

Teorema de Myhill-Nerode

Clase 12

IIC2223 / IIC2224

Prof. Cristian Riveros

Minimización de autómatas

Dejamos varias preguntas abiertas:

1. ¿cómo sabemos si el autómata del algoritmo es un **mínimo**?
2. Dado L , ¿existe un **único** autómata mínimo?
3. Dado un \mathcal{A} , ¿és posible **construir** un autómata mínimo equivalente?

En esta clase responderemos estas preguntas **positivamente**

Demostraremos que:

- El autómata con el mínimo de estados es **único**.
- El algoritmo de minimización **siempre** construye el autómata mínimo.

Estrategia de la demostración

1. Desde un DFA \mathcal{A} , definiremos una relación de equivalencia (RE) $\equiv_{\mathcal{A}}$ entre palabras en Σ^* .
2. Desde una RE \equiv entre palabras, construiremos un DFA \mathcal{A}_{\equiv} .
3. A partir de un lenguaje L , definiremos una RE \equiv_L .
4. \mathcal{A}_{\equiv_L} define el autómata con la **menor cantidad de estados**.
5. \mathcal{A}_{\equiv_L} es equivalente al resultado de nuestro **algoritmo de minimización**.

Outline

Relaciones de Myhill-Nerode

Teorema de Myhill-Nerode

Outline

Relaciones de Myhill-Nerode

Teorema de Myhill-Nerode

Relación de equivalencia dada por un DFA

Sea $L \subseteq \Sigma^*$ un lenguaje regular y $\mathcal{A} = (Q, \Sigma, \delta, q_0, F)$ tal que $L = \mathcal{L}(\mathcal{A})$.

Definición

Se define la **relación de equivalencia** $\equiv_{\mathcal{A}}$ entre palabras en Σ^* como:

$$u \equiv_{\mathcal{A}} v \iff \hat{\delta}(q_0, u) = \hat{\delta}(q_0, v)$$

¿és $\equiv_{\mathcal{A}}$ una relación de equivalencia?

- **reflexiva**: $u \equiv_{\mathcal{A}} u$ para todo $u \in \Sigma^*$.
- **simétrica**: si $u \equiv_{\mathcal{A}} v$ entonces $v \equiv_{\mathcal{A}} u$.
- **transitiva**: si $u \equiv_{\mathcal{A}} v$ y $v \equiv_{\mathcal{A}} w$, entonces $u \equiv_{\mathcal{A}} w$.

Para $w \in \Sigma^*$ se define su **clase de equivalencia** según $\equiv_{\mathcal{A}}$ como:

$$[w]_{\equiv_{\mathcal{A}}} = \{u \mid u \equiv_{\mathcal{A}} w\}$$

Relación de equivalencia dada por un DFA

Sea $L \subseteq \Sigma^*$ un lenguaje regular y $\mathcal{A} = (Q, \Sigma, \delta, q_0, F)$ tal que $L = \mathcal{L}(\mathcal{A})$.

Definición

Se define la **relación de equivalencia** $\equiv_{\mathcal{A}}$ entre palabras en Σ^* como:

$$u \equiv_{\mathcal{A}} v \iff \hat{\delta}(q_0, u) = \hat{\delta}(q_0, v)$$

No confundir la relación $\equiv_{\mathcal{A}}$ con la relación $\approx_{\mathcal{A}}$!

- $\approx_{\mathcal{A}}$ es sobre los estados en Q .
- $\equiv_{\mathcal{A}}$ es sobre todas las palabras en Σ^* .

Relación de equivalencia dada por un DFA

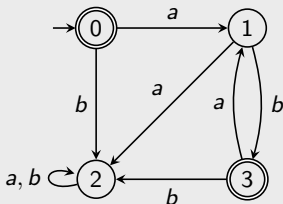
Sea $L \subseteq \Sigma^*$ un lenguaje regular y $\mathcal{A} = (Q, \Sigma, \delta, q_0, F)$ tal que $L = \mathcal{L}(\mathcal{A})$.

Definición

Se define la **relación de equivalencia** $\equiv_{\mathcal{A}}$ entre palabras en Σ^* como:

$$u \equiv_{\mathcal{A}} v \iff \hat{\delta}(q_0, u) = \hat{\delta}(q_0, v)$$

Ejemplo



$$[\epsilon]_{\mathcal{A}} = \epsilon$$

$$[a]_{\mathcal{A}} = a(ba)^*$$

$$[ab]_{\mathcal{A}} = ab(ab)^*$$

$$[b]_{\mathcal{A}} = b\Sigma^* + \Sigma^*(aa + bb)\Sigma^*$$

Relación de equivalencia dada por un DFA

Sea $L \subseteq \Sigma^*$ un lenguaje regular y $\mathcal{A} = (Q, \Sigma, \delta, q_0, F)$ tal que $L = \mathcal{L}(\mathcal{A})$.

Definición

Se define la **relación de equivalencia** $\equiv_{\mathcal{A}}$ entre palabras en Σ^* como:

$$u \equiv_{\mathcal{A}} v \iff \hat{\delta}(q_0, u) = \hat{\delta}(q_0, v)$$

Propiedades

1. $\equiv_{\mathcal{A}}$ es una **congruencia por la derecha**:

$$u \equiv_{\mathcal{A}} v \text{ entonces } u \cdot w \equiv_{\mathcal{A}} v \cdot w \quad \forall w \in \Sigma^*$$

2. $\equiv_{\mathcal{A}}$ **refina** L , esto es:

$$\text{si } u \equiv_{\mathcal{A}} v \text{ entonces } (u \in L \iff v \in L)$$

3. El número de clases de equivalencia de $\equiv_{\mathcal{A}}$ es **finito**. (¿por qué?)

Relación de equivalencia dada por un DFA

Sea $L \subseteq \Sigma^*$ un lenguaje regular y $\mathcal{A} = (Q, \Sigma, \delta, q_0, F)$ tal que $L = \mathcal{L}(\mathcal{A})$.

Definición

Se define la **relación de equivalencia** $\equiv_{\mathcal{A}}$ entre palabras en Σ^* como:

$$u \equiv_{\mathcal{A}} v \iff \hat{\delta}(q_0, u) = \hat{\delta}(q_0, v)$$

Propiedades

1. $\equiv_{\mathcal{A}}$ es un **congruencia por la derecha**.
2. $\equiv_{\mathcal{A}}$ **refina** L .
3. El número de clases de equivalencia de $\equiv_{\mathcal{A}}$ es **finito**.

Todo DFA \mathcal{A} de L define
una **relación de equivalencia** que cumple estas 3 propiedades!

Relaciones de Myhill-Nerode

Sea $L \subseteq \Sigma^*$ cualquier lenguaje.

Definición (Relación de Myhill-Nerode)

Una relación de equivalencia \equiv en Σ^* es de **Myhill-Nerode** para L si:

1. \equiv es una **congruencia por la derecha**:

$$u \equiv v \text{ entonces } u \cdot w \equiv v \cdot w \quad \forall w \in \Sigma^*$$

2. \equiv **refina** L .

$$u \equiv v \text{ entonces } (u \in L \Leftrightarrow v \in L)$$

3. El número de clases de equivalencia de \equiv es **finita**.

Relaciones de Myhill-Nerode

Sea $L \subseteq \Sigma^*$ cualquier lenguaje.

Definición (Relación de Myhill-Nerode)

Una relación de equivalencia \equiv en Σ^* es de **Myhill-Nerode** para L si:

1. \equiv es una **congruencia por la derecha**.
2. \equiv **refina** L .
3. El número de clases de equivalencia de \equiv es **finita**.

A partir de una relación \equiv de Myhill-Nerode podemos construir un DFA \mathcal{A}_\equiv

$$\mathcal{A} \longrightarrow \equiv_{\mathcal{A}}$$

$$\equiv \longrightarrow \mathcal{A}_\equiv$$

Construcción del DFA \mathcal{A}_{\equiv}

Dada una **relación de Myhill-Nerode** \equiv para $L \subseteq \Sigma^*$, definimos el autómata:

$$\mathcal{A}_{\equiv} = (Q_{\equiv}, \Sigma, \delta_{\equiv}, q_{\equiv}, F_{\equiv})$$

- $Q_{\equiv} = \{ [w]_{\equiv} \mid w \in \Sigma^* \}$
- $q_{\equiv} = [\epsilon]_{\equiv}$
- $F_{\equiv} = \{ [w]_{\equiv} \mid w \in L \}$ (¿por qué F_{\equiv} esta bien definida?)
- $\delta_{\equiv}([w]_{\equiv}, a) = [wa]_{\equiv}$ (¿por qué δ_{\equiv} esta bien definida?)

Teorema

$$\mathcal{L}(\mathcal{A}_{\equiv}) = L$$

Demostración: ejercicio.

$\mathcal{A} \longrightarrow \equiv_{\mathcal{A}}$ y $\equiv \longrightarrow \mathcal{A}_{\equiv}$ son procesos inversos

Teorema

1. Si \mathcal{A} es un DFA que acepta L y si construimos:

$$\mathcal{A} \longrightarrow \equiv_{\mathcal{A}} \longrightarrow \mathcal{A}_{\equiv_{\mathcal{A}}}$$

entonces \mathcal{A} es **isomorfo** (“equivalente”) a $\mathcal{A}_{\equiv_{\mathcal{A}}}$.

2. Si \equiv es una relación de Myhill-Nerode para L y si construimos:

$$\equiv \longrightarrow \mathcal{A}_{\equiv} \longrightarrow \equiv_{\mathcal{A}_{\equiv}}$$

entonces la relación \equiv es **equivalente** a $\equiv_{\mathcal{A}_{\equiv}}$.

Demostración: ejercicio

Estrategia de la demostración

1. Desde un DFA \mathcal{A} , definiremos una relación de equivalencia (RE) $\equiv_{\mathcal{A}}$ entre palabras en Σ^* . ✓
2. Desde una RE \equiv entre palabras, construiremos un DFA \mathcal{A}_{\equiv} . ✓
3. A partir de un lenguaje L , definiremos una RE \equiv_L .
4. \mathcal{A}_{\equiv_L} define el autómata con la **menor cantidad de estados**.
5. \mathcal{A}_{\equiv_L} es equivalente al resultado de nuestro **algoritmo de minimización**.

Outline

Relaciones de Myhill-Nerode

Teorema de Myhill-Nerode

La relación \equiv_L de un lenguaje L

Definición

Dado un lenguaje $L \subseteq \Sigma^*$, se define la relación de equivalencia \equiv_L como:

$$u \equiv_L v \quad \text{ssi} \quad (u \cdot w \in L \Leftrightarrow v \cdot w \in L) \quad \forall w \in \Sigma^*$$

¿es \equiv_L una relación de equivalencia?

- **reflexiva:** $u \equiv_L u$ para todo $u \in \Sigma^*$.
- **simétrica:** si $u \equiv_L v$ entonces $v \equiv_L u$.
- **transitiva:** si $u \equiv_L v$ y $v \equiv_L w$, entonces $u \equiv_L w$.

La relación \equiv_L de un lenguaje L

Definición

Dado un lenguaje $L \subseteq \Sigma^*$, se define la relación de equivalencia \equiv_L como:

$$u \equiv_L v \quad \text{ssi} \quad (u \cdot w \in L \Leftrightarrow v \cdot w \in L) \quad \forall w \in \Sigma^*$$

¿cuáles son las clases de equivalencia para $L = (ab)^*$?

- $[\epsilon]_{\equiv_L} = \{\epsilon, ab, abab, ababab, \dots\}$
- $[a]_{\equiv_L} = \{a, aba, ababa, abababa, \dots\}$
- $[b]_{\equiv_L} = \{b, bb, ba, abb, \dots\}$

La relación \equiv_L de un lenguaje L

Definición

Dado un lenguaje $L \subseteq \Sigma^*$, se define la relación de equivalencia \equiv_L como:

$$u \equiv_L v \quad \text{ssi} \quad (u \cdot w \in L \Leftrightarrow v \cdot w \in L) \quad \forall w \in \Sigma^*$$

Propiedades

1. \equiv_L es una **congruencia por la derecha**:

$$u \equiv_L v \quad \text{entonces} \quad u \cdot w \equiv_L v \cdot w \quad \forall w \in \Sigma^*$$

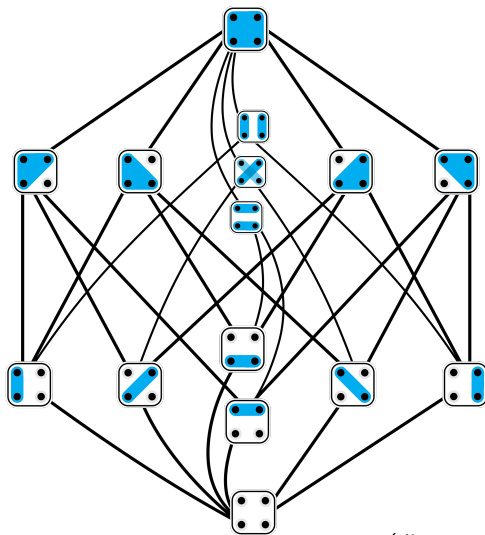
2. \equiv_L **refina** L : $u \equiv_L v$ entonces $(u \in L \Leftrightarrow v \in L)$

3. Si \equiv es una congruencia por la derecha y refina L entonces \equiv **refina** \equiv_L :

$$u \equiv v \quad \text{entonces} \quad u \equiv_L v.$$

\equiv_L es la congruencia por la derecha **más gruesa** que refina a L .

(paréntesis): Refinamiento entre relaciones



(diagrama de wikipedia)

Teorema de Myhill-Nerode

Teorema

Sea $L \subseteq \Sigma^*$. Las siguientes propiedades son equivalentes:

1. L es **regular**.
2. existe una **relación de Myhill-Nerode** para L .
3. la relación \equiv_L tiene una cantidad **finita** de clases de equivalencia.

Teorema de Myhill-Nerode

Demostración

1. \Rightarrow 2. Si L es regular, entonces:

- existe un autómata finito \mathcal{A} tal que $L = \mathcal{L}(\mathcal{A})$.
- $\equiv_{\mathcal{A}}$ es una relación de Myhill-Nerode para L .

2. \Rightarrow 3. Sea \equiv una relación de Myhill-Nerode para L , entonces:

- \equiv tiene una cant. finita de clases de equivalencia.
- \equiv_L tiene una cant. finita de clases de equivalencia. (¿por qué?)

3. \Rightarrow 1. Si \equiv_L tiene una cantidad **finita** de clases de equiv., entonces:

- \equiv_L es una relación de Myhill-Nerode para L .
- \mathcal{A}_{\equiv_L} es un autómata finito para L .



Teorema de Myhill-Nerode

Conclusiones del teorema

1. $\equiv_L \longrightarrow \mathcal{A}_{\equiv_L}$ produce el autómatas con la menor cantidad de estados.
2. Todo autómatas \mathcal{A} tal que $\equiv_{\mathcal{A}} = \equiv_L$ son **isomorfos** (“equivalentes”).
3. El **algoritmo de minimización** produce un autómatas isomorfo a \mathcal{A}_{\equiv_L} .

Demostración (punto 3)

Sea $\mathcal{A} = (Q, \Sigma, \delta, q_0, F)$ un autómatas que acepta L ya **minimizado** :

$$\begin{aligned} u \equiv_L v &\iff (u \cdot w \in L \iff v \cdot w \in L) \quad \forall w \in \Sigma^* \\ &\iff (\hat{\delta}(q_0, u \cdot w) \in F \iff \hat{\delta}(q_0, v \cdot w) \in F) \quad \forall w \in \Sigma^* \\ &\iff (\hat{\delta}(\hat{\delta}(q_0, u), w) \in F \iff \hat{\delta}(\hat{\delta}(q_0, v), w) \in F) \quad \forall w \in \Sigma^* \\ &\iff \hat{\delta}(q_0, u) \approx_{\mathcal{A}} \hat{\delta}(q_0, v) \\ &\iff \hat{\delta}(q_0, u) = \hat{\delta}(q_0, v) \quad (\text{¿por qué?}) \\ &\iff u \equiv_{\mathcal{A}} v \end{aligned}$$



Cierre de clase

En esta clase vimos:

1. Relaciones de Myhill-Nerode.
2. Relación \equiv_L .
3. Optimalidad de algoritmo de minimización.

Próxima clase: Aplicaciones del teorema de Myhill-Nerode.