**1ª LISTA DE EXERCÍCIOS DE NP010**
**PROGRAMAÇÃO LINEAR**
**Prof. Yvo M. C Masselli**

Um problema de programação matemática é linear se o propósito for otimizar (minimizar ou maximizar) uma função linear na presença de restrições lineares do tipo de igualdade e/ou desigualdade. Uma outra característica da PL é que todas as variáveis de decisão são não negativas. No caso geral, tem-se um modelo da seguinte forma:

$$
\begin{array}{ll}
\textit{Minimizar} & z = c_1x_1 + c_2x_2 + \ldots + c_nx_n \qquad (2.1) \\
\textit{Sujeito a} & a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n \geq b_1 \\
& a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n \geq b_2 \\
& \ldots \\
& a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n \geq b_m \\
& x_1, x_2, \ldots, x_n \geq 0
\end{array}
$$

onde, $n$ é o número de variáveis

$m$ é o número de restrições principais

**Outras formulações**

O modelo (2.1) pode ser representado pela seguinte forma geral:

$$
\begin{array}{lll}
\textit{Minimizar} & z = \sum_{i=1}^{n} c_i x_i & \qquad (2.2) \\
\textit{Sujeito a} & \sum_{i=1}^{n} a_{ij} x_i \geq b_j, & j = 1, ..., m \\
& x_i \geq 0, & i = 1,..., n
\end{array}
$$

Na notação matricial, o modelo (2.1) é escrito da seguinte forma:

$$
\begin{array}{ll}
\textit{Minimizar} & z = cx \qquad (2.3) \\
\textit{Sujeito a} & Ax \geq b \\
& x \geq 0
\end{array}
$$

onde, $cx$ é a função objetivo

$Ax \geq b$ é a restrição principal

$x \geq 0$ é a restrição de não-negatividade c é o vetor de custos

$$c = (c_1 \; c_2 \; \dots \; c_n)_{1 \mathrm{X} n}$$

*x* é o vetor das variáveis de decisão

$$x = \begin{pmatrix} x_1 \\ \dots \\ x_n \end{pmatrix}_{n \mathrm{X} 1} = (x_1 \; \dots \; x_n)^T{}_{1 \mathrm{X} n}$$

b é o vetor de termos independentes ou vetor do lado direito das restrições (RHS)

$$b = \begin{pmatrix} b_1 \\ \dots \\ b_n \end{pmatrix}_{n \mathrm{X} 1} = (b_1 \; \dots \; b_n)^T{}_{1 \mathrm{X} n} \qquad (b \geq 0)$$

A é a matriz de coeficientes tecnológicos

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ & \dots & \\ a_{m1} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}_{m \mathrm{X} n} = \{a_{ij}\}_{m \mathrm{X} n}$$

ou seja,

*Minimizar* $\quad z = (c_1 \; \dots \; c_n)_{1 \mathrm{X} n} \bullet \begin{pmatrix} x_1 \\ \dots \\ x_n \end{pmatrix}_{n \mathrm{X} 1}$

*Sujeito a* $\quad \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ & \dots & \\ a_{m1} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}_{m \mathrm{X} n} \bullet \begin{pmatrix} x_1 \\ \dots \\ x_n \end{pmatrix}_{n \mathrm{X} 1} \geq \begin{pmatrix} b_1 \\ \dots \\ b_n \end{pmatrix}_{n \mathrm{X} 1}$

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ \dots \\ x_n \end{pmatrix}_{n \mathrm{X} 1} \geq \begin{pmatrix} 0 \\ \dots \\ 0 \end{pmatrix}_{n \mathrm{X} 1}$$

**Considerações da Programação Linear**

Para que um determinado sistema possa ser representado por meio de um modelo de PL, ele deve possuir as seguintes características:

*1. Determinístico*

Todos os parâmetros do modelo de PL ($a_{ij}$, $b_i$ e $c_i$) são considerados como constantes conhecidas. Na realidade, esses valores podem não ser constantes e sim variáveis.

*2. Proporcionalidade*

- ✓ Dada uma variável $x_i$, sua contribuição para o custo é $c_i x_i$ e sua contribuição para a *j*-ésima restrição é $a_{ij} x_i$. Isso significa que se $x_i$ for duplicada, sua contribuição para o custo e para cada restrição também serão duplicados.
- ✓ Também uma mudança em uma variável é sempre refletida por uma mudança proporcional em alguma outra variável.

*3. Aditividade*

Garante que o custo total é a soma dos custos individuais, e que a contribuição total para a *j*-ésima restrição é a soma das contribuições individuais.

*4. Divisibilidade*

Assegura que as variáveis de decisão podem assumir qualquer valor fracionário, de modo que números não-inteiros para as variáveis de decisão são permitidos.

## EXERCÍCIOS PROPOSTOS

**De acordo com as situações apresentadas a seguir, crie uma representação dos problemas de otimização, na forma canônica e se possível apresente a solução gráfica.**

**1.** Um fabricante deseja maximizar a receita bruta. As composições das bebidas, seus preços e as limitações na disponibilidade de matéria-prima são ilustradas na tabela abaixo:

| Bebida / Itens | Tipo A | Tipo B | Matéria-prima disponível |
|---|---|---|---|
| Limão (litros) | 2 | 1 | 16 |
| Laranja (litros) | 1 | 2 | 11 |
| Acerola (litros) | 1 | 3 | 15 |
| Preço Unitário de Venda | \$30 | \$50 | |

**2.** Uma fábrica produz dois tipos de geléia, de goiaba e de morango. Cada kg de geléia de goiaba requer 3 kg de goiaba e 0,25 kg de açúcar e cada kg de geléia de morango 1,5 kg de morango e 0,5 kg de açúcar. A fábrica dispõe de 250 kg de goiaba, 100 kg de morango e 50 kg de açúcar. Os lucros são \$5 e \$7 respectivamente para a geléia de goiaba e morango, por kg. Não existem restrições de demanda para as geléias. Elabore um modelo de PL que permita calcular a produção semanal que maximiza o lucro do fabricante.

**3.** Um fazendeiro tem que decidir o quanto vai plantar de milho e de alfafa. Os lucros são de R\$ 20 por alqueire de milho e de R\$ 10 por alqueire de alfafa. São disponíveis 8 alqueires de terra e 80.000 litros de água. Para cada alqueire de milho e de alfafa são necessários, respectivamente, 10.000 litros e 20.000 litros de água para irrigação. Deseja-se plantar no máximo 4 alqueires de milho.

**4.** Uma metalúrgica deseja maximizar sua receita bruta. A tabela abaixo ilustra a proporção de cada material na mistura para a obtenção das ligas passíveis da fabricação. O preço está cotado em Reais por tonelada da liga fabricada. Também em toneladas estão expressas as restrições de disponibilidade de matéria-prima. Formular o modelo de Programação Matemática.

| | Liga Especial de Baixa Resistência (*) | Liga Especial de Alta Resistência (*) | Disponibilidade de Matéria-prima (t) |
|---|---|---|---|
| Cobre | 0,5 | 0,2 | 16 |
| Zinco | 0,25 | 0,3 | 11 |
| Chumbo | 0,25 | 0,5 | 15 |
| Preço de Venda (R\$ por t) | R\$ 3.000 | R\$ 5.000 | (*) $\frac{\text{t de minério}}{\text{t de liga}}$ |

**5.** Uma grande fábrica de móveis dispõe em estoque de 250 metros de tábuas, 600 metros de pranchas e 500 metros de painéis de conglomerado. A fábrica normalmente oferece uma linha de móveis composta por um modelo de escrivaninha, uma mesa de reunião, um armário e uma prateleira. Cada tipo de móvel consome uma certa quantidade de matéria-prima, conforme a tabela abaixo. A escrivaninha é vendida por R$ 100,00, a mesa por R$ 80,00, o armário por R$ 120,00 e a prateleira por R$ 20,00. Pede-se exibir um modelo de Programação Linear que maximiza a receita com a venda dos móveis.

| | Quantidade de material em metros consumidos por unidade de produto | | | | Disponibilidade de recurso (m) |
|---|---|---|---|---|---|
| | Escrivaninha | Mesa | Armário | Prateleira | |
| Tábua | 1 | 1 | 1 | 4 | 250 |
| Prancha | 0 | 1 | 1 | 2 | 600 |
| Painéis | 3 | 2 | 4 | 0 | 500 |
| Valor de Revenda (R$) | 100 | 80 | 120 | 20 | |

**6.** Considere a situação de decidir sobre o número de unidades a serem produzidas por certo fabricante de dois diferentes tipos de produto. Os lucros por unidade do produto 1 e do produto 2 são, respectivamente, R$ 2,00 e R$ 5,00. Cada unidade do produto 1 requer 3 horas de máquina e 9 unidades de matéria-prima, enquanto o produto 2 requer 4 horas de máquina e 7 unidades de matéria-prima. Os tempos máximos disponíveis de horas de máquina e de matéria-prima são 200 horas e 300 unidades, respectivamente. Formule o problema de forma a otimizar o lucro total.

**7.** Por motivos justificáveis, uma certa dieta alimentar esta restrita a leite desnatado, carne magra de boi, carne de peixe e uma salada de composição bem conhecida. Sabendo-se que os requisitos nutricionais serão expressos em termos de vitaminas A, C e D e controlados por suas quantidades mínimas (miligramas), uma vez que são indispensáveis à preservação da saúde da pessoa que estará se submetendo à dieta. A tabela abaixo resume a quantidade de cada vitamina em disponibilidade nos alimento e a sua necessidade diária para a boa saúde de uma pessoa. Formular o programa para otimização dos recursos envolvidos.

| Vitamina | Leite (l) | Carne (kg) | Peixe (kg) | Salada (100 g) | Requisito Nutricional Mínimo |
|---|---|---|---|---|---|
| A | 2 mg | 2 mg | 10 mg | 20 mg | 11 mg |
| C | 50 mg | 20 mg | 10 mg | 30 mg | 70 mg |
| D | 80 mg | 70 mg | 10 mg | 80 mg | 250 mg |
| Custo | R$ 2,00 | R$ 4,00 | R$ 1,50 | R$ 1,00 | |

**8.** A empresa MBI fabrica computadores especiais. Uma decisão deve ser tomada: Quantos computadores deveriam ser produzidos no próximo mês na planta brasileira. Dois tipos de computadores são considerados: o CC-7, que requer 300 horas de trabalho e R$ 5.000,00 em materiais, e o CC-8, que necessita de 500 horas de trabalho e R$ 7.500,00 em materiais. A contribuição para o lucro de cada CC-7 é R$ 4.000,00, enquanto que para cada CC-8 é R$ 6.000,00. Atualmente, a planta tem capacidade de 200.000 horas de trabalho por mês, e o orçamento disponível para material é R$ 4.000.000,00 por mês. O mercado necessita que pelo menos 100 unidades do CC-7 sejam produzidas em cada mês e que pelo menos 200 unidades do CC-8 sejam produzidas. O problema é determinar quantas unidades do CC-7 e CC-8 produzir por mês para maximizar os lucros da companhia.

**9.** O proprietário de uma fazenda está tentando determinar a mistura correta de dois tipos de ração. Ambas contêm várias percentagens de quatro ingredientes essenciais. Qual é a mistura de menor custo?

| Ingrediente | % por kg de ração | | Mínimo requerido (kg) |
|---|---|---|---|
| | Ração 1 | Ração 2 | |
| 1 | 40 | 20 | 4 |
| 2 | 10 | 30 | 2 |
| 3 | 20 | 40 | 3 |
| 4 | 30 | 10 | 6 |
| Custo (R$/kg) | 0,50 | 0,30 | |

**10.** Uma loja de animais de estimação calculou as necessidades diárias de alimentação de cada hamster em, pelo menos, 70 unidades de proteína, 100 unidades de carboidratos e 20 unidades de gordura. Se a loja dispõe em estoque de seis tipos de ração mostrados na tabela abaixo, que mistura destas rações satisfaz os requisitos alimentares a custo mínimo para a loja?

| Ração | Proteínas unidades/kg | Carboidratos unidades/kg | Gordura unidades/kg | Custo R$/kg |
|---|---|---|---|---|
| A | 20 | 50 | 4 | 2 |
| B | 30 | 30 | 9 | 3 |
| C | 40 | 20 | 11 | 5 |
| D | 40 | 25 | 10 | 6 |
| E | 45 | 50 | 9 | 8 |
| F | 30 | 20 | 10 | 8 |

**11.** Uma cooperativa dispõe de 800 litros de leite por dia para fazer doce de leite e queijo. Sabe-se que cada kg de queijo requer 9 litros de leite e cada kg de doce de leite exige 7 litros de leite. Por experiência, as seguintes exigências sobre a capacidade de produção devem ser consideradas:

- A quantidade máxima de doce de leite que pode ser feita é 85 kg.
- A quantidade de queijo deve ser no máximo igual a 2,5 vezes a quantidade de doce de leite.

A cooperativa dispõe de 8 empregados que trabalham, cada um, 6 horas por dia. Cada kg de queijo requer 30 minutos de mão-de-obra, e cada kg de doce de leite exige 40 minutos. Sabe-se que o kg de queijo dá uma receita de R$ 4,00 e cada kg de doce de leite dá R$ 3,00, qual a produção diária que maximiza a receita?

**12.** Uma empresa local de produtos manufaturados fabrica quatro tipos diferentes de artigos metálicos, cada um dos quais deve ser usinado, polido e montado. As necessidades específicas de tempo de trabalho (em horas) de cada um dos produtos são as seguintes:

| | Usinagem, h | Polimento, h | Montagem, h |
|---|---|---|---|
| Produto I | 3 | 1 | 2 |
| Produto II | 2 | 1 | 1 |
| Produto III | 2 | 2 | 2 |
| Produto IV | 4 | 3 | 1 |

A empresa dispõe para si, numa base semanal, de 480 horas de tempo de usinagem, 400 horas de tempo de polimento e 400 horas de tempo de montagem. Os lucros unitários sobre os produtos são respectivamente, R$ 6, R$ 4, R$ 6 e R$ 8. A empresa firmou um contrato com um distribuidor para fornecer-lhe semanalmente 50 unidades do produto I e 100 unidades de qualquer combinação dos produtos II e III. Por intermédio de outros clientes a empresa pode vender semanalmente tantas unidades quanto produza dos produtos I, II e III, mas, apenas, um máximo de 25 unidades do artigo VI. Quantas unidades de cada artigo a empresa deve manufaturar semanalmente a fim de atender às obrigações contratuais e maximizar seu lucro total? Admita que peças inacabadas em uma semana possam ser completadas na semana seguinte.

**13.** Um fazendeiro tem 200 alqueires de terra, onde planeja cultivar trigo, arroz e milho. A produção esperada é de 1.800 kg por alqueire plantados de trigo, 2.100 kg por alqueire plantados de arroz e 2.900 kg por alqueire plantados de milho. Para atender ao consumo interno de sua fazenda, ele deve plantar pelo menos 12 alqueires de trigo, 16 alqueires de arroz e 20 alqueires de milho. Ele tem condições de armazenar, no máximo, 700.000 kg. O trigo dá lucro de R$ 1,20 por kg, o arroz, R$ 0,60 por kg e o milho, R$ 0,28 por kg. Considerando $x_1$, $x_2$ e $x_3$ como a quantidade (em kg) de, respectivamente, trigo, arroz e milho a ser cultivada, formule um modelo de PL que maximize o lucro.

**14.** A Agro Industrial Tomate S/A produz três tipos de enlatados, cada um exigindo um tratamento industrial semelhante, mas que difere na sua duração. Assim, cada 1.000 caixas de sopa de tomate exigem 200 horas de mão-de-obra e 6 horas de operação dos equipamentos; cada 1.000 caixas de suco de tomate exigem 80 horas de mão-de-obra e 4 horas dos equipamentos, e cada 1.000 caixas de molho de tomate exigem 300 horas de mão-de-obra e 7 horas dos equipamentos. Sabe-se que a empresa tem disponível, por semana, 5.000 horas de mão-de-obra e 168 horas de equipamentos disponíveis. Sabe-se também que o lucro por cada caixa produzida da sopa, suco e molho, é de R$ 3, R$ 2,5 e R$ 1, respectivamente, e que o volume semanal máximo de vendas é de 8.000, 6.000 e 10.000 caixas de sopa, suco e molho, respectivamente. Supondo-se que a empresa deseja maximizar seu lucro, pede-se a formulação do problema de PL.

**15.** A Cia. Forja Minas Ltda. produz dois produtos, A e B, que utilizam os mesmos recursos produtivos: matéria-prima, forja e polimento. Cada unidade do produto A exige 4 horas de forjaria e 2 horas de polimento, enquanto que cada unidade do produto B requer 2 horas de forjaria e 3 horas de polimento. A capacidade produtiva equivalente diária é de 220 horas na seção de forjaria e 250 horas no polimento.

O preço de venda do produto A é de R$ 1.900 por unidade e do produto B é de R$ 2.100 por unidade e toda produção tem mercado garantido. O custo de produção de cada unidade do produto A é R$ 100 e do produto B R$ 200. Definindo $x_A$ como o número de unidades de A e $x_B$ o número de unidades de B produzidas diariamente, formule um modelo de PL que maximize o seu lucro.

**16.** Uma fábrica produz cinco combustíveis sintéticos (G, H, M, S e W) e são usados carvões de cinco tipos (1, 2, 3, 4 e 5). Existem restrições de fornecimento dos quatro primeiros tipos de carvão. Os carvões são misturados em diferentes proporções de acordo com o combustível que está sendo produzido. O preço de compra dos carvões, os custos de produção e os preços de venda são dados a seguir:

| Carvão | Proporção de carvões nos combustíveis (%) | | | | | Carvão disponível (t) | Preço de compra dos carvões (R$/t) |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | G | H | M | S | W | | |
| 1 | 10 | 10 | 20 | 20 | 30 | 130 | 350 |
| 2 | 20 | 10 | 30 | 30 | 20 | 250 | 375 |
| 3 | 40 | 40 | 20 | 10 | 40 | 240 | 400 |
| 4 | 30 | 40 | 30 | 30 | 10 | 295 | 425 |
| 5 | - | - | - | 10 | - | Ilimitado | 300 |
| Preço de venda do comb. (R$/t) | 542,5 | 537,5 | 475,0 | 495,0 | 542,5 | | |

O custo de fabricação é R$ 25 por tonelada de cada combustível. Quanto de cada combustível deve ser feito a fim de maximizar o lucro?

**17.** Uma companhia produz quatro produtos (1, 2, 3, 4). O requerimento de matéria-prima, a necessidade de espaço, as taxas de produção e os lucros são dados na tabela abaixo. A quantidade total de matéria-prima disponível por dia para todos os quatro produtos é 180 kg. O espaço total disponível para estocagem é 230 $m^2$, e 7 h/dia são usadas para produção.

| | 1 | 2 | 3 | 4 |
|---|---|---|---|---|
| Matéria-prima (kg/pedaço) | 2 | 2 | 1,5 | 4 |
| Espaço ($m^2$/pedaço) | 2 | 2,5 | 2 | 1,5 |
| Taxa de produção (pedaço/h) | 15 | 30 | 10 | 15 |
| Lucro (R$/pedaço) | 5 | 6,5 | 5 | 5,5 |

Quantas unidades de cada produto deveriam ser produzidas para maximizar o lucro total?

**18.** Uma fábrica de combustível de avião vende dois tipos de combustível (A e B). O combustível do tipo A é composto por 25% de gasolina classe 1, 25% de gasolina classe 2 e 50% de gasolina classe 3. O combustível do tipo B é composto por 50% de gasolina classe 2 e 50% de gasolina classe 3. São disponíveis para a produção: 500 gal/h de gasolina classe 1, 200 gal/h de gasolina classe 2 e 250 gal/h de gasolina classe 3. Os custos por galão são R$ 0,30 para a gasolina classe 1, R$ 0,60 para a gasolina classe 2 e R$ 0,50 para a gasolina classe 3. O combustível do tipo A pode ser vendido por R$ 75/gal enquanto que o tipo B por R$ 90/gal. Quanto de cada combustível deveria ser feito?