



دانشگاه صنعتی امیرکبیر
(پلی تکنیک تهران)

دانشکده مهندسی صنایع و سیستم‌های مدیریت

عنوان:

انتخاب مسیر برای احداث خط جدید قطار سبک شهری

نگارندگان:

پدرام پیرو اصفیا - ۹۸۲۵۰۰۶

مهدی محمدی - ۹۸۲۵۰۴۱

محدثه نجف‌زاده - ۹۸۲۵۵۰۲

استاد: دکتر نازنین فروزش

درس: مبانی تصمیم‌گیری

پاییز ۱۴۰۱

فهرست مطالب

تعریف مسئله	۳
۱. مقدمه	۳
۲. پیش‌نیازها	۵
۲.۱. مدل‌های نمایش ناهمگن	۵
۲.۲. اجماع ترتیبی: مروری کوتاه	۸
۳. چارچوب LSGDM ناهمگن با اجماع	۹
۴. فرایند اجماع ترتیبی برای LSGDM ناهمگن	۱۱
۴.۱. فرایند خوشه‌بندی k-means	۱۱
۴.۲. فرایند بررسی اجماع با اقدامات اجماع ترتیبی	۱۳
۴.۲.۱. اندازه‌گیری اجماع	۱۳
۴.۲.۲. آستانه اجماع از پیش تعریف شده	۱۴
۴.۳. استراتژی تنظیم بازخورد مبتنی بر CRP	۱۵
۵. ارائه‌ی راه حل مسئله‌ی طرح شده	۱۷
۵.۱. تکرار اول الگوریتم	۱۹
۵.۲. تکرار دوم الگوریتم	۲۹
۶. اشکالات مقاله	۳۱
ضمیمه	۳۶
منابع	۳۷

تعریف مسئله

شهرداری تهران تصمیم گرفته است که قطار سبک شهری را به حمل و نقل عمومی شهر تهران اضافه کند. آن‌ها ۵ مسیر مختلف را به عنوان کاندیدا در نظر دارند. از ۲۰ متخصص $E = \{e_1, e_2, \dots, e_{20}\}$ دعوت شده تا این ۵ مسیر مختلف را ارزیابی کنند و در نهایت ۱ مسیر انتخاب شود.

از ۵ معیار زیر برای سنجش گزینه‌های مختلف، استفاده شده است:

۱. **دسترسی:** میزان دسترسی راحت مسافران به این خط جدید.
۲. **محرومیت زدایی:** این خط جدید تا چه حد برای مردمی که مناطق محروم شهر زندگی می‌کنند مفید است.
۳. **محیط زیست:** این خط جدید تا چه حد باعث کاهش وسایل نقلیه شخصی و در نتیجه کاهش آلودگی هوا می‌شود.
۴. **امکان ساخت و ساز:** ساخت و ساز زیرساخت‌های این خط جدید تا چه اندازه نیاز به تغییرات اساسی ساختار فعلی شهر دارد.

۵. **تسهیل ترافیک:** ساخت این خط جدید، تا چه حد باعث کاهش ترافیک می‌شود.

برای حل این مسئله، از روش ارائه شده در مقاله (Tang et al., 2019) استفاده شده است.

۱. مقدمه

اجماع نقش مهمی در تصمیم‌گیری گروهی^۱ دارد و می‌تواند اطمینان حاصل کند که نتیجه تصمیم توسط تمام تصمیم‌گیرندگان^۲ پشتیبانی می‌شود. به لحاظ فنی، توافق به معنای توافق کامل یا نگرش بدون سؤال در میان همه تصمیم‌گیرندگان است.

با این حال این مفهوم بسیار سختگیرانه است و اغلب نمی‌تواند به طور کامل در شرایط دنیای واقعی به دست آید. Lawson و Saint عقیده داشتند که توافق را می‌توان به عنوان حالتی از توافق متقابل بین گروهی از تصمیم‌گیرندگان توصیف کرد و تمام نظرات را به رضایت آن‌ها تقلیل داد.

بعداً، مفهوم اجماع نرم برای نرم کردن اجماع سخت پیشنهاد شد و یک مرور جامع بر اجماع نرم را می‌توان یافت (Herrera-Viedma et al., 2014).

به هر حال در چندین دهه گذشته، اکثر معیارهای اجماع توسعه یافته (He & Xu, 2017; Herrera & Herrera-Viedma, 1996)، تنها تعداد کمی از تصمیم‌گیرندگان را در نظر گرفتند. با این حال، با افزایش پیچیدگی محیط اجتماعی، مسائل GDM که شامل تعداد زیادی از تصمیم‌گیرندگان می‌شود، امروزه در بسیاری از زمینه‌ها مانند تصمیم‌گیری اضطراری (Xu, Du, et al., 2015; Liu et al., 2015)، کنترل سوخت‌های فسیلی (Palomares et al., 2014) و مدیریت منابع انسانی (Xu, Zhong, et al., 2015) رایج شده است. به طور کلی، زمانی که تعداد تصمیم‌گیرندگان در یک مسئله تصمیم‌گیری گروهی بیش از ۲۰ باشد، این مشکل را می‌توان به عنوان یک مسئله تصمیم‌گیری گروهی در مقیاس بزرگ^۳ (Xu, Du, et al., 2015) در نظر گرفت. به دلیل

¹ GDM

² Decision Makers (DMs)

³ Large-scale group decision making (LSGDM)

پیشینه‌ها، نگرش‌ها و برداشت‌های مختلف، دستیابی به توافق بین همه تصمیم‌گیرندگان برای مسائل تصمیم‌گیری گروهی در مقیاس بزرگ دشوارتر از مسائل تصمیم‌گیری گروهی در مقیاس کوچک است. بنابراین، فرآیند اجماع برای مسائل تصمیم‌گیری گروهی در مقیاس بزرگ مهم و چالش برانگیز است.

در LSGDM، یک مسئله مورد بررسی این است که تصمیم‌گیرندگان تمایل دارند اشکال مختلفی از اطلاعات ارزیابی را به دلیل زمینه‌های تحقیق متفاوت یا تفاوت سطح تسلط بر اطلاعات ارائه دهند. قالب‌های اطلاعات ارزیابی ممکن است به صورت ماهیت کمی یا کیفی ارائه شوند. ما مسائل LSGDM با فرمت‌های مختلف اطلاعات را به عنوان مسائل LSGDM ناهمگن می‌نامیم. مسائل LSGDM ناهمگن در موقعیت‌های زندگی واقعی رایج است و مدل LSGDM ناهمگن با موقعیت‌های واقعی سازگارتر از مدل‌های GDM سنتی است. برای یک مسئله ناهمگن، فرمت‌های مختلفی از اطلاعات ارزیابی را می‌توان به صورت زیر ارائه کرد:

۱. **ماهیت کمی:** در چنین شرایطی، تصمیم‌گیرندگان از فرم‌های نمایش کمی مختلف برای بیان اطلاعات تصمیم خود استفاده می‌کنند، مانند عدد فازی^۴ (Zadeh, 1965)، مجموعه فازی شهودی^۵ (IFS) (Atanassov, 1986)، IFS با مقدار فاصله^۶ (IVIFS) (Atanassov & Gargov, 1989) و مجموعه فازی مردد^۷ (HFS) (Torra, 2010)

۲. **ماهیت کیفی:** در چنین شرایطی، تصمیم‌گیرندگان از فرم‌های نمایش کیفی متعدد برای بیان اطلاعات تصمیم خود استفاده می‌کنند، مانند مجموعه اصطلاحات زبانی^۸ (LTS) (Zadeh, 1975)، مدل زبانی دوگانه^۹ (Herrera & Martinez, 2000)، مجموعه اصطلاحات زبانی فازی مردد^{۱۰} (Liao et al., 2015; Rodriguez et al., 2012)، LTS با مقدار فاصله پیوسته^{۱۱} (CIVLTS) (Liao et al., 2018) و مجموعه اصطلاحات زبانی احتمالی^{۱۲} (PLTS) (Pang et al., 2016).

با الهام از کار بر روی گزارش تاریخی مجموعه‌های فازی (Bustince et al., 2016)، ما قالب‌های ذکر شده در بالا را برای تجزیه و تحلیل در این مطالعه انتخاب می‌کنیم.

دو راه اصلی برای مقابله با اطلاعات ناهمگون در ادبیات موجود وجود دارد. یکی این است که اطلاعات غیرهمگن را در مدل زبانی دوگانه یکپارچه کنیم، زیرا این نوع مدل بازنمایی فرایندهای محاسباتی را با کلمات^{۱۳} به راحتی و بدون ازدست‌دادن اطلاعات اصلی انجام می‌دهد. هررا و همکاران (Herrera et al., 2005) در ابتدا از این روش برای مدیریت اطلاعات غیر همگن با سه شکل ناهمگن استفاده کردند: روابط ترجیحی فازی، روابط ترجیحی با ارزش فاصله‌ای و روابط ترجیحی زبانی. به طور مشابه، مارتینز و همکاران (Martínez et al., 2007) چندین تابع را برای تبدیل اطلاعات غیر همگن به شکل یکپارچه پیشنهاد کردند. ایده دیگر برای مقابله با اطلاعات ناهمگن بر اساس فاصله تا راه‌حل ایده‌آل و راه‌حل ایده‌آل منفی است. ژانگ و لو (Zhang & Lu, 2003) رویکردی را برای محاسبه فواصل بین گزینه‌ها و راه‌حل‌های ایده‌آل پیشنهاد کردند و سپس گزینه‌ها را با توجه به مقادیر ضریب نزدیکی آنها رتبه‌بندی کردند. این روش همچنین برای تبدیل اعداد حقیقی، اعداد بازه‌ای و مقادیر زبانی به اعداد فازی مثلی به یک فرآیند یکسان‌سازی نیاز دارد و سپس رتبه‌بندی گزینه‌ها را با در نظر گرفتن فاصله بین هر جایگزین در رابطه ترجیحی جمعی و هر دو راه‌حل ایده‌آل مثبت و منفی به دست می‌آورد. لی و همکاران (Li et al., 2010) از این ایده برای حل مسائل چند شاخصه استفاده

⁴ fuzzy number

⁵ intuitionistic fuzzy set

⁶ interval-valued IFS

⁷ hesitant fuzzy set

⁸ linguistic term set

⁹ 2-tuple linguistic mode

¹⁰ hesitant fuzzy linguistic terms set

¹¹ continuous interval-valued LTS

¹² probabilistic linguistic term set

¹³ computing with words (CWW)

کردند. تفاوت بین (Zhang & Lu, 2003) و (Li et al., 2010) این است که روش (Li et al., 2010) نیازی به فرآیند یکسان سازی ندارد. این رویکرد راه حل های ایده آل مثبت و منفی را بر اساس روابط ترجیحی برای هر معیار محاسبه می کند. اسپینلیا و همکاران (Espinilla et al., 2012) کار مقایسه ای را بین سه روش ارائه شده در (Herrera et al., 2005; Li et al., 2010; Zhang & Lu, 2003) ارائه کردند و از آن ها در ارزیابی سیاست های انرژی پایدار استفاده کردند. لی و همکاران (Li et al., 2018) مدلی را برای ادغام چهار نوع اطلاعات ناهمگن (اعداد واقعی، اعداد بازه ای، اعداد فازی مثلثی و اعداد فازی دوزنقه ای) با محاسبه درجه انحراف بین هر ماتریس مجزا و ماتریس جمعی به دست آمده توسط عملگر میانگین توان ایجاد کردند.

مشاهده می شود که بسیاری از مدل های بازنمایی مانند CIVLTS، HFLTS و PLTS توسعه یافته اند. این توسعه ها معمولاً فرمول های پیچیده ریاضی دارند و می توانند اطلاعات شناختی افراد را عمیقاً بیان کنند. در این راستا، روش هایی که اشکال مختلف نمایش (سه یا چهار نوع) را به شکل یکپارچه تبدیل می کنند ممکن است مشکلات زیادی ایجاد کنند: (۱) توسعه عملگرهای مختلف برای یکسان کردن این مدل های چندگانه در قالبی مشترک دشوار است. (۲) اطلاعات اصلی ممکن است در فرایند تبدیل از بین برود که ممکن است منجر به نتایج تصمیم گیری غیرمنطقی شود. (۳) قالب های تغییر یافته ممکن است با نظرات اولیه تصمیم گیرندگان ناسازگار باشد. (۴) در محیط LSGDM، بار تبدیل همه اشکال بازنمایی به شکل یکنواخت و سپس انجام فرایند رسیدن به اجماع بسیار سنگین است. (۵) روش راه حل ایده آل در مورد محاسبه درجه انحراف نیز نیاز به یک فرایند یکسان سازی دارد، یا راه حل ایده آل محاسبه شده و راه حل ایده آل منفی نسبی هستند؛ بنابراین، مدیریت فرآیند دستیابی به اجماع^{۱۴} در محیط LSGDM ناهمگن یک چالش بزرگ تحقیقاتی است.

با در نظر گرفتن این حقایق، این مقاله یک معیار اجماع ترتیبی جدید با استراتژی های بازخورد برای مدیریت مسائل ناهمگن LSGDM ایجاد می کند. اگر اجماع نرم را مطالعه کنیم، باید آستانه اجماع قابل قبولی داده شود. (۶) اکثر مقالات موجود آستانه اجماع را بر اساس نظر ذهنی تعیین می کنند. این مطالعه بر غلبه بر مسائل فوق متمرکز است. مشارکت های این مقاله را می توان به شرح زیر برجسته کرد:

۱. ما یک معیار اجماع ترتیبی جدید را بر اساس ترتیب ترجیحی به جای روابط ترجیحی پیشنهاد می کنیم. این روش با دو نوع روش ذکر شده بالا متفاوت است. یعنی فرایند تحول ندارد و نیازی به یافتن راه حل های ایده آل ندارد؛ بنابراین، می تواند مشکلات (۱)، (۲)، (۳)، (۴) و (۵) را حل کند.

۲. ما رویکردی را برای تعیین آستانه اجماع با توجه به تعداد گزینه های موجود در یک مسئله تصمیم گیری ایجاد می کنیم که می تواند مشکل (۶) را حل کند.

برای انجام این کار، بقیه این مقاله به شرح زیر سازماندهی شده است. بخش ۲ اشکال مختلف نمایش و معیارهای اجماع ترتیبی موجود را بررسی می کند. یک چارچوب اجماع برای مسئله LSGDM ناهمگن در بخش ۳ ایجاد شده است. فرایند دستیابی به اجماع ترتیبی در بخش ۴ ارائه شده است. بخش ۵ یک مثال را برای تأیید کاربرد مدل اجماع ترتیبی ارائه می دهد.

۲. پیش نیازها

در این بخش، مروری کوتاه بر دانشی که در ادامه این مطالعه استفاده خواهد شد، ارائه می کنیم.

۲.۱. مدل های نمایش ناهمگن

ایده اصلی مجموعه ی فازی^{۱۵} (Zadeh, 1965) گسترش تابع ویژه با ارزش ۱ یا ۰ به یک تابع عضویت با مقادیر در بازه حقیقی [۰، ۱] است. می توان از آن برای نشان دادن درجه فازی یک عنصر متعلق به یک مجموعه استفاده کرد. با توجه به اینکه FS فقط حاوی

¹⁴ consensus reaching process (CRP)

¹⁵ Fuzzy set (FS)

اطلاعات عضویت است، نمی تواند درجه نامشخص ادراکات انسانی را مشخص کند. بنابراین، بسیاری از توسعه های FS از دیدگاه های مختلف توسعه یافته اند. آتاناسوف (Atanassov, 1986) مفهوم IFS را معرفی کرد که FS کلاسیک را با در نظر گرفتن درجه عضویت، درجه غیرعضویت و درجه تردید به طور همزمان گسترش می دهد. پس از آن، وی (Atanassov & Gargov, 1989) IVIFS را پیشنهاد کرد که در آن درجه عضویت، درجه غیرعضویت و درجه تردید به صورت فاصله واحد $[0, 1]$ داده می شود. در سال ۲۰۱۰، توررا (Torra, 2010) HFS را معرفی کرد که به افراد اجازه می دهد در میان چندین درجه عضویت احتمالی تردید کنند.

همه مدل های نمایشی فوق زمانی می توانند اثرگذار باشند که اطلاعات ارزیابی در مورد گزینه ها در ماهیت کمی اندازه گیری شود. متغیرهای زبانی معرفی شده توسط لطفی زاده (Zadeh, 1975) اغلب در محیط کیفی مورد استفاده قرار می گیرند. فرض کنید $\bar{S} = \{\bar{S}_1, \bar{S}_2, \dots, \bar{S}_g\}$ یک LTS گسسته محدود و مرتب با کاردینالیته فرد است، که در آن S_i مقدار ممکن برای یک متغیر زبانی را نشان می دهد و g دانه بندی^{۱۶} LTS است. بسیاری از محققان مشارکت خود را در مدل های بازنمایی کیفی انجام دادند. از آنجایی که در فرآیند CWW نتایج نمی توانند دقیقاً با اصطلاحات زبانی در \bar{S} LTS اولیه مطابقت داشته باشند، هرا و مارتینز (Herrera & Martinez, 2000) مدل زبانی ۲ تایی را برای جلوگیری از دست دادن اطلاعات معرفی کردند. مدل زبانی ۲ تایی با یک جفت مقدار (α, S_i) بیان می شود، که در آن S_i بیانگر یک اصطلاح زبانی است و نشان دهنده ترجمه نمادین است. Xu (2004) Xu یک LTS افزودنی متقارن زیرنویس^{۱۷} را به صورت $S = \{S_\alpha | \alpha = -\tau, \dots, -1, 0, 1, \dots, \tau\}$ تعریف کرد، که در آن S_τ و $S_{-\tau}$ کران بالا و پایین اصطلاحات زبانی هستند (برای HFLTS، CIVLTS و PLTS، ما از این نوع LTS استفاده می کنیم).

گاهی اوقات، تصمیم گیرندگان ممکن است در میان چندین اصطلاح زبانی احتمالی، هنگام ارائه اطلاعات ارزیابی ترجیحات زبانی تردید کنند. برای نشان دادن چنین مواردی، HFLTS (Rodriguez et al., 2012) به عنوان یک زیر مجموعه متناهی منظم از اصطلاحات زبانی متوالی توسط S. Liao و همکارانش پیشنهاد شد. (Huchang Liao et al., 2015) شکل ریاضی HFLTS را تعریف کرد، و سپس HFLTS را به CIVLTS (Liao et al., 2018) گسترش داد تا بر اشکال HFLTS که ممکن است در برخی موارد اطلاعات را از دست بدهد، غلبه کند. یکی دیگر از محدودیت های HFLTS این است که همه اصطلاحات زبانی در یک HFLE به طور یکسان در نظر گرفته می شوند. در بسیاری از موقعیت های تصمیم گیری، تصمیم گیرندگان ممکن است یک یا چند اصطلاح زبانی را ترجیح دهند. برای پرداختن به این موضوع، پانگ و همکاران (PLTS) (Pang et al., 2016) را معرفی کردند. تمام مدل های نمایش فوق استفاده شده در این مقاله در جدول ۱ خلاصه شده است.

¹⁶ granularity

¹⁷ subscript-symmetric additive

جدول 1 - مدل‌های نمایش ناهمگن

مدل نمایش	سنجه‌های غیرقطعی	نماد	تعریف
<i>FS</i>	Crisp membership degrees	<i>F</i>	A mapping $F: X \rightarrow [0,1]$
<i>IFS</i>	Membership degrees, non-membership degrees and hesitant degrees	<i>A</i>	Given by $A = \{\langle x, \mu_A(x), \nu_A(x) \rangle x \in X\}$ where $\mu_A: X \rightarrow [0,1]$ and $\nu_A: X \rightarrow [0,1]$ such that $0 \leq \mu_A + \nu_A \leq 1$
<i>IVIFS</i>	Interval-valued membership degrees, non-membership degrees and hesitant degrees	\bar{A}	Given by $\bar{A} = \{\langle x, M_{\bar{A}}(x), N_{\bar{A}}(x) \rangle x \in X\}$ where $M_{\bar{A}}: X \rightarrow D[0,1]$ and $N_{\bar{A}}: X \rightarrow D[0,1]$ such that $0 \leq M_{\bar{A}} + N_{\bar{A}} \leq 1$
<i>HFS</i>	Membership degrees defined as a set of possible values	<i>E</i>	A function that when applied to <i>X</i> returns a subset of $[0,1]$
<i>LTS</i>	Linguistic terms	\bar{S}	$\bar{S} = \{\bar{s}_0, \bar{s}_1, \dots, \bar{s}_g\}$ where \bar{s}_i denotes a possible value for a linguistic variable and <i>g</i> is the granularity
<i>2-tuple</i>	Pairs of values with linguistic terms and numerical values	(s_i, α)	A function $\Delta: [0, g] \rightarrow \bar{S} \times [-0.5, 0.5]$, $\Delta(\beta) = (\bar{s}_i, \alpha)$, with $\begin{cases} \bar{s}_i, & i = \text{round}(\beta) \\ \alpha = \beta - i, & \alpha \in [0.5, 0.5) \end{cases}$ where $\text{round}(\cdot)$ is the usual round operation, \bar{s}_i has the closest index label to β , and α is called as a symbolic translation.
<i>HFLT</i>	Several possible consecutive linguistic terms	H_S	$H_S = \{\langle x, h_S(x) \rangle x \in X\}$, where $h_S(x) = \{s_{\varphi_l}(x) s_{\varphi_l}(x) \in S, \varphi_l \in \{-\tau, \dots, 0, \dots, \tau\}, l = 1, 2, \dots, L(x)\}$ being the continues terms in <i>S</i> .
<i>CIVLTS</i>	Intervals of virtual linguistic terms	$\overline{H_S}$	$\overline{H_S} = \{\langle x_i, \overline{h_S}(x_i) \rangle x_i \in X\}$, where $\overline{h_S}(x_i)$ is a subset in continuous interval-valued form of <i>S</i>
<i>PLTS</i>	Probabilistic distribution of several linguistic terms	$L(p)$	$L(p) = \{L^{(k)}(p^{(k)}) L^{(k)} \in S, p^{(k)} \geq 0, k = 1, 2, \dots, I_{L(p)}, \sum_{k=1}^{I_{L(p)}} p^{(k)} \leq 1\}$ Where $L^{(k)}(p^{(k)})$ is the linguistic term $L^{(k)}$ associated with its probability $p^{(k)}$ and $I_{L(p)}$ is the number of linguistic terms in $L(p)$

فرض کنید $X = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ مجموعه متناهی از گزینه ها باشد و $E = \{e_1, e_2, \dots, e_m\}$ m تصمیم‌گیرنده باشد. وظیفه این تصمیم‌گیرندگان ارزیابی گزینه‌های جایگزین و ارائه اطلاعات ترجیحی آن‌هاست. روابط ترجیحی (ماتریس‌های مقایسه زوجی) ابزار قدرتمند و کارآمدی برای بیان ترجیحات تصمیم‌گیرنده نسبت به گزینه‌ها هستند. تاکنون انواع مختلفی از روابط ترجیحی در شرایط ناهمگن ایجاد شده‌است. مروری کوتاه بر ۹ نوع روابط ترجیحی مورد استفاده در این مطالعه در جدول ۲ ارائه شده‌است. توجه داشته‌باشید که روابط ترجیحی زبانی با ارزش فاصله ای پیوسته (CIVLPR) ابتدا در این مطالعه پیشنهاد شده است.

جدول 2 - روابط ترجیحی ناهمگن

روابط ترجیحی	مخفف	نماد	ماتریس
Fuzzy preference relations	FPR	P	$P = (p_{ij})_{n \times n}$ with membership function $\mu_P: X \times X \rightarrow [0,1]$
Intuitionistic fuzzy preference relations	IFPR	R	$R = (r_{ij})_{n \times n}$ with $r_{ij} = (\mu_{ij}, \nu_{ij})$
Interval-valued intuitionistic fuzzy preference relations	IVIFPR	\bar{R}	$\bar{R} = (\bar{r}_{ij})_{n \times n}$ with $\bar{r}_{ij} = (M_{ij}, N_{ij})$
Hesitant fuzzy preference relations	HFPR	B	$B = (b_{ij})_{n \times n}$ with $b_{ij} = \{b_{ij}^s s = 1, 2, \dots, l_{b_{ij}}\}$
Linguistic preference relations	LPR	G	$\mu_G: X \times X \rightarrow \bar{S}, \mu_G(x_i, x_j) = g_{ij}, \forall x_i, x_j \in X$
2-tuple linguistic preference relations	2TLPR	T	A set of 2-tuples, characterized by $\mu_T: X \times X \rightarrow \bar{S} \times [-0.5, 0.5]$
Hesitant fuzzy linguistic preference relations	HFLPRs	H	$H = (h_{ij})_{n \times n}$, with $h_{ij} = \{h_{ij}^{\sigma(s)} s = 1, 2, \dots, l_{h_{ij}}\}$
Continuous interval-valued linguistic preference relations	CIVLPR	\bar{H}	$H = (\bar{h}_{ij})_{n \times n}$, with $h_{ij} = \{\bar{h}_{ij}^{\sigma(s)} s = 1, 2, \dots, l_{h_{ij}}\}$
Probabilistic linguistic preference relation	PLPR	Q	$Q = (L_{ij}(p))_{n \times n}$, with $L_{ij} = \{L_{ij}^{(k)}(p_{ij}^{(k)}) k = 1, 2, \dots, l_{L(p)}\}$

۲.۲. اجماع ترتیبی: مروری کوتاه

نحوه جمع‌آوری مجموعه‌ای از ترجیحات ترتیبی (رتبه‌بندی) گزینه‌ها برای یک اجماع توسط بسیاری از محققان مورد مطالعه قرار گرفته‌است. مسائل رتبه‌بندی را می‌توان به دودسته اساسی تقسیم کرد: مسائل کاردینال و مسائل ترتیبی (Cook & Seiford, 1978). رتبه‌بندی کاردینال می‌تواند نه تنها تسلط یک گزینه بر دیگری، بلکه شدت ترجیح را نیز بیان کند. رتبه‌بندی ترتیبی درجات ترجیحی را در نظر نمی‌گیرد. این مقاله به مطالعه مورد دوم می‌پردازد.

برای رتبه‌بندی ترتیبی، چندین روش برای به‌دست‌آوردن یک اجماع توسعه داده شده‌است، مانند قانون اکثریت ساده (Inada, 1969) و روش کندال (Kendall, 1948). یک روش محبوب‌تر مبتنی بر اندازه‌گیری فاصله‌است که ابتدا یک تابع فاصله را تعریف می‌کند، و سپس یک رتبه‌بندی توافقی را تعیین می‌کند که به بهترین وجه با رتبه‌بندی همه تصمیم‌گیرندگان مطابقت دارد. یک بررسی جامع در مورد اجماع ترتیبی مبتنی بر فاصله را می‌توان در منبع (Cook, 2006) یافت.

فرض کنید $r = (r_1, r_2, \dots, r_n)^T$ یک رتبه‌بندی ترجیحی و r_i مرتبه x_i باشد. به عنوان مثال، $r = (2, 4, 1, 3)^T$ به این معنی است که رتبه ۲ به گزینه x_1 ، رتبه ۴ به گزینه x_2 و ... اختصاص داده می‌شود. کوک و سیفورد (Cook & Seiford, 1978) رویکردی را برای به دست آوردن رتبه‌بندی سازش برای یک گروه توسعه دادند. فاصله دو رتبه‌بندی r_1 و r_2 برابر است با:

$$d(r^{(1)}, r^{(2)}) = \sum_{i=1}^n |r_i^{(1)} - r_i^{(2)}| \quad (1)$$

سپس، رتبه‌بندی اجماع γ_i ای است که فاصله مطلق کل را به حداقل می‌رساند:

$$\min \sum_{k=1}^m \sum_{i=1}^n |r_i^{(k)} - \gamma_i| \quad (2)$$

که در آن $r^{(k)}$ رتبه ارائه شده توسط k امین تصمیم‌گیرنده است.

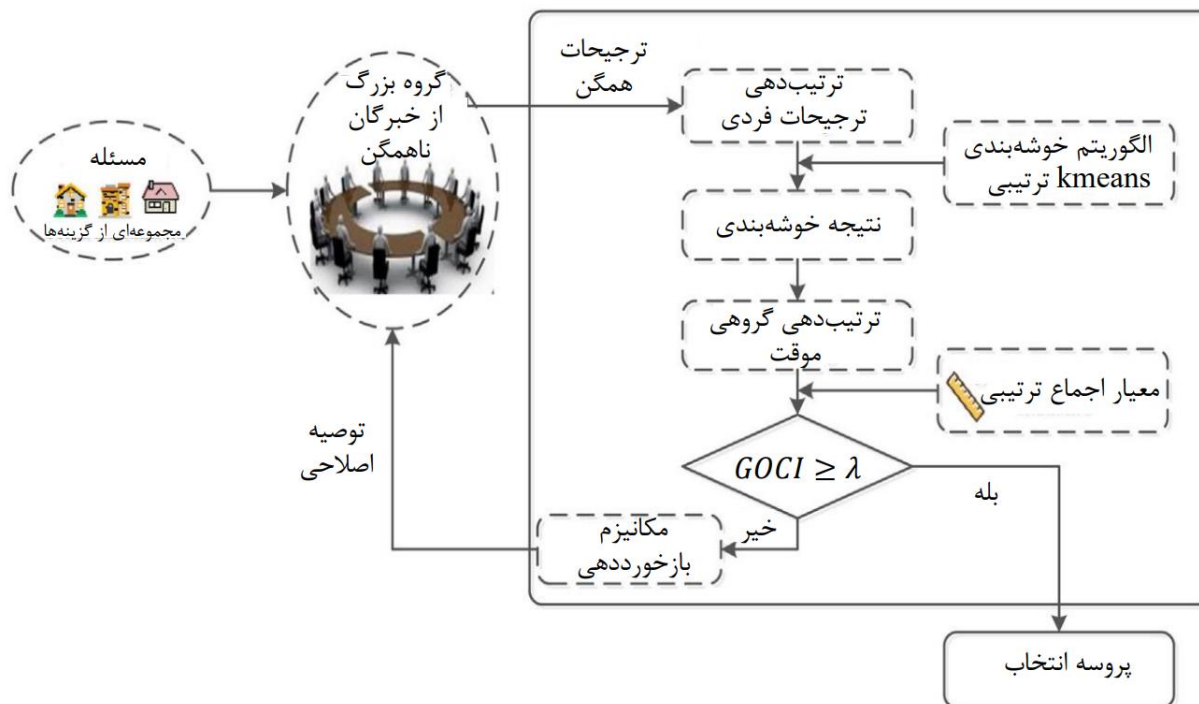
استفاده از ترتیب ترجیحی در CRP با فرایند تکراری برای مشکلات GDM موضوع جدیدی است. منشأ CRP معمولی را می‌توان در منبع (Herrera-Viedma et al., 2002) یافت، که در آن یک روش مقایسه‌ای از موقعیت‌های جایگزین بین دو بردار ترجیحی برای اندازه‌گیری سطح اجماع معرفی شد. (Huchang et al., 2017) در هنگام برخورد با مشکلات GDM با IFPR ها یک معیار اجماع ترتیبی پیشنهاد کردند.

باتوجه به اینکه فرایند استخراج بردارهای اولویت از روابط ترجیحی مورد تأکید مطالعه ما نیست، عملگرهای تجمیع مورد استفاده در این مقاله در پیوست ارائه شده‌اند.

۳. چارچوب LSGDM ناهمگن با اجماع

به‌طور کلی، دو فرایند برای مسائل GDM وجود دارد: یکی CRP و دیگری فرایند انتخاب. هدف CRP دستیابی به توافق متقابل بین همه تصمیم‌گیرندگان است. برای یک مسئله LSGDM، فرایند خوشه‌بندی ضروری است که می‌تواند اندازه مسائل تصمیم‌گیری را کاهش دهد که بر اساس آن می‌توان هزینه و پیچیدگی را کاهش داد (Ma et al., 2019). علاوه بر این، ما می‌توانیم عقاید مشترک (مانند زیرگروه‌هایی با اطلاعات قضاوت مشابه زیاد) را از طریق فرایند خوشه‌بندی پیدا کنیم که در آن یکی از اعضای گروه را می‌توان به عنوان نماینده زیرگروه، شناسایی کرد (Palomares, 2018). هدف از فرایند انتخاب، به دست آوردن نتیجه تصمیم نهایی است. می‌توان آن را از طریق تجمیع روابط ترجیحی افراد یا زیرگروه‌ها و سپس استنتاج رتبه‌بندی نهایی، یا از طریق تجمیع رتبه‌بندی‌های هر تصمیم‌گیرنده فردی و سپس ادغام رتبه‌بندی‌های فردی به رتبه‌بندی نهایی به دست آورد. مورد اخیر محتوای تحقیق این مقاله است.

چارچوب مدل ناهمگن LSGDM پیشنهاد شده در این مقاله در شکل ۱ ارائه شده است. همان‌طور که در شکل ۱ نشان داده شده است، چارچوب شامل پنج مرحله اساسی است.



تصویر ۱- چارچوب LSGDM یکپارچه سازی فرآیند دستیابی به اجماع

۱. مرحله اول به‌دست‌آوردن ترتیب اولویت است. گروهی از تصمیم‌گیرندگان مجموعه‌ای از گزینه‌ها را ارزیابی می‌کنند و روابط ترجیحی ناهمگن را ارائه می‌دهند. سپس، عملگرهای مختلف تجمیع برای تجمیع این روابط ترجیحی و به‌دست‌آوردن ترتیب اولویت‌ها استفاده می‌شود.
۲. مرحله دوم فرایند خوشه‌بندی است. الگوریتم خوشه‌بندی k-means (Palomares, 2018) به عنوان یک روش کلاسیک، ساده و گسترده در ادبیات موجود است. مزیت روش خوشه‌بندی k-means پیاده‌سازی آسان و کارایی بالا آن است زیرا پیچیدگی محاسباتی آن $O(nKI)$ است (Al-Harbi & Rayward-Smith, 2006) که n تعداد اشیاء، K تعداد خوشه‌ها و I تعداد تکرارها است. در این مقاله، ما الگوریتم خوشه‌بندی k-means را به محیط ترتیب ترجیحی گسترش می‌دهیم و الگوریتم خوشه‌بندی k-means ترتیبی را پیشنهاد می‌کنیم. جزئیات را می‌توان در بخش ۴.۱ یافت.
۳. مرحله سوم، فرایند بررسی اجماع ترتیبی بر اساس زیر گروه‌های تولید شده از روش پیشنهادی خوشه‌بندی k-means ترتیبی است. در این مرحله، ما دو شاخص اجماع را معرفی می‌کنیم: شاخص اجماع ترتیبی زیرگروهی^{۱۸} و شاخص اجماع ترتیبی کلی^{۱۹}، که سطوح اجماع هر زیرگروه و گروه کلی را اندازه‌گیری می‌کنند. جزئیات را می‌توان در بخش ۴.۲ یافت.
۴. فاز چهارم CRP بر اساس مکانیسم بازخورد است. معمولاً یک آستانه اجماع λ باید از قبل تعیین شود. اگر سطح اجماع به آستانه نرسد، مکانیسم بازخورد برای بهبود آن استفاده می‌شود. مکانیسم بازخورد شامل دو مجموعه قانون است: قوانین شناسایی و قوانین جهت؛ قوانین شناسایی، برای شناسایی زیر گروه‌ها، جایگزین‌ها و جفت گزینه‌هایی که کمتر در رسیدن به اجماع سطح بالا کمک می‌کنند، استفاده می‌شود. قوانین جهت، برای ارائه پیشنهاداتی برای تنظیم ارزیابی‌های

¹⁸ subgroup ordinal consensus index (SOCI)

¹⁹ global ordinal consensus index (GOCI)

تصمیم‌گیرندگان در زیر گروه های مختلف استفاده می‌شود. بر اساس این مرحله، می‌توان به یک سطح اجماع مورد انتظار دست یافت. جزئیات را می‌توان در بخش ۴.۳ یافت.

۵. آخرین مرحله به‌دست‌آوردن نتیجه تصمیم‌نهایی است. هنگامی که درجه اجماع به سطح مورد انتظار رسید، می‌توانیم رتبه‌بندی ترکیبی و جایگزین بهینه را بشناسیم.

۴. فرایند اجماع ترتیبی برای LSGDM ناهمگن

این بخش چارچوب مدل پیشنهادی ما را در پنج مرحله ارائه می‌کند: برگرفتن ترتیب‌های ترجیحی، فرایند خوشه‌بندی، فرایند بررسی اجماع، CRP و فرایند انتخاب. از آنجایی که فاز اول و آخرین مرحله از نکات ابتکاری این تحقیق نیستند، سه‌فاز میانی را به تفصیل مورد بحث قرار می‌دهیم. بخش ۴.۱ الگوریتم خوشه‌بندی k-means را معرفی می‌کند که داده‌های ورودی آن اولویت‌های ترتیبی هستند. بخش ۴.۲ اقدامات اجماع را ارائه می‌دهد. استراتژی ارائه‌ی بازخورد تکراری در بخش ۴.۳ مورد بحث قرار گرفته است.

۴.۱. فرایند خوشه‌بندی k-means

خوشه‌بندی فرآیندی است برای تقسیم مجموعه‌ای از اشیاء فیزیکی یا انتزاعی به چندین کلاس که از اشیاء مشابه تشکیل شده‌اند. تقسیم تصمیم‌گیرنده‌ها به چند خوشه باتوجه به اطلاعات ارزیابی آن‌ها، یک فرایند اساسی در رسیدگی به مشکلات LSGDM است (Liu et al., 2015). خوشه‌بندی می‌تواند پیچیدگی محاسباتی را کاهش دهد و دقت نتایج را در فرایند تجمیع تضمین کند. در واقع، یک تفاوت مهم بین GDM سنتی و LSGDM فرایند خوشه‌بندی است. بسیاری از الگوریتم‌های خوشه‌بندی مانند الگوریتم خوشه‌بندی c-means فاز (FCM) (Liu et al., 2015)، رابطه هم‌ارزی فازی (Ma et al., 2019)، روش جست‌وجوی-اول-همسایه-گسترده^{۲۰} (Zhang et al., 2018) و نقشه‌های خودسازماندهی^{۲۱} (Xu et al., 2018) برای حل مسائل LSGDM استفاده شده است. در این مطالعه، ما الگوریتم خوشه‌بندی k-means را برای طبقه‌بندی اولویت‌های ترتیبی اتخاذ می‌کنیم. ایده اصلی الگوریتم خوشه‌بندی k-means، به حداقل رساندن فاصله همه نمونه‌ها تا مرکز آن‌ها و دستیابی به همگرایی با تکرار است. فاصله اقلیدسی و فاصله کسینوسی محبوب‌ترین معیارهای اندازه‌گیری فاصله هستند که در الگوریتم خوشه‌بندی k-means استفاده می‌شوند. این مطالعه از فاصله اقلیدسی استفاده می‌کند. در ادامه به توضیح مفصل این الگوریتم می‌پردازیم:

مرحله ۱. مراحل اولیه. به‌عنوان شروع این الگوریتم، یک سری مقادیر اولیه تخصیص می‌دهیم. عدد تکرار l را روی ۱ تنظیم می‌کنیم.

مرحله ۲.۱. نقاط اولیه را انتخاب کنید. اولین کاری که در فرایند تکرار باید انجام دهیم این است که به طور تصادفی نقاط خوشه‌بندی اولیه را انتخاب کنیم. البته می‌توانیم از روش‌های دیگری برای انتخاب نقاط اولیه استفاده کنیم (مانند بیشینه-کمینه بهبودیافته) که در پیاده‌سازی بررسی شده است.

مرحله ۲.۲. فاصله هر مرکز تا هر نقطه را باتوجه به متریک فاصله انتخاب شده محاسبه کنید. فاصله اقلیدسی بین دو نقطه ترتیبی، به‌صورت زیر محاسبه می‌شود:

²⁰ broad-first-search-neighbor

²¹ Self-organization maps (SOM)

$$d_{Euc} = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^n (r_i^{(k)} - r_i^{(c)})^2}{2[(n-1)^2 + (n-3)^2 + \dots]}} \quad (3)$$

که در آن $r_i^{(k)}$ رتبه i امین گزینه است که توسط تصمیم گیرنده e_k ارائه شده است. $r_i^{(c)}$ رتبه i امین گزینه مرکز خوشه‌بندی است. مخرج معادله (۳) یک عملیات استانداردسازی است. حداکثر اختلاف بین دو رتبه را می‌توان به صورت زیر نشان داد:

$$2[(n-1) + (n-3) + \dots] \text{ (یعنی موقعیت های گزینه در دو رتبه بندی کاملاً مخالف است).}$$

اگر n زوج باشد، آخرین عدد $(n-1) + (n-3) + \dots$ ۱ خواهد بود. اگر n فرد باشد (بجز عدد ۱)، آخرین عدد $(n-1) + (n-3) + \dots$ برابر ۲ خواهد بود. برای مثال برای ۳ گزینه $\{x_1, x_2, x_3\}$ حداکثر تفاوت بین دو رتبه بندی، ۴ است ($r^{(1)} = (3, 2, 1)$) به طور مشابه، حداکثر تفاوت بین دو رتبه بندی هنگامی که چهار گزینه وجود دارد، ۸ است ($r^{(3)} = (4, 3, 2, 1)$) به طور مشابه، بزرگترین اختلاف درجه دوم بین دو رتبه $2[(n-1) + (n-3) + \dots]$ است. به عنوان مثال، اختلاف درجه دوم بین $r^{(3)}$ و $r^{(4)}$ برابر ۲۰ است. فرض کنید که چهار گزینه وجود دارد: $\{x_1, x_2, x_3, x_4\}$. رتبه بندی این چهار گزینه توسط یک تصمیم گیرنده به صورت $r^{(5)} = (3, 2, 1, 4)$ است. رتبه بندی مرکز خوشه عبارت است از $r^{(c)} = (3, 1, 2, 4)$. آنگاه فاصله بین این دو رتبه بندی عبارت است از ۰.۳۱۶۲. بدیهتاً $0 \leq d_{Euc} \leq 1$ می‌باشد.

مرحله ۲.۳. هر نقطه را به نزدیک‌ترین مرکز خوشه‌بندی اختصاص دهید. پس از محاسبه فواصل، هر نقطه باید به نزدیک‌ترین مرکز خوشه‌بندی اختصاص یابد. یعنی، $d(e^{(k)}, Z_l(I))$ در رابطه‌ی زیر صدق کند:

$$d(e^{(k)}, Z_l(I)) = \min \{d(e^{(k)}, Z_l(I)), k = 1, 2, \dots, m\}$$

سپس مرکز خوشه‌بندی هر خوشه را به روز کنید. برای محاسبه مرکز خوشه‌بندی از بردار ارجحیت استفاده می‌کنیم. فرض کنید $\omega^{(k)} = (\omega_1^{(k)}, \omega_2^{(2)}, \dots, \omega_n^{(k)})^T$ بردار ترجیح تصمیم گیرنده e_k باشد. بردار ترجیح از طریق رابطه زیر قابل محاسبه است:

$$\omega_i^{(k)} = \frac{(n - r_i^{(k)})}{\sum_{i=1}^{n-1} i} \quad (4)$$

در مرحله بعد، بردار ترجیح مرکز خوشه‌بندی را می‌توان به دست آورد. بردار ترجیح زیرگروه C_l عبارت است از:

$$\omega_i^{(C_j)} = \frac{1}{\#C_l} \sum_{t=1}^{\#C_l} \omega_i^{(lt)} \quad (5)$$

که در آن $\#C_l$ تعداد تصمیم گیرندگان در خوشه l ام است. $\omega_i^{(lt)} = (\omega_1^{(lt)}, \omega_2^{(lt)}, \dots, \omega_n^{(lt)})^T$ بردار ترجیح l امین متخصص در زیر گروه C_l است.

بعد از تقسیم تصمیم گیرنده‌ها به چند زیرگروه، نوبت تعیین وزن هر خوشه است. به‌طور کلی، تعداد تصمیم گیرنده‌ها در یک گروه نشان‌دهنده اهمیت آن است. فرض کنید l وزن خوشه C_l باشد. اگر به همه تصمیم گیرندگان به صورت یکسان اهمیت دهیم، وزن یک زیرگروه به صورت زیر محاسبه می‌شود:

$$\zeta_l = \#C_l \quad (6)$$

که در آن m تعداد کل تصمیم گیرندگان است.

باتوجه به تجزیه و تحلیل فوق ما می توانیم شبه کد الگوریتم خوشه بندی k-means را به صورت زیر بنویسیم:

Input: m orderings of alternatives and the number of clusters, K .

Output: K clusters $\{C_1, C_2, \dots, C_K\}$

1. Initialization

$I = 1$

2. Iteration

2.1. Select K (random) clustering initial center points $Z_l(I), l = 1, 2, \dots, K$

2.2. Compute the distance from each center and each point according to the chosen distance metric

2.3. Assign each point to the nearest clustering center

2.4. Update the clustering center of each cluster

2.5. $I = I + 1$

2.6. Repeat

If $Z_l(I + 1) \neq Z_l(I), l = 1, 2, \dots, K$ return to Step 2. Otherwise, TERMINATE

3. Obtain the final clustering results.

۴.۲. فرایند بررسی اجماع با اقدامات اجماع ترتیبی

در این بخش اجماع ترتیبی برای اندازه گیری سطح اجماع زیرگروه ها و گروه کلی معرفی شده است.

۴.۲.۱. اندازه گیری اجماع

به طور کلی، اکثر معیارهای اجماع موجود بر اساس معیارهای فاصله بین ماتریس ترجیح فردی و جمعی یا بر اساس درجه شباهت بین ماتریس های ترجیحی محاسبه می شوند. در حالی که در مسائل ناهمگن LSGDM، اگر از این روش استفاده کنیم، فرایند تبدیل اجتنابناپذیر است؛ زیرا پیش شرط این دو روش این است که ماتریس های ترجیحی فردی شکل یکپارچه داشته باشند. تعریف قوانین تبدیل مختلف یک کار پیچیده در محیط LSGDM است. علاوه بر این، اطلاعات ارزشمند ممکن است در فرایند تبدیل از بین برود. روابط ترجیحی تغییر یافته ممکن است برخلاف تصورات اولیه تصمیم گیرندگان باشد.

در این راستا، بر اساس ترتیب اولویت، دو شاخص اجماع را پیشنهاد می کنیم که می تواند بر عیوب فوق غلبه کند.

تعریف ۱. شاخص رضایت ترتیبی زیرگروهی^{۲۲} زیرگروه G_l نسبت به گروه کل G_G عبارت است از:

²² subgroup ordinal consensus index (SOCI)

$$SOCl^{(Cl)} = 1 - \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^n (r_i^{(Cl)} - r_i^G)^2}{2[(n-1)^2 + (n-3)^2 + \dots]}} \quad (7)$$

که در آن $r_i^{(Cl)}$ جایگاه گزینه x_i است که توسط زیر گروه Cl ارائه شده است و r_i^G جایگاه گزینه x_i است که توسط کل گروه C_G ارائه شده است.

بدیهی است، $SOCl^{(Cl)} \in [0, 1]$ مقدار بزرگتر $SOCl^{(Cl)}$ نشان دهنده سطح اجماع ترتیبی بالاتر Cl با گروه کلی است. اگر $SOCl^{(Cl)} = 1$ باشد، آنگاه ترتیب خروجی زیر گروه Cl کاملاً با گروه کلی، سازگار است.

باتوجه به معادله (۷)، شاخص رضایت ترتیبی عمومی^{۲۳} بدین صورت تعریف می‌شود:

$$GOCl = \sum_{l=1}^K \zeta_l \left(1 - \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^n (r_i^{(Cl)} - r_i^G)^2}{2[(n-1)^2 + (n-3)^2 + \dots]}} \right) \quad (8)$$

که در آن ζ_l وزن زیر گروه Cl است.

تفاوت‌های بین پیشنهاد ما و شاخص‌های اجماع ترتیبی موجود (Huchang et al., 2017) عبارت‌اند از: (۱) پیشنهاد ما بر اساس فاصله اقلیدسی است. (۲) حالت خاص $SOCl^{(Cl)} = 0$ در نظر گرفته می‌شود، یعنی ترتیب گزینه‌ها کاملاً مخالف باشند. (۳) آستانه اجماع با تعداد گزینه‌ها تغییر می‌کند (بخش بعدی را ببینید).

۴.۲.۲. آستانه اجماع از پیش تعریف شده

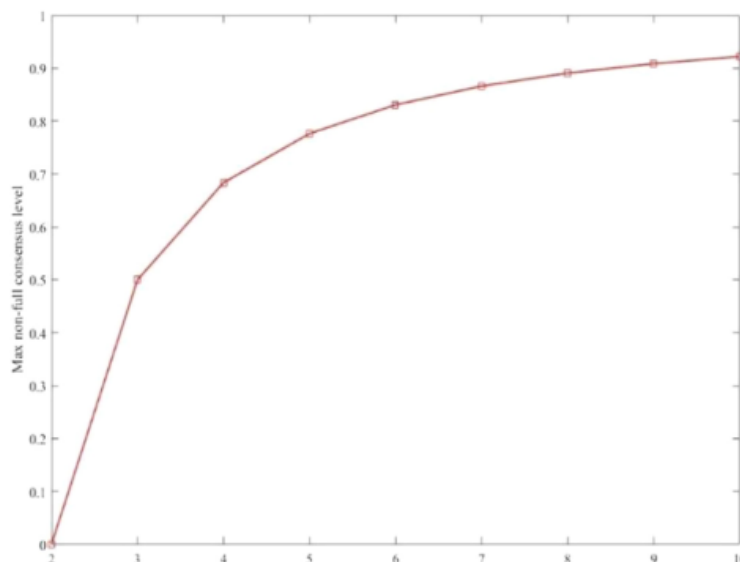
در موقعیت‌های دنیای واقعی، الزام زیرگروه‌ها به توافق کامل با گروه کلی، واقع‌بینانه نیست. به‌طورکلی، ما می‌توانیم یک آستانه قابل قبول λ تعیین کنیم. اگر $GOCl \geq \lambda$ بود، گروه کلی به اجماع قابل قبولی رسیده است. باید توجه داشته باشیم که مقدار پایین آستانه اجماع ممکن است باعث شود که نتیجه تصمیم قبل از به دست آوردن یک مصالحه رضایت‌بخش بحث‌انگیز باشد. با این حال، مقدار بالای آستانه توافق ممکن است باعث اتلاف زمان و مصرف منابع شود. تعیین مقدار λ نیازمند تحقیق است و به مسائل خاصی بستگی دارد. به عنوان مثال، زمانی که یک مسئله تصمیم‌گیری بسیار حیاتی است، مقدار λ بزرگتر مانند ۰.۹ باید تنظیم شود. درحالی‌که در شرایط اضطراری به دلیل محدودیت زمانی باید از آستانه نرم تری مانند ۰.۸ استفاده کرد. در مسائل LSGDM، مقدار کمتری از λ ممکن است قابل قبول باشد. اگر تصمیم گیرندگان زیادی وجود داشته باشند، ایده‌ها و نظرات مختلفی ظاهر می‌شود و روند اجماع پیچیده و زمان‌بر خواهد بود. مطالعاتی وجود دارد که در آن‌ها از آنالیز شبیه‌سازی برای تعیین آستانه اجماع استفاده شده است (Liu et al., 2015). با توجه به اینکه معیار اجماع ما بر اساس رتبه‌بندی گزینه‌ها است، آستانه اجماع باید با تعداد گزینه‌ها مرتبط باشد. در اینجا، مفهوم حداکثر سطح اجماع غیرکامل پیشنهاد شده است. برای اجماع ترتیبی، اجماع کامل به این معنی است که رتبه‌بندی یک تصمیم‌گیرنده دقیقاً با رتبه‌بندی گروه یکسان است. به جز اجماع کامل، بزرگترین سطح اجماع یک زیرگروه نسبت به گروه کلی، این است که توالی دو طرح مجاور مخالف یکدیگر باشند.

برای مثال، برای گزینه‌های $\{x_1, x_2, x_3, x_4\}$ رتبه‌بندی گروه کلی $r^{(G)} = (1, 2, 3, 4)^T$ است. بدون شک درجه اجماع زیر گروه C_1 برابر با ۱ است اگر رتبه‌بندی آن $r^{(1)} = (1, 2, 3, 4)^T$ باشد. بجز این مورد، حداکثر درجه اجماع یک زیر گروه زمانی اتفاق

²³ Global ordinal consensus index (GOCl)

می‌افتد که رتبه بندی آن $r^{(1)} = (2,1,3,4)^T$ یا $r^{(1)} = (1,3,2,4)^T$ یا $r^{(1)} = (1,2,4,3)^T$ باشد. در این موارد مقدار $SOCI^{(C_1)} = 0.6838$ است. در نتیجه زمانی که چهار گزینه در یک مسئله تصمیم‌گیری وجود دارد، تعیین مقدار λ به عنوان ۰.۹ یا ۰.۸ واقع بینانه نیست.

تصویر ۲ تغییر حداکثر سطح اجماع غیر کامل مرتبط با تعداد گزینه‌ها را نشان می‌دهد. در واقع، بیشتر ادبیات موجود (B. Liu et al., 2019; X. Liu et al., 2019; Rodríguez et al., 2018; Xu et al., 2019) در زمینه LSGDM از کمتر از ۶ گزینه برای



تصویر ۲- حداکثر مقدار سطح اجماع غیر کامل براساس تعداد گزینه‌ها

تجزیه و تحلیل استفاده می‌کنند. همان‌طور که از شکل ۲ می‌بینیم، زمانی که تعداد گزینه‌ها کمتر از ۶ باشد، مقدار حداکثر سطح اجماع غیر کامل کوچک‌تر از ۰.۸ است. می‌توانیم λ را کمی کوچک‌تر از مقدار حداکثر سطح اجماع غیر کامل کنیم، زیرا می‌توان فضای ناهمگنی را برای زیرگروه‌ها رزرو کرد. علاوه بر این، تعیین مقدار λ به عنوان ۰.۹ یا ۰.۸ زمانی که تعداد گزینه‌های کمی وجود دارد، بسیار سخت است. اگر λ خیلی زیاد باشد، به تکرارهای بیشتری از CRP نیاز است و زمان زیادی صرف خواهد شد. بنابراین، اگر از مدل اجماع پیشنهادی برای حل مسائل LSGDM استفاده کنیم، ۰.۷۵ یا ۰.۸ مناسب هستند. هنگامی که تعداد گزینه‌ها بیش از ۶ باشد، ۰.۸ می‌تواند انتخاب مناسبی برای λ باشد. در LSGDM یا محیط اضطراری، آستانه اجماع باید کمتر باشد.

۴.۳. استراتژی تنظیم بازخورد مبتنی بر CRP

اگر GOCI به آستانه از پیش تعیین شده نرسد، باید استراتژی‌های تعدیل برای بهبود آن اتخاذ شود. دو نوع استراتژی تعدیل وجود دارد: یکی روش بهینه‌سازی خودکار و دیگری روش بهینه‌سازی بازخورد.

روش بهینه‌سازی خودکار تعاملی با تصمیم‌گیرنده‌ها ندارد، در حالی که روش بهینه‌سازی بازخورد پیشنهاداتی را برای تصمیم‌گیرنده‌ها ارائه می‌دهد و به آنها اجازه می‌دهد در تنظیمات ترجیحی خود تجدیدنظر کنند. مزیت روش بهینه‌سازی خودکار این است که در زمان صرفه‌جویی می‌کند، در حالی که روش بهینه‌سازی بازخورد می‌تواند هر زمان که لازم باشد با تصمیم‌گیرنده ارتباط برقرار کند و بنابراین بر این محدودیت غلبه کند که نتیجه اجماع فقط یک نتیجه محاسبه شده است. اگر زمان اجازه دهد، استراتژی بازخورد بهتر

از روش بهینه‌سازی خودکار خواهد بود. در این بخش مکانیسم بازخوردی را برای رسیدن به یک درجه اجماع قابل قبول معرفی می‌کنیم.

مکانیسم بازخورد پیشنهادی شامل دو مجموعه قوانین است: قوانین شناسایی و قوانین جهت. قواعد شناسایی برای شناسایی خوشه‌ها، گزینه‌ها و جفت‌هایی از گزینه‌ها استفاده می‌شود که کمتر در رسیدن به اجماع سطح بالا کمک می‌کنند.

(۱.۱) قانون شناسایی برای خوشه‌ها که از آن برای شناسایی خوشه C_l استفاده می‌شود که به آستانه از پیش تعریف شده γ نمی‌رسد، که می‌تواند به صورت زیر بیان شود:

$$C = \{C_l | SOCI^{(C_l)} < \gamma, l = 1, 2, \dots, K\} \quad (9)$$

(۱.۲) قانون شناسایی برای گزینه‌ها برای شناسایی گزینه‌هایی که باید در خوشه C_l اصلاح شوند استفاده می‌شود که می‌تواند به صورت زیر بیان شود:

$$AL = \{x_i | \max\{|r_i^G - r_i^{(C_l)}|\}, i = 1, 2, \dots, n\} \quad (10)$$

(۱.۳) قانون شناسایی برای جفت‌های گزینه‌ها. برای هر گزینه $x_i \in AL$ این قانون جفت گزینه‌هایی (x_i, x_j) را مشخص می‌کند که ترجیحات متقابل آنها از گروه کلی دورتر است. موقعیت‌هایی که باید اصلاح شوند به شرح زیر است:

$$PO_i = \{(i, j) | x_i \in AL \wedge \max\{|r_i^{(C_l)} - r_j^{(C_l)}| - (r_i^G - r_j^G)\}\} \quad (11)$$

از قوانین جهت برای ارائه پیشنهادهایی برای خوشه‌ها برای تنظیم ترجیحات آن‌ها استفاده می‌شود. بر اساس روابط بین $(r_i^{(C_l)} - r_j^{(C_l)})$ و $(r_i^G - r_j^G)$ ، قوانین جهت به صورت زیر طراحی می‌شوند:

(۲.۱) قانون جهت ۱. اگر $(r_i^{(C_l)} - r_j^{(C_l)}) < (r_i^G - r_j^G)$ باشد، آنگاه تصمیم گیرندگان زیر گروه C_l باید ارزیابی مرتبط با جفت گزینه (x_i, x_j) را افزایش دهند.

(۲.۲) قانون جهت ۲. اگر $(r_i^{(C_l)} - r_j^{(C_l)}) > (r_i^G - r_j^G)$ باشد، آنگاه تصمیم گیرندگان زیر گروه C_l باید ارزیابی مرتبط با جفت گزینه (x_i, x_j) را کاهش دهند.

بر اساس بحث‌های فوق، شبه کد CRP را به صورت زیر ارائه می‌کنیم. توجه داشته باشید، در برخی موارد، تصمیم گیرندگان انتخاب شده ممکن است تمایلی به تغییر نظرات خود نداشته باشند. یکی از روش‌ها برای رسیدگی به این موقعیت‌ها حذف این تصمیم گیرندگان از گروه (H. Liao et al., 2015) است. با این حال، این نوع روش ممکن است منجر به ازدست رفتن اطلاعات شود. روش مؤثر دیگر حذف برخی از نظرات تصمیم گیرندگان به جای حذف تصمیم گیرندگان از کل گروه است. این محور مطالعه ما نیست. خوانندگان می‌توانند برای جزئیات بیشتر به (Liao et al., 2016) مراجعه کنند.

Input: Original individual preference relations, the parameter λ

Output: Subgroups $\{\bar{C}_1, \bar{C}_2, \dots, \bar{C}_K\}$ and the modified group ordinal preference \bar{r}^G

1. Obtain the clustering result $\{C_{1,z}, C_{2,z}, \dots, C_{K,z}\}$ according to $r_z^{(k)}, k = 1, 2, \dots, m$
2. Obtain the temporal group ordering $r^{(G)}$
3. Obtain the $SOCI_z^{(C_i)}$ and $GOCI_z$ according to Eqs. (7) and (8)
4. If $GOCI_z < \lambda$ then

$Let\ z = z + 1,$ continue to step 1 until $GOCI_z \geq \lambda$

5. End

۵. ارائه‌ی راه حل مسئله‌ی طرح شده

همانطور که در مسئله آمده است، از ۲۰ خبره و کارشناس برای نظردهی استفاده می‌کنیم.

در مرحله ارزیابی توسط کارشناسان، کارشناسان مختلف از روش‌های ارزیابی مختلفی استفاده می‌کنند که به شرح جدول زیر است:

جدول ۳- نوع نظرات کارشناسان مختلف

Experts	Preference relations
e_1, e_2, e_3, e_4	FPR
e_5, e_6	$IFPR$
e_7, e_8	$IVIFPR$
e_9, e_{10}	$HFPR$
e_{11}, e_{12}	LPR
e_{13}, e_{14}	$HFLPR$
e_{15}, e_{16}	$CIVLPR$
e_{17}, e_{18}	$PLPR$
e_{19}, e_{20}	$2 - tuple\ PLR$

متخصصانی که از روش LPR استفاده کرده‌اند، از LTS زیر استفاده کرده‌اند:

$$S = \{s_{-4} = \text{extremelt bad}, x_{-3} = \text{very bad}, s_{-2} = \text{bad}, s_{-1} = \text{slightly bad}, s_0 = \text{medium}, s_1 = \text{slightly good}, s_2 = \text{good}, s_3 = \text{very good}, s_4 = \text{extremely good}\}$$

همانطور که در بخش سطح رضایت اولیه بحث شد، مقدار $\lambda = 0.75$ قرار می‌دهیم. نظرات متخصصان به صورت زیر است:

$$\begin{aligned}
P^{(1)} &= \begin{pmatrix} 0.5 & 0.6 & 0.7 & 0.8 & 0.4 \\ 0.4 & 0.5 & 0.6 & 0.7 & 0.3 \\ 0.3 & 0.4 & 0.5 & 0.6 & 0.2 \\ 0.2 & 0.3 & 0.4 & 0.5 & 0.1 \\ 0.6 & 0.7 & 0.8 & 0.1 & 0.5 \end{pmatrix}, P^{(2)} = \begin{pmatrix} 0.5 & 0.7 & 0.6 & 0.2 & 0.4 \\ 0.3 & 0.5 & 0.4 & 0.1 & 0.2 \\ 0.4 & 0.6 & 0.5 & 0.2 & 0.3 \\ 0.8 & 0.9 & 0.8 & 0.5 & 0.6 \\ 0.6 & 0.7 & 0.8 & 0.1 & 0.5 \end{pmatrix}, P^{(3)} = \begin{pmatrix} 0.5 & 0.7 & 0.8 & 0.9 & 0.4 \\ 0.3 & 0.5 & 0.6 & 0.8 & 0.3 \\ 0.2 & 0.4 & 0.5 & 0.6 & 0.3 \\ 0.1 & 0.2 & 0.4 & 0.5 & 0.1 \\ 0.6 & 0.7 & 0.7 & 0.9 & 0.5 \end{pmatrix}, P^{(4)} = \begin{pmatrix} 0.5 & 0.7 & 0.8 & 0.9 & 0.4 \\ 0.3 & 0.5 & 0.7 & 0.6 & 0.3 \\ 0.1 & 0.3 & 0.5 & 0.4 & 0.1 \\ 0.2 & 0.4 & 0.6 & 0.5 & 0.2 \\ 0.6 & 0.7 & 0.9 & 0.8 & 0.5 \end{pmatrix}, \\
R^{(5)} &= \begin{pmatrix} (0.5,0.5,0) & (0.7,0.2,0.1) & (0.9,0.1,0) & (0.6,0.2,0.2) & (0.8,0.2,0) \\ (0.2,0.7,0.1) & (0.5,0.5,0) & (0.7,0.1,0.2) & (0.4,0.5,0.1) & (0.6,0.1,0.3) \\ (0.1,0.9,0) & (0.1,0.7,0.2) & (0.5,0.5,0) & (0.2,0.7,0.1) & (0.4,0.5,0.1) \\ (0.2,0.6,0.2) & (0.5,0.4,0.1) & (0.7,0.2,0.1) & (0.5,0.5,0) & (0.7,0.2,0.1) \\ (0.2,0.6,0) & (0.1,0.6,0.3) & (0.5,0.4,0.1) & (0.2,0.7,0.1) & (0.5,0.5,0) \end{pmatrix}, \\
R^{(6)} &= \begin{pmatrix} (0.5,0.5,0) & (0.6,0.2,0.2) & (0.7,0.1,0.2) & (0.8,0.1,0.1) & (0.4,0.5,0.1) \\ (0.2,0.6,0.2) & (0.5,0.5,0) & (0.6,0.1,0.3) & (0.7,0.1,0.2) & (0.3,0.6,0.1) \\ (0.1,0.7,0.2) & (0.1,0.6,0.3) & (0.5,0.5,0) & (0.6,0.2,0.2) & (0.2,0.7,0.1) \\ (0.1,0.8,0.1) & (0.1,0.7,0.2) & (0.2,0.6,0.2) & (0.5,0.5,0) & (0.1,0.8,0.1) \\ (0.5,0.4,0.1) & (0.6,0.3,0.1) & (0.7,0.2,0.1) & (0.1,0.8,0.1) & (0.5,0.5,0) \end{pmatrix}, \\
\bar{R}^{(7)} &= \begin{pmatrix} ([0.5,0.5], [0.5,0.5], [0,0]) & ([0.6,0.7], [0.2,0.3], [0,0.2]) & ([0.3,0.5], [0.4,0.5], [0,0.3]) & ([0.7,0.8], [0.1,0.2], [0,0.2]) & ([0.2,0.3], [0.6,0.7], [0,0.2]) \\ ([0.2,0.3], [0.6,0.7], [0,0.2]) & ([0.5,0.5], [0.5,0.5], [0,0]) & ([0.2,0.3], [0.5,0.6], [0.1,0.3]) & ([0.6,0.7], [0.2,0.3], [0,0.2]) & ([0.1,0.2], [0.6,0.7], [0.1,0.3]) \\ ([0.4,0.5], [0.3,0.5], [0,0.3]) & ([0.5,0.6], [0.2,0.3], [0.1,0.3]) & ([0.5,0.5], [0.5,0.5], [0,0]) & ([0.8,0.8], [0.1,0.2], [0,0.1]) & ([0.4,0.5], [0.5,0.5], [0,0.1]) \\ ([0.1,0.2], [0.7,0.8], [0,0.2]) & ([0.2,0.3], [0.6,0.7], [0,0.2]) & ([0.8,0.8], [0.1,0.2], [0,0.1]) & ([0.5,0.5], [0.5,0.5], [0,0]) & ([0.0.1], [0.8,0.9], [0,0.1]) \\ ([0.2,0.3], [0.6,0.7], [0,0.2]) & ([0.6,0.7], [0.1,0.2], [0.1,0.3]) & ([0.5,0.5], [0.4,0.5], [0,0.1]) & ([0.8,0.9], [0,0.1], [0,0.1]) & ([0.5,0.5], [0.5,0.5], [0,0]) \end{pmatrix}, \\
\bar{R}^{(8)} &= \begin{pmatrix} ([0.5,0.5], [0.5,0.5], [0,0]) & ([0.3,0.4], [0.4,0.5], [0.1,0.3]) & ([0.5,0.6], [0.3,0.4], [0,0.2]) & ([0.1,0.2], [0.7,0.8], [0,0.1]) & ([0.2,0.3], [0.6,0.7], [0,0.2]) \\ ([0.4,0.5], [0.3,0.4], [0.1,0.2]) & ([0.5,0.5], [0.5,0.5], [0,0]) & ([0.6,0.7], [0.2,0.3], [0,0.2]) & ([0.2,0.3], [0.6,0.7], [0,0.2]) & ([0.3,0.4], [0.4,0.5], [0.1,0.3]) \\ ([0.3,0.4], [0.5,0.6], [0,0.2]) & ([0.2,0.3], [0.6,0.7], [0,0.2]) & ([0.5,0.5], [0.5,0.5], [0,0]) & ([0.0.2], [0.6,0.7], [0.1,0.4]) & ([0.0.2], [0.6,0.7], [0.1,0.4]) \\ ([0.7,0.8], [0.1,0.2], [0,0.2]) & ([0.6,0.7], [0.2,0.3], [0,0.2]) & ([0.6,0.7], [0.2,0.3], [0,0.2]) & ([0.5,0.5], [0.5,0.5], [0,0]) & ([0.5,0.6], [0.3,0.4], [0,0.2]) \\ ([0.6,0.7], [0.2,0.3], [0,0.2]) & ([0.4,0.5], [0.3,0.4], [0.1,0.3]) & ([0.5,0.6], [0.2,0.3], [0.1,0.3]) & ([0.3,0.4], [0.5,0.6], [0,0.2]) & ([0.5,0.5], [0.5,0.5], [0,0]) \end{pmatrix}, \\
B^{(9)} &= \begin{pmatrix} \{0.5\} & \{0.6,0.7\} & \{0.7,0.8\} & \{0.5\} & \{0.5,0.6,0.7\} \\ \{0.4,0.3\} & \{0.5\} & \{0.5\} & \{0.7,0.8\} & \{0.3,0.4\} \\ \{0.3,0.2\} & \{0.5\} & \{0.5\} & \{0.5,0.6\} & \{0.2,0.3\} \\ \{0.5\} & \{0.3,0.2\} & \{0.5,0.4\} & \{0.5\} & \{0.1,0.3\} \\ 0.5,0.4,0.3 & \{0.7,0.6\} & \{0.8,0.7\} & \{0.9,0.7\} & \{0.5\} \end{pmatrix}, B^{(10)} = \begin{pmatrix} \{0.5\} & \{0.5,0.7\} & \{0.7,0.8\} & \{0.5\} & 0.3,0.4 \\ \{0.5,0.3\} & \{0.5\} & \{0.5\} & \{0.4,0.5\} & 0.1,0.2,0.3 \\ \{0.3,0.2\} & \{0.5\} & \{0.5\} & \{0.2,0.4\} & 0.0.1 \\ \{0.5\} & \{0.6,0.5\} & \{0.8,0.6\} & \{0.5\} & \{0.5\} \\ \{0.7,0.6\} & 0.9,0.8,0.7 & 1.0.9 & \{0.5\} & \{0.5\} \end{pmatrix}, \\
G^{(11)} &= \begin{pmatrix} s_0 & s_{-2} & s_{-1} & s_1 & s_{-3} \\ s_2 & s_0 & s_1 & s_3 & s_{-1} \\ s_1 & s_{-1} & s_0 & s_2 & s_{-2} \\ s_{-1} & s_{-3} & s_{-2} & s_0 & s_{-4} \\ s_3 & s_1 & s_2 & s_4 & s_0 \end{pmatrix}, G^{(12)} = \begin{pmatrix} s_0 & s_1 & s_2 & s_3 & s_{-1} \\ s_{-1} & s_0 & s_1 & s_2 & s_{-2} \\ s_{-2} & s_{-1} & s_0 & s_1 & s_{-3} \\ s_{-3} & s_{-2} & s_{-1} & s_0 & s_{-4} \\ s_1 & s_2 & s_3 & s_4 & s_0 \end{pmatrix}, H^{(13)} = \begin{pmatrix} s_0 & s_{-2}, s_{-1} & s_1 & s_2 & s_{-3} \\ s_{-2}, s_1 & s_0 & s_{-1}, s_2, s_3 & s_3 & s_{-1} \\ s_{-1} & s_{-1}, s_{-2}, s_{-3} & s_0 & s_1 & s_{-2}, s_{-3} \\ s_{-2} & s_{-3} & s_1 & s_0 & s_{-3}, s_{-4} \\ s_3 & s_1 & s_2, s_3 & s_3, s_4 & s_0 \end{pmatrix}, \\
H^{(14)} &= \begin{pmatrix} s_0 & s_4 & s_2, s_3 & s_3 & s_0, s_1 \\ s_{-4} & s_0 & s_{-3}, s_{-2}, s_{-1} & s_{-1} & s_{-3}, s_{-2} \\ s_{-2}, s_{-3} & s_3, s_2, s_1 & s_0 & s_1 & s_{-1}, s_0 \\ s_{-3} & s_1 & s_1 & s_0 & s_{-3}, s_{-4} \\ s_3 & s_1 & s_2, s_3 & s_3, s_4 & s_0 \end{pmatrix}, \bar{H}^{(15)} = \begin{pmatrix} [s_0, s_0] & [s_{-4}, s_{-3.5}] & [s_{-2.3}, s_{-2}] & [s_{-1}, s_{-1}] & [s_{-3.5}, s_{-3}] \\ [s_4, s_{0.5}] & [s_0, s_0] & [s_2, s_{0.5}] & [s_3, s_3] & [s_0, s_{0.5}] \\ [s_{0.5}, s_2] & [s_{-2}, s_{-2.5}] & [s_0, s_0] & [s_1, s_1] & [s_{-1.5}, s_{-1}] \\ [s_1, s_1] & [s_{-3}, s_{-3}] & [s_{-1}, s_{-1}] & [s_0, s_0] & [s_{-2}, s_{-2}] \\ [s_{0.5}, s_3] & [s_0, s_{-0.5}] & [s_{0.5}, s_1] & [s_2, s_2] & [s_0, s_0] \end{pmatrix}, \\
\bar{H}^{(16)} &= \begin{pmatrix} [s_0, s_0] & [s_2, s_{0.5}] & [s_{0.5}, s_2] & [s_0, s_1] & [s_{-0.5}, s_0] \\ [s_{-2}, s_{-2.5}] & [s_0, s_0] & [s_{-1}, s_0] & [s_{-2.5}, s_{-2}] & [s_{-4}, s_{-3.5}] \\ [s_{-1.5}, s_{-2}] & [s_1, s_0] & [s_0, s_0] & [s_{-1}, s_{-0.5}] & [s_{-3}, s_{-3}] \\ [s_0, s_{-1}] & [s_{0.5}, s_2] & [s_1, s_{0.5}] & [s_0, s_0] & [s_{-2}, s_{-2}] \\ [s_{0.5}, s_0] & [s_4, s_{0.5}] & [s_3, s_3] & [s_2, s_2] & [s_0, s_0] \end{pmatrix}, \\
Q^{(17)} &= \begin{pmatrix} \{s_0(1)\} & \{s_{-1}(0.8)\} & \{s_{-1}(0.3), s_{-2}(0.7)\} & \{s_0(0.4), s_1(0.6)\} & \{s_{-3}(1)\} \\ \{s_1(0.8)\} & \{s_0(1)\} & \{s_{-1}(0.8), s_{-2}(0.2)\} & \{s_2(1)\} & \{s_{-2}(0.8), s_{-1}(0.2)\} \\ \{s_1(0.3), s_2(0.7)\} & \{s_1(0.8), s_2(0.2)\} & \{s_0(1)\} & \{s_2(0.5), s_3(0.5)\} & \{s_{-2}(0.8)\} \\ \{s_0(0.4), s_{-1}(0.6)\} & \{s_{-2}(1)\} & \{s_{-2}(0.5), s_{-3}(0.5)\} & \{s_0(1)\} & \{s_{-4}(0.8), s_{-3}(0.2)\} \\ \{s_3(1)\} & \{s_2(0.8), s_1(0.2)\} & \{s_2(0.8)\} & \{s_4(0.8), s_3(0.2)\} & \{s_0(1)\} \end{pmatrix}, \\
Q^{(18)} &= \begin{pmatrix} \{s_0(1)\} & \{s_{-2}(1)\} & \{s_{-1}(0.5), s_0(0.5)\} & \{s_1(0.4), s_2(0.6)\} & \{s_1(0.8)\} \\ \{s_2(1)\} & \{s_0(1)\} & \{s_1(0.8), s_2(0.2)\} & \{s_3(0.2), s_4(0.8)\} & \{s_2(0.4), s_3(0.6)\} \\ \{s_1(0.5), s_0(0.5)\} & \{s_{-1}(0.8), s_{-2}(0.2)\} & \{s_0(1)\} & \{s_3(0.5)\} & \{s_2(0.8)\} \\ \{s_{-1}(0.4), s_{-2}(0.6)\} & \{s_{-3}(0.2), s_{-1}(0.8)\} & \{s_{-3}(0.5)\} & \{s_0(1)\} & \{s_{-1}(0.7), s_0(0.2)\} \\ \{s_{-1}(0.8)\} & \{s_{-2}(0.4), s_{-3}(0.6)\} & \{s_{-2}(0.8)\} & \{s_1(0.7), s_0(0.2)\} & \{s_0(1)\} \end{pmatrix}, \\
T^{(19)} &= \begin{pmatrix} (s_0, 0) & (s_4, -0.25) & (s_2, 0.5) & (s_1, 0.25) & (s_3, 0) \\ (s_{-4}, 0.25) & (s_0, 0) & (s_{-2}, 0.25) & (s_{-3}, 0.5) & (s_{-1}, 0.5) \\ (s_{-2}, -0.5) & (s_2, -0.25) & (s_0, 0) & (s_{-1}, 0) & (s_1, -0.25) \\ (s_{-1}, -0.25) & (s_3, -0.5) & (s_1, 0) & (s_0, 0) & (s_2, 0) \\ (s_{-3}, 0) & (s_1, -0.5) & (s_{-1}, 0.25) & (s_{-2}, 0) & (s_0, 0) \end{pmatrix}, T^{(20)} = \begin{pmatrix} (s_0, 0) & (s_{-4}, 0.5) & (s_{-3}, 0) & (s_{-2}, 0.25) & (s_{-1}, -0.25) \\ (s_4, -0.5) & (s_0, 0) & (s_1, 0.25) & (s_2, 0.5) & (s_3, 0) \\ (s_3, 5) & (s_{-1}, -0.25) & (s_0, 0) & (s_1, 0.5) & (s_2, -0.25) \\ (s_2, -0.25) & (s_{-2}, -0.5) & (s_{-1}, -0.5) & (s_0, 0) & (s_1, 0) \\ (s_1, 0.25) & (s_{-3}, 0) & (s_{-2}, 0.25) & (s_{-1}, 0) & (s_0, 0) \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

با استفاده از اپراتورهای تجميع‌کننده مرتبط (که در ضميمه آمده اند)، نظرات ترتيبی هر متخصص به صورت زیر محاسبه می‌شود:

$$r^{(1)} = (2,3,4,5,1)^T, r^{(2)} = (3,5,4,1,2)^T, r^{(3)} = (2,3,4,5,1)^T, r^{(4)} = (2,3,5,4,1)^T,$$

$$r^{(5)} = (1,3,5,2,4)^T, r^{(6)} = (2,3,4,5,1)^T, r^{(7)} = (3,4,2,5,1)^T, r^{(8)} = (4,3,5,1,2)^T,$$

$$r^{(9)} = (1,3,4,5,2)^T, r^{(10)} = (2,4,5,3,1)^T, r^{(11)} = (4,2,3,5,1)^T, r^{(12)} = (2,3,4,5,1)^T,$$

$$r^{(13)} = (3,2,4,5,1)^T, r^{(14)} = (1,5,3,4,1)^T, r^{(15)} = (5,1,3,4,2)^T, r^{(16)} = (2,5,4,3,1)^T,$$

$$r^{(17)} = (4,3,2,5,1)^T, r^{(18)} = (3,1,2,5,4)^T, r^{(19)} = (1,5,3,2,4)^T, r^{(20)} = (5,1,2,3,4)^T$$

توجه کنید که تمرکز پروژه بر روی معنا و مفهوم نظرات کارشناسان با توجه به نمراتی که داده‌اند یا عملگرهای تجمیع‌کننده مرتبط نیست، بلکه به تصمیم‌گیری گروهی که ورودی‌اش نظرات ترتیبی محاسبه شده در فوق است، می‌باشد. در ادامه به تشریح این الگوریتم می‌پردازیم:

۵.۱. تکرار اول الگوریتم

در وحله اول، با استفاده از روش خوشه‌بندی kmeans، نظرات این ۲۰ متخصص را به زیرگروه‌های متفاوت تقسیم‌بندی می‌کنیم. تعداد این خوشه‌ها را ۳ در نظر می‌گیریم. مراکز شروع خوشه‌بندی را از روش الگوریتم بیشینه-کمینه بهبودیافته^{۲۴} تعیین می‌کنیم که به شکل زیر است:

گام اول، میانگین فاصله هر نقطه تا دیگر نقاط را حساب کرده و نقطه‌ای که کمترین میانگین فاصله را دارد به عنوان نقطه شروع انتخاب می‌کنیم.

```
def first_initializer(rankings):
    """
    Desc:
        calculate the distance of each score given by experts to others'

    input:
        o rankings: dictionary, rankings given by the experts

    output:
        o tuple, name of the expert and its score

    """
    num = len(list(rankings.values())[0])
    av_dist = dict()
    for x in list(rankings.keys()):
        score_x = rankings[x]
        dist = np.mean([linalg.norm(score_x - rankings[y], 2) for y in
                        list(rankings.keys()) if y!=x])
        av_dist[x] = dist

    # ordering based on values
    av_dist = dict(sorted(av_dist.items(), key=lambda item: item[1], reverse=False))
    key = list(av_dist.keys())[0]
    val = rankings[key]

    return (key, val)
```

تصویر ۳- کد انتخاب مرکز خوشه اول

در این مرحله، نظر خبره اول به عنوان مرکز خوشه شناسایی شد.

²⁴ Improved max-min mehtod

گام دوم، فاصله دیگر نقاط را تا این نقطه حساب می‌کنیم، نقطه‌ای که بیشترین فاصله را تا این نقطه دارد، به عنوان نقاط شروع خوشه‌ی دوم انتخاب می‌کنیم.

```
def others_initializers(rankings , centroids):  
    '''  
    Desc:  
        calculate the average distance of other points to the previously selected centroids  
        in order to select a new centroid  
  
    input:  
        o rankings: dictionary, rankings given by the experts  
        o centroids: list of previously selected centroids  
  
    output:  
        o tuple, name of the expert and its score  
    ...  
  
    ranks = copy.deepcopy(rankings)  
    for cent in centroids:  
        del ranks[cent[0]]  
  
    av_dist = dict()  
    for x in list(ranks.keys()):  
        score_x = ranks[x]  
        dist = np.mean([linalg.norm(score_x - cent[1] , 2) for cent in centroids])  
        av_dist[x] = dist  
  
    # ordering based on values  
    av_dist = dict( sorted(av_dist.items(), key=lambda item: item[1] , reverse=True) )  
    key = list(av_dist.keys())[0]  
    val = rankings[key]  
  
    return (key,val)
```

تصویر ۴- کد انتخاب مرکز خوشه دوم الی آخر

در این مرحله، نظر خبره ۲۰ام به عنوان مرکز خوشه دوم شناسایی شد.

گام سوم، فاصله دیگر نقاط را تا این دو نقطه حساب می‌کنیم و نقطه‌ای را انتخاب می‌کنیم که بیشترین میانگین فاصله را تا این دو نقطه دارد. این الگوریتم را تا وقتی ادامه می‌دهیم که k نقطه انتخاب شده باشد.

در این مرحله، نظر خبره ۱۹ام به عنوان مرکز خوشه سوم شناسایی شد.

با این روش حتی الامکان از تصادفی بودن انتخاب نقاط مرکز خوشه‌ها جلوگیری کرده‌ایم.

```

def improved_min_max_initialization(rankings , k):
    ...
    Desc:
        random initialization of cluster's centroids with improved max-min method proposed in the article
    input:
        o rankings: dictionary, rankings given by the experts
        o k: int, number of clusters
    output:
        o k initialization points
    ...

    centroids = []

    first_centroid = first_initializer(rankings)
    centroids.append(first_centroid)

    for i in range(k-1):
        others = others_initializers(rankings , centroids)
        centroids.append(others)

    L = len(centroids)
    centroids = {'C'+str(i): centroids[i-1] for i in range(1,L+1)}
    return centroids

```

تصویر ۵- کد الگوریتم انتخاب مرکز خوشه بیشینه-کمینه بهبودیافته

خروجی برنامه برای شناسایی مراکز خوشه‌ها را می‌توانید ببینید:

```

Centroids of the clusters are as follows:
Cluster C1: ('r1', array([2, 3, 4, 5, 1]))
Cluster C2: ('r20', array([5, 1, 2, 3, 4]))
Cluster C3: ('r19', array([1, 5, 3, 2, 4]))

```

تصویر ۶- مراکز خوشه‌ها در تکرار اول

حال باید دیگر خبره‌ها را در هرکدام از این خوشه‌ها قرار دهیم. به این شکل که فاصله‌ی رنک‌دهی هر خبره را با سه خبره e_{20} ، e_1 و e_{19} که به عنوان مراکز خوشه‌ها انتخاب شده‌اند، محاسبه می‌کنیم و نقطه‌ای که فاصله‌اش کمتر بود را به عنوان خوشه‌ای این خبره در نظر می‌گیریم. به طور مثال فاصله رنک‌دهی خبره‌ی دوم $r^{(2)} = (3,5,4,1,2)$ با سه مرکز خوشه به صورت زیر است:

$$d_{EUC} = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^n (r_i^{(k)} - r_i^{(C)})^2}{2[(n-1)^2 + (n-3)^2 + \dots]}}$$

$$d_{EUC}^1 = \sqrt{\frac{(3-2)^2 + (5-3)^2 + (4-4)^2 + (1-5)^2 + (2-1)^2}{2(4^2 + 2^2)}} = 0.7416$$

$$d_{EUC}^2 = \sqrt{\frac{(3-5)^2 + (5-1)^2 + (4-2)^2 + (1-3)^2 + (2-4)^2}{2(4^2 + 2^2)}} = 0.8944$$

$$d_{EUC}^3 = \sqrt{\frac{(3-1)^2 + (5-5)^2 + (4-3)^2 + (1-2)^2 + (2-4)^2}{2(4^2 + 2^2)}} = 0.5$$

که چون فاصله تا مرکز خوشه سوم کمتر است، خبره دو، عضوی از خوشه سوم می‌شود.

```
def euclidean_distance(point1 , point2):  
    '''  
    Desc:  
        euclidean distance calculator between 2 points based on article  
  
    input:  
        o point1: np.array  
        o point2: np.array  
  
    output:  
        o distance between 2 points  
    '''  
    n = len(point1)  
    d = np.sum((point1-point2)**2)  
  
    denom = 2*np.sum([(n-i)**2 for i in range(1 , n , 2)])  
  
    dist = np.sqrt(d/denom)  
    return dist
```

تصویر ۷- کد محاسبه فاصله اقلیدسی

```
def assigning_to_nearest_clusters(rankings , centroids):  
    '''  
    Desc:  
        assigning rankings of experts to each cluster's centroid  
  
    input:  
        o rankings: dictionary, rankings gievn by the experts  
        o centroids: list of tuples, (name , value)  
  
    output:  
        o labels of each expert ranking  
    '''  
    labels = []  
    for rank in rankings.values():  
        dist = []  
        for cent in centroids.values():  
            dist.append(euclidean_distance(rank , cent[1]))  
        labels.append('C'+str(np.argmin(dist)+1))  
  
    return labels
```

تصویر ۸- کد تخصیص خوشه به هر خبره

خروجی برنامه که خوشه‌ی مربوط به هر خبره است به صورت زیر می‌باشد.

The cluster assigned to each expert's ranking:

r1 is in cluster C1
r2 is in cluster C3
r3 is in cluster C1
r4 is in cluster C1
r5 is in cluster C3
r6 is in cluster C1
r7 is in cluster C1
r8 is in cluster C1
r9 is in cluster C1
r10 is in cluster C1
r11 is in cluster C1
r12 is in cluster C1
r13 is in cluster C1
r14 is in cluster C1
r15 is in cluster C2
r16 is in cluster C1
r17 is in cluster C1
r18 is in cluster C2
r19 is in cluster C3
r20 is in cluster C2

تصویر ۹- خوشه بندی نظرات خبرگان در تکرار اول

خلاصه نتایج به صورت زیر است:

$$C_1 = \{e_1, e_3, e_4, e_6, e_7, e_8, e_9, e_{10}, e_{11}, e_{12}, e_{13}, e_{14}, e_{16}, e_{17}\}, C_2 = \{e_{15}, e_{18}, e_{20}\}, C_3 = \{e_2, e_5, e_{19}\}$$

در مرحله بعد باید بردار ارجحیت هر کدام از خبره‌ها را حساب کنیم. به طور مثال برای خبره‌ی دو داریم:

$$\omega_i^{(k)} = \frac{n-r_i^{(k)}}{\sum_{i=1}^{n-1} i}, r^{(2)} = (3, 5, 4, 1, 2)$$

$$\omega^{(2)} = \left(\frac{5-3}{10}, \frac{5-5}{10}, \frac{5-4}{10}, \frac{5-1}{10}, \frac{5-2}{10} \right) = (0.2, 0, 0.1, 0.4, 0.3)$$

حال بردار ارجحیت هر کدام از خوشه‌ها را حساب می‌کنیم. به طور مثال برای خوشه سوم داریم:

$$\omega^{(2)} = (0.2, 0, 0.1, 0.4, 0.3), \omega^{(5)} = (0.4, 0.2, 0, 0.3, 0.1), \omega^{(19)} = (0.4, 0, 0.2, 0.3, 0.1)$$

میانگین هر درایه را در بردارهای مختلف حساب می‌کنیم و به عنوان بردار ارجحیت خوشه قرار می‌دهیم.

$$\omega^{(C_3)} = (0.33, 0.06, 0.1, 0.33, 0.16)$$

با توجه به این بردار و مرتب کردن ارقام به صورت نزولی، رنک‌دهی در این خوشه به صورت زیر خواهد بود:

$$r^{(C_3)} = (2, 5, 4, 1, 3)$$

تابع محاسبه بردار ارجحیت برای نظرات در هر خوشه به صورت زیر است:

```
def preference_vector_cluster(rankings , num_alternatives):
    """
    Desc:
        calculate the preference vector of a number of rankings

    input:
        o rankings: np.array, rankings gievn by the experts
        o num_alternatives: int, numeber of alternatives

    output:
        o preference vector of a set of rankings
    """

    denom = np.sum(np.arange(num_alternatives))

    w = (num_alternatives-rankings)/denom
    w_C = np.mean(w , axis = 0)

    return w_C
```

تصویر ۱۰- کد محاسبه بردار ارجحیت نظرات خوشه

بعد از مرتب سازی بردارها و رتبه‌دهی، با اجرا کردن برنامه خواهیم داشت:

Preference vector for clusters and their size are:

Cluster C1's prefernce vector: [0.25714286 0.17142857 0.1 0.09285714 0.37857143]

Cluster C1's size: 14.0

Cluster C2's prefernce vector: [0.06666667 0.4 0.26666667 0.1 0.16666667]

Cluster C2's size: 3.0

Cluster C3's prefernce vector: [0.33333333 0.06666667 0.1 0.33333333 0.16666667]

Cluster C3's size: 3.0

Ordinal preferences of subgroups:

Ordinal preference of subgroup C1: [2 3 4 5 1]

Ordinal preference of subgroup C2: [5 1 2 4 3]

Ordinal preference of subgroup C3: [2 5 4 1 3]

تصویر ۱۱- محاسبه بردار ارجحیت و رنک دهی هر خوشه در تکرار اول

در گام بعد باید رتبه‌دهی گروهی (شامل ۲۰ خبره) را محاسبه کرد، برای این کار، گام های زیر را طی می‌کنیم:

گام اول نسبت تعداد اعضای هر خوشه به کل تعداد را بدست می‌آوریم. به طور مثال در خوشه یک، این نسبت برابر $\frac{14}{20}$ است.

گام دوم این ضرایب را در بردار ارجحیت هر خوشه ضرب می‌کنیم. به طور مثال در خوشه یک:

$$0.7 \times (0.257, 0.171, 0.1, 0.092, 0.378) = (0.18, 0.12, 0.01, 0.065, 0.265)$$

گام سوم حال سه بردار داریم، درایه متناظر هر کدام را با هم جمع می‌کنیم و در بردار ارجحیت کل گروه قرار می‌دهیم.

$$\omega^{(G)} = (0.24, 0.19, 0.125, 0.13, 0.315)$$

گام چهارم ارقام را به صورت نزولی رتبه‌دهی می‌کنیم:

$$r^{(G)} = (2,3,5,4,1)$$

با اجرای برنامه، خروجی $r^{(G)}$ را خواهیم داشت:

Preference vector of the group [0.24 0.19 0.125 0.13 0.315]
Ordinal preference of group [2 3 5 4 1]

تصویر ۱۲- بردار ارجحیت کلی به همراه رنک دهی در تکرار اول

پس از کسب رتبه بندی گروهی، کار بعدی محاسبه شاخص های اجماع در هر زیر گروه و همچنین در کل خبرگان است. با توجه به فرمول مربوط به $SOCI$ داریم:

$$SOCI^{(C_i)} = 1 - \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^n (r_i^{(C_i)} - r_i^{(G)})^2}{2[(n-1)^2 + (n-3)^2 + \dots]}}$$

به طور مثال، شاخص رضایت در خوشه ی یک (در تکرار اول) به صورت زیر است:

$$SOCI^{(C_{1,1})} = 1 - \sqrt{\frac{(2-2)^2 + (3-3)^2 + (4-5)^2 + (5-4)^2 + (1-1)^2}{2[4^2 + 2^2]}} = 1 - \sqrt{0.05} = 0.77$$

که این شاخص ها را برای هر خوشه به صورت زیر خواهیم داشت:

SOCI for C1 is 0.7763932022500211
SOCI for C2 is 0.19377422517014498
SOCI for C3 is 0.3291796067500631

تصویر ۱۳- شاخص رضایت (اجماع) هر زیر گروه در تکرار اول

در گام بعد باید نسبت تعداد افراد تشکیل دهنده ی هر گروه به کل افراد را در شاخص های رضایت گروه خودشان ضرب کرده و مجموعش را به عنوان شاخص رضایت عمومی بیان کنیم:

$$GOI^{(1)} = \frac{14}{20} \times SOCI^{(C_{1,1})} + \frac{3}{20} \times SOCI^{(C_{2,1})} + \frac{3}{20} \times SOCI^{(C_{3,1})} = 0.6219$$

که همچنین نتیجه را در برنامه نیز می توانید ببینید.

GOI is 0.6219183163630458

تصویر ۱۴- شاخص رضایت عمومی در تکرار اول

حال با توجه به این که $GOI < \lambda$ است ($\lambda = 0.75$)، باید مکانیزم بازخورددهی را به کار بگیریم تا درجه توافق بین افراد گروه را بالا ببریم. برای این کار گام های زیر را طی می کنیم:

گام اول، شناسایی خوشه‌ها) افرادی باید نظرشان را تغییر دهند که خوشه‌ای که عضو هستند، درجه رضایت کمتر از λ را دارد. که چون $\lambda = 0.75$ است، افراد در خوشه‌های دو و سه باید این تغییر را ایجاد کنند.

```
def identification_rule_clusters(SOCI, lambda):
    """
    Desc:
        It is used to identify the cluster C1 that does not reach the predefined threshold  $\gamma$ 

    input:
        o SOCI: dict, cluster's names with their subgroup ordinal consensus index
        o lambda: float, threshold of acceptance

    output:
        o identification_cluster: np.array, working as a mask to identify the clusters that SOCI < lambda
    """
    identification_cluster = np.array(list(SOCI.values())) < lambda
    return identification_cluster
```

تصویر ۱۵- کد قانون اول شناسایی زیرگروه های مخالف

که بعد از اجرا کردن برنامه داریم:

Identification Rules:
Phase I
Clusters that should make modifications are: ['C2' 'C3']

تصویر ۱۶- زیرگروه های مخالف در تکرار اول

گام دوم، شناسایی گزینه‌ها) در این مرحله، در هر خوشه، گزینه‌هایی که رتبه‌شان در رتبه‌دهی خوشه‌ای با رتبه‌دهی کل حداکثر تفاوت را دارد، به عنوان گزینه‌هایی انتخاب می‌کنیم که باید در رتبه‌دهیشان تجدید نظر شود. اما باید با کدام یک از گزینه‌های دیگر عوض شوند؟ در گام بعد به این موضوع رسیدگی می‌شود.

به طور مثال در خوشه‌ی سوم، داریم:

$$AL = \{x_i | \max \{|r_i^{(G)} - r_i^{(C_i)}|\}, i = 1, 2, \dots, n\}$$

$$|r_1^{(G)} - r_1^{(C_3)}| = |2 - 2| = 0$$

$$|r_2^{(G)} - r_2^{(C_3)}| = |3 - 5| = 2$$

$$|r_3^{(G)} - r_3^{(C_3)}| = |5 - 4| = 1$$

$$|r_4^{(G)} - r_4^{(C_3)}| = |4 - 1| = 3$$

$$|r_5^{(G)} - r_5^{(C_3)}| = |1 - 3| = 2$$

که بیشترین مقدار مختص محاسبات مربوط به گزینه چهارم است.

```
def identification_rule_alternatives(chosen_clusters , C_G):
    '''
    Desc:
        It is used to identify the alternatives that should be modified by C1
    input:
        o chosen_clusters: dict, cluster's names with their ordinal preferences
    output:
        o AL: alternatives that should be modified by C1
    '''
    AL = dict()

    for x in list(chosen_clusters.keys()):
        diff = np.abs(chosen_clusters[x] - C_G)
        alters = np.argwhere(diff == np.amax(diff))
        AL[x] = np.array(alters.squeeze().reshape(-1,)+1)
    return AL
```

تصویر ۱۷- کد قانون دوم شناسایی خبرگان مخالف در زیرگروه

با اجرای برنامه خواهیم داشت:

Phase II

The alternatives that should be modified in cluster C2: [1 3]
The alternatives that should be modified in cluster C3: [4]

تصویر ۱۸- خبرگان مخالف در زیرگروه ها در تکرار اول

گام سوم، شناسایی جفتِ گزینه‌ها در این مرحله، این موضوع را بررسی می‌کنیم که گزینه‌هایی که در مرحله قبل یافتیم، باید با کدام گزینه دیگر عوض شوند. برای این کار، به ازای هر گزینه‌ای که در مرحله قبل یافتیم، رابطه‌ی زیر را محاسبه می‌کنیم و مقدار زای که بیشترین مقدار برایش محاسبه شود را به عنوان گزینه‌ی دوم انتخاب می‌کنیم.

$$\left| \left(r_i^{(C_l)} - r_j^{(C_l)} \right) - \left(r_j^{(G)} - r_j^{(G)} \right) \right|$$

به طور مثال برای خوشه سوم داریم:

$$\left| \left(r_4^{(C_3)} - r_1^{(C_3)} \right) - \left(r_4^{(G)} - r_1^{(G)} \right) \right| = |(1 - 2) - (4 - 2)| = 3$$

$$\left| \left(r_4^{(C_3)} - r_2^{(C_3)} \right) - \left(r_4^{(G)} - r_2^{(G)} \right) \right| = |(1 - 5) - (4 - 3)| = 5$$

$$\left| \left(r_4^{(C_3)} - r_3^{(C_3)} \right) - \left(r_4^{(G)} - r_3^{(G)} \right) \right| = |(1 - 4) - (4 - 5)| = 2$$

$$\left| \left(r_4^{(C_3)} - r_5^{(C_3)} \right) - \left(r_4^{(G)} - r_5^{(G)} \right) \right| = |(1 - 3) - (4 - 1)| = 5$$

که به صورت دلخواه، گزینه‌ی دوم را به عنوان کاندیدا برای تغییر انتخاب می‌کنیم.

به عبارتی رتبه فعلی گزینه‌ی ۴ که ۱ است را باید سعی کنیم تا به رتبه ۵ تنزل دهیم. برای این تنزل رتبه باید با خبرگان در این خوشه صحبت کنیم تا به نحوی نظر کلیشان باعث این تغییر شود.

```

def Identification_rule_pairs_of_alternatives(num_alternatives , AL ,chosen_clusters , C_G ):
    '''
    Desc:
        this rule identifies pairwise alternatives (xi, xj) whose mutual preference
        relationships farthest with the global group's

    input:
        o num_alternatives: int, number of alternatives
        o AL: dict, alternatives that should be modified by C1
        o cluster_names: list, name of all of the clusters
        o C_G: ordinal preferences of all the experts

    output:
        o alternatives_pairs: dict, pair of alternatives that should be modified
        o direction_rule: dict, (r^(C1)_i - r^(C1)_j) - (r^G_i - r^G_j)
    ...

    alternatives_pairs=dict()
    direction_rule=dict()

    for c in list(AL.keys()):
        place_holder = 0
        for i in (AL[c]-1):
            for j in range(num_alternatives):
                diff = np.abs(chosen_clusters[c][i]-chosen_clusters[c][j] - (C_G[i]-C_G[j]))
                if diff>place_holder:
                    alternatives_pairs[c] = (i+1,j+1)
                    place_holder=diff
            else:
                (i,j) = alternatives_pairs[c]
                temp = chosen_clusters[c][i-1]-chosen_clusters[c][j-1] - (C_G[i-1]-C_G[j-1])
                direction_rule[c] = temp
    return {'alternatives pairs':alternatives_pairs,
            'direction rule':direction_rule}

```

تصویر ۱۹- کد قانون سوم شناسایی جفت خبرگان در هر زیرگروه

و خروجی برنامه به صورت زیر است:

Phase III

DMs in subgroup C2 should decrease the assessment associated with pair of alternatives (x1,x3)

Previous ordinal preferences of subgroup C2: [5 1 2 4 3]

Suggested ordinal preferences of subgroup C2: [2 1 5 4 3]

DMs in subgroup C3 should increase the assessment associated with pair of alternatives (x4,x2)

Previous ordinal preferences of subgroup C3: [2 5 4 1 3]

Suggested ordinal preferences of subgroup C3: [2 1 4 5 3]

تصویر ۲۰- شناسایی جفت خبرگان در تکرار اول

که با این وضعیت عملاً باید بار دیگری نظرات خبرگان را جمع‌آوری کرده و دوباره الگوریتم را اجرا کرد.

After adjusting the rankings, run this function another time

تصویر ۲۱- نتیجه رد/قبول شدن نظرات خبرگان در تکرار اول

۵.۲. تکرار دوم الگوریتم

نظرات خبرگان بعد از اعمال تغییرات به صورت زیر خواهد بود:

$$\begin{aligned}\bar{r}^{(1)} &= (3,2,4,5,1)^T, \bar{r}^{(2)} = (3,4,5,1,2)^T, \bar{r}^{(3)} = (3,2,4,5,1)^T, \bar{r}^{(4)} = (3,2,5,4,1)^T, \\ \bar{r}^{(5)} &= (1,3,5,2,4)^T, \bar{r}^{(6)} = (3,2,4,5,1)^T, \bar{r}^{(7)} = (2,3,4,5,1)^T, \bar{r}^{(8)} = (3,4,5,2,1)^T, \\ \bar{r}^{(9)} &= (2,3,4,5,1)^T, \bar{r}^{(10)} = (2,3,5,4,1)^T, \bar{r}^{(11)} = (3,2,4,5,1)^T, \bar{r}^{(12)} = (3,2,4,5,1)^T, \\ \bar{r}^{(13)} &= (3,2,4,5,1)^T, \bar{r}^{(14)} = (2,3,4,5,1)^T, \bar{r}^{(15)} = (4,1,3,5,2)^T, \bar{r}^{(16)} = (3,2,4,5,1)^T, \\ \bar{r}^{(17)} &= (4,2,3,5,1)^T, \bar{r}^{(18)} = (3,2,1,5,4)^T, \bar{r}^{(19)} = (2,4,5,3,1)^T, \bar{r}^{(20)} = (4,1,3,5,2)^T\end{aligned}$$

مراکز خوشه‌ها را می‌یابیم:

```
Centroids of the clusters are as follows:  
Cluster C1: ('r1', array([3, 2, 4, 5, 1]))  
Cluster C2: ('r5', array([1, 3, 5, 2, 4]))  
Cluster C3: ('r18', array([3, 2, 1, 5, 4]))
```

تصویر ۲۲- مراکز خوشه‌ها در تکرار دوم

نظرات خبرگان را به نزدیک‌ترین خوشه تخصیص می‌دهیم:

```
The cluster assigned to each expert's ranking:  
r1 is in cluster C1  
r2 is in cluster C2  
r3 is in cluster C1  
r4 is in cluster C1  
r5 is in cluster C2  
r6 is in cluster C1  
r7 is in cluster C1  
r8 is in cluster C1  
r9 is in cluster C1  
r10 is in cluster C1  
r11 is in cluster C1  
r12 is in cluster C1  
r13 is in cluster C1  
r14 is in cluster C1  
r15 is in cluster C1  
r16 is in cluster C1  
r17 is in cluster C1  
r18 is in cluster C3  
r19 is in cluster C1  
r20 is in cluster C1
```

تصویر ۲۳- خوشه‌بندی نظرات خبرگان در تکرار دوم

برای هر نظر، بردار ارجحیت را محاسبه نموده و بعد از آن این بردار را برای هر خوشه محاسبه می‌کنیم:

Preference vector for clusters and their size are:

Cluster C1's preference vector: [0.21176471 0.26470588 0.08823529 0.04705882 0.38823529]

Cluster C1's size: 17.0

Cluster C2's preference vector: [0.3 0.15 0. 0.35 0.2]

Cluster C2's size: 2.0

Cluster C3's preference vector: [0.2 0.3 0.4 0. 0.1]

Cluster C3's size: 1.0

تصویر ۲۴- محاسبه بردار ارجحیت هر خوشه در تکرار دوم

رتبه‌دهی طبق هر خوشه به صورت زیر خواهد بود:

Ordinal preferences of subgroups:

Ordinal preference of subgroup C1: [3 2 4 5 1]

Ordinal preference of subgroup C2: [2 4 5 1 3]

Ordinal preference of subgroup C3: [3 2 1 5 4]

تصویر ۲۵- محاسبه رنک دهی در هر خوشه در تکرار دوم

بردار ارجحیت و رتبه‌دهی را برای کل خبرگان نیز محاسبه می‌کنیم:

Preference vector of the group [0.22 0.255 0.095 0.075 0.355]

Ordinal preference of group [3 2 4 5 1]

تصویر ۲۶- بردار ارجحیت کلی به همراه رنک دهی در تکرار دوم

در مرحله آخر، شاخص رضایت زیرگروهی و عمومی را محاسبه کرده و با λ می‌سنجیم:

SOCI for C1 is 1.0

SOCI for C2 is 0.19377422517014498

SOCI for C3 is 0.3291796067500631

GOCI is 0.8858364028545176

تصویر ۲۷- شاخص رضایت (اجماع) هر زیرگروه در تکرار دوم

با توجه به این که $GOCI > 0.75$ است، پس نظرات خبرگان قابل قبول است و به رضایت کلی رسیده‌ایم. همچنین نظر نهایی به صورت زیر خواهد بود که بر اساس خروجی ordinal preference of group بدست آمده است:

Final ranking of alternatives: $x_5 > x_2 > x_1 > x_3 > x_4$

تصویر ۲۸- نتیجه رد/قبول شدن نظرات خبرگان در تکرار دوم

۶. اشکالات مقاله

در این بخش به اشکالاتی که در مقاله وجود داشته‌است اشاره می‌شود. این اشتباهات اکثراً اشتباه محاسباتی بوده‌اند که فرآیند فهم راه حل را دشوار می‌کند.

(۱) در صفحه ۵، ماکسیمم مجذور فاصله‌ای که می‌توان بین دو رتبه‌بندی پیدا کرد را برابر با ۸ ادعا شده‌است وقتی که ۴ گزینه برای انتخاب داریم. در صورتی که این عدد باید ۲۰ باشد:

$$r^{(3)} = (1, 2, 3, 4), r^{(4)} = (4, 3, 2, 1)$$

$$\rightarrow \sum_{i=1}^4 (r_i^{(3)} - r_i^{(4)})^2 = (1 - 4)^2 + (2 - 3)^2 + (3 - 2)^2 + (4 - 1)^2 = 20$$

two rankings is 4 ($r^{(1)} = (1, 2, 3)^T$, $r^{(2)} = (3, 2, 1)^T$). Similarly, the maximum difference between two rankings when there are four alternatives is 8 ($r^{(3)} = (1, 2, 3, 4)^T$, $r^{(4)} = (4, 3, 2, 1)^T$). In

تصویر ۲۹- ایراد اول در مقاله

(۲) در صفحه ۷، برای قوانین شناسایی جفت خبره‌ها (که قانون سوم شناسایی است) اشتباه تایپی وجود دارد. بدین صورت که مورد (۲.۱) و (۲.۲) دقیقاً یک نوشتار دارند:

The direction rules are used to provide suggestions for clusters to adjust their preferences. Based on the relationships between $(r_i^{(C_l)} - r_j^{(C_l)})$ and $(r_i^G - r_j^G)$, the direction rules are designed as follows:

(2.1) Direction rule 1. If $(r_i^{(C_l)} - r_j^{(C_l)}) < (r_i^G - r_j^G)$, then DMs in subgroup C_l should increase the assessment associated with pair of alternatives (x_i, x_j) .

(2.2) Direction rule 2. If $(r_i^{(C_l)} - r_j^{(C_l)}) > (r_i^G - r_j^G)$, then DMs in subgroup C_l should **increase** the assessment associated with pair of alternatives (x_i, x_j) .

تصویر ۳۰- ایراد دوم مقاله

همانطور که در بالا آورده شده است، هر دوی موارد به increase کردن تحت هر دو شرط $(r_i^{(C_l)} - r_j^{(C_l)}) < (r_i^G - r_j^G)$ چه و چه $(r_i^{(C_l)} - r_j^{(C_l)}) > (r_i^G - r_j^G)$ اشاره کرده‌است. در صورتی که مورد دوم باید به decrease تبدیل شود. همچنین دلیل این که ۲.۱ درست است، این است که در صفحه ۸، هنگام پیاده سازی الگوریتم روی مسئله، شرط دوم برقرار شده است و از عبارت decrease استفاده شده‌است.

Next, we use direction rules to provide suggestions for clusters. Based on the pairs of alternatives presented above and the directions rules, we obtain the subgroups that should increase the preferences over pairs of alternatives are C_2 and C_3 , and the subgroup that should decrease the preferences over pairs of alternatives is C_1 .

تصویر ۳۱- دلیل اصلاح ایراد دوم

۳) در بخش خوشه‌بندی، رویکرد مقاله این بوده‌است که نقاط شروع هر خوشه را به صورت تصادفی (به جای استفاده از الگوریتم پیشینه-کمینه بهبودیافته که در انتهای مقاله پیشنهاد داده) انتخاب کند. در این راستا نظرات $r^{(1)}$ ، $r^{(7)}$ و $r^{(15)}$ به عنوان نقاط مرکزی خوشه‌ها انتخاب شده‌اند. همچنین در ادامه خبرگانی که در هر دسته قرار گرفته‌اند، در صفحه ۸ مشخص شده‌است:

are: $C_1 = \{e_1, e_{10}, e_{11}, e_{16}\}$, $C_2 = \{e_2, e_3, e_4, e_5, e_7, e_8, e_{12}, e_{14}, e_{17}\}$, $C_3 = \{e_6, e_9, e_{13}, e_{15}, e_{18}\}$.

تصویر ۳۲- ایراد سوم مقاله

حال در کدی که در پایتون زده شده، با همین نقاط مرکزی اولیه، الگوریتم را اجرا می‌کنیم:

Centroids of the clusters are as follows:

Cluster r1: [2 3 4 5 1]

Cluster r7: [3 4 2 5 1]

Cluster r15: [5 1 3 4 2]

The cluster assigned to each expert's ranking:

r1 is in cluster C1

r2 is in cluster C1

r3 is in cluster C1

r4 is in cluster C1

r5 is in cluster C1

r6 is in cluster C1

r7 is in cluster C2

r8 is in cluster C3

r9 is in cluster C1

r10 is in cluster C1

r11 is in cluster C3

r12 is in cluster C1

r13 is in cluster C1

r14 is in cluster C1

r15 is in cluster C3

r16 is in cluster C1

r17 is in cluster C1

r18 is in cluster C3

r19 is in cluster C1

r20 is in cluster C3

تصویر ۳۳- دلیل ایراد سوم

برای این که مطمئن شویم که ایراد از مقاله است و نه کد زده شده، نظر کارشناس ۶ را سعی می‌کنیم نسبت به نقاط مرکزی خوشه‌بندی کنیم:

$$\begin{aligned} r^{(1)} &= (2,3,4,5,1), r^{(7)} = (3,4,2,5,1), r^{(15)} = (5,1,3,4,2), r^{(6)} = (2,3,4,5,1) \\ d(r^{(6)}, r^{(1)}) &= (2-2)^2 + (3-3)^2 + (4-4)^2 + (5-5)^2 + (1-1)^2 = 0 \\ d(r^{(6)}, r^{(7)}) &= (3-2)^2 + (4-3)^2 + (2-4)^2 + (5-5)^2 + (1-1)^2 = 6 \\ d(r^{(6)}, r^{(15)}) &= (5-2)^2 + (1-3)^2 + (3-4)^2 + (4-5)^2 + (2-1)^2 = 16 \end{aligned}$$

که به وضوح به علت یکسان بودن دو نظر ۱ و ۶، خبره‌ی ۶ در خوشه‌ی مربوط به خبره‌ی یک قرار می‌گیرد، در حالی که در مقاله ذکر شده است که در خوشه سوم (که مربوط به دورترین فاصله است!) قرار می‌گیرد. نکته دیگر در تصویر ۳۲، دو رنگ‌دهی مختص به خبره ۱۹ و ۲۰ آورده نشده است و معلوم نیست این دو نفر در کدام خوشه قرار دارند.

همچنین باقی محاسبات مربوطه، حتی با درست فرض کردن نحوه‌ی خوشه‌بندی در مقاله اشتباه است. از جمله اشکالات واضح، بردار وزن است که محاسبه شده است. برای محاسبه وزن باید تعداد خبرگان درون یک خوشه را تقسیم به کل خبرگان کنیم. حال با توجه به خوشه بندی مقاله - که در تصویر ۳۲ آمده است - تعداد خبرگان در خوشه‌های یک، دو و سه به ترتیب برابر با ۴، ۹ و ۶ است. بدین ترتیب بردار وزن برابر است با:

$$\zeta = \left(\frac{4}{20}, \frac{9}{20}, \frac{6}{20} \right) = (0.05, 0.45, 0.3)$$

در حالی که در مقاله، در صفحه ۸ به صورت زیر است:

The weight vector of these three clusters is obtained using Eq. (6): $\zeta = (0.5, 0.2, 0.3)^T$.

تصویر ۳۴- بردار وزن دهی اشتباه مقاله

۴) اشکال بعدی، اشتباه تایپی است که به جای نوشتن کلمه SOCI که مخفف subgroup ordinal consensus index است، از کلمه COCI چندین مرتبه (دقیقا ۸ مرتبه) در صفحه ۸ استفاده شده است.

After obtaining the group ranking, the next thing is to calculate the consensus indexes. Using Eq. (7), three **COCIs** are obtained: $\text{COCI}^{(C_{1,1})} = 0.6838$, $\text{COCI}^{(C_{2,1})} = 0.4523$, $\text{COCI}^{(C_{3,1})} = 0.5528$. Since $\text{GOCI} = 0.5982 < \lambda$, the feedback mechanism is used to improve the degree of consensus.

تصویر ۳۵- ایراد چهارم مقاله

۵) در اجرای الگوریتم برای بار دوم (در صفحه ۸) نیز اشتباه رخ داده است. اما این بار خوشه بندی به درستی انجام شده است، صرفا در محاسبه‌ی بردار ارجحیت و درجه رضایت هر زیرگروه و در نهایت کل خبرگان اشتباه رخ داده است (چون از درست بودن کد اطمینان داریم، تنها به اینکه نتیجه مقاله با کد یکسان نیست، اکتفا می‌کنیم):

$$\begin{aligned}\omega^{(C_{1,2})} &= (0.2, 0.3, 0.0875, 0.0125, 0.4)^T, \\ \omega^{(C_{2,2})} &= (0.2875, 0.1625, 0.0375, 0.1625, 0.35)^T, \\ \omega^{(C_{3,2})} &= (0.125, 0.35, 0.25, 0, 0.275)^T.\end{aligned}$$

The ordinal preferences of these three clusters are:

$$\begin{aligned}r^{(C_{1,2})} &= (3, 2, 4, 5, 1)^T, r^{(C_{2,2})} = (2, 3, 5, 4, 1)^T, \\ r^{(C_{3,2})} &= (4, 1, 3, 5, 2)^T.\end{aligned}$$

The weight vector of these clusters is $\zeta = (0.4, 0.4, 0.2)^T$.

Thus, the preference vector of the global group is $\omega^{(G)} = (0.22, 0.255, 0.19, 0.085, 0.34)^T$. Then, the ordering of the alternatives corresponding to the global group is $r^{(G)} = (3, 2, 4, 5, 1)^T$.

After obtaining the group ranking, the next thing is to calculate the degree of consensus. Using Eq. (7), three COCIs are obtained as $COCI^{(C_{1,2})} = 1$, $COCI^{(C_{2,2})} = 0.7764$, $COCI^{(C_{3,2})} = 0.6838$. Since $GOCI = 0.8473 > \lambda$, the CRP is terminated. The final ranking of five alternatives is $x_5 > x_2 > x_1 > x_3 > x_4$.

تصویر ۳۶- ایراد پنجم مقاله

همچنین مقدار درست را می‌توانید در عکس زیر ببینید:

```
Preference vector for clusters and their size are:
Cluster C1's preference vector: [0.2    0.3    0.0875 0.0125 0.4    ]
Cluster C1's size: 8.0

Cluster C2's preference vector: [0.2875 0.1625 0.0375 0.1625 0.35 ]
Cluster C2's size: 8.0

Cluster C3's preference vector: [0.125 0.35  0.25  0.    0.275]
Cluster C3's size: 4.0

Ordinal preferences of subgroups:
Ordinal preference of subgroup C1: [3 2 4 5 1]
Ordinal preference of subgroup C2: [2 4 5 3 1]
Ordinal preference of subgroup C3: [4 1 3 5 2]

Preference vector of the group [0.22  0.255 0.095 0.075 0.355]
Ordinal preference of group [3 2 4 5 1]

SOC1 for C1 is 1.0
SOC1 for C2 is 0.5
SOC1 for C3 is 0.683772233983162
GOCI is 0.7367544467966325
```

تصویر ۳۷- مقدار صحیح ایراد پنجم مقاله

با این وضع، برخلاف نتیجه مقاله، به رضایت بین اعضا نمی‌رسیم (چرا که $GOCI$ از ۰.۷۵ کمتر است) و باید الگوریتم را برای بار سوم اجرا کنیم. هرچند که به علت اشتباه در محاسبات، این مقاله در تکرار دوم به درجه رضایت قابل قبول رسیده و الگوریتم را برای بار دیگر اجرا نکرده است.

۶) ایراد آخر نیز در بخش ضمیمه (صفحه ۱۲) رخ داده است:

(a) Intuitionistic fuzzy weighted average (IFWA) operator [28]:

$$\begin{aligned} IWA(A_1, \dots, A_n) &= \eta_1 A_1 + \dots + \eta_n A_n \\ &= \left\langle 1 - \prod_{i=1}^n (1 - \mu_{A_i})^{\eta_i}, \prod_{i=1}^n \nu_{A_i}^{\eta_i} \right\rangle \end{aligned}$$

(b) Interval-Valued IFWA (IVIFWA) operator [28]:

$$\begin{aligned} IWIWA(\bar{A}_1, \dots, \bar{A}_n) &= \eta_1 \bar{A}_1 + \dots + \eta_n \bar{A}_n = \left\langle \left[1 - \prod_{i=1}^n (1 - \bar{\mu}_{A_i}^L)^{\eta_i}, \right. \right. \\ &\quad \left. \left. 1 - \prod_{i=1}^n (1 - \bar{\mu}_{A_i}^U)^{\eta_i} \right], \left[\prod_{i=1}^n \bar{\nu}_{A_i}^{L, \eta_i}, \prod_{i=1}^n \bar{\nu}_{A_i}^{U, \eta_i} \right] \right\rangle \end{aligned}$$

(c) 2-tuple weighted average [15]:

$$\bar{x}^e = \Delta \left(\frac{\sum_{i=1}^n \Delta^{-1}(s_i, \alpha_i) \cdot \eta_i}{\sum_{i=1}^n \eta_i} \right) = \Delta \left(\frac{\sum_{i=1}^n \beta_i \cdot \eta_i}{\sum_{i=1}^n \eta_i} \right)$$

(d) Hesitant fuzzy linguistic weighted average (HFLWA) operator [61]:

$$\begin{aligned} HFLWA(H_1, \dots, H_n) &= \eta_1 H_1 + \dots + \eta_n H_n \\ &= \bigoplus_{i=1}^n (\eta_i H_i) = \cup_{s_{\alpha_1} \in H_1, \dots, s_{\alpha_n} \in H_n} \left\{ s_{\sum_{i=1}^n \eta_i \alpha_i} \right\} \end{aligned}$$

(e) Probability linguistic average (PLA) operator [19]:

$$\begin{aligned} PLWA(L_1(p), L_2(p), \dots, L_n(p)) &= (\eta_1 L_1(p) \oplus \eta_2 L_2(p) \oplus \dots \oplus \eta_n L_n(p)) = \cup_{L_1^{(k)} \in L_1(p)} \{ \eta_1 p_1^{(k)} L_1^{(k)} \} \\ &\quad \oplus \cup_{L_2^{(k)} \in L_2(p)} \{ \eta_2 p_2^{(k)} L_2^{(k)} \} \oplus \dots \oplus \cup_{L_3^{(k)} \in L_3(p)} \{ \eta_3 p_3^{(k)} L_3^{(k)} \} \end{aligned}$$

تصویر ۳۸- ایراد ششم مقاله

همانطور که مشخص است، زیروند ها باید مقدار n بگیرند که اشتباها با اعداد ۲ و ۳ پر شده است.

شایان ذکر است که این اشتباهات در آخرین ویرایش این مقاله شناسایی شده است و می‌توان آن را اصلاح کرد.

- Intuitionistic fuzzy weighted average (IFWA) operator:

$$IWAA(A_1, \dots, A_n) = \eta_1 A_1 + \dots + \eta_n A_n = \left\langle 1 - \prod_{i=1}^n (1 - \mu_{A_i})^{\eta_i}, \prod_{i=1}^n \nu_{A_i}^{\eta_i} \right\rangle$$

- Interval-Valued IFWA (IVIFWA) operator:

$$\begin{aligned} IVIWAA(\bar{A}_1, \dots, \bar{A}_n) &= \eta_1 \bar{A}_1 + \dots + \eta_n \bar{A}_n \\ &= \left\langle \left[1 - \prod_{i=1}^n (1 - \bar{\mu}_{\bar{A}_i}^L)^{\eta_i}, 1 - \prod_{i=1}^n (1 - \bar{\mu}_{\bar{A}_i}^U)^{\eta_i} \right], \left[\prod_{i=1}^n \nu_{\bar{A}_i}^{L, \eta_i}, \prod_{i=1}^n \nu_{\bar{A}_i}^{U, \eta_i} \right] \right\rangle \end{aligned}$$

- 2-tuple weighted average:

$$\bar{\chi}^e = \Delta \left(\frac{\sum_{i=1}^n \Delta^{-1}(s_i, \alpha_i) \cdot \eta_i}{\sum_{i=1}^n \eta_i} \right) = \Delta \left(\frac{\sum_{i=1}^n \beta_i \cdot \eta_i}{\sum_{i=1}^n \eta_i} \right)$$

- Hesitant fuzzy linguistic weighted average (HFLWA) operator:

$$HFLWA(H_1, \dots, H_n) = \eta_1 H_1 + \dots + \eta_n H_n = \bigoplus_{i=1}^n (\eta_i H_i) = \cup_{s_{\alpha_1} \in H_1, \dots, s_{\alpha_n} \in H_n} \left\{ s_{\sum_{i=1}^n \eta_i \alpha_i} \right\}$$

- Probability linguistic average (PLA) operator:

$$\begin{aligned} PLWA &= (L_1(p), L_2(p), \dots, L_n(p)) = (\eta_1 L_1(p) \oplus \eta_2 L_2(p) \oplus \dots \eta_n L_n(p)) \\ &= \cup_{L_1^{(k)} \in L_1(p)} \left\{ \eta_1 p_1^{(k)} L_1^{(k)} \right\} \oplus \cup_{L_2^{(k)} \in L_2(p)} \left\{ \eta_2 p_2^{(k)} L_2^{(k)} \right\} \oplus \dots \oplus \cup_{L_n^{(k)} \in L_n(p)} \left\{ \eta_n p_n^{(k)} L_n^{(k)} \right\} \end{aligned}$$

- Al-Harbi, S. H., & Rayward-Smith, V. J. (2006). Adapting k-means for supervised clustering. *Applied Intelligence*, 24(3), 219-226. <https://doi.org/10.1007/s10489-006-8513-8>
- Atanassov, K., & Gargov, G. (1989). Interval valued intuitionistic fuzzy sets. *Fuzzy sets and Systems*, 31(3), 343-349. [https://doi.org/https://doi.org/10.1016/0165-0114\(89\)90205-4](https://doi.org/https://doi.org/10.1016/0165-0114(89)90205-4)
- Atanassov, K. T. (1986). Intuitionistic fuzzy sets. *Fuzzy sets and Systems*, 20(1), 87-96. [https://doi.org/https://doi.org/10.1016/S0165-0114\(86\)80034-3](https://doi.org/https://doi.org/10.1016/S0165-0114(86)80034-3)
- Bustince, H., Barrenechea, E., Pagola, M., Fernandez, J., Xu, Z., Bedregal, B., Montero, J., Hagra, H., Herrera, F., & Baets, B. D. (2016). A Historical Account of Types of Fuzzy Sets and Their Relationships. *IEEE Transactions on Fuzzy Systems*, 24(1), 179-194. <https://doi.org/10.1109/TFUZZ.2015.2451692>
- Cook, W. D. (2006). Distance-based and ad hoc consensus models in ordinal preference ranking. *European Journal of Operational Research*, 172(2), 369-385. <https://doi.org/https://doi.org/10.1016/j.ejor.2005.03.048>
- Cook, W. D., & Seiford, L. M. (1978). Priority Ranking and Consensus Formation. *Management Science*, 24(16), 1721-1732. <http://www.jstor.org/stable/2630468>
- Espinilla, M., Palomares, I., Martinez, L., & Ruan, D. (2012). A comparative study of heterogeneous decision analysis approaches applied to sustainable energy evaluation. *International journal of uncertainty fuzziness and knowledge-based systems*, 20, 159-174. <https://doi.org/10.1142/s0218488512400120>
- He, Y., & Xu, Z. (2017). A consensus reaching model for hesitant information with different preference structures. *Knowledge-Based Systems*, 135, 99-112. <https://doi.org/https://doi.org/10.1016/j.knosys.2017.08.007>
- Herrera-Viedma, E., Cabrerizo, F. J., Kacprzyk, J., & Pedrycz, W. (2014). A review of soft consensus models in a fuzzy environment. *Information Fusion*, 17, 4-13. <https://doi.org/10.1016/j.inffus.2013.04.002>
- Herrera-Viedma, E., Herrera, F., & Chiclana, F. (2002). A consensus model for multiperson decision making with different preference structures. *IEEE Transactions on Systems, Man, and Cybernetics-Part A: Systems and Humans*, 32(3), 394-402.
- Herrera, F., & Herrera-Viedma, E. (1996). A model of consensus in group decision making under linguistic assessments. *Fuzzy sets and Systems*, 78, 19-31.
- Herrera, F., & Martinez, L. (2000). A 2-tuple fuzzy linguistic representation model for computing with words. *IEEE Transactions on Fuzzy Systems*, 8(6), 746-752. <https://doi.org/10.1109/91.890332>
- Herrera, F., Martínez, L., & Sánchez, P. J. (2003). Managing non-homogeneous information in group decision making. *European Journal of Operational Research*, 166(1), 115-132. <https://doi.org/https://doi.org/10.1016/j.ejor.2003.11.031>
- Huchang, L., Zhimin, L., Xiao-Jun, Z., & Weishu, L. (2017). A Comparison of Distinct Consensus Measures for Group Decision Making with Intuitionistic Fuzzy Preference Relations. *International Journal of Computational Intelligence Systems*, 10(1), 456-469. <https://doi.org/https://doi.org/10.2991/ijcis.2017.10.1.31>
- Inada, K.-i. (1969). The Simple Majority Decision Rule. *Econometrica*, 37(3), 490-506. <https://doi.org/10.2307/1912796>
- Kendall, M. G. (1948). Rank correlation methods.
- Li, D.-F., Huang, Z.-G., & Chen, G.-H. (2010). A systematic approach to heterogeneous multiattribute group decision making. *Computers & Industrial Engineering*, 59(4), 561-572. <https://doi.org/https://doi.org/10.1016/j.cie.2010.06.015>
- Li, G., Kou, G., & Peng, Y. (2018). A Group Decision Making Model for Integrating Heterogeneous Information. *IEEE Transactions on Systems, Man, and Cybernetics: Systems*, 48(6), 982-992. <https://doi.org/10.1109/TSMC.2016.2627050>

- Liao, H., Wu, X., Liang, X., Yang, J.-B., Xu, D.-L., & Herrera, F. (2018). A continuous interval-valued linguistic ORESTE method for multi-criteria group decision making. *Knowledge-Based Systems*, 153, 65-77. <https://doi.org/https://doi.org/10.1016/j.knosys.2018.04.022>
- Liao, H., Xu, Z., Zeng, X.-J., & Merigó, J. M. (2015). Qualitative decision making with correlation coefficients of hesitant fuzzy linguistic term sets. *Knowledge-Based Systems*, 76, 127-138. <https://doi.org/https://doi.org/10.1016/j.knosys.2014.12.009>
- Liao, H., Xu, Z., Zeng, X.-J., & Xu, D.-L. (2016). An enhanced consensus reaching process in group decision making with intuitionistic fuzzy preference relations. *Information Sciences*, 329, 274-286. <https://doi.org/https://doi.org/10.1016/j.ins.2015.09.024>
- Liao, H., Xu, Z., Zeng, X. J., & Merigó, J. M. (2015). Framework of Group Decision Making With Intuitionistic Fuzzy Preference Information. *IEEE Transactions on Fuzzy Systems*, 23(4), 1211-1227. <https://doi.org/10.1109/TFUZZ.2014.2348013>
- Liu, B., Shen, Y., Chen, Y., Chen, X., & Wang, Y. (2015). A two-layer weight determination method for complex multi-attribute large-group decision-making experts in a linguistic environment. *Information Fusion*, 23, 156-165. <https://doi.org/https://doi.org/10.1016/j.inffus.2014.05.001>
- Liu, B., Zhou, Q., Ding, R.-X., Palomares, I., & Herrera, F. (2019). Large-scale group decision making model based on social network analysis: Trust relationship-based conflict detection and elimination. *European Journal of Operational Research*, 275(2), 737-754. <https://doi.org/https://doi.org/10.1016/j.ejor.2018.11.075>
- Liu, X., Xu, Y., Montes, R., Ding, R. X & ,Herrera, F. (2019). Alternative Ranking-Based Clustering and Reliability Index-Based Consensus Reaching Process for Hesitant Fuzzy Large Scale Group Decision Making. *IEEE Transactions on Fuzzy Systems*, 27(1), 159-171. <https://doi.org/10.1109/TFUZZ.2018.2847660>
- Ma, Z., Zhu, J., Ponnambalam, K., & Zhang, S. (2019). A clustering method for large-scale group decision-making with multi-stage hesitant fuzzy linguistic terms. *Information Fusion*, 50, 231-250. <https://doi.org/https://doi.org/10.1016/j.inffus.2019.04.001>
- Martínez, L., Liu, J., Ruan, D., & Yang, J.-B. (2007). Dealing with heterogeneous information in engineering evaluation processes. *Information Sciences*, 177(7), 1533-1542. <https://doi.org/https://doi.org/10.1016/j.ins.2006.07.005>
- Palomares, I. (2018). LGDM approaches and models: A literature review. *Large group decision making. SpringerBriefs in computer science*.
- Palomares, I., Martínez, L., & Herrera, F. (2014). A Consensus Model to Detect and Manage Noncooperative Behaviors in Large-Scale Group Decision Making. *IEEE Transactions on Fuzzy Systems*, 22(3), 516-530. <https://doi.org/10.1109/TFUZZ.2013.2262769>
- Pang, Q., Wang, H., & Xu, Z. (2016). Probabilistic linguistic term sets in multi-attribute group decision making. *Information Sciences*, 366, 123-138. <https://doi.org/https://doi.org/10.1016/j.ins.2016.06.021>
- Rodríguez, R. M., Labella, Á., Tré, G. D., & Martínez, L. (2018). A large scale consensus reaching process managing group hesitation. *Knowledge-Based Systems*, 159, 86-97. <https://doi.org/https://doi.org/10.1016/j.knosys.2018.06.009>
- Rodriguez, R. M., Martinez, L., & Herrera, F. (2012). Hesitant Fuzzy Linguistic Term Sets for Decision Making. *IEEE Transactions on Fuzzy Systems*, 20(1), 109-119. <https://doi.org/10.1109/TFUZZ.2011.2170076>
- Tang, M., Zhou, X., Liao, H., Xu, J., Fujita, H., & Herrera, F. (2019). Ordinal consensus measure with objective threshold for heterogeneous large-scale group decision making. *Knowledge-Based Systems*, 180, 62-74. <https://doi.org/https://doi.org/10.1016/j.knosys.2019.05.019>
- Torra, V. (2010). Hesitant fuzzy sets [<https://doi.org/10.1002/int.20418>]. *International Journal of Intelligent Systems*, 25(6), 529-539. <https://doi.org/https://doi.org/10.1002/int.20418>
- Xu, X.-h., Du, Z.-j., & Chen, X.-h. (2015). Consensus model for multi-criteria large-group emergency decision making considering non-cooperative behaviors and minority opinions. *Decision Support Systems*, 79, 150-160. <https://doi.org/https://doi.org/10.1016/j.dss.2015.08.009>

- Xu, X.-h., Du, Z.-j., Chen, X.-h., & Cai, C.-g. (2019). Confidence consensus-based model for large-scale group decision making: A novel approach to managing non-cooperative behaviors. *Information Sciences*, 477, 410-427. <https://doi.org/https://doi.org/10.1016/j.ins.2018.10.058>
- Xu, X.-h., Zhong, X.-y., Chen, X.-h., & Zhou, Y.-j. (2015). A dynamical consensus method based on exit-delegation mechanism for large group emergency decision making. *Knowledge-Based Systems*, 86, 237-249. <https://doi.org/https://doi.org/10.1016/j.knosys.2015.06.006>
- Xu, Y., Wen, X., & Zhang, W. (2018). A two-stage consensus method for large-scale multi-attribute group decision making with an application to earthquake shelter selection. *Computers & Industrial Engineering*, 116, 113-129. <https://doi.org/https://doi.org/10.1016/j.cie.2017.11.025>
- Xu, Z. (2004). Uncertain linguistic aggregation operators based approach to multiple attribute group decision making under uncertain linguistic environment. *Information Sciences*, 168(1), 171-184. <https://doi.org/https://doi.org/10.1016/j.ins.2004.02.003>
- Zadeh, L. A. (1965). Fuzzy sets. *Information and Control*, 8(3), 338-353. [https://doi.org/https://doi.org/10.1016/S0019-9958\(65\)90241-X](https://doi.org/https://doi.org/10.1016/S0019-9958(65)90241-X)
- Zadeh, L. A. (1975). The concept of a linguistic variable and its application to approximate reasoning-III. *Information Sciences*, 9(1), 43-80. [https://doi.org/https://doi.org/10.1016/0020-0255\(75\)90017-1](https://doi.org/https://doi.org/10.1016/0020-0255(75)90017-1)
- Zhang, G., & Lu, J. (2003). An integrated group decision-making method dealing with fuzzy preferences for alternatives and individual judgments for selection criteria. *Group Decision and Negotiation*, 12(6), 501-515 .
- Zhang, H., Dong, Y., & Herrera-Viedma, E. (2018). Consensus Building for the Heterogeneous Large-Scale GDM With the Individual Concerns and Satisfaction. *IEEE Transactions on Fuzzy Systems*, 26(2), 884-898. <https://doi.org/10.1109/TFUZZ.2017.2697403>