

# Grafos - Conceitos Básicos

Prof. Andrei Braga



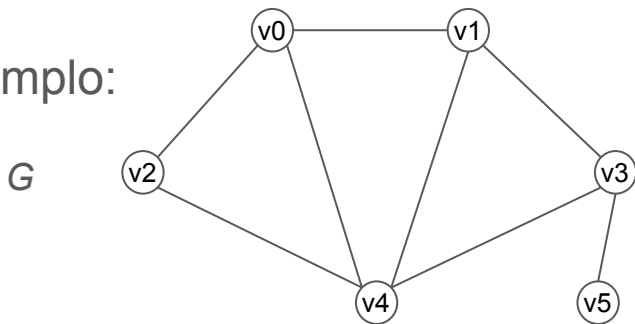
# Conteúdo

- Conceitos básicos
- Exercícios
- Referências

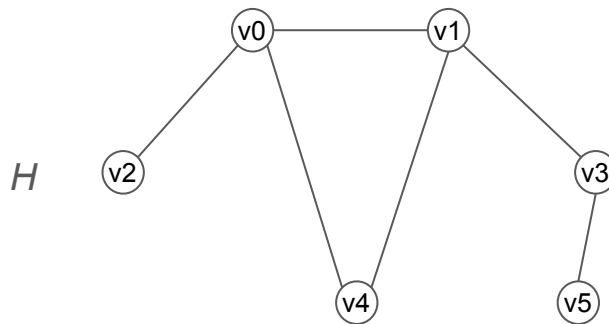
# Subgrafo

- Um **subgrafo** de um grafo  $G$  é um grafo  $H$  tal que
  - $V(H) \subseteq V(G)$  e
  - $E(H) \subseteq E(G)$

- Exemplo:



- $V(G) = \{v_0, v_1, v_2, v_3, v_4, v_5\}$  e
- $E(G) = \{\{v_0, v_1\}, \{v_0, v_2\}, \{v_0, v_4\}, \{v_1, v_3\}, \{v_1, v_4\}, \{v_2, v_4\}, \{v_3, v_4\}, \{v_3, v_5\}, \{v_4, v_5\}\}$



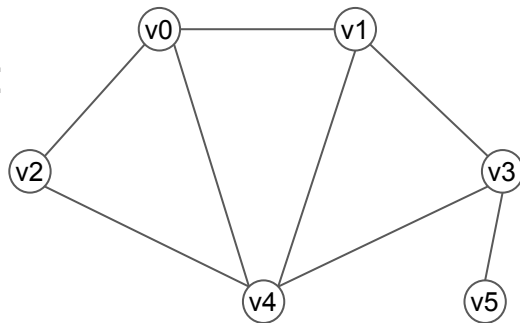
- $V(H) = \{v_0, v_1, v_2, v_3, v_4, v_5\}$  e
- $E(H) = \{\{v_0, v_1\}, \{v_0, v_2\}, \{v_0, v_4\}, \{v_1, v_3\}, \{v_1, v_4\}, \{v_3, v_5\}\}$

# Subgrafo

- Um **subgrafo** de um grafo  $G$  é um grafo  $H$  tal que
  - $V(H) \subseteq V(G)$  e
  - $E(H) \subseteq E(G)$

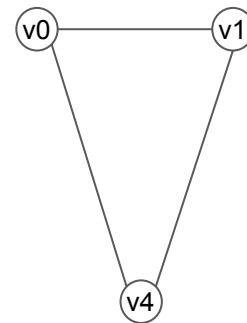
- Exemplo:

$G$



- $V(G) = \{v_0, v_1, v_2, v_3, v_4, v_5\}$  e
- $E(G) = \{\{v_0, v_1\}, \{v_0, v_2\}, \{v_0, v_4\}, \{v_1, v_3\}, \{v_1, v_4\}, \{v_2, v_4\}, \{v_3, v_4\}, \{v_3, v_5\}, \{v_4, v_5\}\}$

$H$



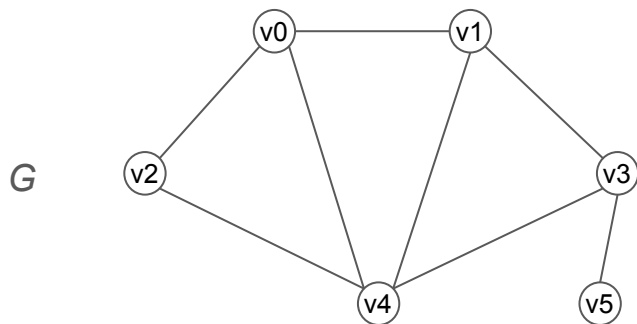
- $V(H) = \{v_0, v_1, v_4\}$  e
- $E(H) = \{\{v_0, v_1\}, \{v_0, v_4\}, \{v_1, v_4\}\}$

# Subgrafo

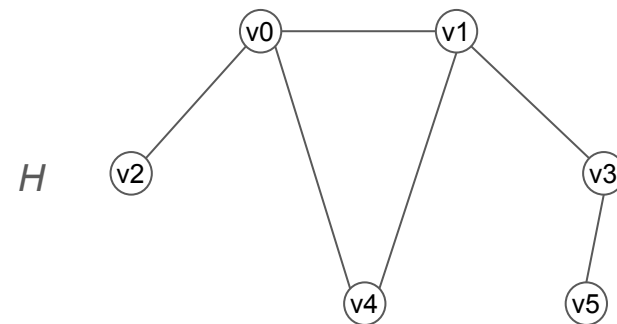
- Um **subgrafo** de um grafo  $G$  é um grafo  $H$  tal que
  - $V(H) \subseteq V(G)$  e
  - $E(H) \subseteq E(G)$
- Usamos as seguintes expressões de forma equivalente:
  - $H$  é um subgrafo de  $G$
  - $H$  está **contido** em  $G$
  - $H \subseteq G$
  - $G$  é um **supergrafo** de  $H$
  - $G$  **contém**  $H$
  - $G \supseteq H$

# Subgrafo gerador

- Um subgrafo  $H$  de um grafo  $G$  é **gerador** se  $V(H) = V(G)$
- Exemplo:



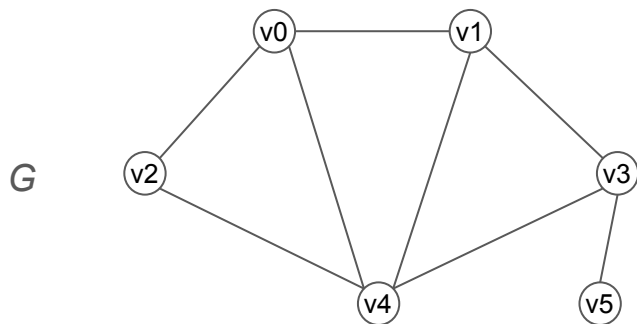
- $V(G) = \{ v_0, v_1, v_2, v_3, v_4, v_5 \}$  e
- $E(G) = \{ \{ v_0, v_1 \}, \{ v_0, v_2 \}, \{ v_0, v_4 \}, \{ v_1, v_3 \}, \{ v_1, v_4 \}, \{ v_2, v_4 \}, \{ v_3, v_4 \}, \{ v_3, v_5 \} \}$



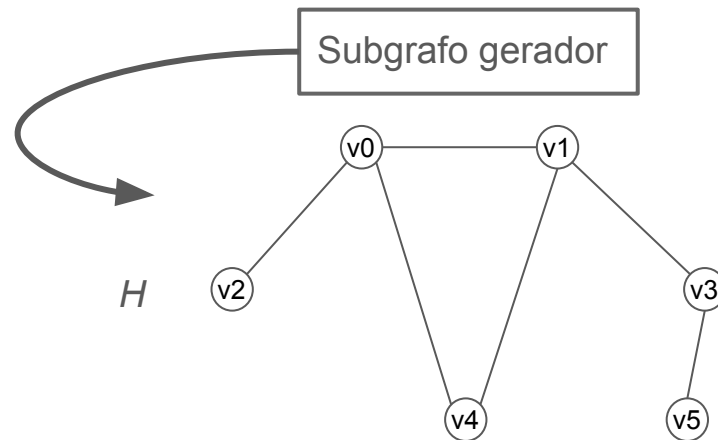
- $V(H) = \{ v_0, v_1, v_2, v_3, v_4, v_5 \}$  e
- $E(H) = \{ \{ v_0, v_1 \}, \{ v_0, v_2 \}, \{ v_0, v_4 \}, \{ v_1, v_3 \}, \{ v_3, v_5 \} \}$

# Subgrafo gerador

- Um subgrafo  $H$  de um grafo  $G$  é **gerador** se  $V(H) = V(G)$
- Exemplo:



- $V(G) = \{ v_0, v_1, v_2, v_3, v_4, v_5 \}$  e
- $E(G) = \{ \{ v_0, v_1 \}, \{ v_0, v_2 \}, \{ v_0, v_4 \}, \{ v_1, v_3 \}, \{ v_1, v_4 \}, \{ v_2, v_4 \}, \{ v_3, v_4 \}, \{ v_3, v_5 \} \}$

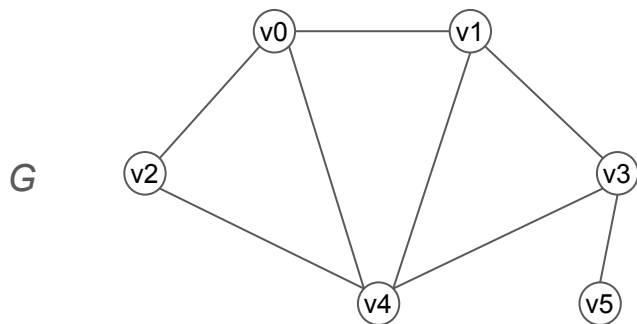


- $V(H) = \{ v_0, v_1, v_2, v_3, v_4, v_5 \}$  e
- $E(H) = \{ \{ v_0, v_1 \}, \{ v_0, v_2 \}, \{ v_0, v_4 \}, \{ v_1, v_3 \}, \{ v_1, v_4 \}, \{ v_3, v_5 \} \}$

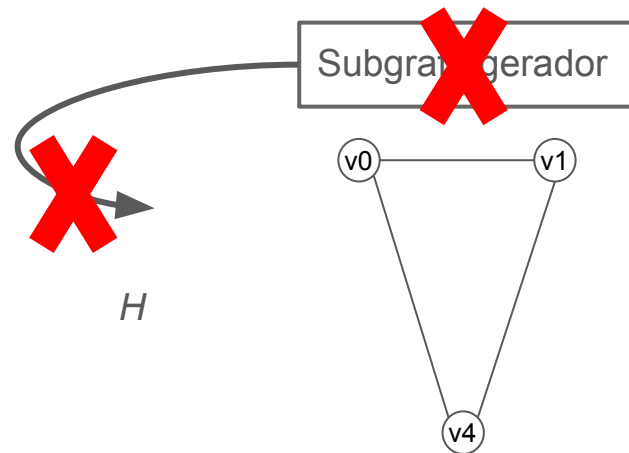
# Subgrafo gerador

- Um subgrafo  $H$  de um grafo  $G$  é **gerador** se  $V(H) = V(G)$

- Exemplo:



- $V(G) = \{ v_0, v_1, v_2, v_3, v_4, v_5 \}$  e
- $E(G) = \{ \{ v_0, v_1 \}, \{ v_0, v_2 \}, \{ v_0, v_4 \}, \{ v_1, v_3 \}, \{ v_1, v_4 \}, \{ v_2, v_4 \}, \{ v_3, v_4 \}, \{ v_3, v_5 \} \}$



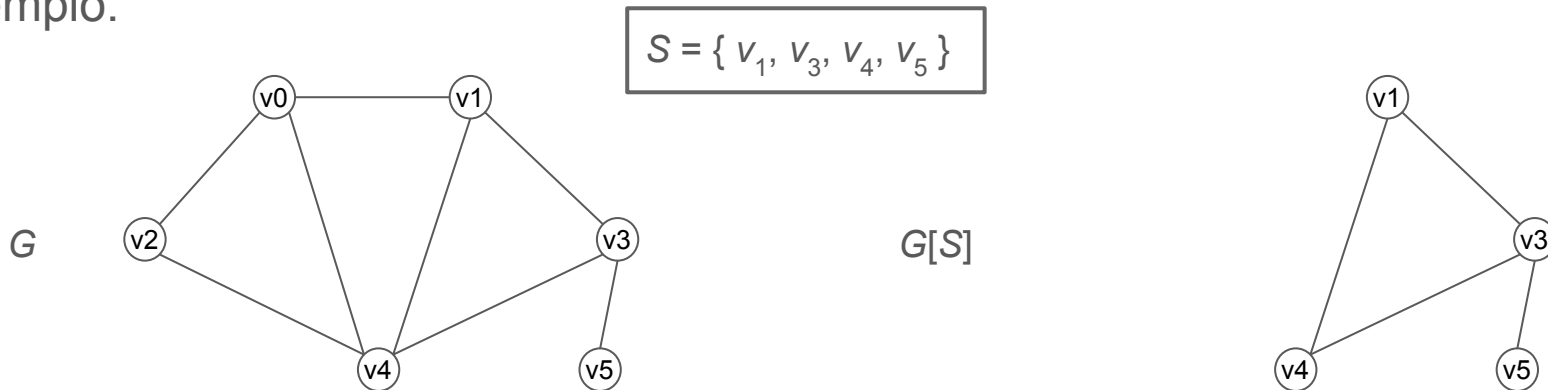
- $V(H) = \{ v_0, v_1, v_4 \}$  e
- $E(H) = \{ \{ v_0, v_1 \}, \{ v_0, v_4 \}, \{ v_1, v_4 \} \}$



# Subgrafo induzido

- Dado um subconjunto  $S$  de vértices de um grafo  $G$ , o **subgrafo de  $G$  induzido por  $S$**  é o subgrafo  $G[S]$  tal que
  - $V(G[S]) = S$  e
  - $E(G[S])$  consiste em todas as arestas de  $G$  cujos ambos os extremos estão em  $S$

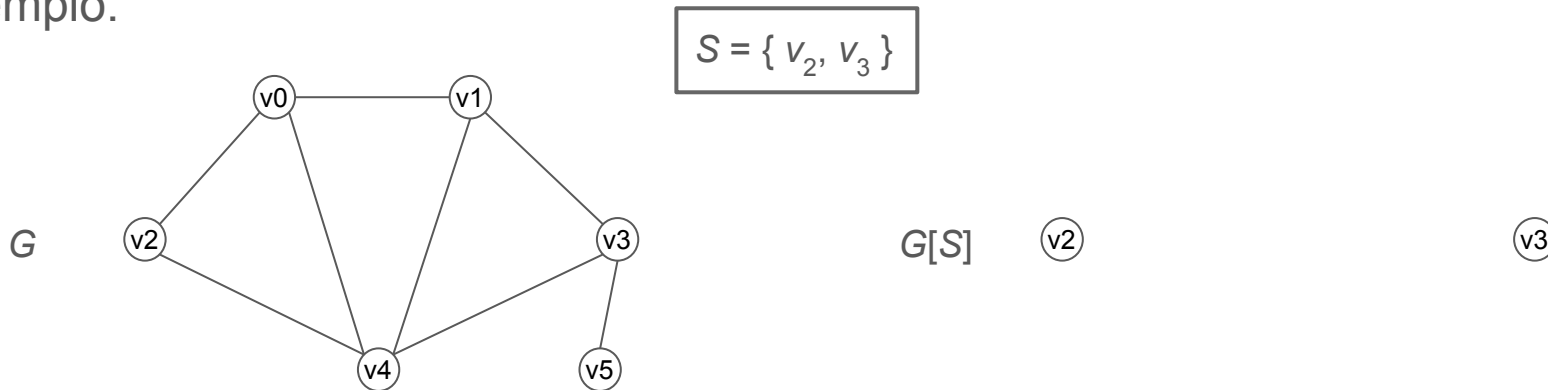
- Exemplo:



# Subgrafo induzido

- Dado um subconjunto  $S$  de vértices de um grafo  $G$ , o **subgrafo de  $G$  induzido por  $S$**  é o subgrafo  $G[S]$  tal que
  - $V(G[S]) = S$  e
  - $E(G[S])$  consiste em todas as arestas de  $G$  cujos ambos os extremos estão em  $S$

- Exemplo:



# Exercícios

- (Ref. 1) Exercício 1 da Lista de Exercícios “Conceitos Básicos – 2”.

# Exercícios

- Exercício 2 da Lista de Exercícios “Conceitos Básicos – 2”.

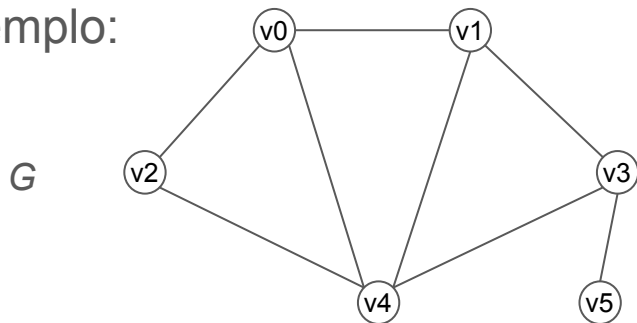
# Exercícios

- Exercício 3 da Lista de Exercícios “Conceitos Básicos – 2”.

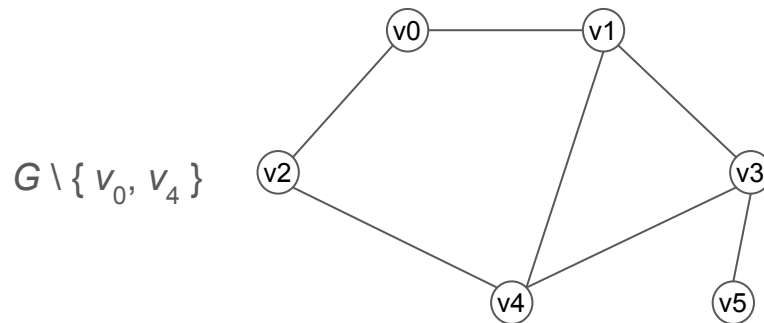
# Remoção de arestas

- Dado um grafo  $G$  e uma aresta  $\{v_i, v_j\} \in E(G)$ , denotamos por  $G \setminus \{v_i, v_j\}$  o grafo obtido pela **remoção da aresta**  $\{v_i, v_j\}$  de  $G$

- Exemplo:



- $V(G) = \{v_0, v_1, v_2, v_3, v_4, v_5\}$  e
- $E(G) = \{\{v_0, v_1\}, \{v_0, v_2\}, \{v_0, v_4\}, \{v_1, v_3\}, \{v_1, v_4\}, \{v_2, v_4\}, \{v_3, v_4\}, \{v_3, v_5\}, \{v_4, v_5\}\}$

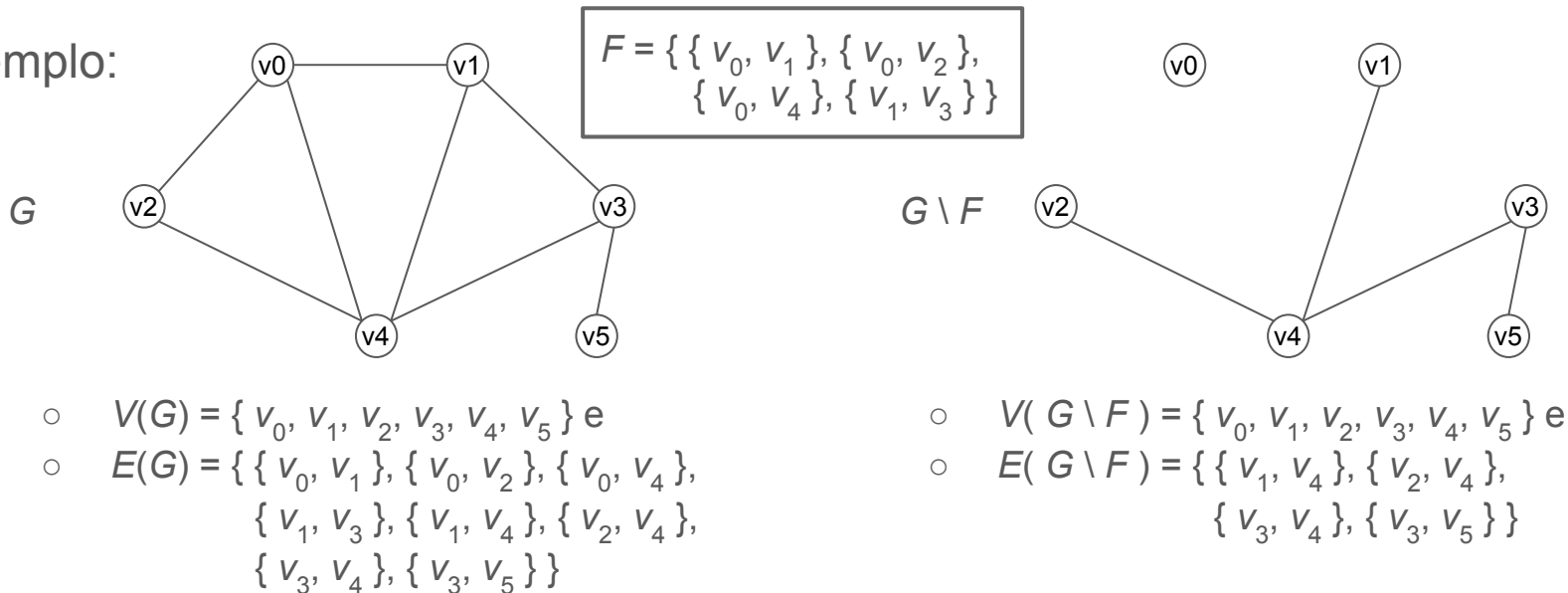


- $V(G \setminus \{v_0, v_4\}) = \{v_0, v_1, v_2, v_3, v_4, v_5\}$  e
- $E(G \setminus \{v_0, v_4\}) = \{\{v_0, v_1\}, \{v_0, v_2\}, \{v_1, v_3\}, \{v_1, v_4\}, \{v_2, v_4\}, \{v_3, v_4\}, \{v_3, v_5\}, \{v_4, v_5\}\}$

# Remoção de arestas

- Dado um grafo  $G$  e um subconjunto de arestas  $F \subseteq E(G)$ , denotamos por  $G \setminus F$  o grafo obtido pela **remoção das arestas** em  $F$  de  $G$

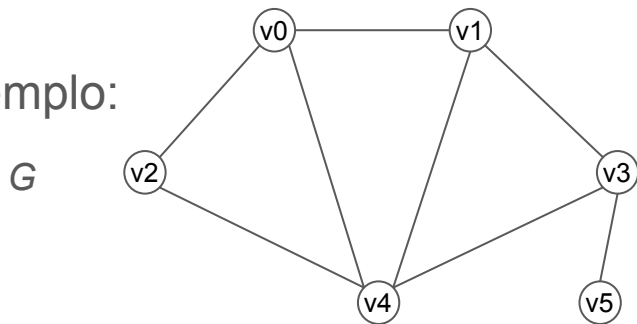
- Exemplo:



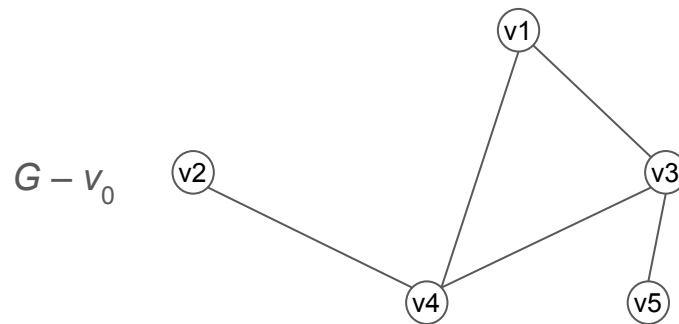
# Remoção de vértices

- Dado um grafo  $G$  e um vértice  $v_i \in V(G)$ , denotamos por  $G - v_i$  o grafo obtido pela **remoção do vértice  $v_i$  junto com todas as arestas incidentes em  $v_i$**  de  $G$

- Exemplo:



- $V(G) = \{v_0, v_1, v_2, v_3, v_4, v_5\}$  e
- $E(G) = \{\{v_0, v_1\}, \{v_0, v_2\}, \{v_0, v_4\}, \{v_1, v_3\}, \{v_1, v_4\}, \{v_2, v_4\}, \{v_3, v_4\}, \{v_3, v_5\}, \{v_4, v_5\}\}$



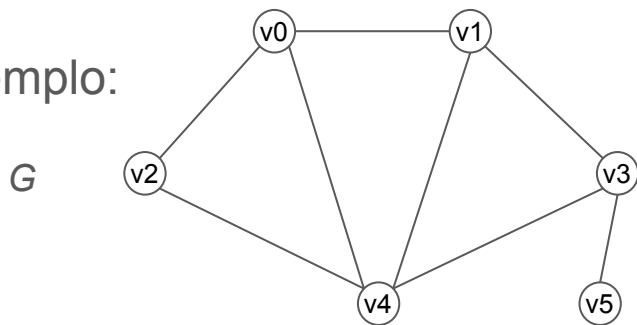
- $V(G - v_0) = \{v_1, v_2, v_3, v_4, v_5\}$  e
- $E(G - v_0) = \{\{v_1, v_3\}, \{v_1, v_4\}, \{v_2, v_4\}, \{v_3, v_4\}, \{v_3, v_5\}, \{v_4, v_5\}\}$



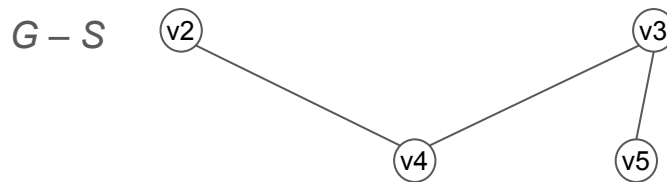
# Remoção de vértices

- Dado um grafo  $G$  e um subconjunto de vértices  $S \subseteq V(G)$ , denotamos por  $G - S$  o grafo obtido pela **remoção dos vértices** em  $S$  **junto com todas as arestas incidentes nos vértices** em  $S$  de  $G$

- Exemplo:



$$S = \{v_0, v_1\}$$



- $V(G) = \{v_0, v_1, v_2, v_3, v_4, v_5\}$  e
- $E(G) = \{\{v_0, v_1\}, \{v_0, v_2\}, \{v_0, v_4\}, \{v_1, v_3\}, \{v_1, v_4\}, \{v_2, v_4\}, \{v_3, v_4\}, \{v_3, v_5\}, \{v_4, v_5\}\}$

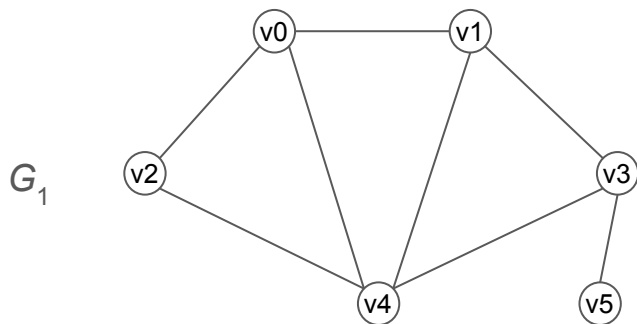
- $V(G - S) = \{v_2, v_3, v_4, v_5\}$  e
- $E(G - S) = \{\{v_2, v_4\}, \{v_3, v_4\}, \{v_3, v_5\}\}$

# Exercícios

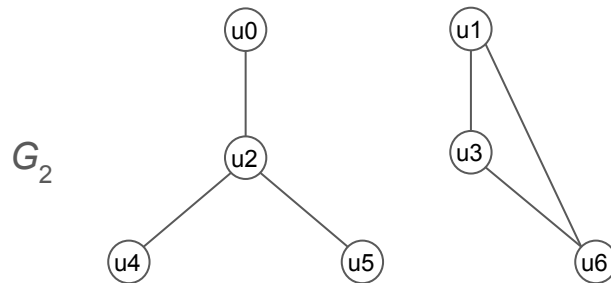
- Exercício 4 da Lista de Exercícios “Conceitos Básicos – 2”.

# Conexidade

- Um grafo  $G$  é **conexo** se, para todo par de vértices  $v_i, v_j$  de  $G$ , existe um caminho em  $G$  entre  $v_i$  e  $v_j$  (ou seja, um caminho em  $G$  cujos extremos são  $v_i$  e  $v_j$ );  $G$  é **desconexo** caso contrário
- Exemplo:



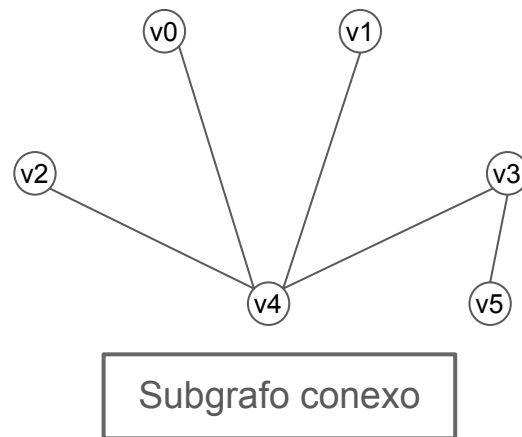
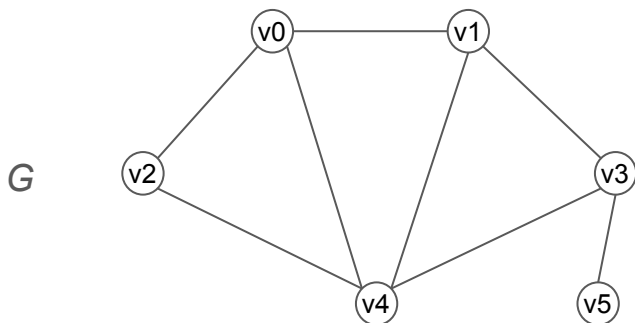
Grafo conexo



Grafo desconexo

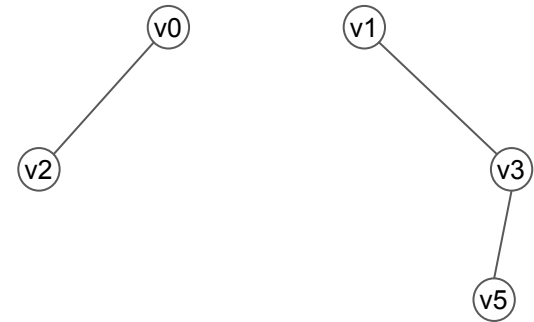
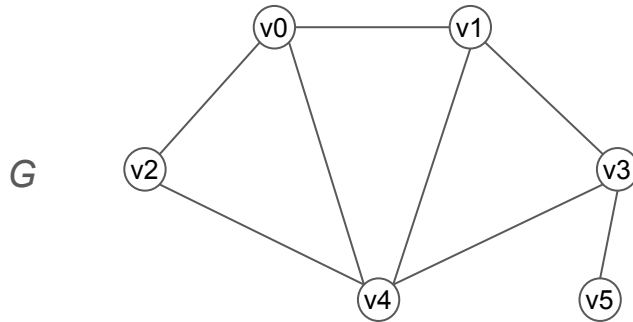
# Subgrafo conexo

- Um **subgrafo conexo** de um grafo  $G$  é um subgrafo de  $G$  que é conexo
- Exemplo:



# Subgrafo conexo

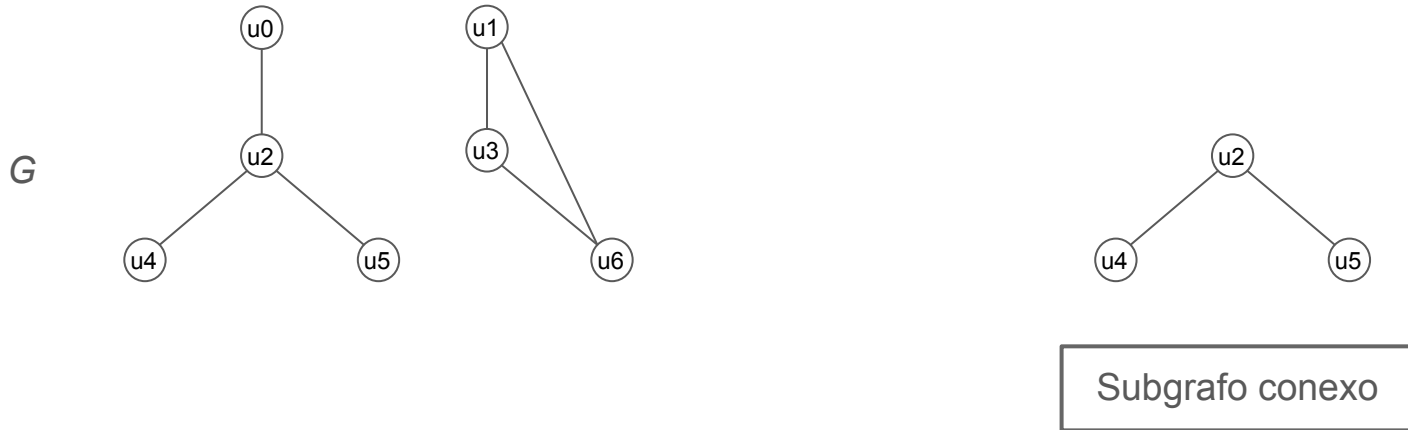
- Um **subgrafo conexo** de um grafo  $G$  é um subgrafo de  $G$  que é conexo
- Exemplo:



Subgrafo **X** conexo

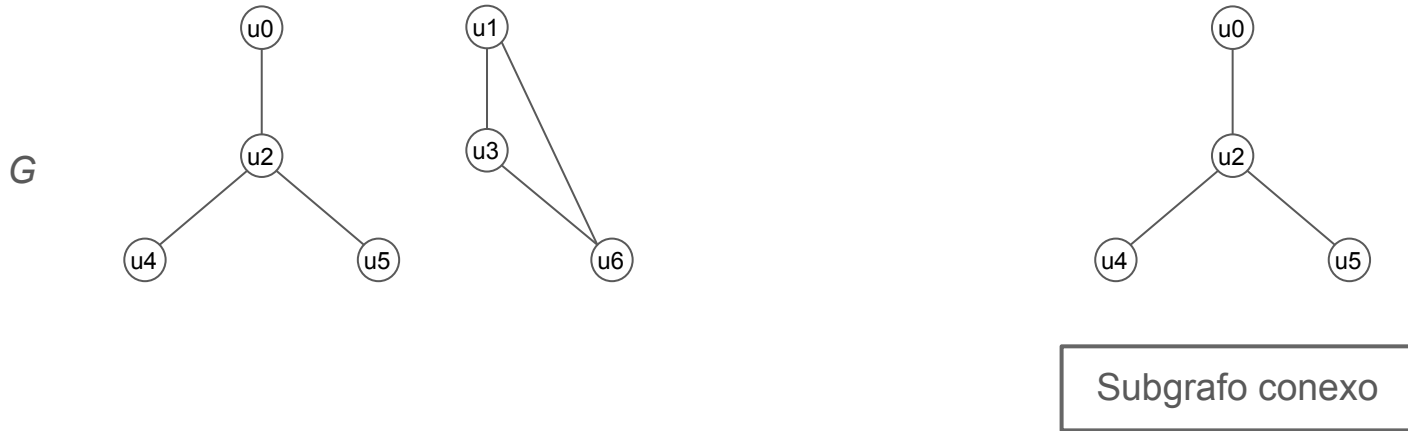
# Subgrafo conexo

- Um **subgrafo conexo** de um grafo  $G$  é um subgrafo de  $G$  que é conexo
- Exemplo:



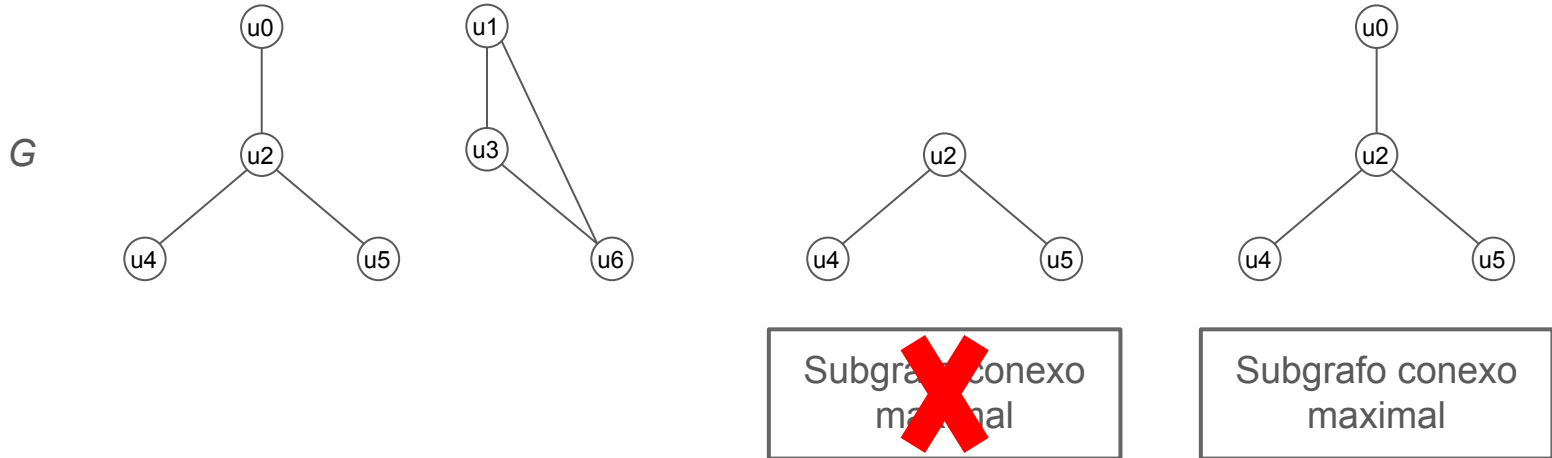
# Subgrafo conexo

- Um **subgrafo conexo** de um grafo  $G$  é um subgrafo de  $G$  que é conexo
- Exemplo:



# Subgrafo conexo maximal

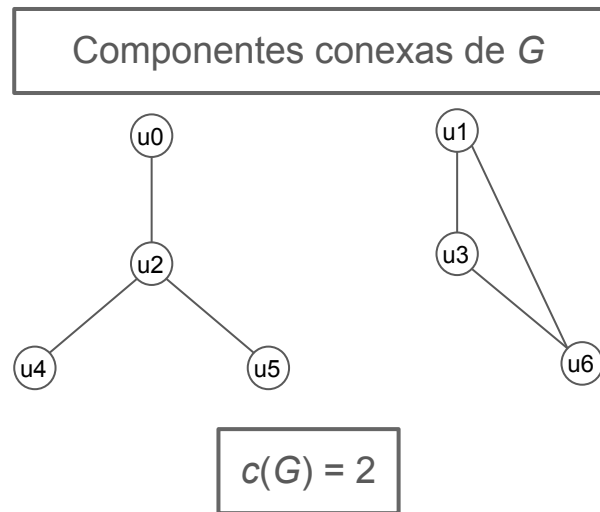
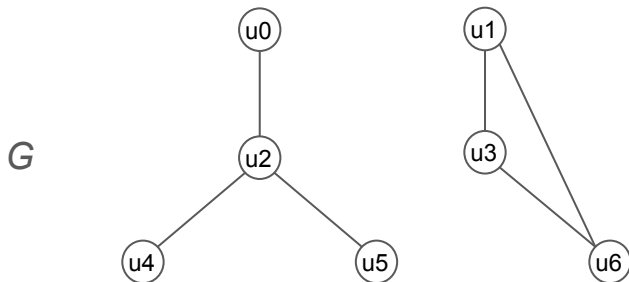
- Um **subgrafo conexo maximal** de um grafo  $G$  é um subgrafo conexo de  $G$  que não está contido em outro subgrafo conexo de  $G$
- Exemplo:





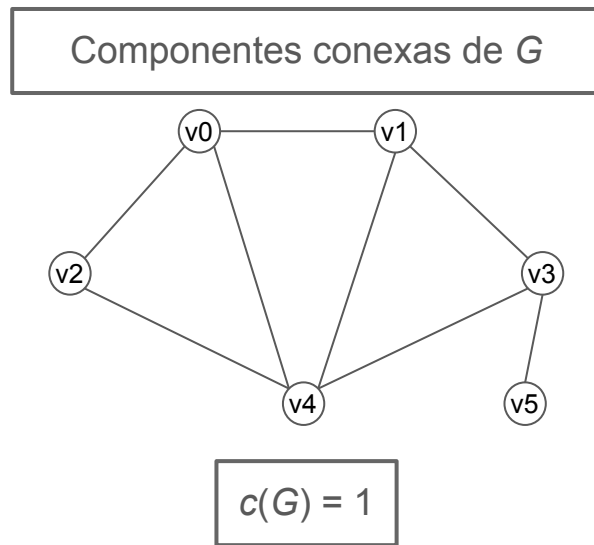
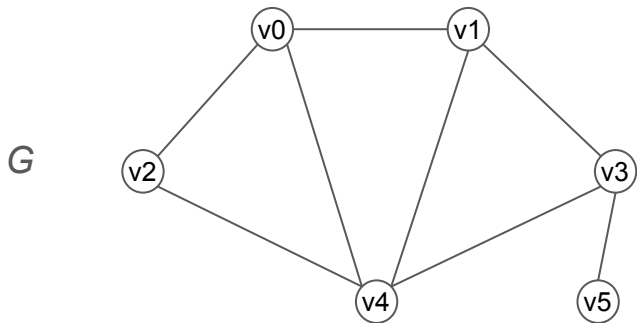
# Componentes conexas

- As **componentes conexas** (ou apenas **componentes**) de um grafo  $G$  são os subgrafos conexos maximais de  $G$
- Denotamos por  $c(G)$  o número de componentes conexas de  $G$
- Exemplo:



# Componentes conexas

- As **componentes conexas** (ou apenas **componentes**) de um grafo  $G$  são os subgrafos conexos maximais de  $G$
- Denotamos por  $c(G)$  o número de componentes conexas de  $G$
- Exemplo:



# Componentes conexas

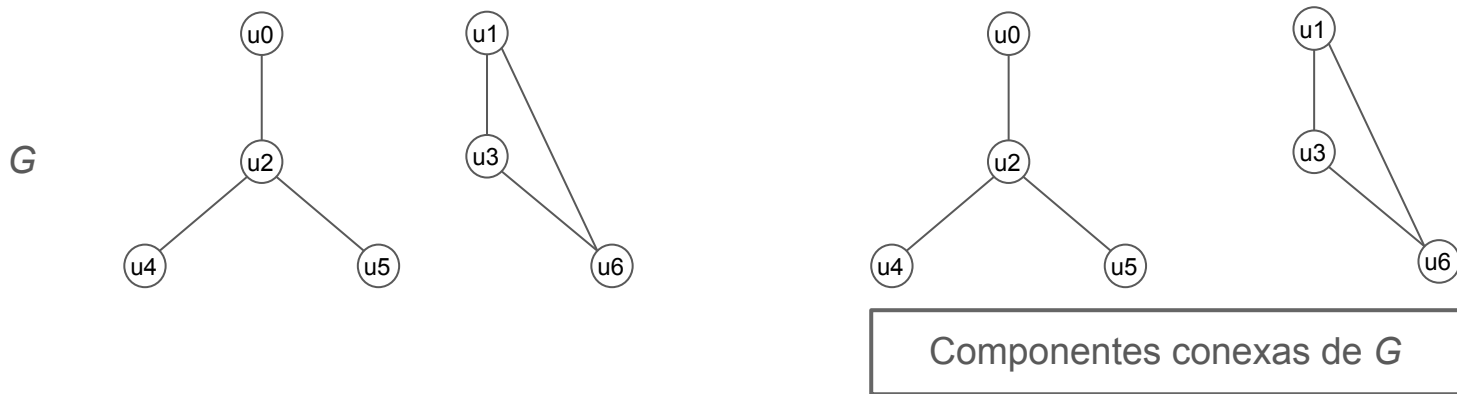
- As **componentes conexas** (ou apenas **componentes**) de um grafo  $G$  são os subgrafos conexos maximais de  $G$
- Denotamos por  $c(G)$  o número de componentes conexas de  $G$
- Um **grafo conexo** (com pelo menos um vértice) tem exatamente **uma componente**

# Exercícios

- Exercício 5 da Lista de Exercícios “Conceitos Básicos – 2”.

# Componentes conexas

- Observações:
  - Componentes conexas distintas **não** possuem vértices em comum
  - Ao adicionar uma aresta cujos extremos estejam em duas componentes conexas distintas, fazemos com que estas componentes **passem a ser uma só**
  - Dado um caminho  $v_{i0}v_{i1}\dots v_{ik-1}v_{ik}$ , todos os vértices  $v_{i0}, v_{i1}, \dots, v_{ik-1}, v_{ik}$  pertencem à **mesma componente** conexa



# Exercícios

- Exercício 6 da Lista de Exercícios “Conceitos Básicos – 2”.

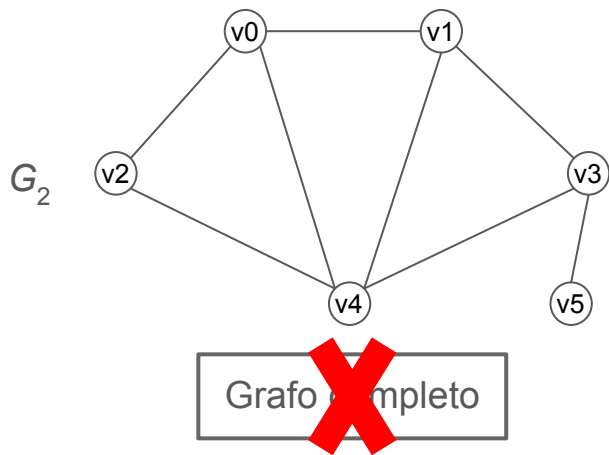
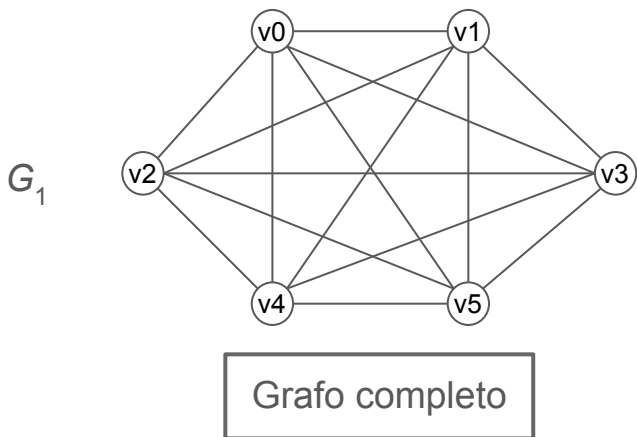
# Exercícios

- Exercício 7 da Lista de Exercícios “Conceitos Básicos – 2”.

# Grafo completo

- Um grafo  $G$  é **completo** se, para todo par de vértices  $v_i, v_j$  de  $G$ , existe uma **aresta** em  $G$  entre  $v_i$  e  $v_j$
- Exemplo:

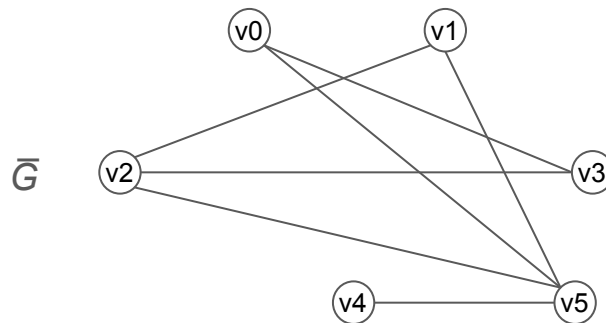
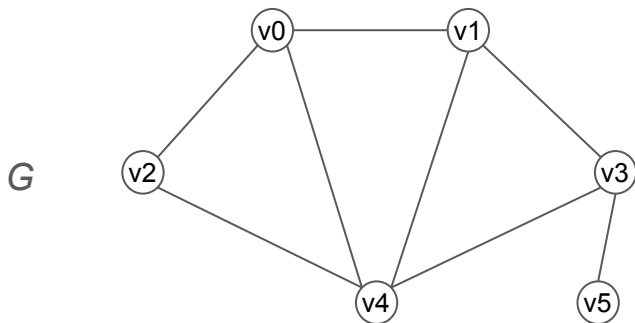
Grafo completo  $\neq$  Grafo conexo





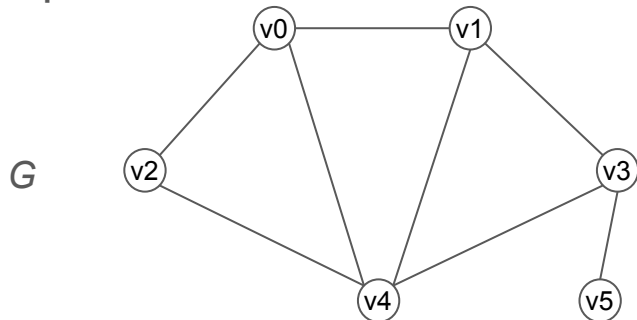
# Complemento de um grafo

- Dado um grafo  $G$ , o **complemento de  $G$**  é o grafo  $\bar{G}$  tal que
  - $V(\bar{G}) = V(G)$  e
  - se  $v_i v_j \in E(G)$ , então  $v_i v_j \notin E(\bar{G})$  e
  - se  $v_i v_j \notin E(G)$ , então  $v_i v_j \in E(\bar{G})$
- Exemplo:



# Clique

- Um conjunto de vértices  $S$  de um grafo  $G$  é uma **clique** se, para todo par de vértices  $v_i, v_j$  em  $S$ , existe uma aresta em  $G$  entre  $v_i$  e  $v_j$
- Exemplo:



$$S = \{v_0, v_1, v_4\}$$

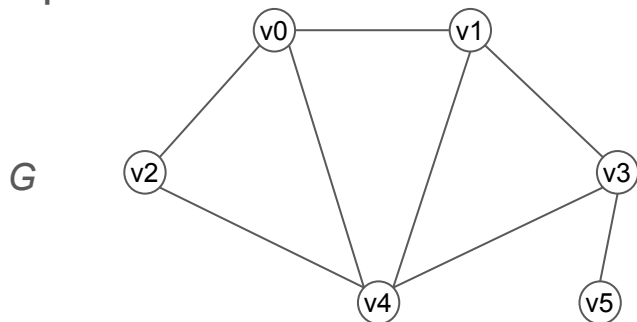
Clique

$$S = \{v_0, v_1, v_2, v_4\}$$

~~Clique~~

# Conjunto independente

- Um conjunto de vértices  $S$  de um grafo  $G$  é um **conjunto independente** se, para todo par de vértices  $v_i, v_j$  em  $S$ , **não** existe uma aresta em  $G$  entre  $v_i$  e  $v_j$ .
- Exemplo:



$$S = \{v_1, v_2, v_5\}$$

Conjunto  
independente

$$S = \{v_1, v_2, v_3\}$$

Conjunto  
independente



# Exercícios

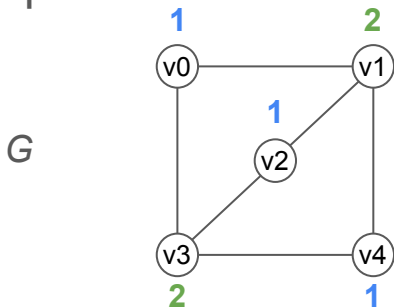
- Exercício 8 da Lista de Exercícios “Conceitos Básicos – 2”.

# Exercícios

- Exercício 9 da Lista de Exercícios “Conceitos Básicos – 2”.

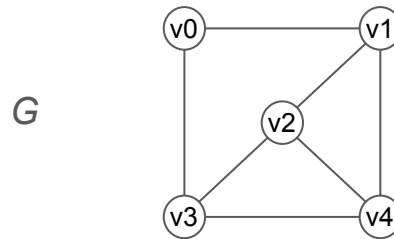
# Grafo bipartido

- Um grafo  $G$  é **bipartido** se  $V(G)$  pode ser particionado em dois conjuntos não-vazios de vértices  $V_1$  e  $V_2$  tal que  $V_1$  e  $V_2$  são conjuntos independentes
- Exemplo:



$V_1 = \{ v_0, v_2, v_4 \}$  é um conjunto independente  
 $V_2 = \{ v_1, v_3 \}$  é um conjunto independente

Grafo bipartido

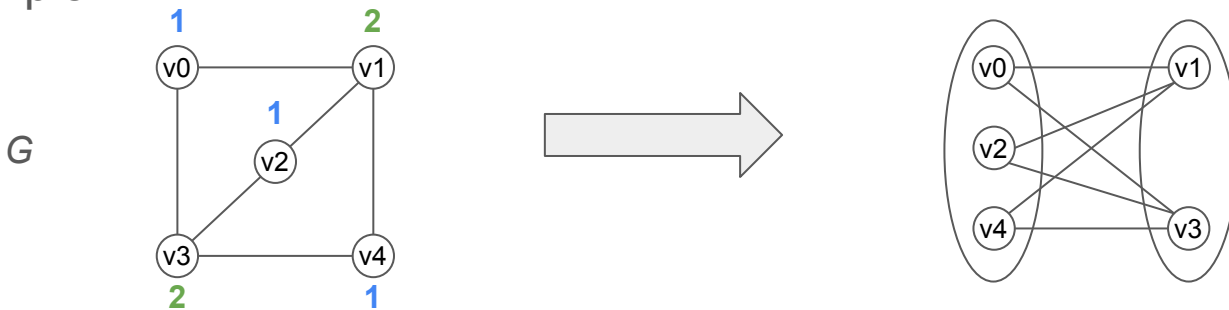


Não é possível particionar  $V(G)$  em dois conjuntos independentes  $V_1$  e  $V_2$

Grafo ~~X~~ bipartido

# Grafo bipartido

- Um grafo  $G$  é **bipartido** se  $V(G)$  pode ser particionado em dois conjuntos não-vazios de vértices  $V_1$  e  $V_2$  tal que  $V_1$  e  $V_2$  são conjuntos independentes
- Exemplo:



$V_1 = \{ v_0, v_2, v_4 \}$  é um conjunto independente  
 $V_2 = \{ v_1, v_3 \}$  é um conjunto independente

Grafo bipartido

# Exercícios

- Demais exercícios da Lista de Exercícios “Conceitos Básicos – 2”.



# Referências

- Um tratamento mais detalhado dos conceitos básicos definidos nesta apresentação pode ser encontrado em qualquer uma das referências básicas e complementares da disciplina
- Esta apresentação é baseada nos seguintes materiais:
  1. Livro  
Feofiloff, P. Exercícios de Teoria dos Grafos. 2013. Disponível em:  
<https://www.ime.usp.br/~pf/grafos-exercicios/texto/ETG.pdf>

# Exercícios – Solução

- Exercício 3 da Lista de Exercícios “Conceitos Básicos – 2”.

**Solução:** Qualquer subconjunto  $S$  formado por  $v_3$ , 2 vértices entre  $v_0$ ,  $v_1$  e  $v_2$  e 1 vértice entre  $v_4$  e  $v_5$ .

# Exercícios – Solução

- Exercício 12 da Lista de Exercícios “Conceitos Básicos – 2”.

**Solução:** As afirmações  $a$ ,  $b$ , e  $d$  são todas as afirmações corretas.

# Exercícios – Solução

- Exercício 13 da Lista de Exercícios “Conceitos Básicos – 2”.

**Solução:** As afirmações  $a$ ,  $b$ ,  $e$  e  $f$  são todas as afirmações corretas.