Pontificia Universidad Católica de Chile
Departamento de Ciencia de la Computación
IIC2223 – Teoría de Autómatas y Lenguajes Formales
Segundo semestre de 2024
Profesor: Cristian Riveros
Ayudante: Amaranta Salas

Ayudantia 5

Teorema de Kleene y Lema de Bombeo

Problema 1

Demuestre usando el contrapositivo del lema de bombeo que los siguientes lenguajes no son regulares:

- $L = \{w \in \{0,1\}^* \mid w = w^r\}$
- $L = \{w = 0^n \mid n \text{ es primo}\}$
- $L = \{u\#v \mid u, v \in \{0,1\}^+ \wedge \text{bin}(v) = \text{bin}(u) + 1\}$, donde $\text{bin}(w)$ es el número natural que representa la palabra binaria w y donde los bits más significativos son los primeros.

Solución

- $L = \{w \in \{0,1\}^* \mid w = w^r\}$

  Sea $w = 0^N 1^N 0 1^N 0^N$, es claro que $w \in L$ para todo $N > 0$ y que podemos tomar $x = 0^N, y = 1^N, z = 01^N 0^N$. Luego, toda división de y tendrá la forma:

  $$y = u \cdot v \cdot w = 1^a 1^b 1^c$$

  Con $a + b + c = N$, por lo que tomando cualquier $i > 1$ tendremos que:

  $$x \cdot u \cdot v^i \cdot w \cdot z = 0^N 1^{N+(i-1)b} 0 1^N 0^N \notin L$$

  Pues claramente no es un palíndromo y, por tanto, el lenguaje no es regular.

- $L = \{w = 0^n \mid n \text{ es primo}\}$

  Sea $w = 0^N$ con N numero primo y $w \in L$, entonces para todo $N > 0$, podremos separarla usando $x = \varepsilon, y = 0^N, z = \varepsilon$. Luego, toda división de y tendrá la forma:

  $$y = u \cdot v \cdot w = 0^a 0^b 0^c, \textit{ con } a + b + c = N$$

  Luego, queremos asegurarnos de que después de bombear, para cualquier valor de b, por lo que usaremos $i = a + c$, lo que significará que:

  $$x \cdot u \cdot v^i \cdot w \cdot z = 0^{a+b(a+c)+c} = 0^{(a+c)(b+1)} \notin L$$

  Pues la cantidad de 0 tiene dos factores naturales, $(b + 1)$ y $(a + c)$, lo que significa que no es primo.

- $L = \{u\#v \mid u, v \in \{0,1\}^+ \wedge \text{bin}(v) = \text{bin}(u) + 1\}$, donde $\text{bin}(w)$ es el número natural que representa la palabra binaria w y donde los bits más significativos son los primeros.

  Sea $w = 1^N \# 1 0^N \in L_1$, es claro que $w \in L$ para todo $N > 0$ y que podemos tomar $x = 1^N \# 1$, $y = 0^N$, $z = \epsilon$. Luego, toda separación de y cumple

  $$y = u \cdot v \cdot w = 0^l 0^m 0^n$$

Con $l+m+n=N$ y $m \neq 0$. Después, al bombear la palabra con $i=0$ nos queda

$$x \cdot u \cdot v^i \cdot w \cdot z = 1^N\#10^l0^n \notin L$$

Esta última palabra no pertenece a L, dado que $\text{bit}(10^{l+n})$ no es el sucesor de $\text{bit}(1^N)$.

Problema 2

Sea $\Sigma = \{a, b\}$. Para $w = a_1...a_n$ se define $w|_k = a_{n-(k-1)}a_{n-(k-2)}...a_n$ si $k \leq n$ y $w|_k = w$ en caso contrario. Es decir, $w|_k$ son los últimos k símbolos de w.
Sea $\#$ un nuevo símbolo tal que $\# \notin \Sigma$. Para un lenguaje $L \in \Sigma^*$, definimos el lenguaje $\text{Window}(L)$ sobre el alfabeto $\{a, b, \#\}$ como:

$$\text{Window}(L) = \{a^k\#w \mid k \geq 1 \wedge w \in \Sigma^* \wedge w|_k \in L\}$$

En otras palabras, el lenguaje $\text{Window}(L)$ viene dado por las palabras de la forma $a^k\#w$ donde primero viene una secuencia de k letras a, que definen el largo de la ventana, luego viene el separador $\#$ y se termina con una palabra $w \in \Sigma^*$, donde los últimos k símbolos forman la ventan que debe pertenecer al lenguaje L, es decir, $w|_k \in L$.
Demuestre que existe un lenguaje regular L tal que $\text{Window}(L)$ no es regular.

Solución

Un lenguaje regular L que hace que $\text{Window}(L)$ no sea regular es:

$$L = \mathcal{L}(a^*)$$

Para demostrar que $\text{Window}(L)$ no es un lenguaje regular podemos utilizar el lema de bombeo, eligiendo la palabra:

$$\underbrace{a^N\#b}_{x}\underbrace{a^N}_{y}\underbrace{\epsilon}_{z}$$

Es claro que $w \in L$ y además toda separación de y cumple:

$$a^N = \underbrace{a^j}_{u}\underbrace{a^k}_{v}\underbrace{a^l}_{w}$$

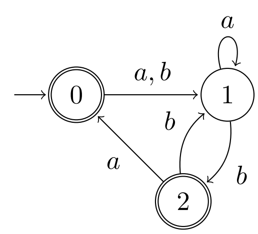
Con $j+k+l=N$ y $j \neq 0$. Luego, al bombear esta palabra con $i=0$ tenemos:

$$a^N\#ba^ja^l \notin \text{Window}(L)$$

Esta última palabra no pertenece a $\text{Window}(L)$, dado que $(ba^{j+l})|_N = ba^{j+l} \notin L$, por lo tanto según el lema de bombeo $\text{Window}(L)$ no es un lenguaje regular.

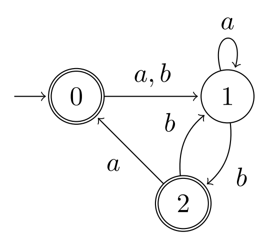
Problema 3

Para el siguiente autómata $\mathcal{A}$, construya una expresión regular usando el algoritmo visto en clases:

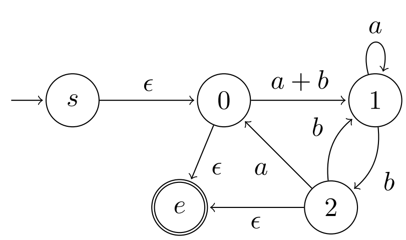


Solución

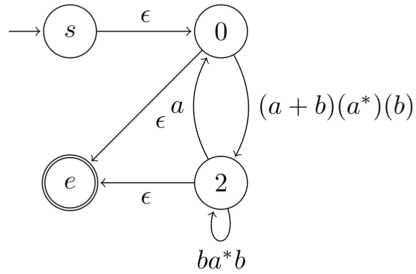
1. NFA de 3 estados



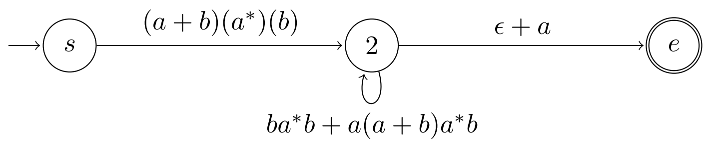
2. GNFA de 5 estados



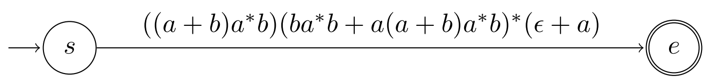
3. GNFA de 4 estados, sacando 1



4. GNFA de 3 estados, sacando 0



5. GNFA de 2 estados, sacando 2



Por lo tanto la expresión regular obtenida es $((a+b)a^*b)(ba^*b + a(a+b)a^*b)^*(\epsilon + a)$.