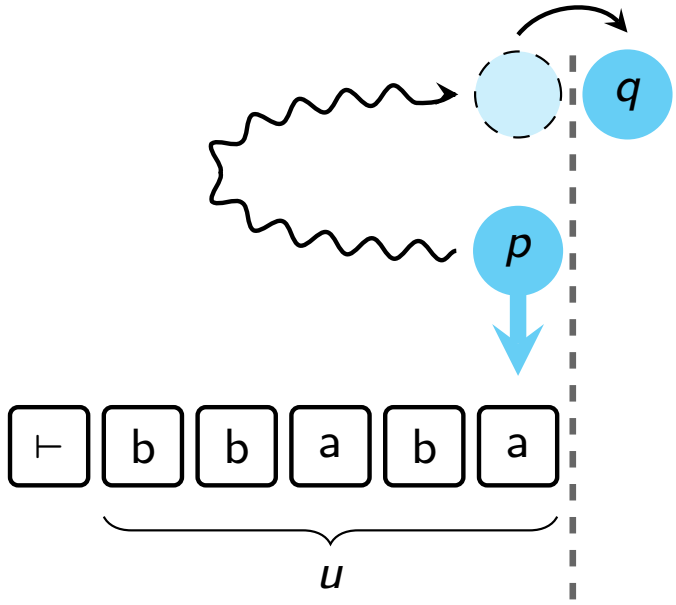
¿cuánta información puede almacenar un 2DFA?



"Cada vez que $\mathcal{A}$ cruce de w a u en el estado **p**,
$\mathcal{A}$ cruzará de regreso en el estado **q**."

¡este comportamiento solo depende de **u** y no de **w**!

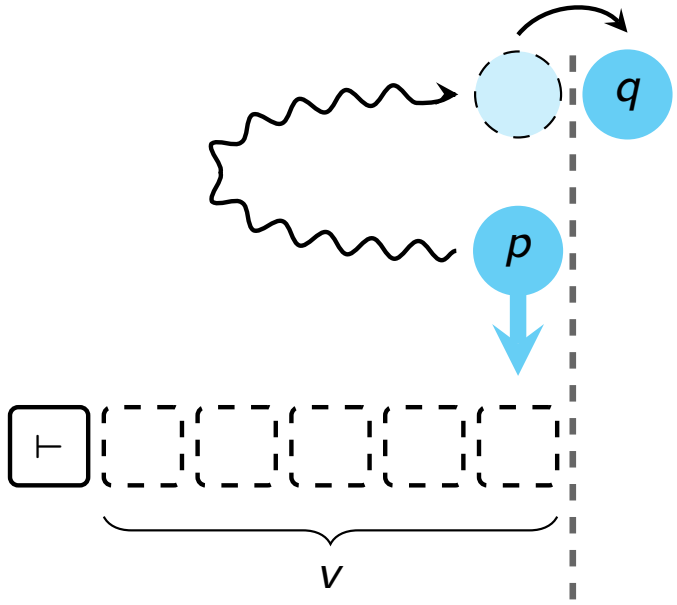
¿cuánta información puede almacenar un 2DFA?



Para cada $u \in \Sigma^*$ definimos la función $T_u : Q \cup \{\bullet\} \to Q \cup \{\perp\}$ tal que:

- $T_u(p) = q$ ssi desde $(p, |u|)$ cruza en la config. $(q, |u| + 1)$.
- $T_u(p) = \perp$ ssi desde $(p, |u|)$ nunca cruza de u.
- $T_u(\bullet) = q$ ssi desde $(q_0, 0)$ cruza por 1era vez con $(q, |u| + 1)$.
- $T_u(\bullet) = \perp$ ssi desde $(q_0, 0)$ nunca cruza de u.

¿cuánta información puede almacenar un 2DFA?



Suponga ahora que tenemos una palabra v tal que:

$$T_v = T_u$$

Entonces, v es **indistinguible** de u según $\mathcal{A}$

En otras palabras, $u \cdot w \in \mathcal{L}(\mathcal{A}) \Leftrightarrow v \cdot w \in \mathcal{L}(\mathcal{A})$ para todo $w \in \Sigma^*$.

Recordatorio: Teorema de Myhill-Nerode

Sea $L \subseteq \Sigma^*$ cualquier lenguaje.

Definición (Relación de Myhill-Nerode)

Una relación de equivalencia $\equiv$ en Σ^* es de **Myhill-Nerode** para L si:

1. $\equiv$ es una **congruencia por la derecha**:

$$u \equiv v \text{ entonces } u \cdot w \equiv v \cdot w \qquad \forall w \in \Sigma^*$$

2. $\equiv$ **refina** L.

$$u \equiv v \text{ entonces } \left(u \in L \iff v \in L\right)$$

3. El número de clases de equivalencia de $\equiv$ es **finita**.

Recordatorio: Teorema de Myhill-Nerode

Definición

Dado un lenguaje $L \subseteq \Sigma^*$, se define la relación de equivalencia $\equiv_L$ como:

$$u \equiv_L v \quad \text{si, y solo si,} \quad \left(u \cdot w \in L \Leftrightarrow v \cdot w \in L \right) \quad \forall w \in \Sigma^*$$

Teorema de Myhill-Nerode

Sea $L \subseteq \Sigma^*$. Las siguientes propiedades son equivalentes:

1. L es **regular**.
2. existe una **relación de Myhill-Nerode** para L.
3. la relación $\equiv_L$ tiene una cantidad **finita** de clases de equivalencia.

¿cuánta información puede almacenar un 2DFA?

1. La relación $\equiv_T$ entre palabras en Σ^* tal que:

$$u \equiv_T v \quad \text{si, y solo si,} \quad T_u = T_v$$

   es una **relación de equivalencia**.

2. $\equiv_T$ es una **congruencia por la derecha**. $(u \equiv_T v \Rightarrow \forall w.\ u \cdot w \equiv_T v \cdot w)$
3. $\equiv_T$ **refina** a $\mathcal{L}(\mathcal{A})$. $(u \equiv_T v \Rightarrow (u \in L \Leftrightarrow v \in L))$
4. La relación $\equiv_T$ tiene una **cantidad finita** de clases de equivalencia.

$$T : Q \cup \{\bullet\} \to Q \cup \{\bot\}$$

¿cuántas funciones T existen?

$\equiv_{\mathcal{L}(\mathcal{A})}$ tiene una cantidad **finita** de **clases de equivalencia**.

2DFA aceptan solo lenguajes regulares

Teorema

Para todo 2DFA $\mathcal{A}$ existe un DFA $\mathcal{A}'$ tal que:

$$\mathcal{L}(\mathcal{A}) = \mathcal{L}(\mathcal{A}')$$

Por lo tanto, 2DFA $\equiv$ DFA.

¿cómo construimos el DFA?

Cierre de clase

En esta clase vimos:

1. Autómatas con movimiento en dos direcciones (2DFA).
2. Demostramos que todos los 2DFA definen lenguajes regulares.
3. Uso del Teorema de Myhill-Nerode.

Próxima clase: Algoritmos para evaluación de autómatas.