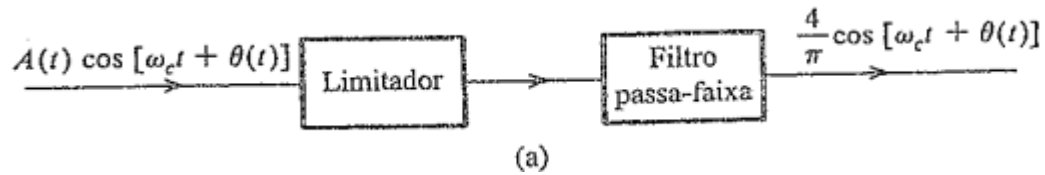


Modulação FM

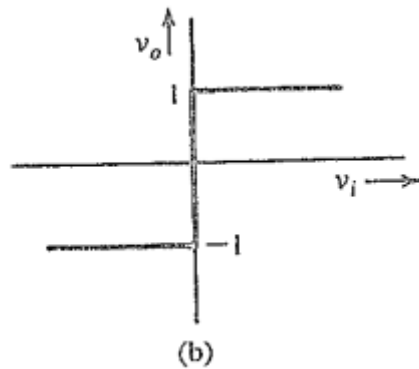
Prof.: Mateus Isaac de Oliveira Souza

Limitador Passa-Faixa

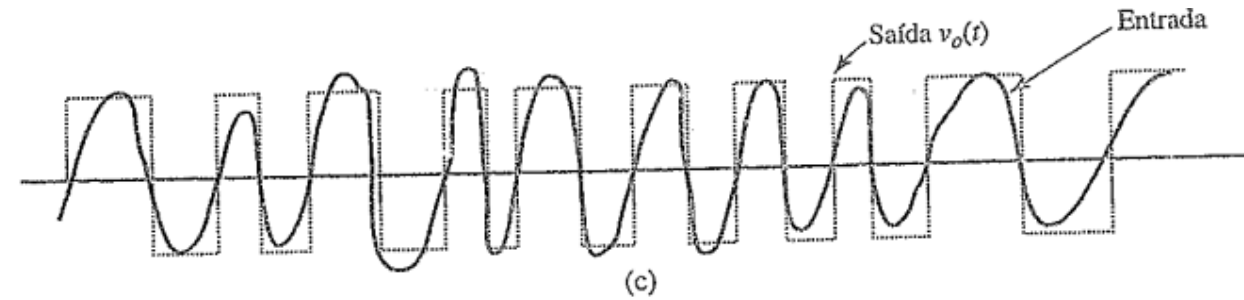
As variações de amplitude de uma portadora modulada em ângulo, que aparecem no sinal NBFM, podem ser eliminadas com um limitador seguido de um filtro passa-faixa:



Sua característica de entrada e saída é dada segundo o gráfico abaixo, que para qualquer valor positivo de entrada, teremos como saída resultante um sinal constante +1, já para as entradas negativas, teremos um valor constante -1.



Logo, para uma entrada modulada em ângulo $v_i(t) = A(t) \cos \theta(t)$ resultaria em uma onda quadrada modulada em ângulo, de amplitude constante $v_o(t)$, como mostrado a seguir:



Quando $v_o(t)$ é aplicado ao filtro passa-faixa centrado em ω_c , a saída é uma onda modulada em ângulo, de amplitude constante. Para comprovarmos isso, considere a onda de entrada :

$$v_i(t) = A(t) \cos \theta(t)$$

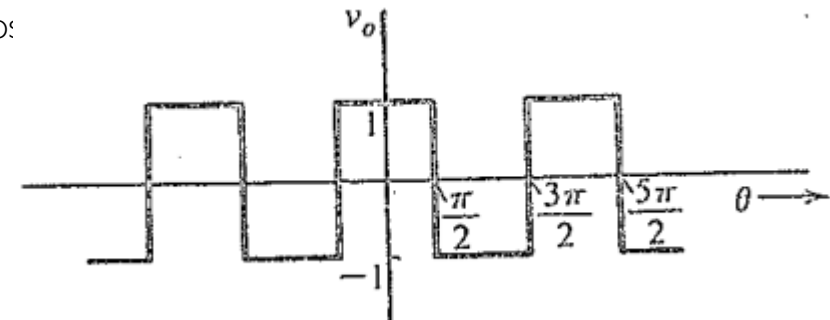
em que

$$\theta(t) = \omega_c t + k_f \int_{-\infty}^t m(\alpha) d\alpha$$

Assumindo que $A(t) \geq 0$, $v_o(t)$ pode ser expresso como uma função de θ somente:

$$v_o(\theta) = \begin{cases} +1 & \cos \theta > 0 \\ -1 & \cos \theta < 0 \end{cases}$$

Tal como mo:



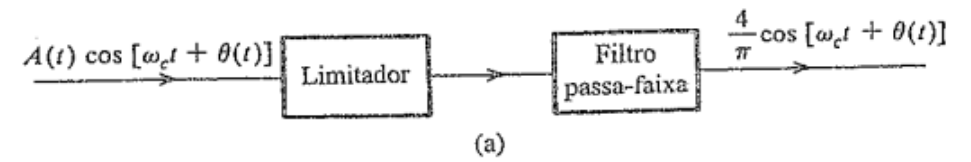
Mas como $v_o(t)$ resulta em uma onda quadrada, então podemos representá-la como uma série de Fourier:

$$v_o(\theta) = \frac{4}{\pi} \left(\cos \theta - \frac{1}{3} \cos 3\theta + \frac{1}{5} \cos 5\theta + \dots \right)$$

Em qualquer instante de tempo t , $\theta(t) = \omega_c t + k_f \int m(\alpha) d\alpha$. Logo, a função na saída $v_o(t)$ é dada por:

$$\begin{aligned} v_o[\theta(t)] &= v_o \left[\omega_c t + k_f \int m(\alpha) d\alpha \right] \\ &= \frac{4}{\pi} \left\{ \cos \left[\omega_c t + k_f \int m(\alpha) d\alpha \right] - \frac{1}{3} \cos 3 \left[\omega_c t + k_f \int m(\alpha) d\alpha \right] \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{5} \cos 5 \left[\omega_c t + k_f \int m(\alpha) d\alpha \right] \dots \right\} \end{aligned}$$

A saída, portanto, tem a onda original FM mais ondas FM com frequências multiplicadas por fatores 3, 5, 7, 9... Podemos aplicar a saída do limitador a um filtro passa-faixa com frequência central ω_c e largura de banda B_{FM} , conforme mostrado anteriormente, para produzir o sinal desejado:



Até então fizemos as análises para a modulação FM, mas o mesmo procedimento pode ser tomado como base para a modulação PM.

Método Indireto de Armstrong

No método indireto de Armstrong o sinal **NBFM** é usado em conjunto com multiplicadores de frequências para **transformá-lo** em um sinal **WBFM**: um multiplicador de frequência pode ser realizado por um **dispositivo não-linear seguido de um filtro passa-faixa**.

Assim, considere o seguinte **dispositivo não-linear**, cujo sinal de saída $y(t)$ seja dado em função de uma entrada $x(t)$:

$$y(t) = a_2 x^2(t)$$

Considere que a entrada $x(t)$ seja dada por um sinal FM:

$$x(t) = A \cos [\omega_c t + k_f \int m(\alpha) d\alpha]$$

Assim, teremos como saída o seguinte sinal $y(t)$

$$\begin{aligned} y(t) &= a_2 \cos^2 \left[\omega_c t + k_f \int m(\alpha) d\alpha \right] \\ &= 0.5a_2 + 0.5a_2 \cos \left[2\omega_c t + 2k_f \int m(\alpha) d\alpha \right] \end{aligned}$$

Um filtro passa-faixa centrado em $2\omega_c$ seria capaz de recuperar o sinal com o dobro da frequência. De uma forma genérica, podemos representar o referido dispositivo não-linear como sendo:

$$y(t) = a_0 + a_1 x(t) + a_2 x^2(t) + \dots + a_n x^n(t)$$

Ao aplicar o mesmo sinal FM à equação anterior e usando as devidas identidades trigonométricas, podemos verificar que:

$$\begin{aligned} y(t) &= c_0 + c_1 \cos \left[\omega_c t + k_f \int m(\alpha) d\alpha \right] + c_2 \cos \left[2\omega_c t + 2k_f \int m(\alpha) d\alpha \right] \\ &\quad + \dots + c_n \cos \left[n\omega_c t + nk_f \int m(\alpha) d\alpha \right] \end{aligned}$$

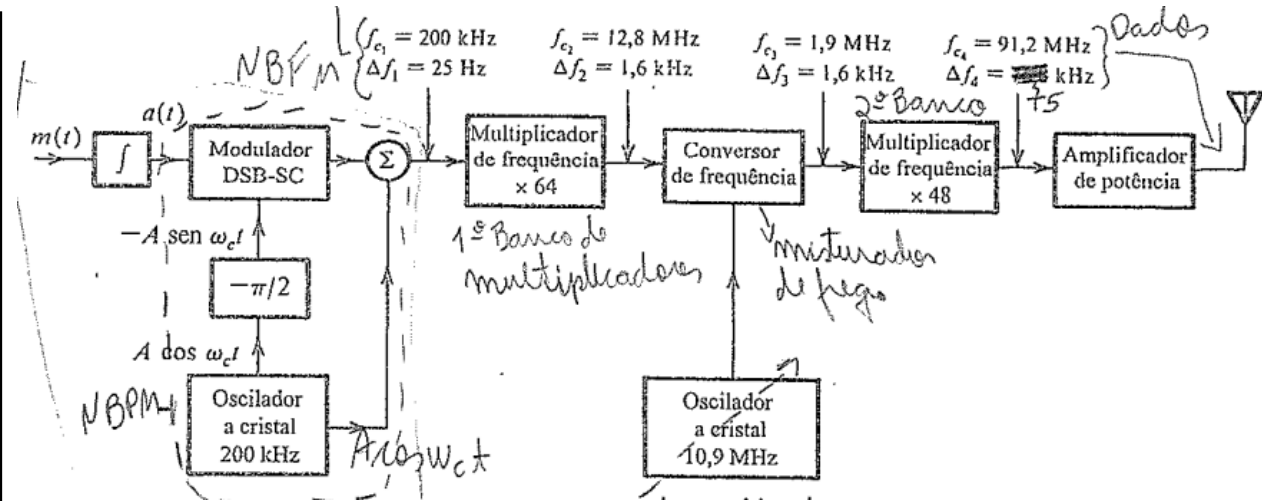
Ou seja, a saída terá espectros em $\omega_c, 2\omega_c, \dots, n\omega_c$, com desvios de frequência $\Delta f, 2\Delta f, n\Delta f$, respectivamente.

- Logo, um filtro passa-faixa centrado em $n\omega_c$ pode recuperar um sinal FM cuja frequência instantânea é ω_c multiplicado por um fator n . A esse dispositivo damos o nome de **multiplicador de frequência**.
- Além disso, observamos que esse dispositivo é capaz de aumentar tanto a frequência da portadora como o desvio de frequência por um fator n .

Com isso, formamos a base do modulador indireto de Armstrong. Em geral, desejamos aumentar Δf por um fator n muito grande. Mas isso também levaria a frequência para valores elevados. A fim de corrigir essa frequência, podemos usar um misturador, que não afeta o desvio.

A seguir podemos ver um transmissor FM comercial baseado no método de Armstrong. Para esse caso, a saída deve conter uma frequência de portadora de **91,2MHz** e $\Delta f = 75kHz$.

- 1) Iniciamos com a frequência da portadora $f_{c1} = 200kHz$, gerada por um oscilador a cristal acoplado ao circuito NBFM.
- 2) Para manter $\beta \ll 1$, necessário para NBFM, o valor do desvio escolhido é 25Hz.
- 3) Para alcançar um desvio de 75kHz (estágio final, WBFM), devemos multiplicar Δf_1 por 3000.
- 4) Podemos usar dois estágios de multiplicadores: um de x64 (2^6) e outro de x48 ($2^4 \times 3$), resultando em 3.072.
- 5) Contudo, multiplicar f_{c1} por 3072, resultaria em uma portadora de cerca de 600MHz, ficando longe dos 91,2MHz.
- 6) Para resolvermos esse problema podemos acrescentar um oscilador a cristal de 10,9MHz **em conjunto com um misturador**, após o primeiro estágio, levando o espectro do sinal para $f_{c3} = 1.9MHz$, **sem afetar o desvio de frequência do estágio anterior**.
- 7) A multiplicação pelo segundo banco (x48) levaria a frequência f_{c3} para $f_{c4} = 91.2MHz$ e o desvio de Δf_3 para $\Delta f_4 = 76,8kHz$.



Geração Direta

Em um oscilador controlado por tensão (VCO), a frequência é controlada por uma tensão externa. Assim, a frequência de oscilação varia linearmente com a tensão de controle. Logo, podemos usar o sinal FM como o sinal de controle:

$$\omega_i(t) = \omega_c + k_f m(t)$$

Uma outra estratégia seria a variação de elementos reativos (L ou C) de osciladores, a fim de se obter a frequência desejada. Em um oscilador Hartley, por exemplo, a frequência de oscilação é dada por:

$$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$$

Podemos combiná-lo com um varactor, de modo a variar sua capacitância C, por meio de m(t), a fim controlar a frequência da onda de saída:

$$C = C_0 - km(t)$$

Então,

$$\begin{aligned}\omega_0 &= \frac{1}{\sqrt{LC_0 \left[1 - \frac{km(t)}{C_0}\right]}} \\ &= \frac{1}{\sqrt{LC_0} \left[1 - \frac{km(t)}{C_0}\right]^{1/2}} \\ &\approx \frac{1}{\sqrt{LC_0}} \left[1 + \frac{km(t)}{2C_0}\right] \quad \frac{km(t)}{C_0} \ll 1\end{aligned}$$

Nesta passagem, utilizamos a aproximação em série de Taylor

$$(1+x)^n \approx 1+nx \quad |x| \ll 1$$

Com $n=1/2$. Logo,

$$\begin{aligned}\omega_0 &= \omega_c \left[1 + \frac{km(t)}{2C_0}\right] \quad \text{em que} \quad \omega_c = \frac{1}{\sqrt{LC_0}} \\ &= \omega_c + k_f m(t) \quad \text{com} \quad k_f = \frac{k\omega_c}{2C_0}\end{aligned}$$

Como $C = C_0 - km(t)$, podemos substituir k ao termo anterior e o máximo desvio de capacitância acontecerá para $m(t) = m_p$

$$\Delta C = km_p = \frac{2k_f C_0 m_p}{\omega_c}$$

Portanto,

$$\frac{\Delta C}{C_0} = \frac{2k_f m_p}{\omega_c} = \frac{2\Delta f}{f_c}$$

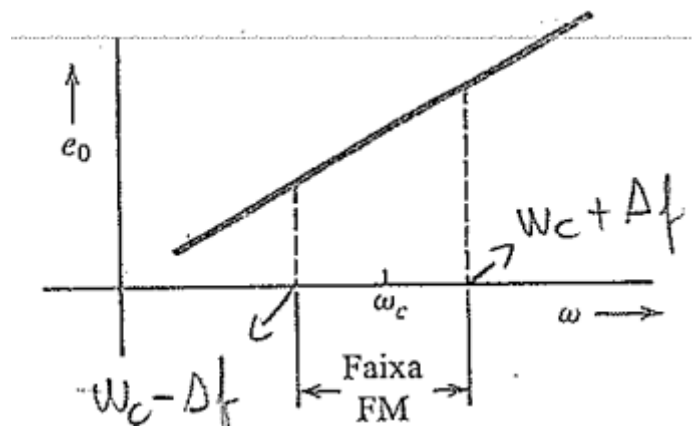
Já que $\Delta f = k_f m_p$.

Na prática, $\Delta f/f_c$ é, geralmente, pequeno; logo, ΔC é uma pequena variação de C_0 , o que ajuda a limitar a distorção harmônica causada pela aproximação empregada nessa dedução.

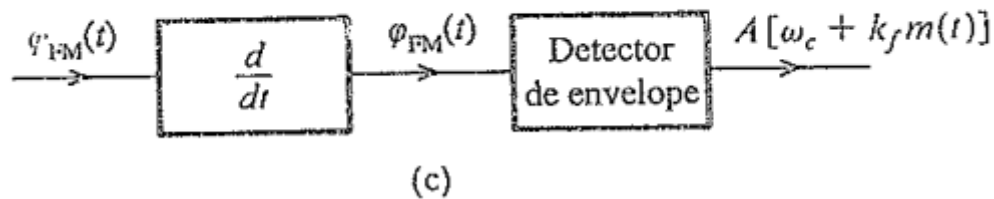
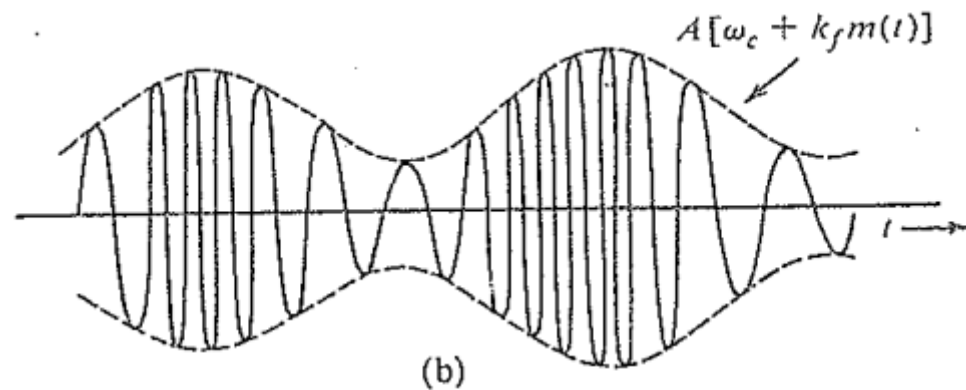
A geração direta de sinais FM produz um desvio de frequência suficiente e requer pouca multiplicação de frequência. Contudo, a estabilidade de frequência desse método é pobre. Para isso, geralmente usa-se sistemas de malha fechada em conjunto com um oscilador a cristal estável para correção do erro de frequência produzido.

Demodulação de Sinais FM

As informações contidas em sinais FM reside na frequência instantânea $\omega_i = \omega_c + k_f m(t)$. Portanto, um circuito seletivo em frequência, com função transferência $|H(f)| = 2a\pi f + b$ na faixa de FM, produziria uma saída proporcional à frequência instantânea. Na figura a seguir podemos ver um exemplo desse demodulador:



Infinitos circuitos produzem uma resposta como essa, dentre eles, o mais simples é o diferenciador ideal, com função transferência $j2\pi f$.



Se aplicarmos $\phi_{FM}(t)$ a um diferenciador ideal, a saída será:

$$\begin{aligned}\dot{\phi}_{FM}(t) &= \frac{d}{dt} \left\{ A \cos \left[\omega_c t + k_f \int_{-\infty}^t m(\alpha) d\alpha \right] \right\} \\ &= A [\omega_c + k_f m(t)] \sin \left[\omega_c t + k_f \int_{-\infty}^t m(\alpha) d\alpha - \pi \right]\end{aligned}$$

O envelope, após a passagem pelo diferenciador é dado por $A[\omega_c + k_f m(t)]$. Como $\Delta\omega = k_f m_p < \omega_c$, temos que o termo $\omega_c + k_f m(t) > 0$ para todo t , e **$m(t)$ pode ser obtido com detecção de envelope de $\phi_{FM}(t)$** (o mesmo circuito simples e de baixo custo visto na demodulação AM).

Além disso, a amplitude A da portadora FM **deve ser constante**, caso contrário, teremos distorções na mensagem, devido à dA/dt na equação anterior.

Demodulação de Frequência Práticos

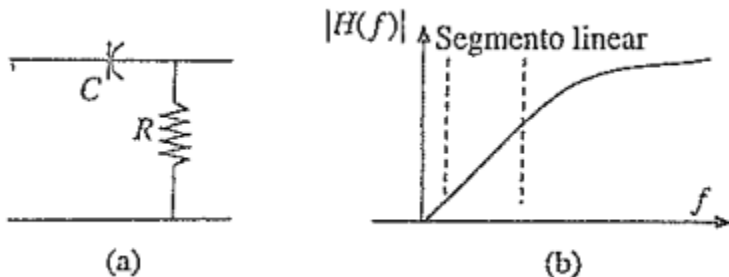
Podemos substituir o elemento diferenciador por qualquer sistema linear cuja resposta frequência contenha um segmento linear com inclinação positiva.

A aproximação da função linear mostrada na figura a seguir constitui o método conhecido como **detecção de inclinação**.

Figura 5.13

(a) Filtro passa-altos RC.

(b) Segmento de inclinação positiva na resposta de amplitude.



Um demodulador simples pode ser o filtro passa-altos RC, cuja resposta em frequência é dada por

$$H(f) = \frac{j2\pi fRC}{1 + j2\pi fRC} \approx j2\pi fRC \quad \text{se} \quad 2\pi fRC \ll 1$$

Assim, se o parâmetro RC for muito pequeno, tal que seu produto pela frequência da portadora seja $\omega_c RC \ll 1$, o filtro se aproxima de um diferenciador.

Alternativamente, um simples circuito RLC sintonizado seguido por um detector de envelope também pode funcionar como detector de frequência, pois, abaixo da frequência de ressonância $\omega_0 = 1/\sqrt{LC}$, sua resposta se aproxima de uma inclinação linear.

Efeitos de Distorção Não Linear e Interferência

Imunidade de modulação em ângulo a não linearidades

Uma propriedade muito útil da modulação em ângulo é sua **amplitude constante**, que a torna menos susceptível a não linearidades. Consideremos, por exemplo, um amplificador **com distorção não linear**, cujas entradas e saídas são relacionadas por

$$y(t) = a_0 + a_1x(t) + a_2x^2(t) + \dots + a_nx^n(t)$$

Notamos que o termo desejado é $a_1x(t)$, enquanto que o restante são as distorções indesejadas. Considere o sinal $x(t)$ modulado em ângulo

$$x(t) = A \cos [\omega_c t + \psi(t)]$$

Aplicando o sinal $x(t)$ à $y(t)$ e usando identidades trigonométricas podemos escrever a saída $y(t)$ da seguinte forma:

$$y(t) = c_0 + c_1 \cos [\omega_c t + \psi(t)] + c_2 \cos [2\omega_c t + 2\psi(t)] \\ + \dots + c_n \cos [n\omega_c t + n\psi(t)]$$

Um valor suficientemente grande ω_c torna as componentes de $y(t)$ separáveis no domínio da frequência. Com um filtro passa-faixa centrado em ω_c e largura de banda B_{FM} (ou B_{PM}) pode-se extrair a desejada componente $c_1 \cos [\omega_c t + \psi(t)]$ sem distorção, comprovando a **imunidade de sinais FM**.

Em AM, uma não-linearidade similar causa não apenas modulações indesejadas, mas também **distorção do sinal**. Por exemplo, se um sinal DSB-SC $x(t) = m(t)\cos\omega_c t$ passar por uma não-linearidade $y(t) = ax(t) + bx^3(t)$, a saída será

$$\begin{aligned} y(t) &= a m(t) \cos \omega_c t + b m^3(t) \cos^3 \omega_c t \\ &= \left[a m(t) + \frac{3b}{4} m^3(t) \right] \cos \omega_c t + \frac{b}{4} m^3(t) \cos 3\omega_c t \end{aligned}$$

Caso esse sinal seja aplicado a um filtro passa-faixa em ω_c , a saída será $\left[a m(t) + \left(\frac{3b}{4} \right) m^3(t) \right] \cos \omega_c t$, que terá uma componente de distorção $\left(\frac{3b}{4} \right) m^3(t)$ junto do sinal $a m(t)$.

→ A imunidade a não-linearidade é a principal razão do uso da modulação em ângulo em sistemas de rádio de micro-ondas.

Efeito de interferência

A modulação em ângulo quando comparada com AM, também é menos vulnerável a interferência de pequenos sinais entre canais adjacentes.

Consideremos o simples caso de interferência entre uma portadora não modulada $A \cos \omega_c t$ e outra senoide $I \cos(\omega_c + \omega)t$. O sinal recebido $r(t)$ é

$$\begin{aligned} r(t) &= A \cos \omega_c t + I \cos (\omega_c + \omega)t \\ &= (A + I \cos \omega t) \cos \omega_c t - I \sin \omega t \sin \omega_c t \\ &= E_r(t) \cos [\omega_c t + \psi_d(t)] \end{aligned}$$

Lembrando que podemos expressar um sinal dessa forma recorrendo às Equações 3.39, 3.40 e 3.41a e 3.41b, do Lathi:

$$g_{bp}(t) = g_c(t) \cos 2\pi f_0 t + g_s(t) \sin 2\pi f_0 t$$

$$g_{bp}(t) = E(t) \cos [2\pi f_0 t + \psi(t)]$$

$$E(t) = +\sqrt{g_c^2(t) + g_s^2(t)}$$

$$\psi(t) = -\tan^{-1} \left[\frac{g_s(t)}{g_c(t)} \right]$$

Assim, podemos escrever $\psi_d(t)$ como sendo:

$$\psi_d(t) = \tan^{-1} \frac{I \sin \omega t}{A + I \cos \omega t}$$

Como o sinal interferente I é pequeno frente à portadora ($I \ll A$), então podemos aproximar $\psi_d(t)$ para:

$$\psi_d(t) \simeq \frac{I}{A} \sin \omega t$$

Se o sinal $E_r(t) \cos[\omega_c t + \psi_d(t)]$ for aplicado a um demodulador de fase ideal, a saída $y_d(t)$ será $\psi_d(t)$. De modo similar, a saída de um demodulador de frequên-

-cia ideal será $\dot{\psi}(t)$. Logo,

$$y_d(t) = \frac{I}{A} \sin \omega t \quad \text{para PM} \quad (1)$$

$$y_d(t) = \frac{I\omega}{A} \cos \omega t \quad \text{para FM} \quad (2)$$

Para qualquer um desses casos, a amplitude A da portadora é inversamente proporcional a interferência I , de modo que, quanto maior a amplitude de A , menor será a interferência.

Isso difere muito do que ocorre em sinais AM. Por exemplo, considerando um sinal AM com um senoide interferente $I \cos(\omega_c + \omega)t$, teremos que:

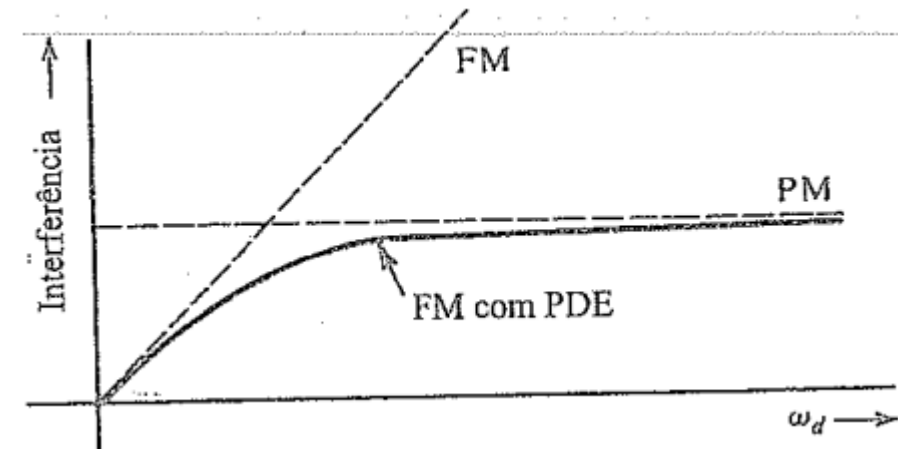
$$\begin{aligned} r(t) &= [A + m(t)] \cos \omega_c t + I \cos(\omega_c + \omega)t \\ &= [A + m(t) + I \cos \omega t] \cos \omega_c t - I \sin \omega t \sin \omega_c t \end{aligned}$$

Da mesma forma como foi feito anteriormente, o envelope desse sinal é dado por

$$\begin{aligned} E(t) &= \{[A + m(t) + I \cos \omega t]^2 + I^2 \sin^2 \omega t\}^{1/2} \\ &\approx A + m(t) + I \cos \omega t \quad I \ll A \end{aligned}$$

Como se observa, o valor de I é independente do valor da amplitude A da portadora, não sendo possível suprimi-lo com o aumento de A .

A figura a seguir mostra o comportamento das interferência das modulações FM e PM na saída dos receptores à medida que a frequência é incrementada.

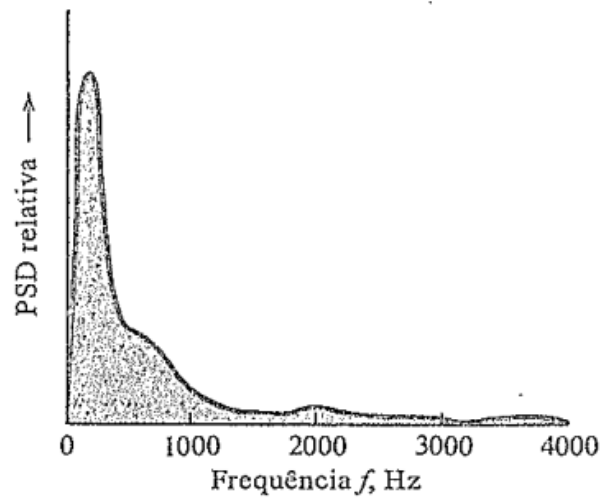


Para FM: a interferência aumenta com o aumento da frequência

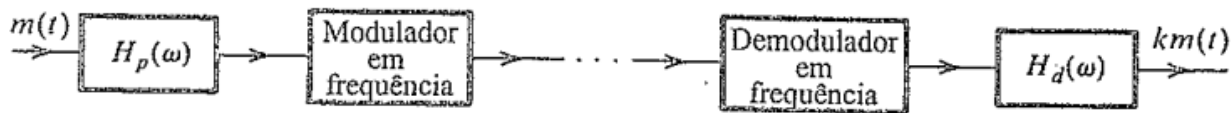
Para PM: a interferência se mantém constante

Para mitigarmos a interferência das frequências superiores, para o caso FM, podemos utilizar filtros de **pré-ênfase e dê-ênfase**. Assim, o nível de interferência se iguala ao nível de interferência do sinal PM, **como mostrado acima**.

Para entendermos como esses filtros são usados, considere a densidade espectral de potência do sinal de voz a seguir:



Notamos, que a densidade espectral de potência do sinal de voz se concentra na região abaixo de 2,1kHz, enquanto que a maior parte do ruído se concentra em regiões de frequências maiores (pelo gráfico anterior). Para entendermos como essa redução de ruído ocorre, considere o seguinte diagrama:



No transmissor: as componentes mais fracas do sinal de áudio (acima de 2,1kHz) são amplificadas por um filtro **pré-ênfase**, com função transferência $H_p(f)$.

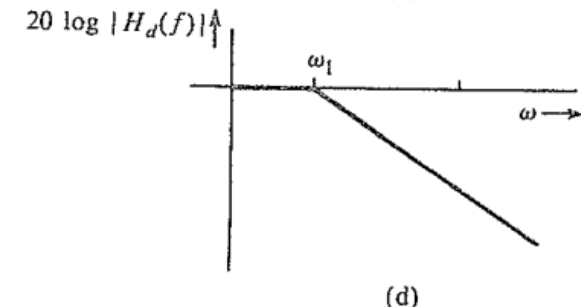
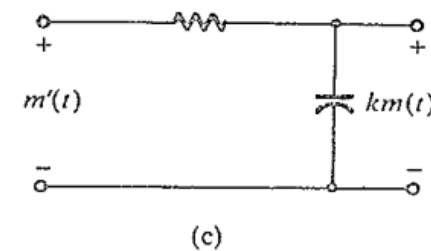
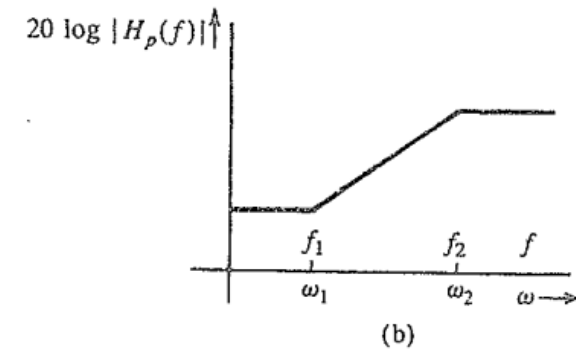
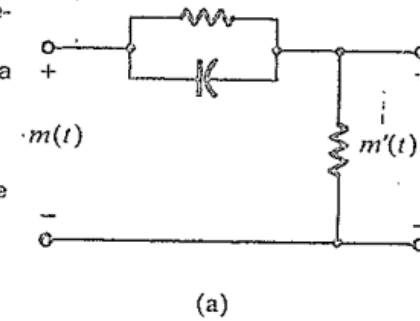
No receptor: a saída do demodulador é aplicada a um filtro de-ênfase, com função transferência $H_d(f) = 1/H_p(f)$. O filtro no receptor desfaz a pré-ênfase, atenuando as componentes de altas frequências (acima de 2,1kHz) e restaurando o sinal original $m(t)$.

Já o ruído entra pelo canal, e não passa pelo filtro de pré-ênfase (amplificação). Mas passa pelo filtro de de-ênfase, que atenua as componentes de altas frequências, em que está concentrada a maior parte da potência do sinal e do ruído. Os filtros pré-ênfase e de-ênfase preservam o sinal desejado e reduz consideravelmente a potência de ruído.

A figura abaixo ilustra os filtros aqui considerados seguidos de suas respostas em frequência.

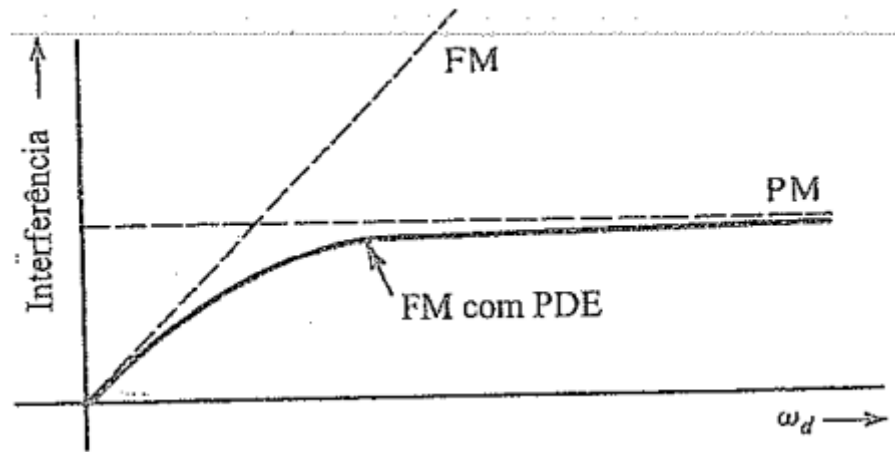
Figura 5.16

(a) Filtro de pré-ênfase e (b) sua resposta de frequência. (c) Filtro de de-ênfase e (d) sua resposta de frequência.



Filtros de Pré-ênfase e Deênfase

Observe novamente a figura anteriormente ilustrada:



Para frequências menores: FM possui menos interferências.

Para frequências maiores: PM possui menos interferências.

Se pudéssemos fazer nosso sistema se comportar como FM nas baixas frequências e PM nas altas frequências, teríamos o melhor dos dois mundos. Em sistemas comerciais isso é feito utilizando os filtros de pré-ênfase e deênfase.

Esses filtros são construídos a partir de circuitos RC, em que $f_1 = 2,1kHz$ foi encontrado como sendo ideal a partir de testes experimentais. Já $f_2 \geq 30kHz$.

Assim, a função transferência de pré-ênfase é

$$H_p(f) = K \frac{j2\pi f + \omega_1}{j2\pi f + \omega_2}$$

Onde K é o ganho e é dado por (ω_2/ω_1) . Logo

$$H_p(f) = \left(\frac{\omega_2}{\omega_1} \right) \frac{j2\pi f + \omega_1}{j2\pi f + \omega_2}$$

Para $2\pi f \ll \omega_1$:

$$H_p(f) \simeq 1$$

Já que as parcelas imaginárias serão pequenas perto de ω_1 e ω_2 .

Para $\omega_1 \ll 2\pi f \ll \omega_2$: o termo ω_1 do numerador vai pra zero

$$H_p(f) = \frac{\omega_2}{\omega_1} \frac{j2\pi f}{j2\pi f + \omega_2}$$

ao dividirmos o numerado e o denominador por ω_2 , teremos:

$$H_p(f) = \frac{1}{\omega_1} \left(\frac{j2\pi f}{\frac{j2\pi f}{\omega_2} + 1} \right)$$

Como $\omega_2 \gg 2\pi f$, o termo $(j2\pi f/\omega_2)$ vai a zero, restando

$$H_p(f) \simeq \frac{j2\pi f}{\omega_1}$$

Portanto, nas frequências intermediárias (1,5kHz-15kHz), o circuito de pré-ênfase atua como um diferenciador, o que efetivamente transforma o esquema em FM nessas frequências.

Isso significa que FM com PDE é FM na faixa de frequência do sinal modulante, de 0 a 2.1 kHz, e quase PM na faixa de 2,1 kHz a 15 kHz, como desejado.

O filtro de deênfase $H_d(f)$ é dado por

$$H_d(f) = \frac{\omega_1}{j2\pi f + \omega_1}$$

Notemos que para $2\pi f \ll \omega_1$:

$$H_p \cong \frac{j2\pi f + \omega_1}{\omega_1}$$

Logo, $H_p(f)H_d(f) \cong 1$.