Pontificia Universidad Católica de Chile
Escuela de Ingeniería
Departamento de Ciencia de la Computación

IIC2223 — Teoría de Autómatas y Lenguajes Formales — 2' 2020

PAUTA CONTROL 1

Pregunta 1

Pregunta 1.1

Podemos interpretar L_i como el lenguaje de las palabras tales que la (n-i)-ésima letra de la palabra es una "b". Intuitivamente, podemos construir un NFA $\mathcal{A}_i = (Q, \Sigma, \Delta, I, F)$ para este lenguaje que se quede en el estado inicial leyendo cualquier letra, "adivine" la posición correcta de la b y luego avance i estados hasta el único estado final. Es claro que el autómata anterior define el lenguaje y tiene solamente i+2 estados, por lo que podemos formalizarlo de la siguiente manera:

- $Q = \{p_0, ..., p_{i+1}\}$
- $\Sigma = \{a, b\}$
- $I = \{p_0\}$
- $F = \{p_{i+1}\}$
- $\Delta = \{(p_0, a, p_0), (p_0, b, p_0), (p_0, b, p_1)\} \ \cup \ \{(p_j, \alpha, p_{j+1}) \mid 0 < j < i \wedge p_j \in Q \wedge \alpha \in \Sigma\}$

Podemos ver que $L_i = \mathcal{L}(\mathcal{A}_i)$, pues si una palabra $w = a_1 a_2 ... a_n$ pertenece a L_i significa que tiene una b en la posición $n - i$, lo que significa que existirá la ejecución:

$$\rho : \ p_0 \xrightarrow{a_1} p_0 \xrightarrow{a_2} p_0 \xrightarrow{a_3} ... \xrightarrow{b = a_{n-i}} p_1 \xrightarrow{a_{n-(i-1)}} p_2 \xrightarrow{a_{n-(i-2)}} ... \xrightarrow{a_{n-1}} p_i \xrightarrow{a_n} p_{i+1}$$

Similarmente, si una palabra es aceptada por $\mathcal{A}_i$, esta debe tener una ejecución de aceptación de la forma de ρ, lo que necesariamente significa que la palabra debe tener una b en la posición $n - i$ y por tanto pertenece a L_i.

Además $\mathcal{A}_i$ será no-ambiguo, pues si existiera otra ejecución para w, distinta de ρ, esto significaría que se realiza la transición a p_1 en otro momento de la ejecución. Si esta transición se realiza antes, quedarán menos de i letras por leer luego de esta, por lo que el autómata se detendrá antes de llegar al estado final y no aceptará la palabra; por otra parte, si esta transición se realiza después, quedará al menos una letra por leer luego de llegar al estado final y dado que este no tiene transiciones salientes, no se aceptará la palabra.

Dado lo anterior, la distribución de puntaje es la siguiente:

- **(2 puntos)** Por realizar correctamente la construcción del autómata.
- **(0.5 puntos)** Por justificar que $L = \mathcal{L}(\mathcal{A})$.
- **(0.5 puntos)** Por justificar que $\mathcal{A}$ es no-ambiguo.

Pregunta 1.2

Podemos ver que la construcción de este autómata será la misma que se utilizó para la pregunta 2 de la tarea 1 del curso (no era necesario saberlo, este es solo un dato al margen para no escribir la misma construcción de nuevo en esta pauta), por lo que, repitiendo este proceso, tenemos que:

Dado que el lenguaje L es un lenguaje regular, sabemos que existirá un DFA $\mathcal{A}_0 = (Q, \Sigma, \delta, q_0, F)$, tal que $L = \mathcal{L}(\mathcal{A}_0)$ y a partir de este, podemos construir el DFA $\mathcal{A} = (Q', \Sigma, \Delta, \{q_0\}, \{q_f\})$, donde:

- $Q' = Q \uplus q_f$
- $\Delta = \delta \cup \{(p, a, q_f) \mid (p, a, q) \in \delta \ \wedge \ q \in F\}$

Luego, podemos demostrar que $L = \mathcal{L}(\mathcal{A})$ mostrando que $L \subseteq \mathcal{L}(\mathcal{A}) \ \wedge \ \mathcal{L}(\mathcal{A}) \subseteq L$. Los detalles de esta demostración los pueden revisar en la pauta de la Tarea 1.

Teniendo definido $\mathcal{A}$, podemos demostrar que es no ambiguo mirando sus ejecuciones y usando contradicción. Sea ρ una ejecución de aceptación de $\mathcal{A}$ sobre $w = a_1 a_2 ... a_n$ de la forma:

$$\rho: \ p_0 = q_0 \xrightarrow{a_1} p_1 \xrightarrow{a_2} ... \xrightarrow{a_{n-1}} p_{n-1} \xrightarrow{a_n} p_n = q_f$$

Puesto que $|I| = 1$ y $|F| = 1$, si suponemos que existe otra ejecución de aceptación para w, está tendrá la forma:

$$\rho': \ p'_0 = q_0 \xrightarrow{a_1} p'_1 \xrightarrow{a_2} ... \xrightarrow{a_{n-1}} p'_{n-1} \xrightarrow{a_n} p'_n = q_f$$

Dado que ρ y ρ' son diferentes, debe existir un primer estado p_k en el que difieren, es decir $p_k \neq p'_k$, lo que implica que:

$$(p_{k-1}, a_k, p_k) \in \Delta \ \wedge \ (p_{k-1}, a_k, p'_k) \in \Delta$$

Observando la construcción de Δ, podemos notar que esto corresponde a una contradicción, pues para que ocurra lo anterior debe cumplirse una de dos condiciones:

- $\delta(p_{k-1}, a_k) = p_k \ \wedge \ \delta(p_{k-1}, a_k) = p'_k$.

  Esta condición no puede cumplirse porque δ corresponde a la función de transición de un autómata determinista, por lo que para un par estado letra existirá un único estado posible como resultado, lo que genera una contradicción.

- $p_k = p_n \ \wedge \ p'_k = p'_n$.

  En caso de que la transición no provenga de δ, esta debe llegar al estado final, sin embargo, dado que tenemos un único estado final q_f y ambas ejecuciones son de aceptación, se debe cumplir que $p_n = p'_n = q_f$, lo que implica que $q_k = q'_k$, generando una contradicción.

Dado lo anterior, la distribución de puntaje es la siguiente:

- **(1 punto)** Por construir correctamente $\mathcal{A}$ y demostrar que $L = \mathcal{L}(\mathcal{A})$
  - **0.5 puntos** Por construir correctamente $\mathcal{A}$.
  - **0.5 puntos** Por demostrar que $L = \mathcal{L}(\mathcal{A})$.
- **(2 puntos)** Por demostrar que $\mathcal{A}$ es no-ambiguo.
  - **1 punto** Por plantear correctamente las ejecuciones de $\mathcal{A}$.
  - **1 punto** Por demostrar que la ejecución es única usando la construcción de Δ.

Pregunta 2

Pregunta 2

Una posible solución es la siguiente. Como $\mathcal{R}$ es una expresión regular, existe un DFA $\mathcal{A} = (Q, \Sigma, \delta, q_0, F)$ tal que $\mathcal{L}(A) = \mathcal{L}(\mathcal{R})$. Notemos que el lenguaje $R^{\downarrow\downarrow}$ corresponde a las palabras ω tales que existe otra palabra ω' que cumple que $\omega' = u_1v_1 \cdots u_kv_k$, y que $u_k, v_k \in \Sigma^*$ para todo $k \geq 1$, junto con que $\omega = u_1u_2 \cdots u_k$.

En otras palabras $\mathcal{L}(\mathcal{R}^{\downarrow\downarrow})$ corresponde al lenguaje de las palabras que son una subpalabra (no necesariamente contigua o distinta de ϵ) de alguna palabra de $\mathcal{R}$. Ahora, teniendo claro lo anterior, una idea es partir del autómata $\mathcal{A}$ para $\mathcal{L}(\mathcal{R})$ y modificarlo de forma tal que "salte" algunos fragmentos de las palabras, para advinar las partes que se añaden a ω para obtener palabras en $\mathcal{L}(\mathcal{R})$. De acá viene la intuición para utilizar ϵ-transiciones.

Construiremos el siguiente NFA con ϵ-transiciones, definido en base al autómata anterior. Especificamente, considere el autómata:

$$\mathcal{A}' \;=\; (Q, \Sigma, \Delta, \{q_0\}, F)$$

La relación de transición Δ será como sigue:

- Si $\delta(p, a) = q$ para $p, q \in Q, a \in \Sigma$, entonces $(p, a, q) \in \Delta$ (esto es, se "heredan" las transiciones de $\mathcal{A}$).
- Si existe una palabra $v \in \Sigma^*$ tal que al ser leída desde el estado p se llega al estado q (i.e $\hat{\delta}(p, v) = q$), entonces podemos saltar directamente al estado q, es decir $(p, \epsilon, q) \in \Delta$.
- Notemos que como v puede ser la palabra vacía, estamos añadiendo transiciones de (p, ϵ, p) para cada estado $p \in Q$.

Ahora probaremos que el NFA con ϵ- transiciones que hemos definido acepta exactamente el lenguaje $\mathcal{L}(\mathcal{R}^{\downarrow\downarrow})$. Primero mostraremos que $\mathcal{L}(\mathcal{R}^{\downarrow\downarrow}) \subseteq \mathcal{L}(\mathcal{A}')$. Sea $\omega = u_1u_2 \cdots u_k$ tal que existe una palabra $\omega' = u_1v_1 \cdots u_kv_k$ en $\mathcal{L}(\mathcal{R})$. Como $\omega' \in \mathcal{L}(\mathcal{R})$ entonces es aceptada por el autómata $\mathcal{A}$ y existe una ejecución ρ de $\mathcal{A}$ sobre ω' que tiene la siguiente forma.

$$\rho:\; q_0 \xrightarrow{u_1} p_0 \xrightarrow{v_1} q_1 \xrightarrow{u_2} p_1 \xrightarrow{v_2} q_2 \xrightarrow{u_3} p_2 \cdots \xrightarrow{v_k} q_k$$

donde q_k es un estado final.

Ahora notemos en esta ejecución que $\hat{\delta}(q_{i-1}, u_i) = p_{i-1}$ y $\hat{\delta}(p_{i-1}, v_i) = q_i$. Recordando como definimos el autómata $\mathcal{A}'$ a partir de $\mathcal{A}$ deducimos que una ejecución de $\mathcal{A}'$ sobre la palabra ω es como sigue.

$$q_0 \xrightarrow{u_1} p_0 \xrightarrow{\epsilon} q_1 \xrightarrow{u_2} p_1 \xrightarrow{\epsilon} q_2 \xrightarrow{u_3} p_2 \cdots \xrightarrow{\epsilon} q_k$$

Como el estado q_k también es final en $\mathcal{A}'$, tenemos que existe una ejecución de aceptación para ω en $\mathcal{A}'$, lo que prueba que $\mathcal{L}(\mathcal{R}^{\downarrow\downarrow}) \subseteq \mathcal{L}(\mathcal{A}')$.

Finalmente, probaremos que $\mathcal{L}(\mathcal{A}') \subseteq \mathcal{L}(\mathcal{R}^{\downarrow\downarrow})$. Sea $\omega \in \mathcal{L}(\mathcal{A}')$. Existe (al menos) una ejecución de aceptación ρ de $\mathcal{A}'$ sobre la palabra ω. Este NFA admite transiciones en la palabra vacía, podemos asumir sin pérdida de generalidad, debido a la forma en que se definió la relación de transición Δ que esta ejecución no tiene dos ϵ-transiciones seguidas. Si existe un fragmento de la ejecución de forma $q_i \xrightarrow{\epsilon} p_i \xrightarrow{\epsilon} q_{i+1}$, se tiene que $\hat{\delta}(q_i, \epsilon) = q_{i+1}$ y luego por la forma en que se añadieron ϵ-transiciones a Δ, existe otra ejecución igual pero que realiza directamente $q_i \xrightarrow{\epsilon} q_{i+1}$. Ahora por lo anterior podemos considerar que ρ tiene la siguiente forma

$$q_0 \xrightarrow{u_1} p_0 \xrightarrow{\epsilon} q_1 \xrightarrow{u_2} p_1 \xrightarrow{\epsilon} q_2 \xrightarrow{u_3} p_2 \cdots \xrightarrow{\epsilon} q_k$$

Donde q_k es un estado final. Ahora viendo la relación entre las definiciones de los automátas $\mathcal{A}$ y $\mathcal{A}'$ y mirando las palabras v_i que existen debido al segundo punto de la definición de Δ, deducimos que existe una ejecución de $\mathcal{A}$ sobre una palabra $\omega' = u_1v_1 \cdots u_kv_k$ que tiene la siguiente forma

$$\rho:\; q_0 \xrightarrow{u_1} p_0 \xrightarrow{v_1} q_1 \xrightarrow{u_2} p_1 \xrightarrow{v_2} q_2 \xrightarrow{u_3} p_2 \cdots \xrightarrow{v_k} q_k$$

donde q_k es un estado final. De acá se concluye que $\omega' \in \mathcal{L}(\mathcal{R})$ y por ende $\omega \in \mathcal{L}(\mathcal{R}^{\downarrow\downarrow})$.

La distribución del puntaje es la siguiente

- **(2 puntos)** Por definir un NFA $\mathcal{A}'$ a partir del autómata $\mathcal{A}$ y añadir las transiciones de $\mathcal{A}$ a la relación de transición.
- **(2 puntos)** Por añadir al autómata anterior ϵ-transiciones que permitan saltar entre estados si existe una palabra que permite ir de uno al otro
- **(1 punto)** Por probar que $\mathcal{L}(\mathcal{R}^{\downarrow\downarrow}) \subseteq \mathcal{L}(\mathcal{A}')$
- **(1 punto)** Por probar que $\mathcal{L}(\mathcal{A}') \subseteq \mathcal{L}(\mathcal{R}^{\downarrow\downarrow})$