# Fluxo Máximo

Prof. Andrei Braga

UNIVERSIDADE FEDERAL DA FRONTEIRA SUL

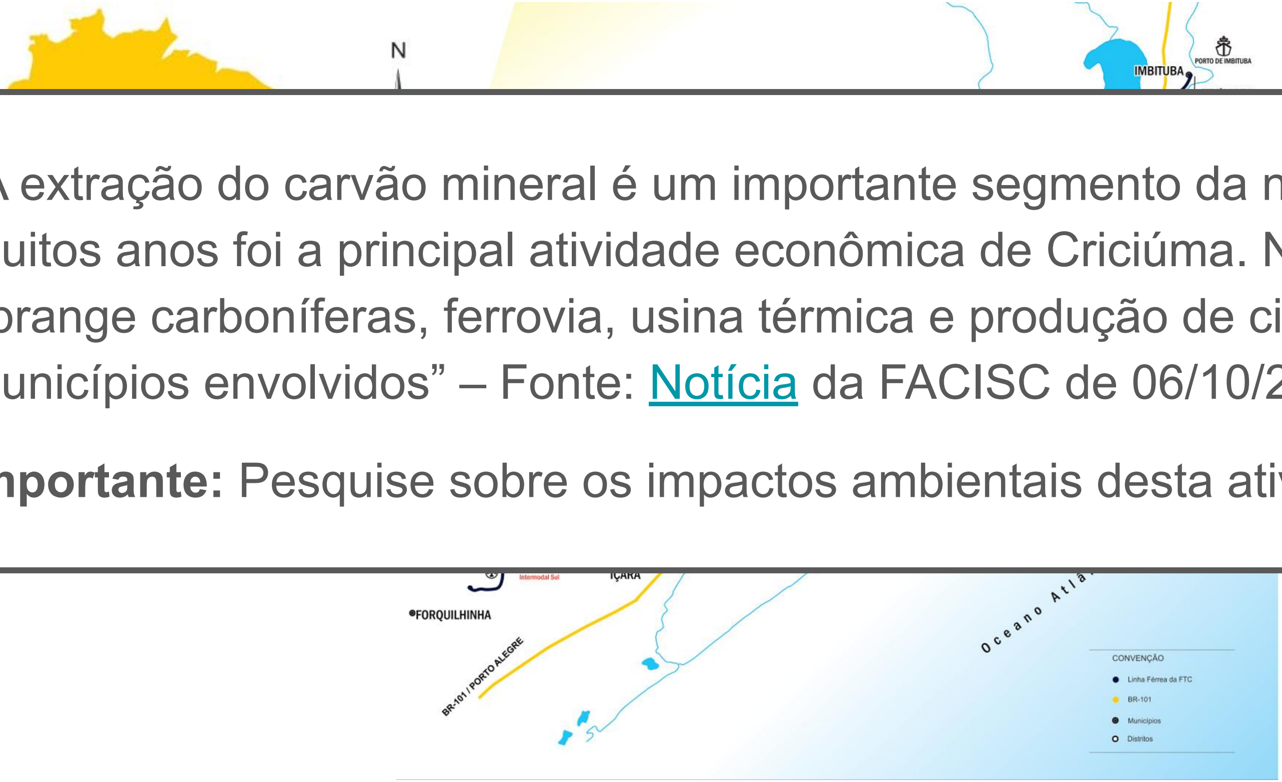
# Conteúdo

# Carvão mineral



Imagem: FTC, CC0, via Wikimedia Commons

# Carvão mineral




“A extração do carvão mineral é um importante segmento da nossa economia, por muitos anos foi a principal atividade econômica de Criciúma. No Sul catarinense, abrange carboníferas, ferrovia, usina térmica e produção de cimento. São 15 municípios envolvidos” – Fonte: Notícia da FACISC de 06/10/2021

**Importante:** Pesquise sobre os impactos ambientais desta atividade econômica

Imagem: FTC, CC0, via Wikimedia Commons

# Carvão mineral

Extração

Transporte

Utilização


Imagens – Fonte: Notícia da Agência AL de 05/04/2013

# Carvão mineral

Extração

Transporte

Utilização

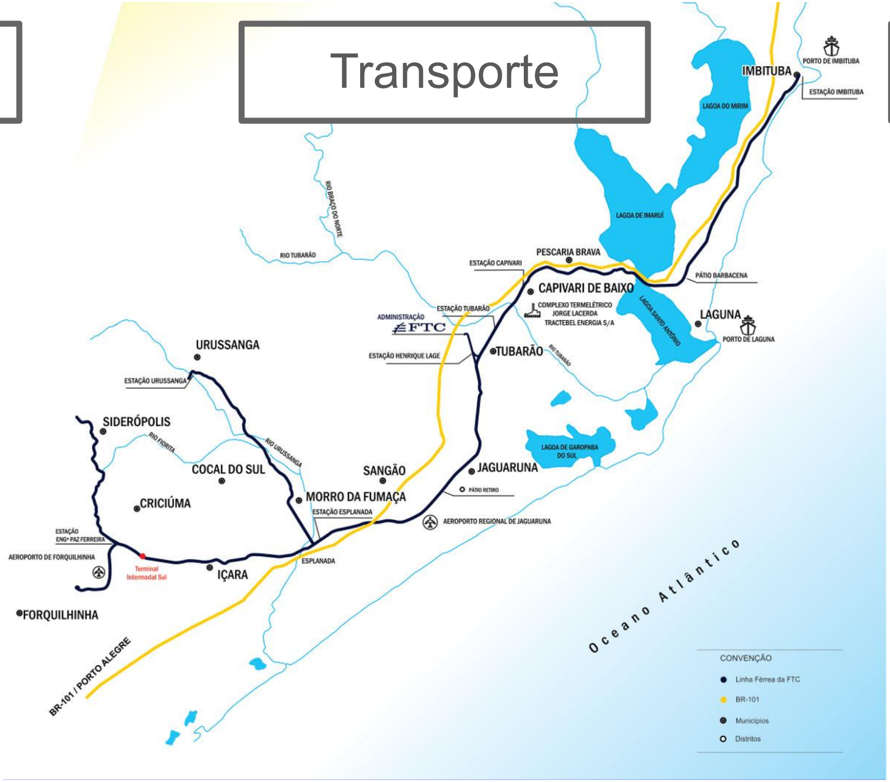
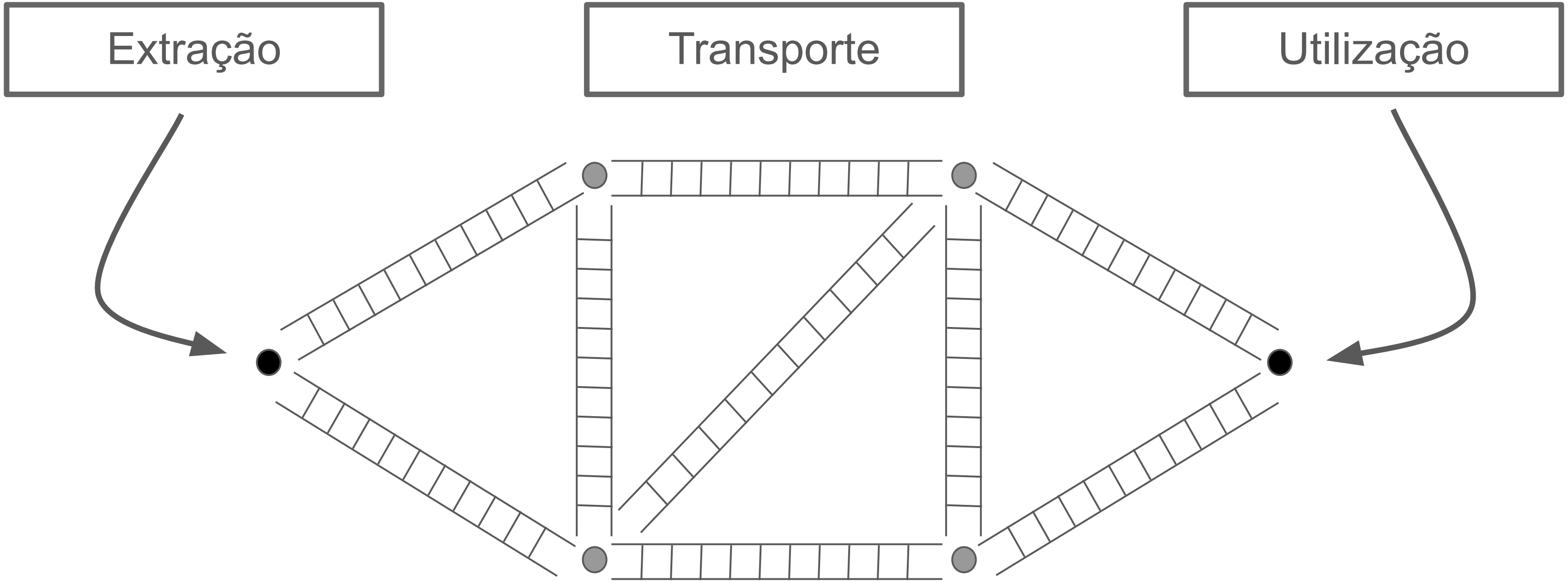
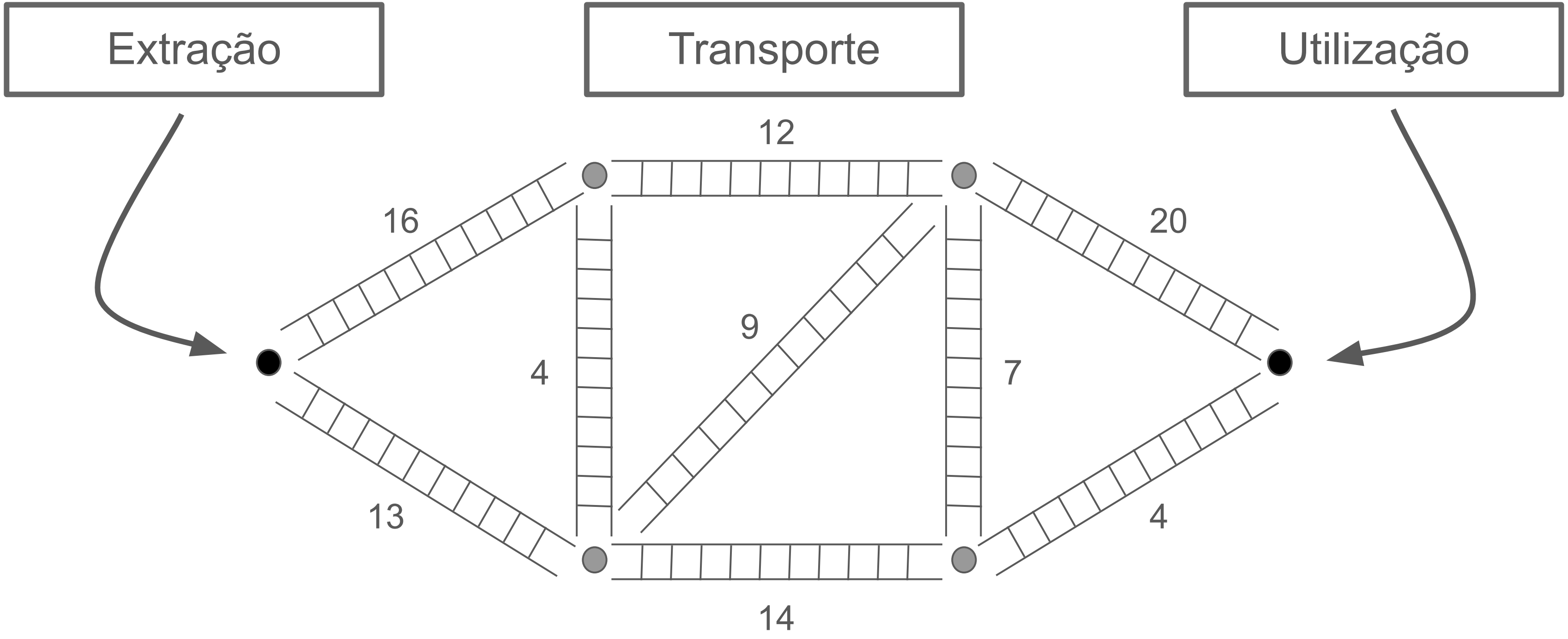



Imagem: FTC, CC0, via Wikimedia Commons

# Carvão mineral

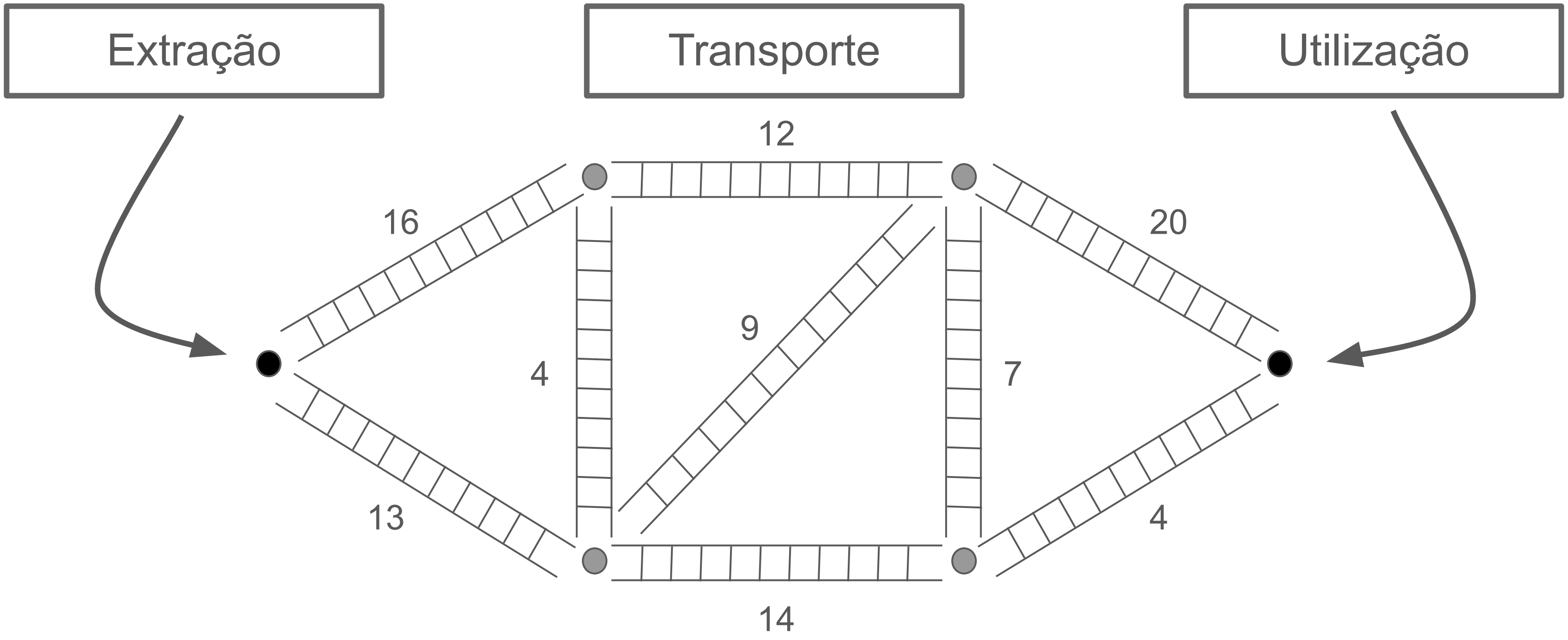


# Carvão mineral



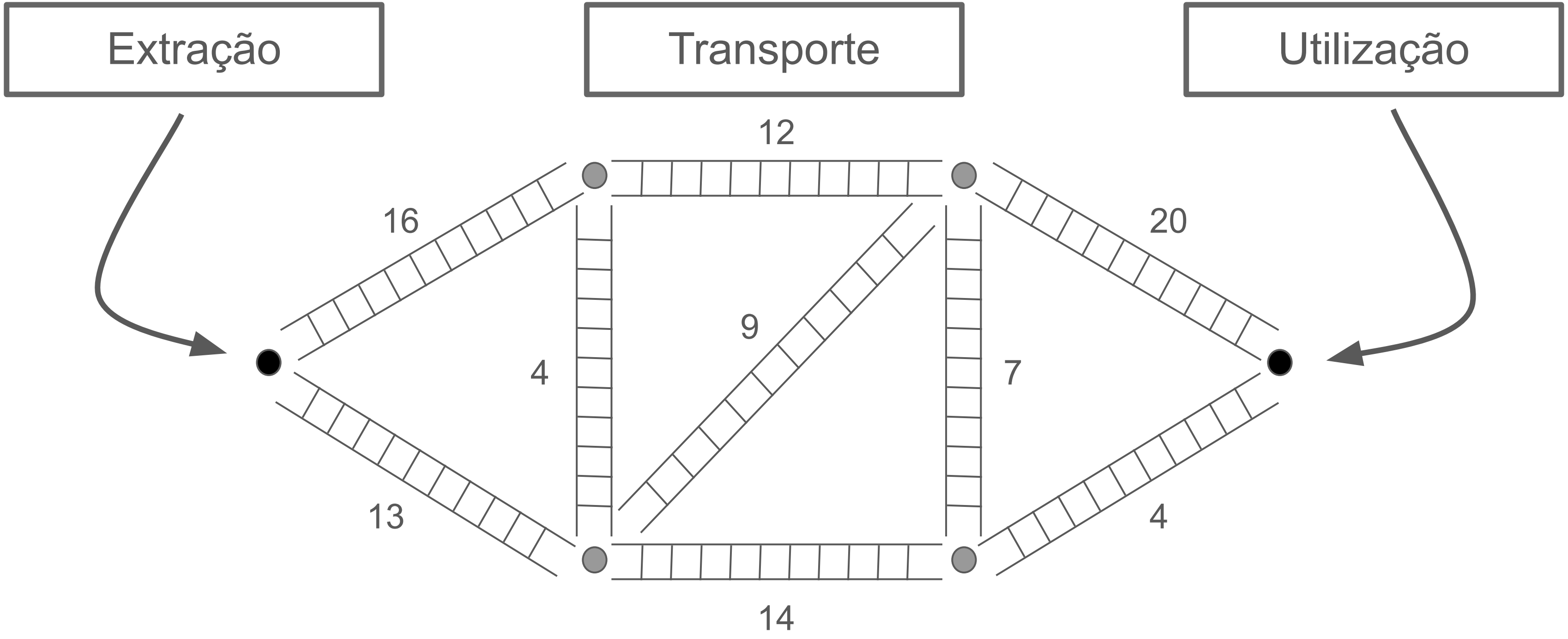

Capacidades diárias de carga das vias

# Carvão mineral



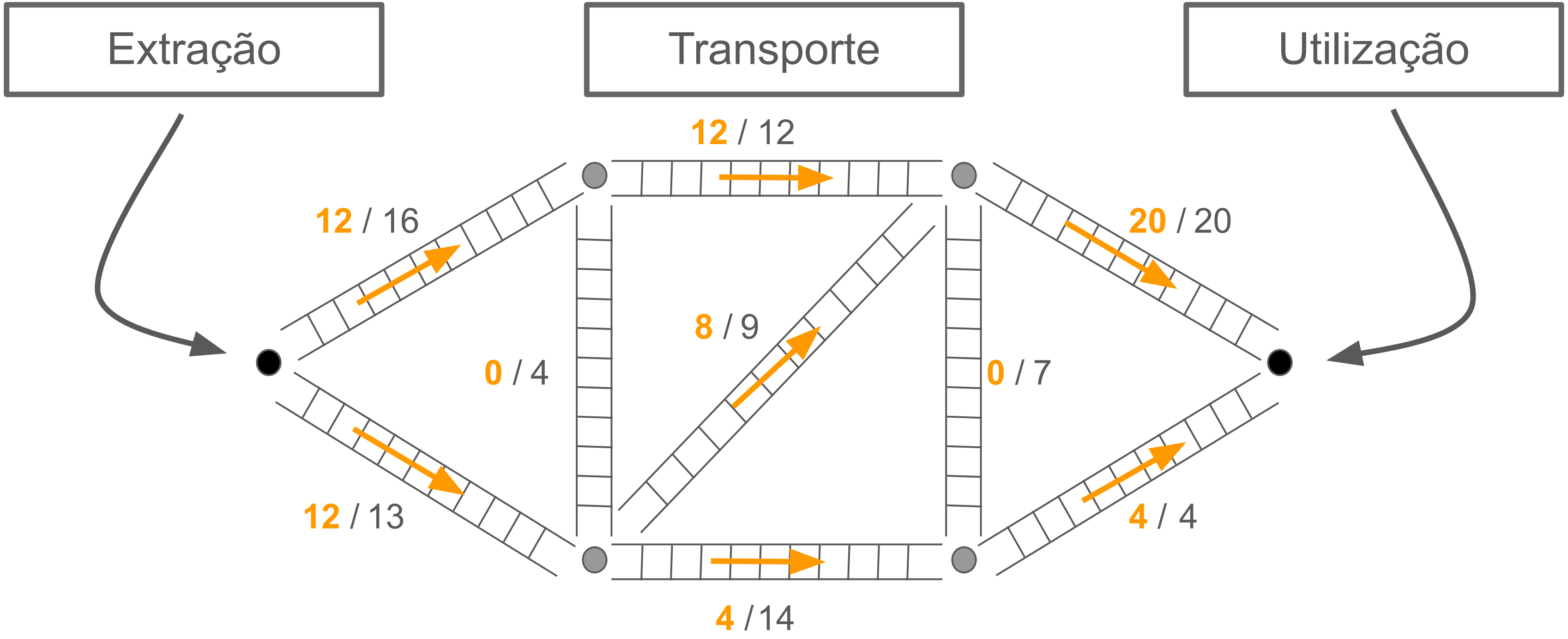

Em um entreposto ●, não ocorre nem adição, nem subtração de carga

# Carvão mineral - Problema



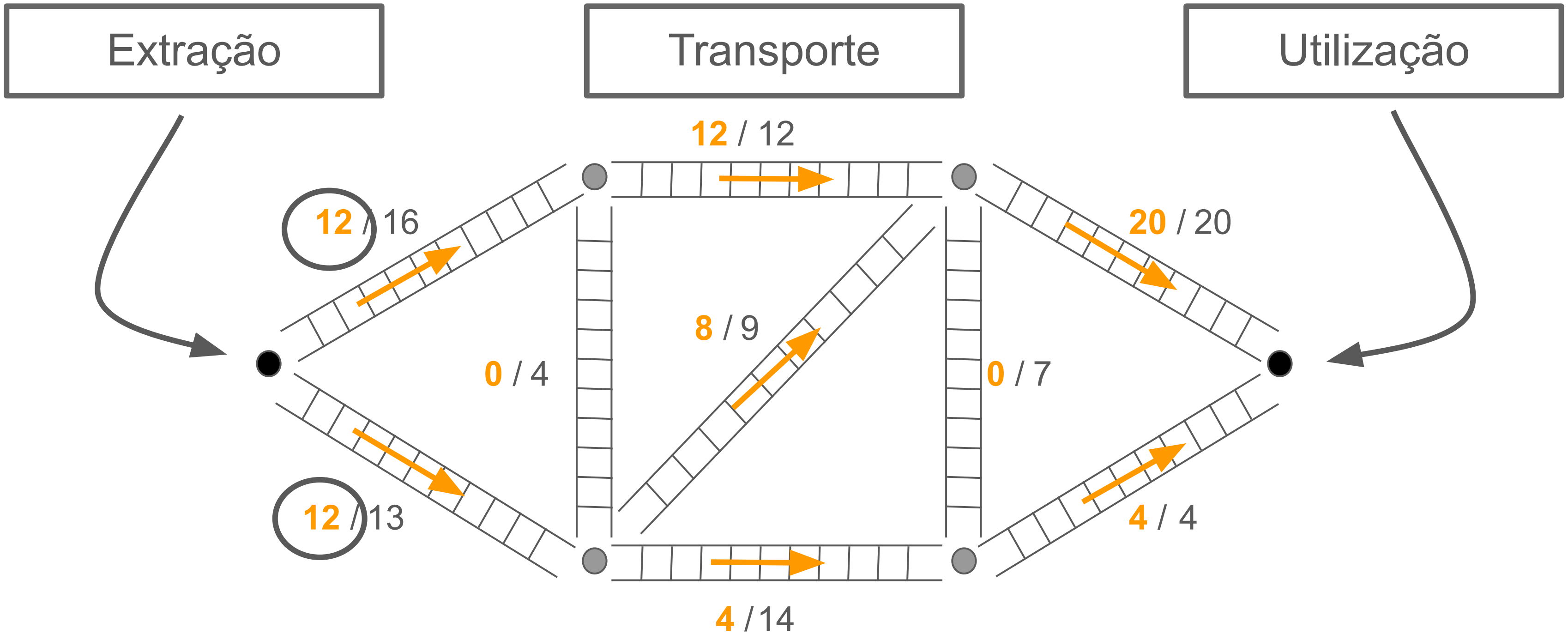

**Problema:** Qual é a maior quantidade diária de carga que podemos enviar do ponto de extração para o ponto de utilização?

# Carvão mineral - Problema



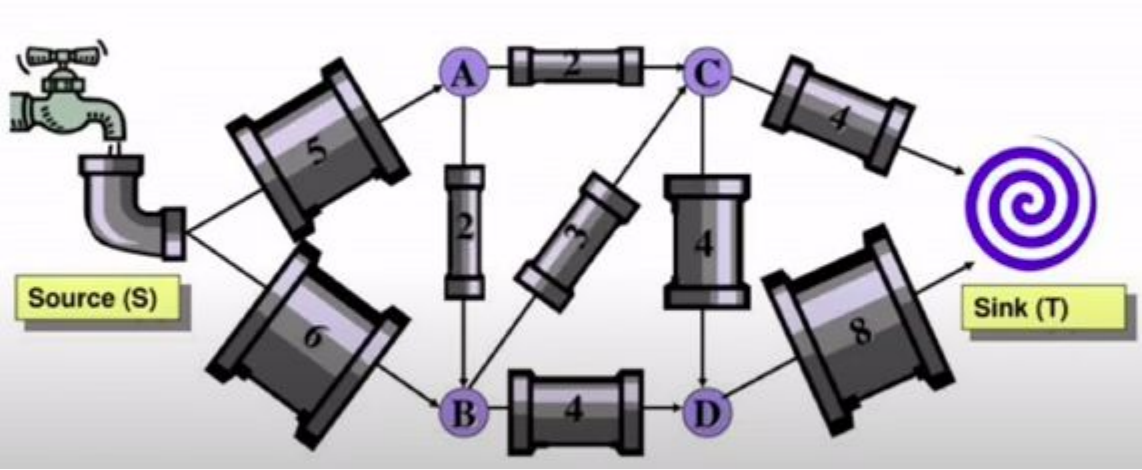

**Envios** que resultam na maior quantidade diária de carga possível de ser enviada do ponto de extração para o ponto de utilização

# Carvão mineral - Problema




É 24 (**12** + **12**) a maior quantidade diária de carga possível de ser enviada do ponto de extração para o ponto de utilização

# Rede por onde um material flui




The diagram above shows water flowing through a pipework system.

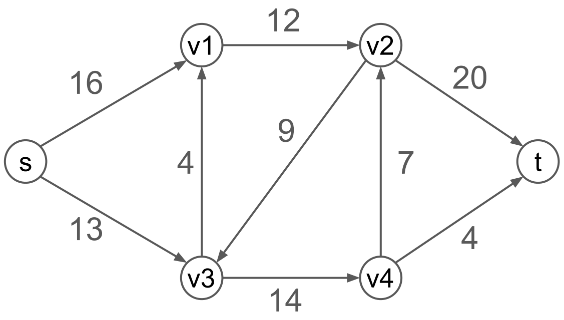
The values on the pipes are the *capacities* of water that they can carry.

# Rede de fluxo

Nas redes de fluxo que nos interessa estudar, *s* será **de fato** uma **fonte** (o grau de entrada de *s* será 0) e *f* será **de fato** um **sorvedouro** (o grau de saída de *t* será 0)

- Uma **rede de fluxo** é um grafo dirigido (digrafo) *G*
  - que possui pesos não-negativos nas arestas e
  - que tem um vértice *s* chamado de fonte e um vértice $t \neq s$ chamado de sorvedouro
- Em uma rede de fluxo *G*, dizemos que o peso de uma aresta *uv* é a sua **capacidade**, que denotamos por *c*(*uv*)

- Exemplo:

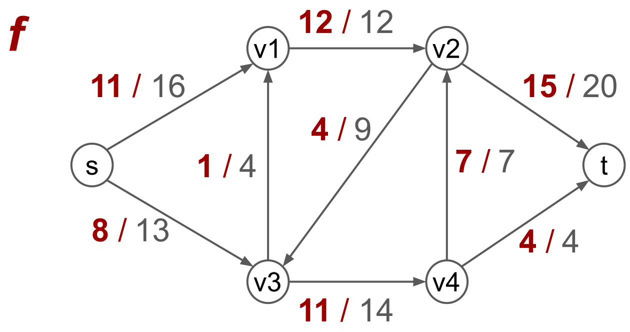



Esta rede **é diferente** da rede de vias do exemplo do **carvão mineral** (isto, por causa das direções das arestas)

# Fluxo

- Dada uma rede de fluxo *G*, uma função *f*: $E(G) \rightarrow \mathbb{R}$ atribui a cada aresta de *G* um valor real (em geral, vamos considerar apenas valores inteiros)

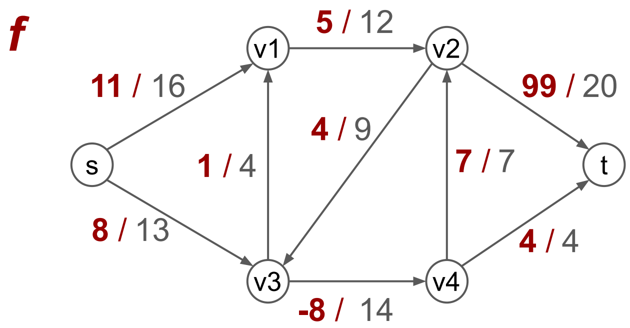
- Exemplo de *f*: $E(G) \rightarrow \mathbb{R}$:



# Fluxo

- Dada uma rede de fluxo *G*, uma função *f*: $E(G) \rightarrow \mathbb{R}$ atribui a cada aresta de *G* um valor real (em geral, vamos considerar apenas valores inteiros)

- Exemplo de *f*: $E(G) \rightarrow \mathbb{R}$:



# Fluxo

- Dada uma rede de fluxo $G$, um **fluxo** em $G$ é uma função $f$: $E(G) \to \mathbb{R}$ tal que
  - $0 \leq f(uv) \leq c(uv)$, para toda aresta $uv$ de $G$
  - $\sum_{v \in N^-(u)} f(vu) = \sum_{v \in N^+(u)} f(uv)$, para todo vértice $u$ de $G$ diferente de $s$ e $t$

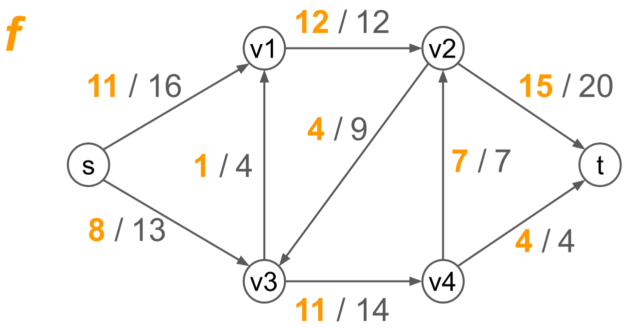
Um fluxo respeita as capacidades das arestas (restrição de capacidade)

Para cada vértice diferente de $s$ e $t$, o **fluxo que entra** no vértice é **igual** ao **fluxo que sai** do vértice (conservação de fluxo)

# Fluxo

- Dada uma rede de fluxo $G$, um **fluxo** em $G$ é uma função $f$: $E(G) \to \mathbb{R}$ tal que
  - $0 \leq f(uv) \leq c(uv)$, para toda aresta $uv$ de $G$
  - $\sum_{v \in N^-(u)} f(vu) = \sum_{v \in N^+(u)} f(uv)$, para todo vértice $u$ de $G$ diferente de $s$ e $t$

- Exemplo:



# Fluxo

- Dada uma rede de fluxo $G$, um **fluxo** em $G$ é uma função $f$: $E(G) \to \mathbb{R}$ tal que
  - $0 \leq f(uv) \leq c(uv)$, para toda aresta $uv$ de $G$
  - $\sum_{v \in N^{-}(u)} f(vu) = \sum_{v \in N^{+}(u)} f(uv)$, para todo vértice $u$ de $G$ diferente de $s$ e $t$
- Dizemos que $f(uv)$ é o **fluxo na aresta** *uv*
- O **valor do fluxo** $f$, denotado por $|f|$ é dado por

  $$| f | = \sum_{v \in N^{+}(s)} f(sv) - \sum_{v \in N^{-}(s)} f(vs)$$

# Fluxo

- Dada uma rede de fluxo $G$, um **fluxo** em $G$ é uma função $f$: $E(G) \to \mathbb{R}$ tal que
  - $0 \leq f(uv) \leq c(uv)$, para toda aresta $uv$ de $G$
  - $\sum_{v \in N^-(u)} f(vu) = \sum_{v \in N^+(u)} f(uv)$, para todo vértice $u$ de $G$ diferente de $s$ e $t$
- Dizemos que $f(uv)$ é o **fluxo na aresta** *uv*
- O **valor do fluxo** $f$, denotado por $|f|$ é dado por

$$|f| = \sum_{v \in N^+(s)} f(sv)$$

Nas redes de fluxo que nos interessa estudar, *s* será **de fato** uma **fonte** (o grau de entrada de *s* será 0) e *f* será **de fato** um **sorvedouro** (o grau de saída de *t* será 0)

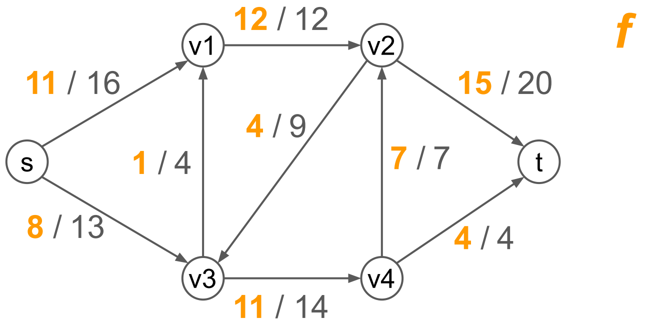
# Fluxo

- Dada uma rede de fluxo $G$, um **fluxo** em $G$ é uma função $f$: $E(G) \rightarrow \mathbb{R}$ tal que
  - $0 \leq f(uv) \leq c(uv)$, para toda aresta $uv$ de $G$
  - $\sum_{v \in N^-(u)} f(vu) = \sum_{v \in N^+(u)} f(uv)$, para todo vértice $u$ de $G$ diferente de $s$ e $t$
- Dizemos que $f(uv)$ é o **fluxo na aresta** $uv$
- O **valor do fluxo** $f$, denotado por $|f|$ é dado por

  $$|f| = \sum_{v \in N^+(s)} f(sv)$$

- Exemplo:

  Valor de $f$: 11 + 8 = 19

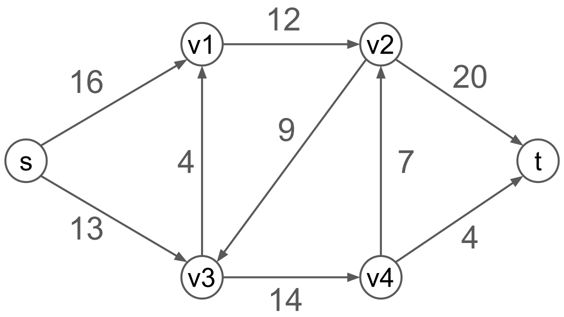


# Problema do fluxo máximo

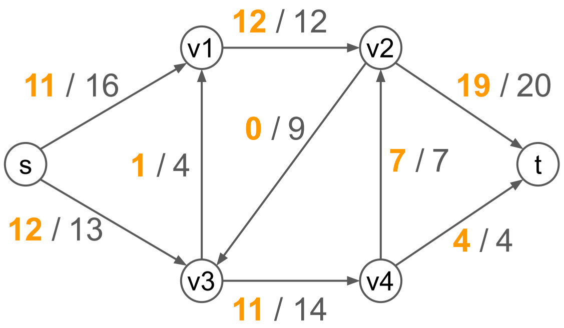
- Dada uma rede de fluxo *G*, encontre um fluxo *f* em *G* de valor máximo

- Exemplo:

*G*




***f*** é um fluxo em *G* de valor máximo




Esta rede **é diferente** da rede de vias do exemplo do **carvão mineral** (isto, por causa das direções das arestas)

Valor de ***f***: 11 + 12 = 23

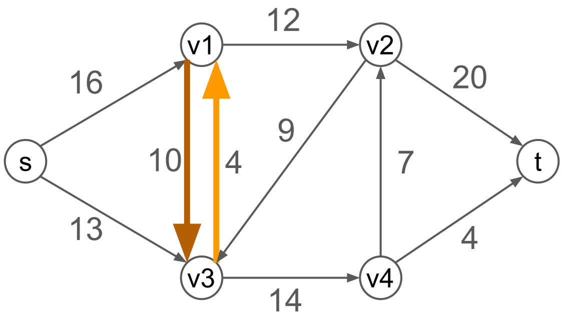
# Problema do fluxo máximo

- Dada uma rede de fluxo *G*, encontre um fluxo *f* em *G* de valor máximo

- Podemos resolver este problema usando o **método de Ford-Fulkerson**
- Este método, porém, requer que uma transformação seja feita na rede de fluxo recebida como entrada

# Eliminação de ciclos de comprimento 2

- O método de Ford-Fulkerson requer que a rede de fluxo recebida como entrada **não contenha ciclos de comprimento 2**
- Isto não representa uma restrição importante, pois podemos facilmente eliminar ciclos de comprimento 2 de uma rede de fluxo
- Eliminação de ciclos de comprimento 2:

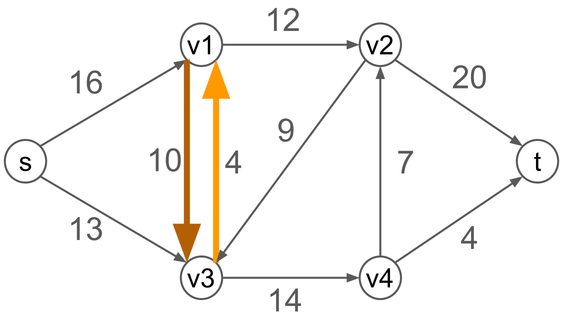


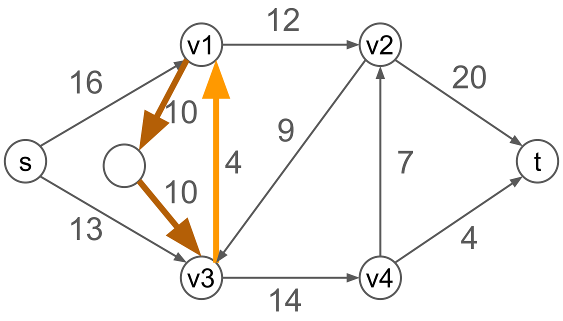

Como modificar a rede de fluxo de forma que

- o ciclo de comprimento 2 seja eliminado e
- o valor máximo de um fluxo na rede não seja alterado?

# Eliminação de ciclos de comprimento 2

- O método de Ford-Fulkerson requer que a rede de fluxo recebida como entrada **não contenha ciclos de comprimento 2**
- Isto não representa uma restrição importante, pois podemos facilmente eliminar ciclos de comprimento 2 de uma rede de fluxo
- Eliminação de ciclos de comprimento 2:



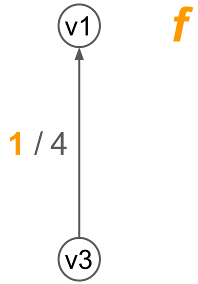
# Rede residual

- O método de Ford-Fulkerson usa o conceito de rede residual, visto a seguir

- Dados uma rede de fluxo $G$ e um fluxo $f$ em $G$, a **rede residual** de $G$ induzida por $f$, denotada por $G_f$, é a rede de fluxo tal que
  - os vértices de $G_f$ são iguais aos vértices de $G$ (ou seja, $V(G_f) = V(G)$) e
  - para cada aresta $uv$ de $G$,
    - $G_f$ contém a aresta $uv$ se $c(uv) - f(uv) > 0$ e
    - $G_f$ contém a aresta $vu$ se $f(uv) > 0$

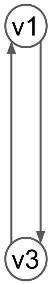
# Rede residual

- Dados uma rede de fluxo $G$ e um fluxo $f$ em $G$, a **rede residual** de $G$ induzida por $f$, denotada por $G_f$, é a rede de fluxo tal que
  - os vértices de $G_f$ são iguais aos vértices de $G$ (ou seja, $V(G_f) = V(G)$) e
  - para cada aresta $uv$ de $G$,
    - $G_f$ contém a aresta $uv$ se $c(uv) - f(uv) > 0$ e
    - $G_f$ contém a aresta $vu$ se $f(uv) > 0$
- Exemplo:




aresta de $G$

$G_f$ contém $v_3v_1$ porque $c(v_3v_1) - f(v_3v_1) = 3 > 0$

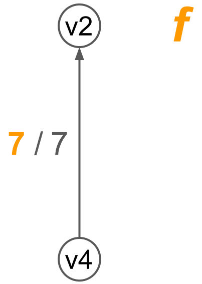



$G_f$ contém $v_1v_3$ porque $f(v_3v_1) = 1 > 0$

arestas correspondentes de $G_f$

# Rede residual

- Dados uma rede de fluxo $G$ e um fluxo $f$ em $G$, a **rede residual** de $G$ induzida por $f$, denotada por $G_f$ , é a rede de fluxo tal que
  - os vértices de $G_f$ são iguais aos vértices de $G$ (ou seja, $V(G_f) = V(G)$) e
  - para cada aresta $uv$ de $G$,
    - $G_f$ contém a aresta $uv$ se $c(uv) - f(uv) > 0$ e
    - $G_f$ contém a aresta $vu$ se $f(uv) > 0$
- Exemplo:




aresta de $G$

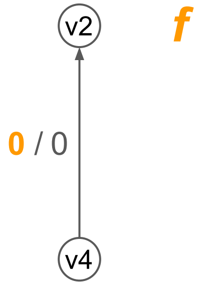
$G_f$ **não** contém $v_4v_2$ porque $c(v_4v_2) - f(v_4v_2) = 0$


$G_f$ contém $v_2v_4$ porque $f(v_4v_2) = 7 > 0$

arestas correspondentes de $G_f$

# Rede residual

- Dados uma rede de fluxo $G$ e um fluxo $f$ em $G$, a **rede residual** de $G$ induzida por $f$, denotada por $G_f$, é a rede de fluxo tal que
  - os vértices de $G_f$ são iguais aos vértices de $G$ (ou seja, $V(G_f) = V(G)$) e
  - para cada aresta $uv$ de $G$,
    - $G_f$ contém a aresta $uv$ se $c(uv) - f(uv) > 0$ e
    - $G_f$ contém a aresta $vu$ se $f(uv) > 0$
- Exemplo:




aresta de $G$

$G_f$ **não** contém $v_4v_2$ porque $c(v_4v_2) - f(v_4v_2) = 0$

$G_f$ **não** contém $v_2v_4$ porque $f(v_4v_2) = 0$


arestas correspondentes de $G_f$

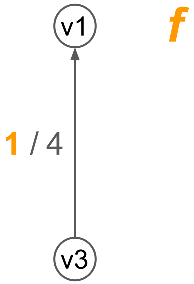
# Rede residual

- Dados uma rede de fluxo $G$ e um fluxo $f$ em $G$, a **rede residual** de $G$ induzida por $f$, denotada por $G_f$ , é a rede de fluxo tal que
  - os vértices de $G_f$ são iguais aos vértices de $G$ (ou seja, $V(G_f) = V(G)$) e
  - para cada aresta $uv$ de $G$,
    - $G_f$ contém a aresta $uv$ se $c(uv) - f(uv) > 0$ e
    - $G_f$ contém a aresta $vu$ se $f(uv) > 0$
  - No primeiro caso acima, $c_f(uv) = c(uv) - f(uv)$ é a **capacidade da aresta** $uv$ em $G_f$ e, no segundo caso acima, $c_f(vu) = f(uv)$ é a **capacidade da aresta** $vu$ em $G_f$

# Rede residual

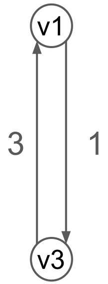
- Dados uma rede de fluxo $G$ e um fluxo $f$ em $G$, a **rede residual** de $G$ induzida por $f$, denotada por $G_f$, é a rede de fluxo tal que
  - $c_f(uv) = c(uv) - f(uv)$ é a **capacidade da aresta** $uv$ em $G_f$ e
  - $c_f(vu) = f(uv)$ é a **capacidade da aresta** $vu$ em $G_f$

- Exemplo:




aresta de $G$

$c_f(v_3v_1) = 3$



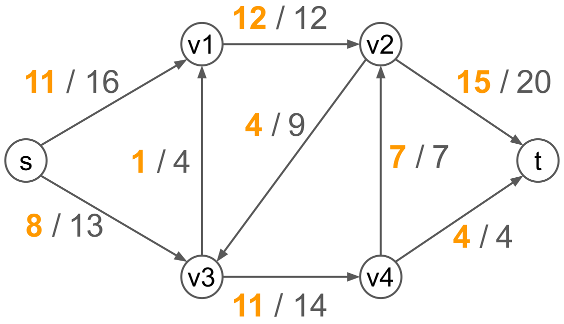

$c_f(v_1v_3) = 1$

arestas correspondentes de $G_f$

# Rede residual

- Exemplo de rede residual:

$G$

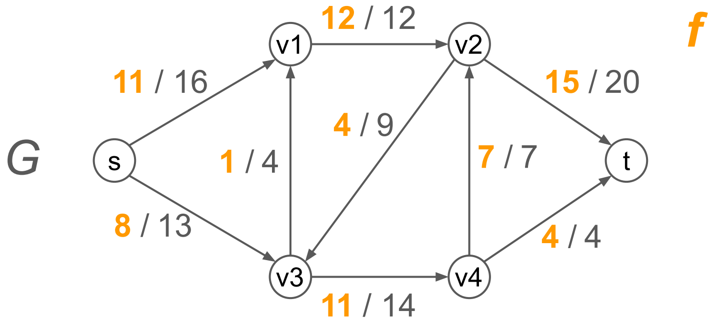


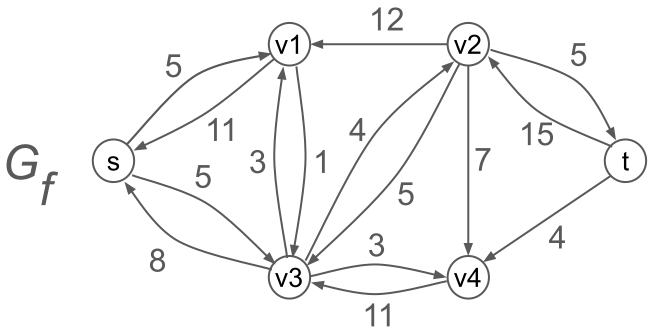

$f$

$G_f$

# Rede residual

- Exemplo de rede residual:



# Método de Ford-Fulkerson

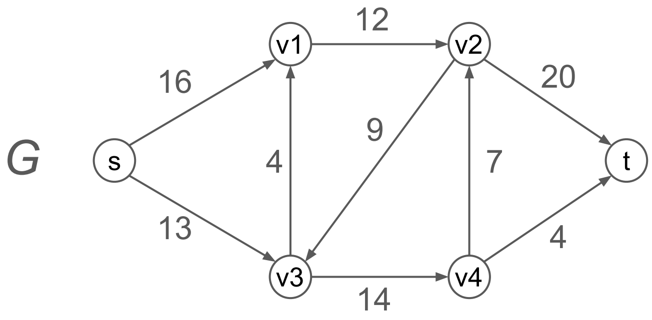
*G* é uma rede de fluxo que não contém ciclos de comprimento 2

Ford-Fulkerson($G$)

1. Inicialize $f$ fazendo $f(uv) = 0$ para cada aresta $uv$ de $G$
2. Enquanto existe um $st$-caminho $P$ na rede residual $G_f$, faça:
3.     Determine $d$ sendo $d$ a menor capacidade de uma aresta de $P$ na rede residual $G_f$ – ou seja, $d = \min\{ c_f(uv) : uv \text{ é uma aresta de } P \}$
4.     Atualize $f$ fazendo o seguinte para cada aresta $uv$ de $P$ :
5.         Se a aresta $uv$ existe em $G$:
6.             $f(uv) = f(uv) + d$
7.         Senão: // neste caso, a aresta $vu$ existe em $G$
8.             $f(vu) = f(vu) - d$
9. Retorne $f$

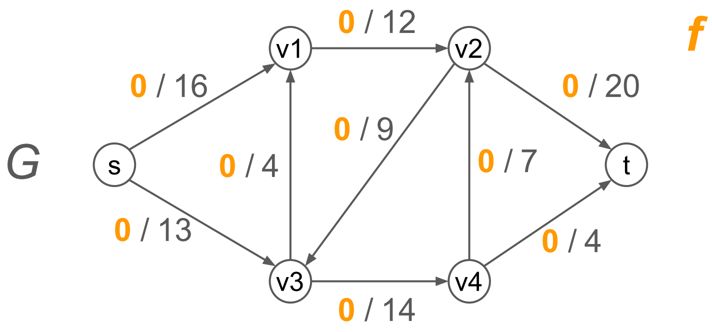
# Método de Ford-Fulkerson - Exemplo de execução 1

- Rede de fluxo recebida como entrada:



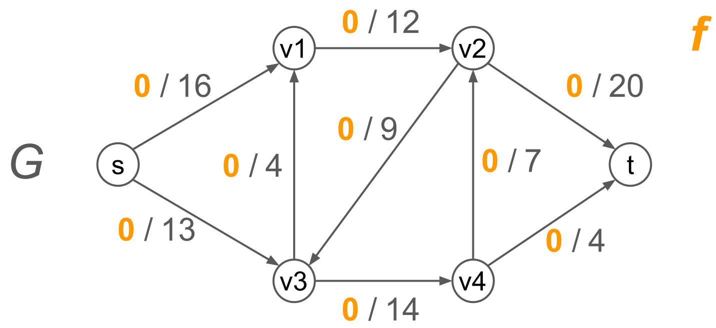
# Método de Ford-Fulkerson - Exemplo de execução 1

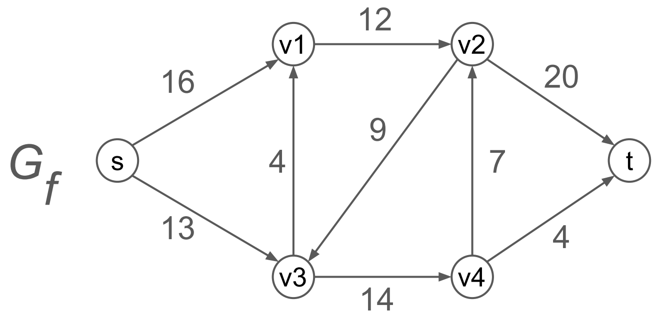
- Passo 1:



# Método de Ford-Fulkerson - Exemplo de execução 1

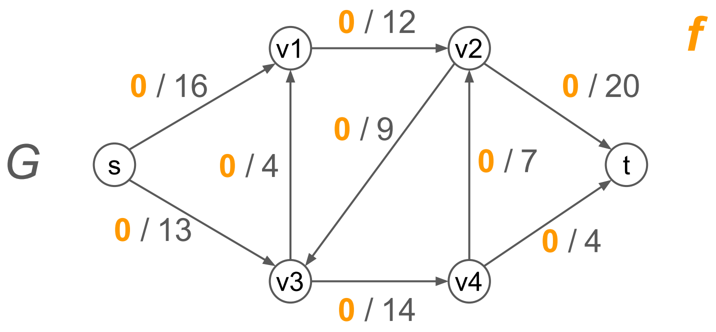
- 1ª. execução dos passos 2 e 3:

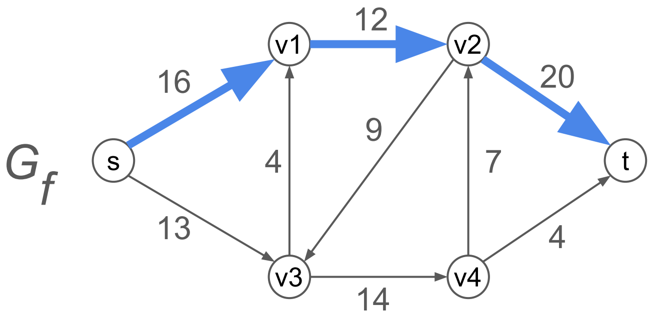


# Método de Ford-Fulkerson - Exemplo de execução 1

- 1ª. execução dos passos 2 e 3:



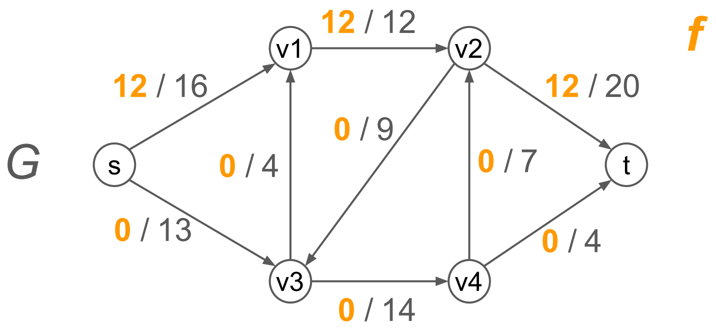




*st*-caminho ***P*** em $G_f$

Menor capacidade de uma aresta de ***P***: 12

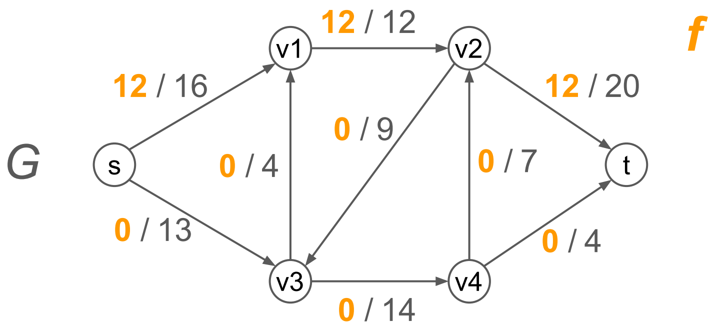
# Método de Ford-Fulkerson - Exemplo de execução 1

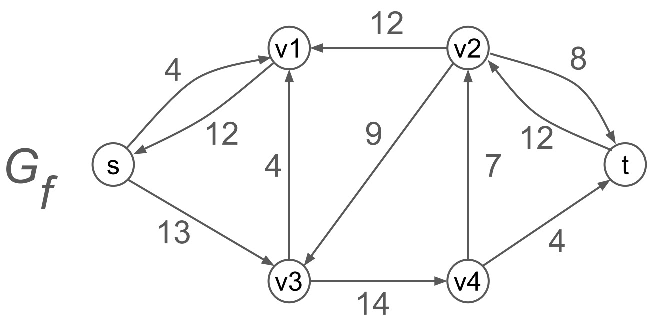
- 1ª. execução dos passos 4 a 8:



# Método de Ford-Fulkerson - Exemplo de execução 1

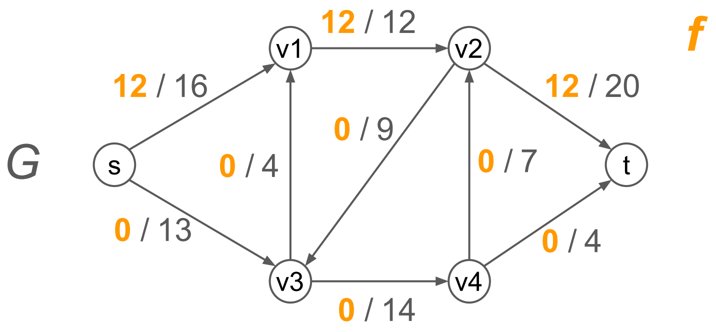
- 2ª. execução dos passos 2 e 3:

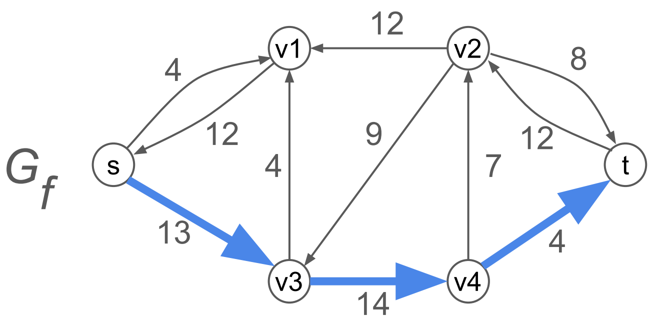


# Método de Ford-Fulkerson - Exemplo de execução 1

- 2ª. execução dos passos 2 e 3:



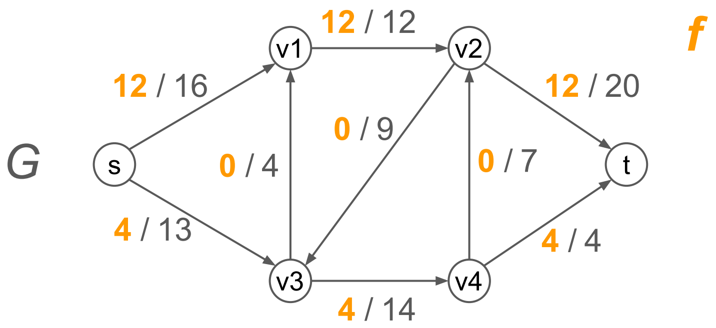




*st*-caminho ***P*** em $G_f$

Menor capacidade de uma aresta de ***P***: 4

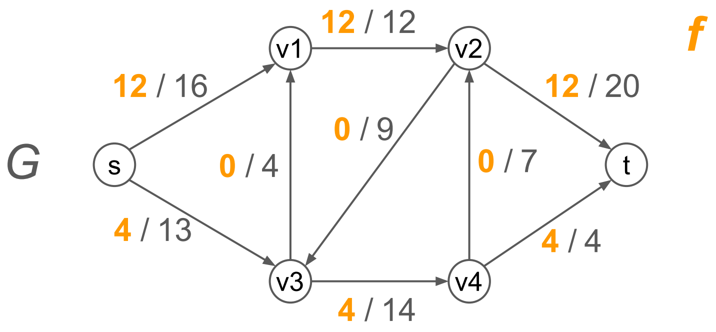
# Método de Ford-Fulkerson - Exemplo de execução 1

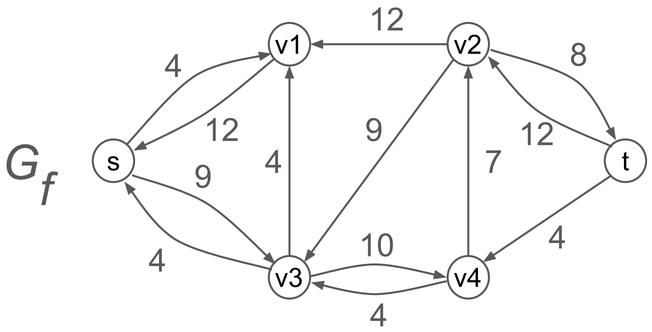
- 2ª. execução dos passos 4 a 8:



# Método de Ford-Fulkerson - Exemplo de execução 1

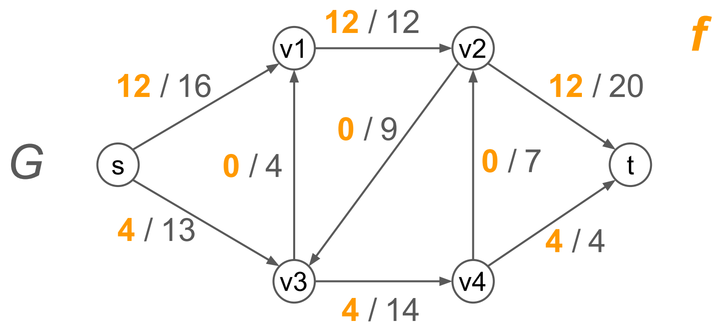
- 3ª. execução dos passos 2 e 3:

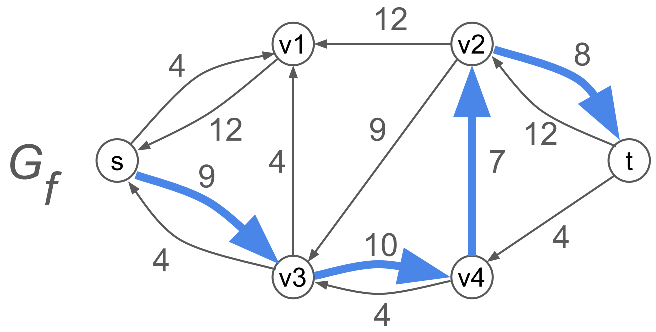


# Método de Ford-Fulkerson - Exemplo de execução 1

- 3ª. execução dos passos 2 e 3:



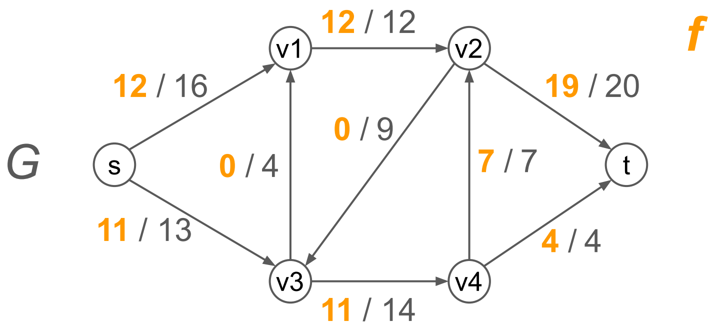




*st*-caminho ***P*** em $G_f$

Menor capacidade de uma aresta de ***P***: 7

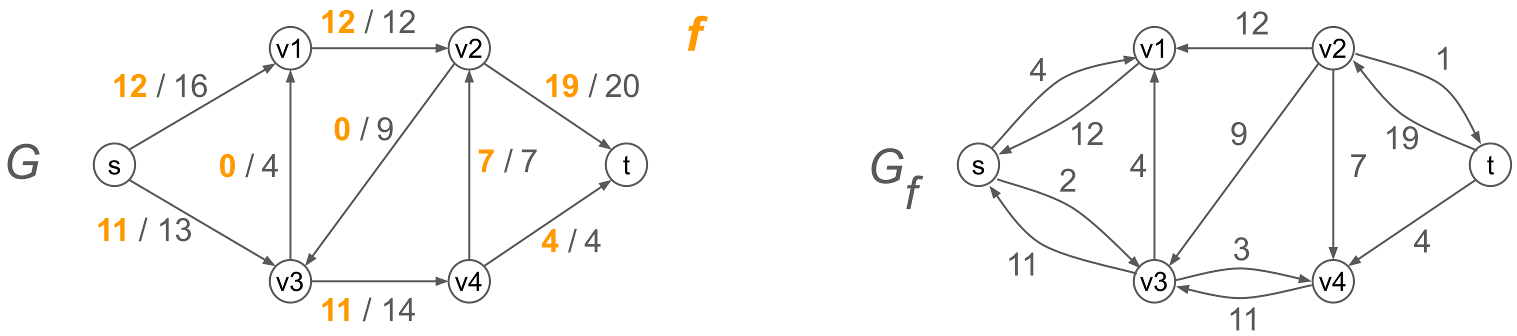
# Método de Ford-Fulkerson - Exemplo de execução 1

- 3ª. execução dos passos 4 a 8:



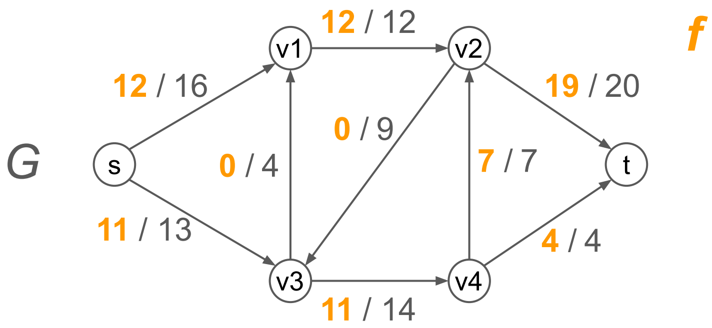
# Método de Ford-Fulkerson - Exemplo de execução 1

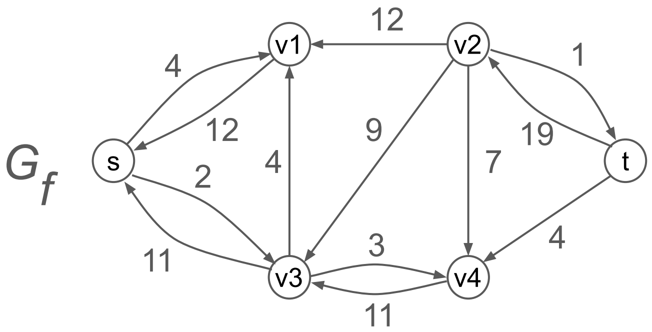
- 4ª. execução do passo 2:



# Método de Ford-Fulkerson - Exemplo de execução 1

- 4ª. execução do passo 2:



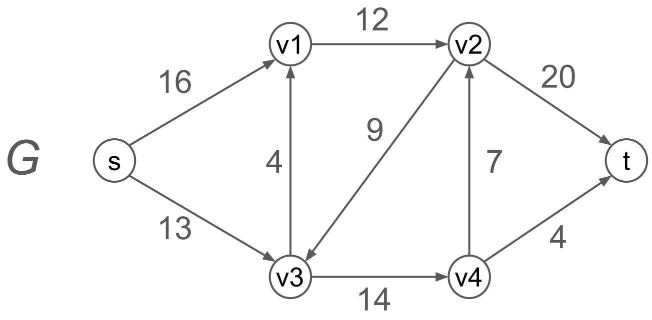




Não existe um *st*-caminho em $G_f$

O laço dos passos 2 a 8 acaba e o método retorna *f*

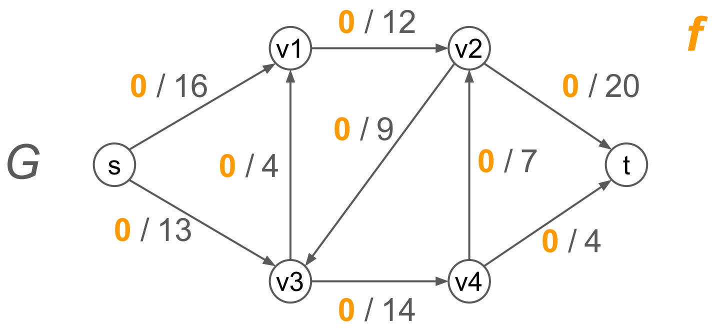
# Método de Ford-Fulkerson - Exemplo de execução 2

- Rede de fluxo recebida como entrada:



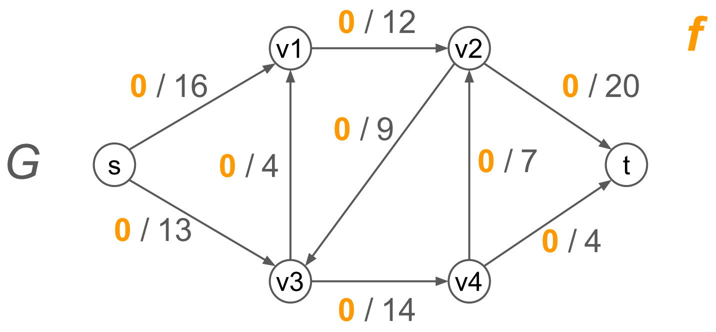
# Método de Ford-Fulkerson - Exemplo de execução 2

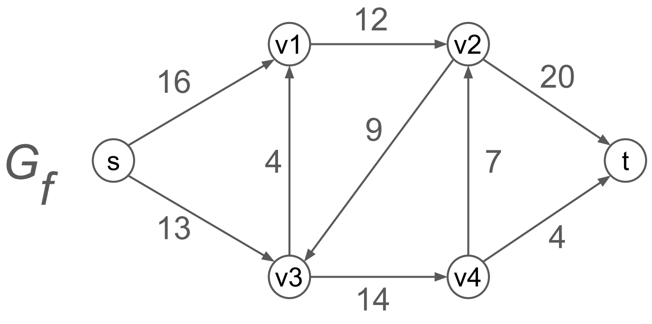
- Passo 1:



# Método de Ford-Fulkerson - Exemplo de execução 2

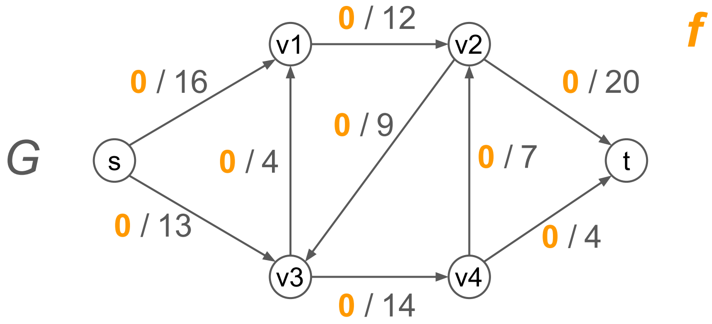
- 1ª. execução dos passos 2 e 3:

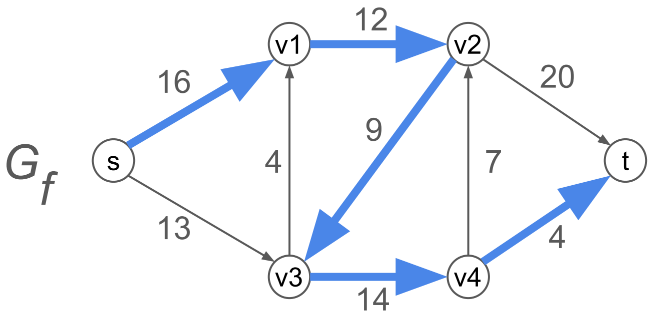


# Método de Ford-Fulkerson - Exemplo de execução 2

- 1ª. execução dos passos 2 e 3:



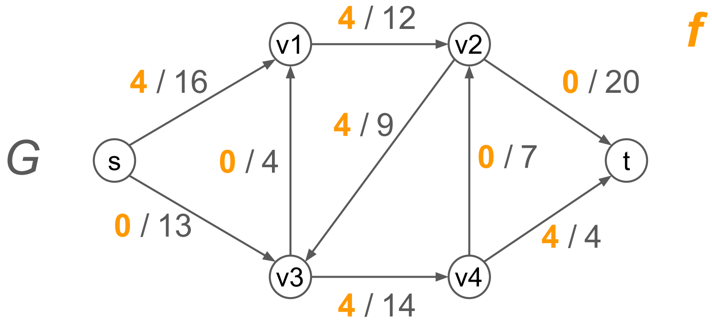




*st*-caminho ***P*** em $G_f$

Menor capacidade de uma aresta de ***P***: 4

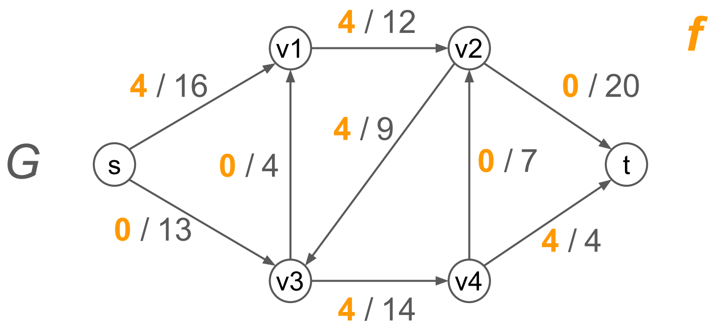
# Método de Ford-Fulkerson - Exemplo de execução 2

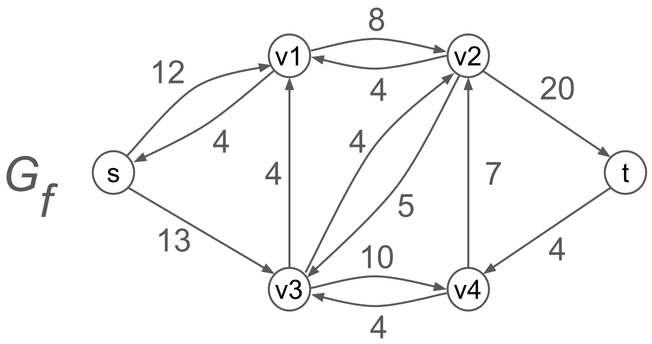
- 1ª. execução dos passos 4 a 8:



# Método de Ford-Fulkerson - Exemplo de execução 2

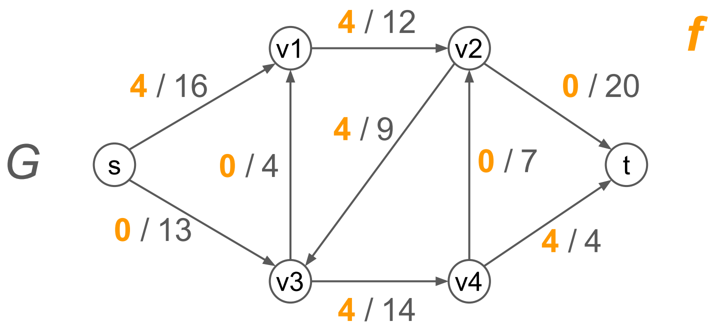
- 2ª. execução dos passos 2 e 3:

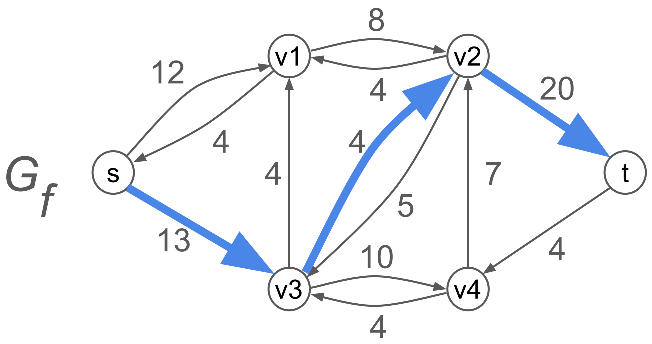


# Método de Ford-Fulkerson - Exemplo de execução 2

- 2ª. execução dos passos 2 e 3:



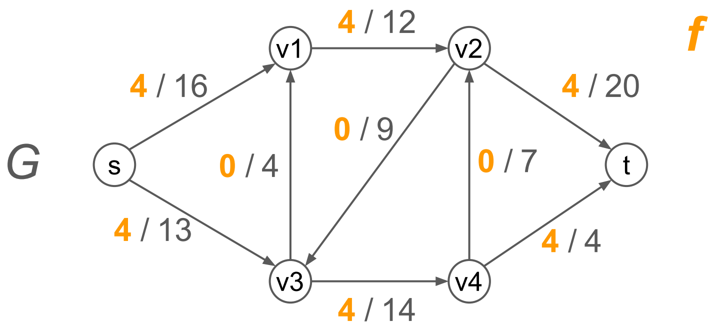




*st*-caminho ***P*** em $G_f$

Menor capacidade de uma aresta de ***P***: 4

# Método de Ford-Fulkerson - Exemplo de execução 2

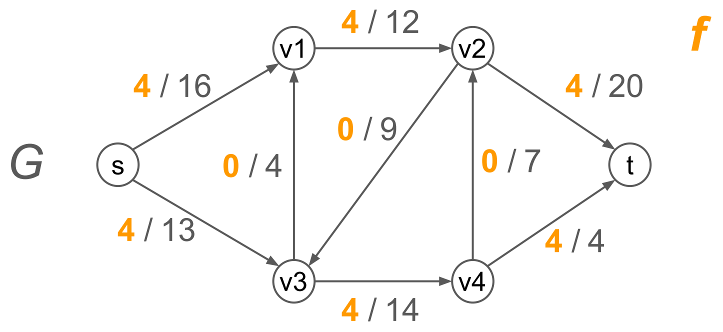
- 2ª. execução dos passos 4 a 8:

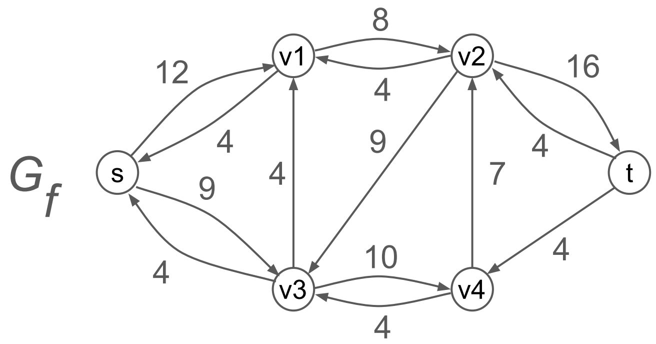



O fluxo na aresta $v_2v_3$ diminuiu (veja o slide anterior), mas o valor de ***f*** aumentou

# Método de Ford-Fulkerson - Exemplo de execução 2

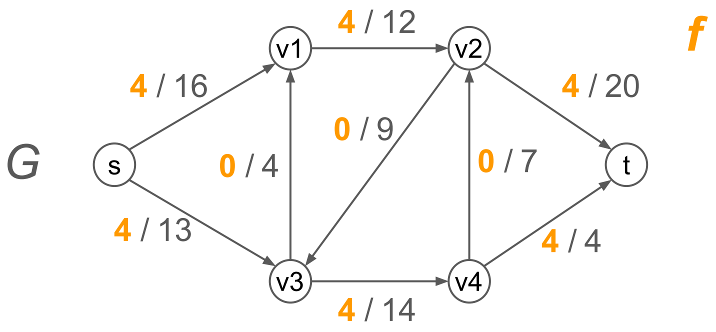
- 3ª. execução dos passos 2 e 3:

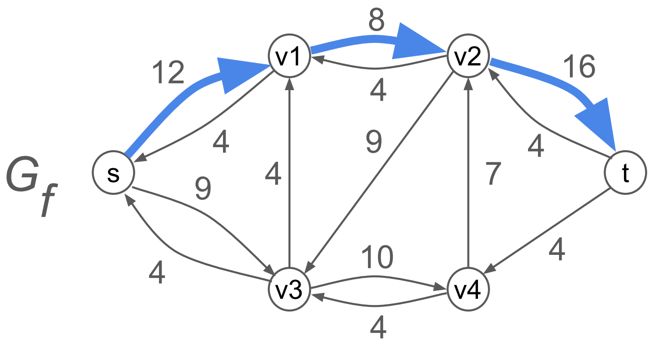


# Método de Ford-Fulkerson - Exemplo de execução 2

- 3ª. execução dos passos 2 e 3:



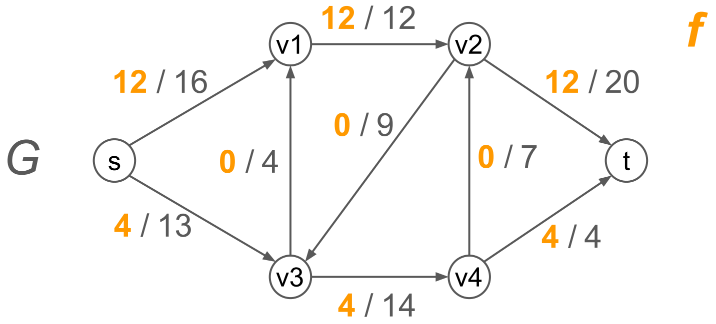




*st*-caminho ***P*** em $G_f$

Menor capacidade de uma aresta de ***P***: 8

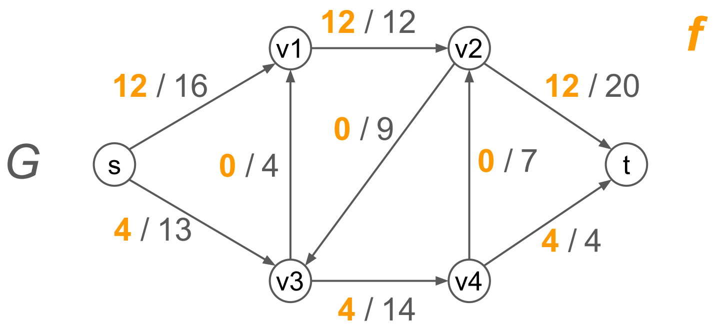
# Método de Ford-Fulkerson - Exemplo de execução 2

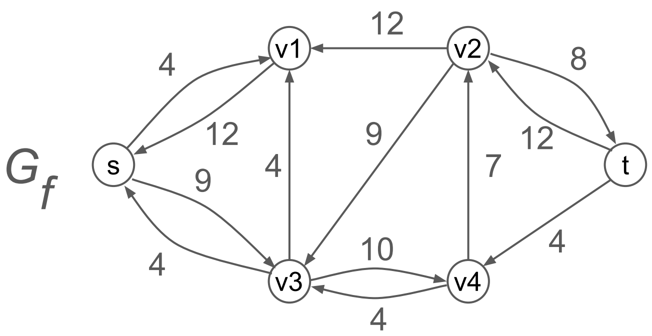
- 3ª. execução dos passos 4 a 8:



# Método de Ford-Fulkerson - Exemplo de execução 2

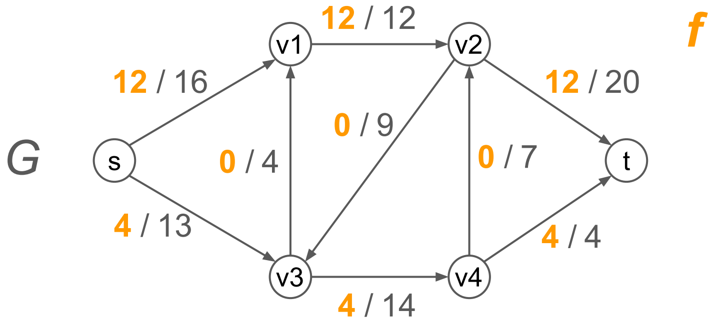
- 4ª. execução dos passos 2 e 3:

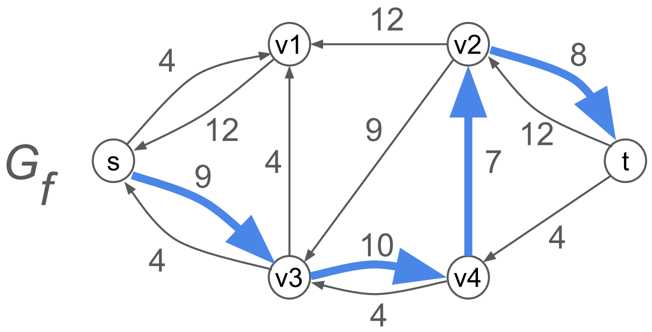


# Método de Ford-Fulkerson - Exemplo de execução 2

- 4ª. execução dos passos 2 e 3:



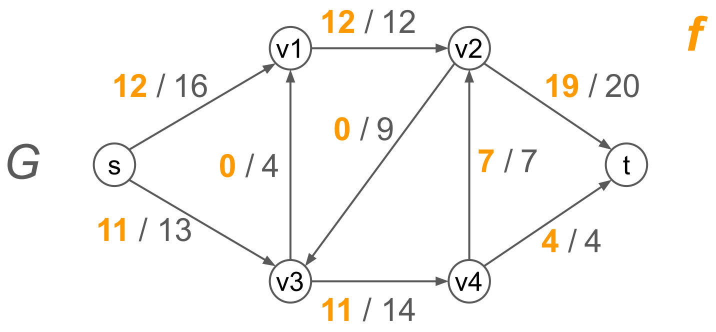




*st*-caminho ***P*** em $G_f$

Menor capacidade de uma aresta de ***P***: 7

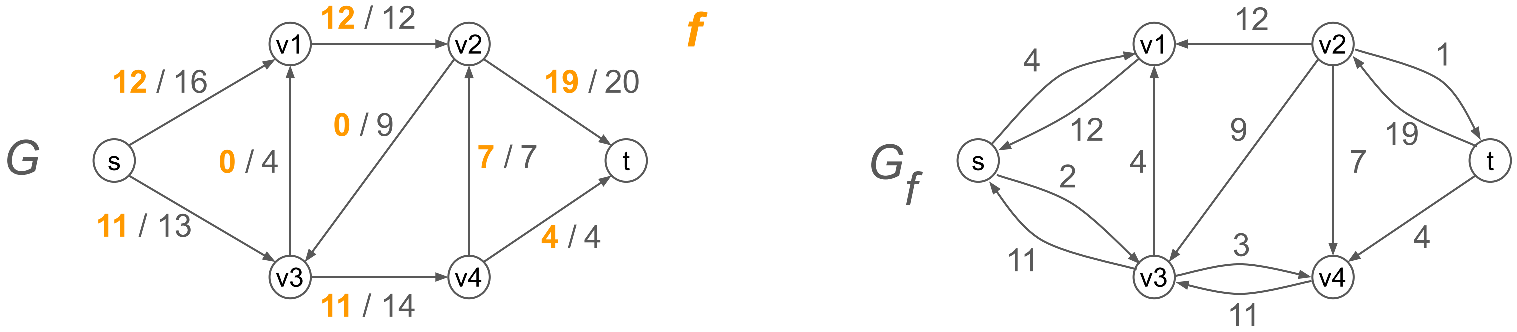
# Método de Ford-Fulkerson - Exemplo de execução 2

- 4ª. execução dos passos 4 a 8:



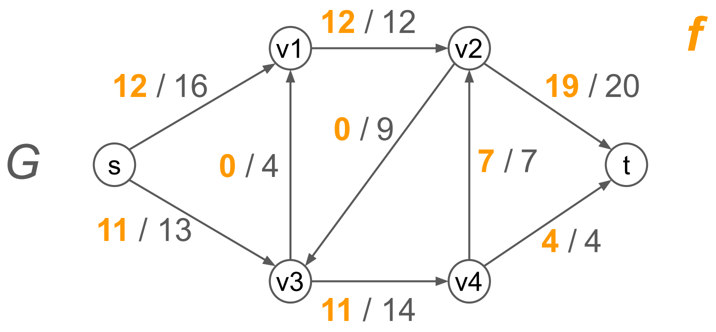
# Método de Ford-Fulkerson - Exemplo de execução 2

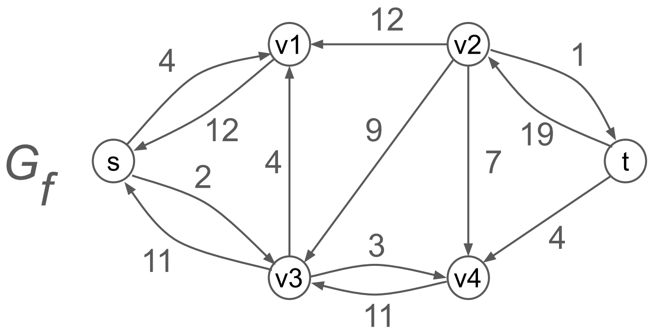
- 5ª. execução do passo 2:



# Método de Ford-Fulkerson - Exemplo de execução 2

- 5ª. execução do passo 2:




Não existe um *st*-caminho em $G_f$

O laço dos passos 2 a 8 acaba e o método retorna *f*

# Exercícios

- Exercício 1 da Lista de Exercícios “Fluxo Máximo”.

# Exercícios

- Exercício 2 da Lista de Exercícios “Fluxo Máximo”.

# Exercícios

- Demais exercícios da Lista de Exercícios “Fluxo Máximo”.

# Referências

- Esta apresentação é baseada nos seguintes materiais:


1. Capítulo 26 do livro
   Cormen, T. H., Leiserson, C. E., Rivest, R. L., Stein, C. Introduction to Algorithms. 3rd. ed. MIT Press, 2009.