Pontificia Universidad Católica de Chile
Escuela de Ingeniería
Departamento de Ciencia de la Computación

IIC2223 — Teoría de Autómatas y Lenguajes Formales — 2' 2022

PAUTA INTERROGACIÓN 1

Pregunta 1

Pregunta 1

Una posible solución para esta pregunta es hacer inducción sobre el largo de la fórmula. Suponemos un estado inicial y uno final. Entonces, vemos por casos:

- $R = a$, donde el autómata que acepta a R es $A = (Q, \Sigma, \Delta, I, F)$, siendo:
  - $Q = \{1, 1\}$
  - $\Delta = \{(1, a, 2)\}$
  - $I = \{1\}$
  - $F = \{2\}$
- $R = \epsilon$, donde el autómata que acepta a R es $A = (Q, \Sigma, \Delta, I, F)$, siendo:
  - $Q = \{1\}$
  - $\Delta = \emptyset$
  - $I = \{1\}$
  - $F = \{1\}$
- $R = \emptyset$, donde el autómata que acepta a R es $A = (Q, \Sigma, \Delta, I, F)$, siendo:
  - $Q = \{1, 2\}$
  - $\Delta = \emptyset$
  - $I = \{1\}$
  - $F = \{2\}$

Sean R_1 y R_2 expresiones regulares que tienen un $\epsilon - NFA$ equivalente $A_1 = (Q_1, \Sigma, \Delta_1, \{q_0^1\}, \{q_f^1\})$ y $A_2 = (Q_2, \Sigma, \Delta_2, \{q_0^2\}, \{q_f^2\})$.

- $R = R_1 + R_2$, donde el autómata que acepta a R es $A = (Q, \Sigma, \Delta, I, F)$, siendo:
  - $Q = Q_1 \uplus Q_2 \uplus \{q_0, q_f\}$
  - $\Delta = \Delta_1 \uplus \Delta_2 \uplus \{(q_0, \epsilon, q_0^1), (q_0, \epsilon, q_0^2), (q_f^1, \epsilon, q_f), (q_f^2, \epsilon, q_f)\}$
  - $I = \{q_0\}$
  - $F = \{q_f\}$
- $R = R_1 \cdot R_2$, donde el autómata que acepta a R es $A = (Q, \Sigma, \Delta, I, F)$, siendo:

- $Q = Q_1 \uplus Q_2$
- $\Delta = \Delta_1 \uplus \Delta_2 \uplus \{(q_f^1, \epsilon, q_0^2)\}$
- $I = \{q_0^1\}$
- $F = \{q_f^2\}$

- $R = R_1^*$, donde el autómata que acepta a R es $A = (Q, \Sigma, \Delta, I, F)$, siendo:
  - $Q = Q_1 \uplus \{q_0\}$
  - $\Delta = \Delta_1 \uplus \{(q_0, \epsilon, q_0^1), (q_f^1, \epsilon, q_0)\}$
  - $I = \{q_0\}$
  - $F = \{q_0\}$

Dado que cualquier expresión regular se puede construir recursivamente a partir de las definiciones anteriores, podemos definir recursivamente un autómata para cada expresión usando las reglas anteriores.

Dado lo anterior, la distribución de puntaje es la siguiente:

- **(0.5 puntos)** Por construir correctamente el autómata del primer caso.
- **(0.5 puntos)** Por construir correctamente el autómata del segundo caso.
- **(0.5 puntos)** Por construir correctamente el autómata del tercer caso.
- **(1.5 puntos)** Por construir correctamente el autómata del cuarto caso. Donde 0.5 corresponden a definir los conjuntos de estados iniciales y finales, 0.5 a definir correctamente el conjunto de estados y 0.5 a definir correctamente el conjunto de transiciones.
- **(1.5 puntos)** Por construir correctamente el autómata del quinto caso. Donde 0.5 corresponden a definir los conjuntos de estados iniciales y finales, 0.5 a definir correctamente el conjunto de estados y 0.5 a definir correctamente el conjunto de transiciones.
- **(1.5 puntos)** Por construir correctamente el autómata del sexto caso. Donde 0.5 corresponden a definir los conjuntos de estados iniciales y finales, 0.5 a definir correctamente el conjunto de estados y 0.5 a definir correctamente el conjunto de transiciones.

Pregunta 2

Pregunta 2.1

Para resolver la pregunta anterior, vamos a proponer una expresión regular que defina a L:

$$(c + cc)^{?}(a + b + (a + b)c + (a + b)cc)^*$$

En primer lugar, explicaremos la construcción del término de la derecha. La expresión regular no debe definir palabras en las que después de dos letras 'c' haya otra 'c'. Para ello, se incluye la expresión que tiene una 'a' o 'b' y después dos letras 'c' y luego puede haber una 'a' o 'b' o 'ac' o 'bc'. Pero nunca habrán tres letras 'c' seguidas.

Finalmente, se añade el término de la izquierda, porque el lenguaje puede incluir la palabra 'c' o 'cc'.

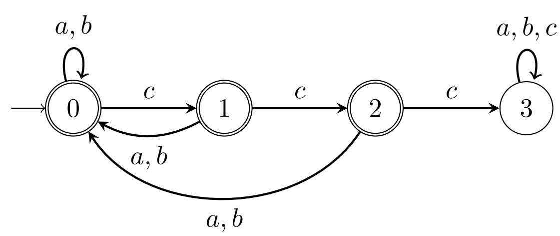
Notemos, que la expresión regular define correctamente a L, ya que incluye todas las palabras sobre el alfabeto $\{a, b, c\}$ que no contiene tres letras 'c' seguidas.

Dado lo anterior, la distribución de puntaje es la siguiente:

- **(1 puntos)** Por construir $(c + cc)^?$
- **(1 puntos)** Por construir $(a + b)^*$
- **(1.5 puntos)** Por construir $((a + b)c)^*$
- **(1.5 puntos)** Por construir $((a + b)cc)^*$
- **(1 puntos)** Por entregar una explicación con sentido

Pregunta 2.2

Un autómata determinista que que defina a L puede ser el siguiente:



Para demostrar que el autómata es mínimo, realizaremos el algoritmo de minimización visto en clases. En primer lugar, construiremos una tabla con todos los pares de nodos sin marcar.

	0	1	2	3
0	-			
1	-	-		
2	-	-	-	
3	-	-	-	-

En segundo lugar, marcar todos los pares $\{p, q\}$ si $p \in F$ y $q \notin F$ o viceversa.

	0	1	2	3
0	-			X
1	-	-		X
2	-	-	-	X
3	-	-	-	-

Luego, si $\{p, q\}$ no están marcado y $\{\delta(p, a); \delta(q, a)\}$ si están marcados. Entonces, marcar $\{p, q\}$.

	0	1	2	3
0	-		c(1, 3)	X
1	-	-	c(2, 3)	X
2	-	-	-	X
3	-	-	-	-

	0	1	2	3
0	-	c(1,2)	X	X
1	-	-	X	X
2	-	-	-	X
3	-	-	-	-

	0	1	2	3
0	-	X	X	X
1	-	-	X	X
2	-	-	-	X
3	-	-	-	-

Cómo todas las entradas están marcadas, entonces para todo estado p, q en el autómata, p y q son distinguibles. Por lo tanto, el autómata es mínimo.

Dado lo anterior, la distribución de puntaje es la siguiente:

- **(2 puntos)** Por construir el autómata mínimo
- **(1 punto)** Por manejar el método de minimización
- **(1 punto)** Por marcar el par estados finales y no finales
- **(2 punto)** Por realizar correctamente cada iteración (2 iteraciones)

Pregunta 3

Para realizar la demostración pedida, utilizaremos el contrapositivo del lema de bombeo. Una posible solución es la siguiente:

Sea un $N > 0$ arbitrario. Entonces, existe la siguiente palabra:

$$ab^N ab^N$$

La cual se puede dividir de la siguiente forma:

$$x = a$$
$$y = b^N$$
$$z = ab^N$$

Entonces, para todo $y = b^l b^m b^n$ con $u = b^l$, $v = b^m$, $w = b^n$ y $m > 0$, existe $i = 2$ tal que:

$$x \cdot u \cdot v^2 \cdot w \cdot z = ab^N b^m ab^N$$

Entonces buscamos demostrar que $ab^N b^m ab^N \notin Eq^+$. Debido a que la palabra a analizar comienza con a, y solo hay dos a presentes en esta, la única forma de separar la palabra en dos sería de la forma:

$$w \cdot w = ab^N b^m \cdot ab^N$$

Y como $m > 0$, tendremos que $ab^N b^m \neq ab^N$ y por ende, la palabra no pertenece a Eq^+. Por lo tanto, Eq^+ no es regular.

Dado lo anterior, la distribución de puntaje es la siguiente:

- **(2 puntos)** Por seleccionar un N y particiones x, y, z de la palabra adecuadas.
- **(1 punto)** Por dividir y en particiones u, v, w adecuadas, con $v \neq \epsilon$.
- **(1 punto)** Por encontrar un $i \geq 0$ adecuado para expandir v.
- **(2 puntos)** Por demostrar que la palabra resultante no pertenece a Eq^+ y por ende, que el lenguaje es no regular.

Pregunta 4

Una posible solución para esta pregunta es lo siguiente.
Como L_1 y L_2 son regulares, existen autómatas no deterministas $\mathcal{A}_1 = (Q_1, \Sigma, \Delta_1, I_1, F_1)$ y $\mathcal{A}_2 = (Q_2, \Sigma, \Delta_2, I_2, F_2)$, tales que $\mathcal{L}(\mathcal{A}_1) = L_1$ y $\mathcal{L}(\mathcal{A}_2) = L_2$.
La idea general, es construir un nuevo autómata no determinista, que al leer $w = u_1 \cdot v_2$ como input, ejecute $\mathcal{A}_1$ sobre el w, intente adivinar en qué momento termina u_1, y mediante una ϵ-transición, pasar a ejecutar v_2 a partir de algún estado de $\mathcal{A}_2$. Si la ejecución termina en un estado final de $\mathcal{A}_2$, entonces el autómata acepta el input.
Para lograr esto, nuestro nuevo autómata debe contener a $\mathcal{A}_1$ y $\mathcal{A}_2$, y tener ϵ-transiciones que vayan de algunos estados de $\mathcal{A}_1$ a algunos estados de $\mathcal{A}_2$. La elección de cuáles estados van a tener ϵ-transiciones salientes o entrantes, viene por la definición de $L_1 \ddagger L_2$.
Dado un $w = u_1 \cdot v_2$, para verificar si $w \in L_1 \ddagger L_2$, es necesario comprobar que existe u_2 tal que $u_1 \cdot u_2 \in L_1$, y que existe v_1 tal que $v_1 \cdot v_2 \in L_2$. Para esto, construimos los siguientes conjuntos de estados:

$$Q_1^F = \{p \mid \exists u \in \Sigma^* \ \exists q \in F_1.\ (p, u) \vdash^*_{\mathcal{A}_1} (q, \epsilon)\}$$

$$Q_2^I = \{q \mid \exists v \in \Sigma^* \ \exists p \in I_2.\ (p, v) \vdash^*_{\mathcal{A}_1} (q, \epsilon)\}$$

Con esto, construimos el autómata no determinista $\mathcal{A}^\ddagger = (Q^\ddagger, \Sigma, \Delta^\ddagger, I^\ddagger, F^\ddagger)$ donde

- $Q^\ddagger = Q_1 \uplus Q_2$
- $I^\ddagger = I_1$
- $F^\ddagger = F_2$
- $\Delta^\ddagger = \Delta_1 \uplus \Delta_2 \uplus \{(p, \epsilon, q) \mid p \in Q_1^F \wedge q \in Q_2^I\}$

Ahora, queda demostrar que $\mathcal{L}(\mathcal{A}^\ddagger) = L_1 \ddagger L_2$.

Primero demostraremos que $L_1 \ddagger L_2 \subseteq \mathcal{L}(\mathcal{A}^\ddagger)$. Sea $w \in L_1 \ddagger L_2$. Por definición de $L_1 \ddagger L_2$, existen $u_1, u_2, v_1, v_2 \in \Sigma^*$ tales que $w = u_1 \cdot v_2$, $u_1 \cdot u_2 \in L_1$, y $v_1 \cdot v_2 \in L_2$. Luego, existen $q_0^1 \in I_1, q_f^1 \in F_1, q_0^2 \in I_2, q_f^2 \in F_2$ tales que:

$$(q_0^1, u_1 \cdot u_2) \vdash^*_{\mathcal{A}_1} (q_f^1, \epsilon)$$

$$(q_0^2, v_1 \cdot v_2) \vdash^*_{\mathcal{A}_2} (q_f^2, \epsilon)$$

Existen $p \in Q_1, q \in Q_2$ tales que se cumple lo siguiente:

$$(q_0^1, u_1 \cdot u_2) \vdash^*_{\mathcal{A}_1} (p, u_2) \vdash^*_{\mathcal{A}_1} (q_f^1, \epsilon)$$

$$(q_0^2, v_1 \cdot v_2) \vdash^*_{\mathcal{A}_2} (q, v_2) \vdash^*_{\mathcal{A}_2} (q_f^2, \epsilon)$$

Por construcción de $\mathcal{A}^\ddagger$, tenemos que $q_0^1 \in I^\ddagger, q_f^2 \in F^\ddagger$. También notamos que $p \in Q_1^F$, y que $q \in Q_2^I$. Luego, por definición de $\Delta^\ddagger$, hay una ϵ-transición que lleva de p a q. Entonces, lo siguiente es una secuencia válida de configuraciones de $\mathcal{A}^\ddagger$:

$$(q_0^1, u_1 \cdot v_2) \vdash^*_{\mathcal{A}^\ddagger} (p, v_2) \vdash_{\mathcal{A}^\ddagger} (q, v_2) \vdash^*_{\mathcal{A}^\ddagger} (q_f^2, \epsilon)$$

De aquí queda claro que $(q_0^1, u_1 \cdot v_2) \vdash^*_{\mathcal{A}^\ddagger} (q_f^2, \epsilon)$, por lo que $u_1 \cdot v_1 \in \mathcal{L}(\mathcal{A}^\ddagger)$.
Luego, $L_1 \ddagger L_2 \subseteq \mathcal{L}(\mathcal{A}^\ddagger)$.

Ahora demostraremos que $\mathcal{L}(\mathcal{A}^\ddagger) \subseteq L_1 \ddagger L_2$. Sea $w \in \mathcal{L}(\mathcal{A}^\ddagger)$. Luego, $\exists q_0 \in I_1, \exists q_f \in F_2$ tal que

$$(q_0, w) \vdash^*_{\mathcal{A}^\ddagger} (q_f, \epsilon)$$

Por construcción, tenemos que $Q_1 \cap Q_2 = \emptyset$, por lo que en algún momento de la ejecución, se debe utilizar una ϵ-transición que lleve de los estados Q_1 a los estados Q_2. Entonces, $\exists u_1, v_2 \in \Sigma^*$ tal que $w = u_1 \cdot v_2$, y $\exists p \in Q_1^F, q \in Q_2^I$ tal que:

$$(q_0, u_1 \cdot v_2) \vdash^*_{\mathcal{A}^\ddagger} (p, v_2) \vdash_{\mathcal{A}^\ddagger} (q, v_2) \vdash^*_{\mathcal{A}^\ddagger} (q_f, \epsilon)$$

Por construcción, se tiene que $(q_0, u_1) \vdash^*_{\mathcal{A}_1} (p, \epsilon)$. Y, como $p \in Q_1^F$, existe u_2 tal que $(p, u_2) \vdash^*_{\mathcal{A}_1} (q_f^1, \epsilon)$ con $q_f^1 \in F_1$. Luego,

$$(q_0, u_1 \cdot u_2) \vdash^*_{\mathcal{A}_1} (q_f^1, \epsilon)$$

Por lo tanto, $u_1 \cdot u_2 \in L_1$.
Análogamente, se tiene que $(q, v_2) \vdash^*_{\mathcal{A}_2} (q_f, \epsilon)$. Y, como $q \in Q_2^I$, existe v_1 tal que $(q_0^2, v_1) \vdash^*_{\mathcal{A}_2} (q, \epsilon)$ con $q_0^2 \in I_2$. Luego,

$$(q_0^2, v_1 \cdot v_2) \vdash^*_{\mathcal{A}_2} (q_f, \epsilon)$$

Por lo tanto, $v_1 \cdot v_2 \in L_2$.
Como existen $u_2, v_1 \in \Sigma^*$ tales que $u_1 \cdot u_2 \in L_1$ y $u_1 \cdot u_2 \in L_1$, tenemos que $w \in L_1 \ddagger L_2$.
Luego, $\mathcal{L}(\mathcal{A}^\ddagger) \subseteq L_1 \ddagger L_2$.

Como $L_1 \ddagger L_2 \subseteq \mathcal{L}(\mathcal{A}^\ddagger) \wedge \mathcal{L}(\mathcal{A}^\ddagger) \subseteq L_1 \ddagger L_2$, se cumple que $L_1 \ddagger L_2 = \mathcal{L}(\mathcal{A}^\ddagger)$, y concluimos que $L_1 \ddagger L_2$ es regular.

Dado lo anterior, la distribución de puntaje es la siguiente:

- **(2 puntos)** Por expresar la idea de ϵ-transiciones que conecten estados de $\mathcal{A}_1$ y $\mathcal{A}_2$
- **(1 punto)** Por construcción de $\mathcal{A}^\ddagger$
- **(1 punto)** Por modelar correctamente de qué estados salen/entran las ϵ-transiciones en $\mathcal{A}^\ddagger$
- **(1 punto)** Por demostrar $L_1 \ddagger L_2 \subseteq \mathcal{L}(\mathcal{A}^\ddagger)$
- **(1 punto)** Por demostrar $\mathcal{L}(\mathcal{A}^\ddagger) \subseteq L_1 \ddagger L_2$