Pontificia Universidad Católica de Chile
Departamento de Ciencia de la Computación
IIC2223 – Teoría de Autómatas y Lenguajes Formales
Segundo semestre de 2024
Profesor: Cristian Riveros
Ayudante: Amaranta Salas

Ayudantía 1

Autómatas Finitos Deterministas

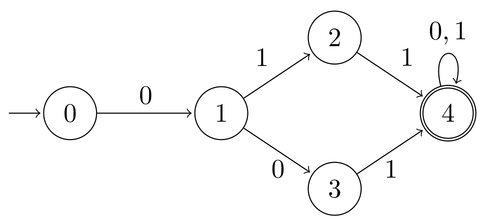
Problema 1

Considere $\Sigma = \{0, 1\}$ y construya un DFA para cada uno de los siguientes lenguajes:

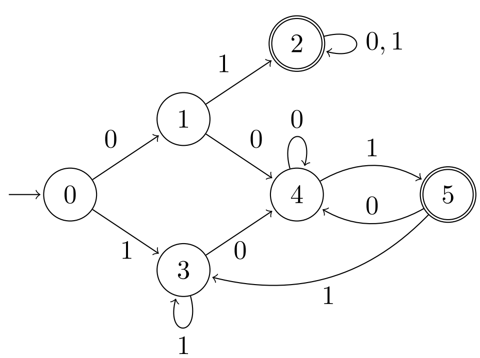
- $L = \{w = a_1 a_2 \dots a_{n-1} a_n \mid a_1 a_2 a_3 = 011 \lor a_1 a_2 a_3 = 001\}$
- $L = \{w = a_1 a_2 \dots a_{n-1} a_n \mid a_1 a_2 = 01 \lor a_{n-1} a_n = 01\}$
- $L = \{w = a_1 a_2 \dots a_{n-1} a_n \mid a_{n-1} = a_n\}$

Solución

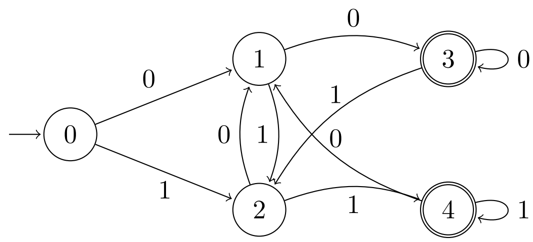
- $L = \{w = a_1 a_2 \dots a_{n-1} a_n \mid a_1 a_2 a_3 = 011 \lor a_1 a_2 a_3 = 001\}$



- $L = \{w = a_1 a_2 \dots a_{n-1} a_n \mid a_1 a_2 = 01 \lor a_{n-1} a_n = 01\}$



- $L = \{w = a_1 a_2 \dots a_{n-1} a_n \mid a_{n-1} = a_n\}$



Problema 2

Considere el conjunto $\{0,1\}^3$ de vectores columna de dimensión 3. Considere también la suma en $\{0,1\}$ dado por la siguiente tabla:

		+
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	0

Para dos vectores $\vec{v}_1$ y $\vec{v}_2$ en $\{0,1\}^3$ se define $\vec{v}_1 + \vec{v}_2 \in \{0,1\}^3$ como la suma punto a punto de los vectores $\vec{v}_1$ y $\vec{v}_2$.
Por ejemplo, si $\vec{v}_1 = [0\ 0\ 1]^t$ y $\vec{v}_2 = [1\ 0\ 1]^t$ entonces:

$$\vec{v}_1 + \vec{v}_2 = [1\ 0\ 0]^t$$

Demuestre que el siguiente lenguaje es regular sobre el alfabeto $\{0,1\}^3$. Muestre un autómata finito determinista y demuestre su correctitud.

$$L = \{\vec{v}_1\vec{v}_2 \ldots \vec{v}_n \in (\{0,1\}^3)^* \mid n \geq 1 \wedge \sum_{i=1}^{n} \vec{v}_i = [0\ 0\ 0]^t\}$$

Solución

Un autómata que representa el lenguaje descrito en el enunciado es $\mathcal{A} = (Q, \Sigma, \delta, q_0, F)$, definido por:

- $Q = \{0,1\}^3 \cup \{q_0\}$
- $\Sigma = \{0,1\}^3$
- $\delta(\vec{v}_1, \vec{v}_2) = \vec{v}_1 + \vec{v}_2 \cup \{(q_0, \vec{v}_i) \to \vec{v}_i\}$
- $q_0 = q_0$
- $F = \{[0\ 0\ 0]^t\}$

Ahora nos queda demostrar que $\mathcal{L}(\mathcal{A}) = L$:

- ($\mathcal{L}(\mathcal{A}) \subseteq L$)
  Sea $w = \vec{v}_1\vec{v}_2 \ldots \vec{v}_n \in \mathcal{L}(\mathcal{A})$ y sea ρ una ejecución sobre w de $\mathcal{L}(\mathcal{A})$:

  $$\rho : p_0 \xrightarrow{\vec{v}_1} p_1 \xrightarrow{\vec{v}_2} \ldots \xrightarrow{\vec{v}_n} p_n$$

  con $p_0 = q_0$ y $p_n \in F$. Ahora, como $p_n \in F$ entonces la suma de los vectores es el vector $[0\ 0\ 0]^t$. Por lo anterior, es claro que $w \in L$.

- $(L \subseteq \mathcal{L}(\mathcal{A}))$

  Sea $w = \vec{v}_1\vec{v}_2 \ldots \vec{v}_n \in L$ y como w pertenece al lenguaje, por definición sabemos que la suma de los vectores en w resulta en el vector $[0\ 0\ 0]^t$, esto implica que una ejecución sobre w de $\mathcal{A}$ es del tipo:

  $$\rho : p_0 \xrightarrow{\vec{v}_1} p_1 \xrightarrow{\vec{v}_2} \ldots \xrightarrow{\vec{v}_n} p_n$$

  Por construcción, sabemos que $p_n = [0\ 0\ 0]^t$ y por lo tanto $p_n \in F$ ya que la función de transición suma cada vector de w secuencialmente. Por lo tanto, $w \in \mathcal{L}(\mathcal{A})$.

Problema 3

Sea $\Sigma = \{0, 1, 2\}$. Construya un autómata finito determinista A con alfabeto Σ que acepte todas las palabras que son representaciones ternarias (en base 3) de números que NO son múltiplos de cuatro.
Dibuje el autómata y explique cuál es su funcionamiento.

Solución

Podemos considerar que el lenguaje son todas las palabras en ternario que en módulo 4 no son equivalentes a 0. Para esto consideramos que cada resto (clase de equivalencia) sea un estado del autómata, es decir, el estado 0 representa que el resto hasta donde se ha leído es 0, el estado 1 que el resto es 1 y así sucesivamente. Para esto tomaremos como ejemplo el 5 (12 en ternario) y veremos que sucede al agregar un nuevo numero. Como 5 mod $4 \equiv 1$ consideramos que estamos en el estado 1. Como estamos trabajando en base 3 cuando se agrega un 0 al final de la palabra, este se multiplica por 3, por otro lado si agregamos un 1, este se multiplica por 3 y se le suma 1 y si se agrega un 2 se multiplica por 3 y se le suma 2. Y como estamos trabajando en módulo 4, podemos considerar el 1 en vez del 5. Entonces,

$$1 * 3 + 0 \text{ mod } 4 \equiv 3$$

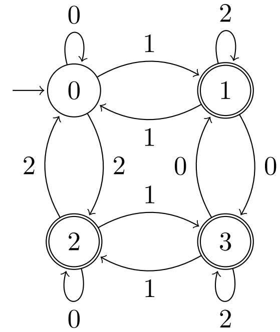
$$1 * 3 + 1 \text{ mod } 4 \equiv 0$$

$$1 * 3 + 2 \text{ mod } 4 \equiv 1$$

Por lo tanto, estando en el 1 si se lee un 0 se va al estado 3, si se lee un 1 se va al estado 0 y si se lee un 2 se va al estado 1. Analizando las fórmulas, podemos ver que se multiplica el estado en el que se está por 3 y se le suma lo que se lee, para luego aplicarle el módulo 4, obteniendo el nuevo estado. Aplicando esto mismo a los demas estados, obtenemos

0*3 + 0 mod $4 \equiv 0$	0*3 + 1 mod $4 \equiv 1$	0*3 + 2 mod $4 \equiv 2$
2*3 + 0 mod $4 \equiv 2$	2*3 + 1 mod $4 \equiv 3$	2*3 + 2 mod $4 \equiv 0$
3*3 + 0 mod $4 \equiv 1$	3*3 + 1 mod $4 \equiv 2$	3*3 + 2 mod $4 \equiv 3$

Con esta información podemos construir el autómata, obteniendo



Problema 4 (propuesto)

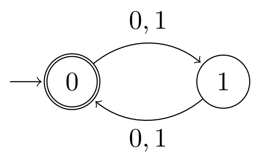
Demuestre que los siguientes lenguajes son regulares:

- $L = \{w \in \{0,1\}^* \mid |w| \mod 2 \equiv 0\ \}$
- $L = \{w \in \{0,1\}^* \mid |w| \mod 3 \equiv 0\ \}$
- $L = \{w \in \{0,1\}^* \mid |w| \mod 6 \equiv 0\ \}$

Solución

- $L = \{w \in \{0,1\}^* \mid |w| \mod 2 \equiv 0\ \}$ Para demostrar que estos lenguajes son regulares debemos encontrar autómatas que los acepten y luego demostrar que efectivamente definen L.

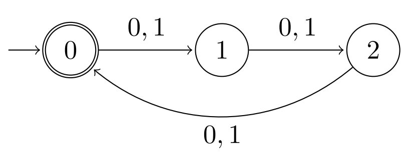
  Podemos generar el siguiente DFA, $\mathcal{A}$:

  Ahora para demostrar que los lenguajes son iguales, demostramos:

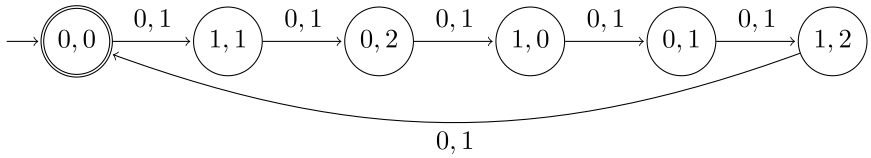
  1. $\mathcal{L}(\mathcal{A}) \subseteq L$
     Si una palabra $w = a_1 a_2 ... a_n$ es aceptada por el autómata, existirá una ejecución de aceptación:
     $$\rho : \ p_0 \xrightarrow{a_1} p_1 \xrightarrow{a_2} p_0 \xrightarrow{a_3} ... \xrightarrow{a_{n-1}} p_1 \xrightarrow{a_n} p_0$$
     Dado que nuestro único estado de aceptación es p_0 y sin importar qué letra se lea, siempre intercalaremos entre p_0 y p_1, la única forma de que la ejecución sea de aceptación, es que tenga una cantidad par de pasos, es decir, $n = 2k, k \in \mathbb{N}$.
     Luego, dado que tenemos una cantidad de pasos, estamos leyendo una cantidad par de letras y por tanto el largo de las palabras aceptadas deberá cumplir que $|w| \mod 2 \equiv 0$, lo que significa que $\mathcal{L}(\mathcal{A}) \subseteq L$.
  2. $\mathcal{L}(\mathcal{A}) \subseteq L$
     Toda palabra que pertenece al lenguaje debe tener largo par, por lo que podemos demostrar por inducción sobre el largo de las palabras que para todas ellas existirá una ejecución de aceptación en $\mathcal{A}$.

- $L = \{w \in \{0,1\}^* \mid |w| \mod 3 \equiv 0\ \}$ Similar al caso anterior, podemos generar el siguiente DFA:

  La demostración de este caso es análoga a la del anterior.

- $L = \{w \in \{0,1\}^* \mid |w| \mod 6 \equiv 0\ \}$ Para construir este autómata, podemos aprovechar que todo número múltiplo de 6 es también múltiplo de 2 y 3. Genereamos el producto cruz de estos autómatas, encontrando:



Y nuevamente la demostración de este caso será análoga a la primera.