C210 – Inteligência Computacional

Lógica Fuzzy

Prof. Me. Marcelo Vinícius Cysneiros Aragão
marcelovca90@inatel.br

1º semestre/2022

Introdução à Lógica Fuzzy

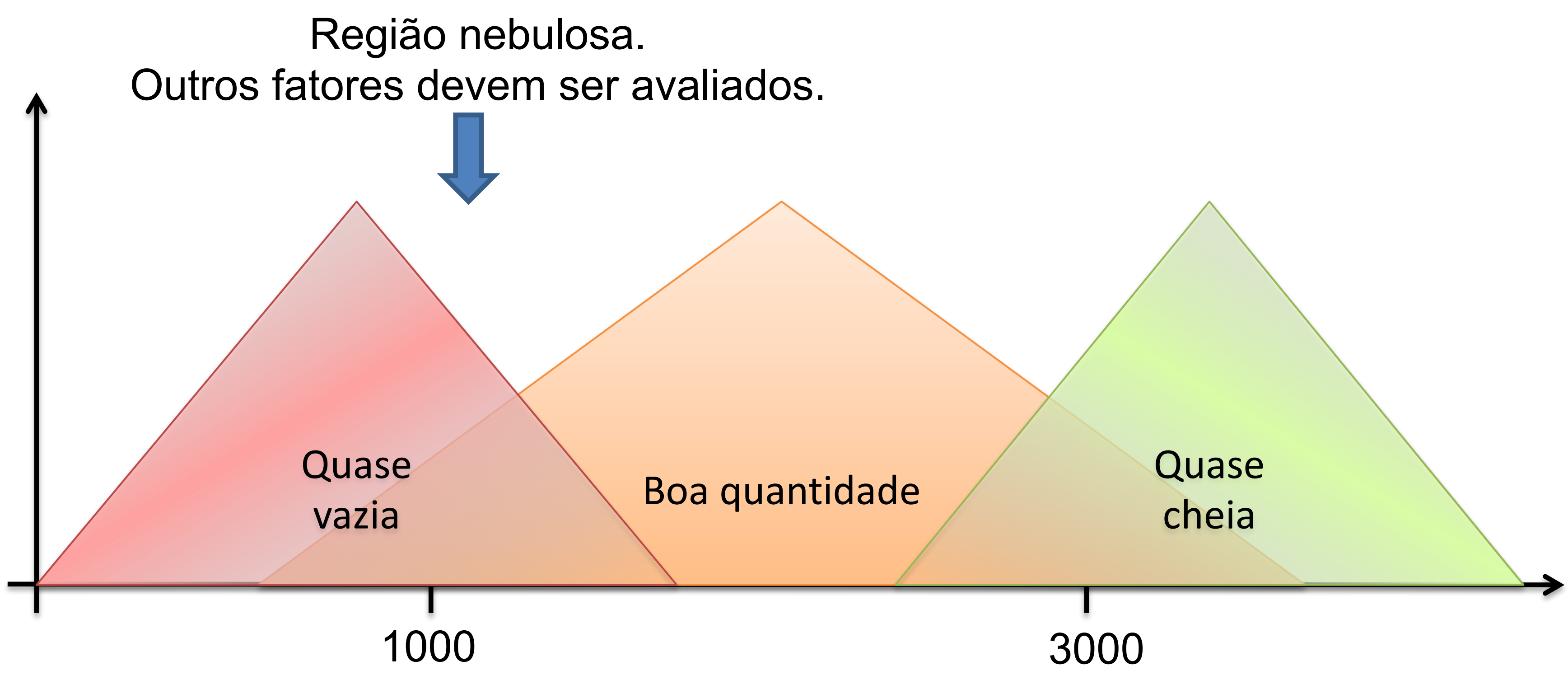
Introdução


O QUE SÃO CONJUNTOS?
TEORIA DOS CONJUNTOS!
UNIÃO DE CONJUNTOS?
PERTENCE OU NÃO PERTENCE?
CONTEM OU NÃO CONTEM?

Introdução

- Dilema do monte de pedra
  - Se um pedreiro for retirando as pedras de um monte de pedras, quando ela estará vazia o suficiente para que ele peça mais pedras ao fornecedor?

Introdução


Região nebulosa.
Outros fatores devem ser avaliados.
Quase
vazia
Boa quantidade
Quase
cheia
1000
3000

Introdução

- ✓ Os sistemas Fuzzy consistem de aproximar a decisão computacional da decisão humana.

- ✓ Isto é realizado de forma que a decisão de uma máquina não se resuma apenas a um "sim" ou "não", mas também tenha decisões "abstratas", do tipo "próximo de", "em torno de", "muito alto", etc.

Introdução

✓ Principais características:

I. Expressam imprecisões/incertezas;
II. Sistemas baseados em regras do tipo linguísticas;
III. “Raciocínio” executado de forma aproximada;
IV. Conclusões obtidas de forma paralela.

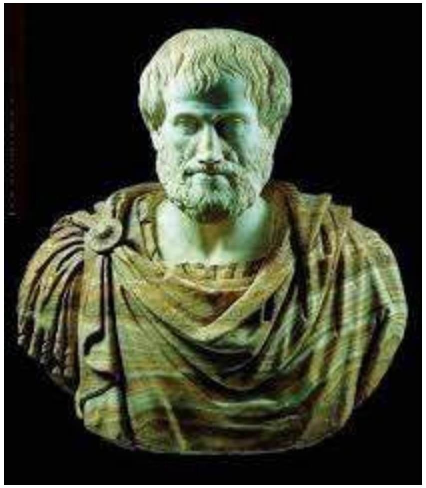
✓ Principais aplicações:

I. Classificação de padrões;
II. Aproximação de funções;
III. Controle;
IV. Previsão/estimação.

Lógica Clássica (Revisão)

Lógica Clássica

- ✓ Na lógica clássica (Aristóteles), os objetos são classificados em categorias (enumeráveis ou não) muito bem definidas, ou seja, um objeto pertence a uma categoria ou não.



Lógica Clássica: definições

- **Universo de discurso**: refere-se ao domínio ou espaço em que estão definidos os elementos do conjunto.

- **Função característica ou de inclusão:** função que mapeia cada elemento de um universo de discurso X de um conjunto A para o conjunto {0, 1}, considerando se um elemento é ou não membro do conjunto.

$$\mu_A(x) = \begin{cases} 1, & se \quad x \in A \\ 0, & se \quad x \notin A \end{cases}$$

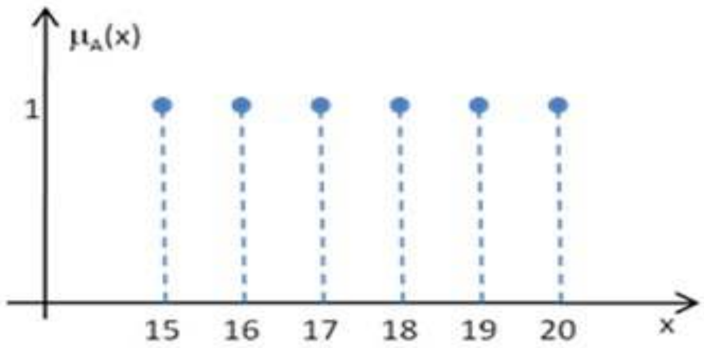
Lógica Clássica: definições

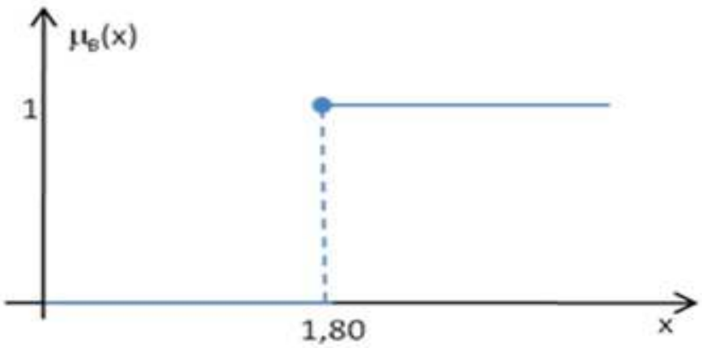
✓ **Exemplo:** Sejam os seguintes conjuntos

$$A = \{x \in \mathbb{N} \ | \ 15 \le x \le 20\}$$
$$B = \{x \in \mathbb{R} \ | \ x \ge 1{,}80\}$$

$$\begin{array}{c} \textit{Universo} \\ \textit{de discurso} \end{array} \begin{cases} X_A: \textit{Todos naturais entre } 15 \textit{ e } 20 \\ X_B: \textit{Todos reais } \ge 1{,}80 \end{cases}$$

$$\begin{array}{c} \textit{Função} \\ \textit{característica} \end{array} \begin{cases} \mu_A(x) = \begin{cases} 1, & se\ x \in \{15, \dots, 20\} \\ 0, & caso\ contrário \end{cases} \\ \mu_B(x) = \begin{cases} 1, & se\ x \ge 1{,}80 \\ 0, & caso\ contrário \end{cases} \end{cases}$$

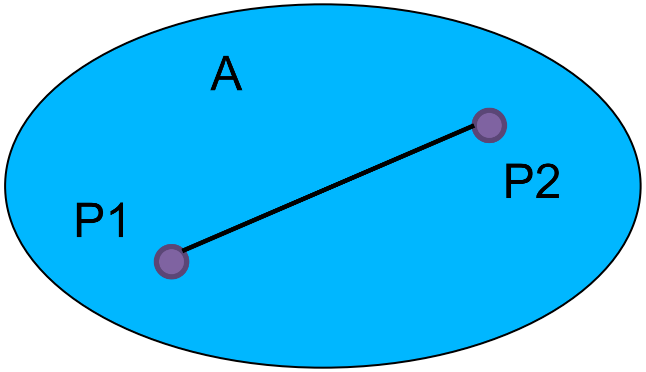




Lógica Clássica: definições

- ✓ **Conjunto convexo:** Um conjunto A em $\mathbb{R}^{\mathrm{N}}$ é chamado convexo se para todo x, pertencente ao segmento de reta unindo dois pontos, P1 e P2 ϵ A, pertence também ao conjunto A.

$$Convex(A) = \{\forall x \in A \;\mid\; x = \lambda.P_1 + (1-\lambda).P_2\}$$



Lógica Clássica: definições

- **Subconjunto:** Um conjunto A é subconjunto de um conjunto B, se todos os elementos de A forem também elementos de B.

$$Sub(A,B) = \begin{cases} V, & se \quad A \subseteq B \\ F, & caso\ contrário \end{cases}$$

- **Conjunto disjuntos:** Dois conjuntos A e B são disjuntos se $A \cap B = \emptyset$.

Lógica Clássica: definições

- **Cardinalidade:** é o número de elementos contidos em um determinado conjunto.

$$Card(A) = |A| = \{Quantidade\ de\ elementos\ de\ A\}$$

- **Conjunto potência:** é a família de todos os subconjuntos derivados de um conjunto primitivo A.

$$P(A) = \{Todos\ subconjuntos\ de\ A\}$$

$$|P(A)| = 2^{|A|}$$

Lógica Clássica: definições

- ✓ **Conjunto complemento:** o complemento de um conjunto A em relação a um conjunto B é o conjunto contendo todos os elementos de B que não pertençam a A.

$$B - A = \{x \ \mid \ x \in B \ \ e \ \ x \notin A\}$$

Exemplo:

A = {1, 2, 3} B = {1, 2, 3, 4} B - A = {4}

Considerando um conjunto universo $\mathrm{X} = \{1,2,3,4,5\}$, tem-se:

$\bar{A} = U - A = \{4,5\}$
$\bar{B} = U - B = \{5\}$

Lógica Clássica: definições

- **Conjunto união:** A união entre dois conjuntos A e B é formado por todos os elementos de A e de B.

$$A \cup B = \{x \mid \; x \in A \quad ou \quad x \in B\}$$

- **Conjunto interseção:** Formado por todos os elementos que pertencem simultaneamente a A e B.

$$A \cap B = \{x \mid \; x \in A \quad e \quad x \in B\}$$

Exemplos:

A = {1, 2, 3, 4} B = {3, 4, 5, 6}

$A \cap B = \{3,4\}$

$A \cup B = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$

$A \cup \bar{A} = X$ (universo de discurso)

$A \cap X = A$

$A \cup \emptyset = A$

$A \cap \bar{A} = \emptyset$

Lógica Clássica: propriedades

$$Comutatividade \quad \begin{cases} A \cup B = B \cup A \\ A \cap B = B \cap A \end{cases}$$

$$Associatividade \quad \begin{cases} A \cup B \cup C = (B \cup A) \cup C = B \cup (A \cup C) \\ A \cap B \cap C = (B \cap A) \cap C = B \cap (A \cap C) \end{cases}$$

$$Distributividade \quad \begin{cases} A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C) \\ A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C) \end{cases}$$

$$Idempot\hat{e}ncia \quad \begin{cases} A \cup A = A \\ A \cap A = A \end{cases}$$

$$De\ Morgan \quad \begin{cases} \overline{A \cap B} = \bar{A} \cup \bar{B} \\ \overline{A \cup B} = \bar{A} \cap \bar{B} \end{cases}$$

Conjuntos Fuzzy

Princípios de conjuntos Fuzzy

- ✓ A função que define o grau de pertinência de um elemento em um conjunto Fuzzy, levando-se em conta seu universo de discurso, é definida como função de pertinência

$$\mu_A(x): X \rightarrow [0,1];\; x \in X$$

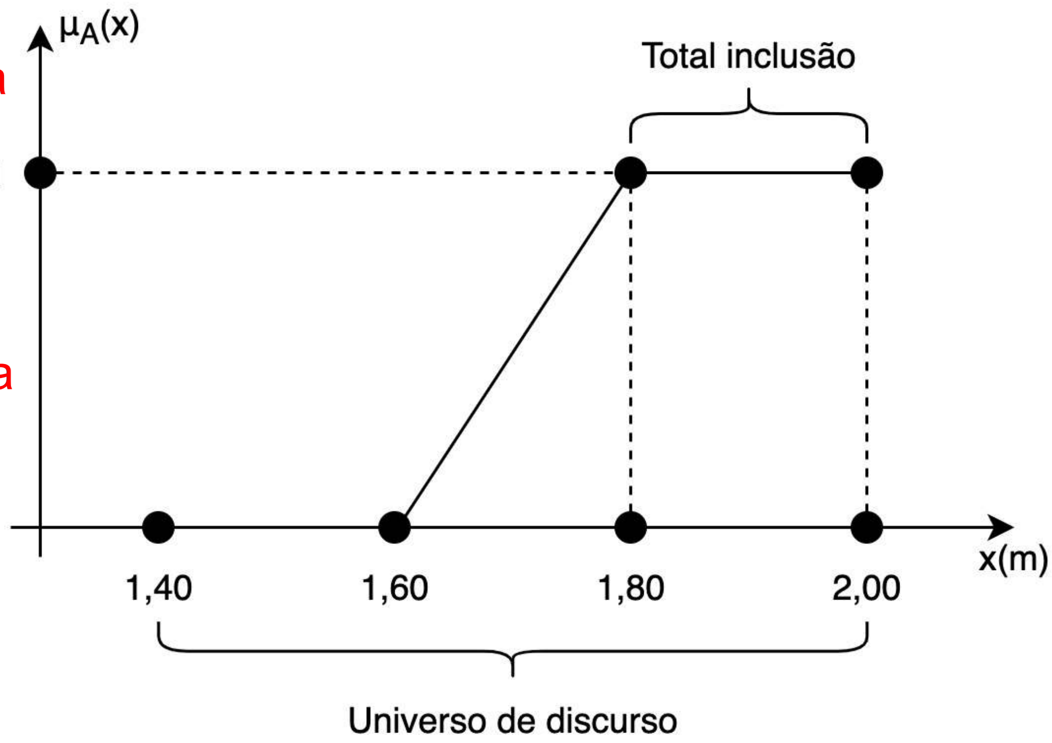
na qual $\mu_A(x)$ retorna o grau de pertinência do elemento x, pertencente ao universo de discurso X, em relação ao conjunto Fuzzy A.

Princípios de conjuntos Fuzzy

- ✓ Exemplo: considere um conjunto Fuzzy que define o conceito de pessoa alta

Função de pertinência

Grau de Pertinência $\mu_A(x)$



Definições

- **Conjunto Fuzzy Normalizado**: pelo menos um de seus elementos possui grau de pertinência igual a 1

- **Altura de conjunto Fuzzy**: corresponde ao maior grau de pertinência assumido por um de seus elementos

$$ALT(A) = MAX_{x_i \epsilon X} \mu_A(x_i)$$

- **Suporte de conjunto Fuzzy**: é o conjunto de todos os elementos de A que possuem graus de pertinência maior que zero

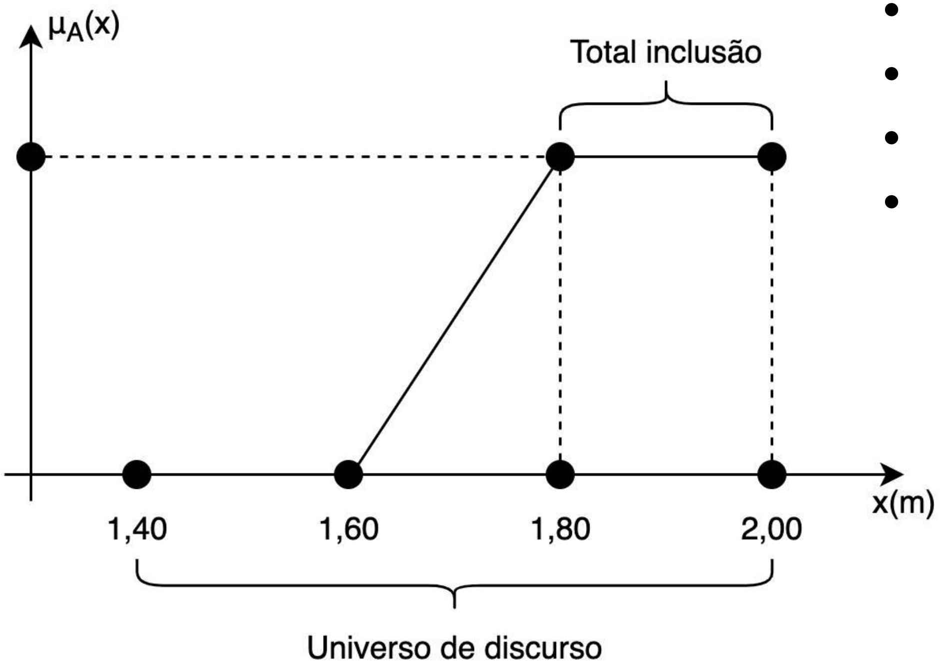
$$SUPP(A) = \{x \in X \mid \mu_A(x) > 0\}$$

Definições

- ✓ Recapitulando o exemplo de um conjunto Fuzzy que define o conceito de pessoa alta

Função de pertinência

Grau de Pertinência $\mu_A(x)$



- Normalizado
- $ALT(A) = 1$
- $SUPP(A) = \{1,6 < x \leq 2,0\}$
- $CARD(A) = \infty$

Definições

- **Conjunto Fuzzy Convexo**: um conjunto Fuzzy é convexo se e somente se for observada a seguinte desigualdade:

$$\mu_A(\lambda * x_1 + (1-\lambda) * x_2) \geq MIN[\,\mu_A(x_1), \mu_A(x_2)]$$

$$x_1, x_2 \in X;\ \lambda \in [0;1]$$

- **Conjunto Fuzzy Discreto**: é aquele em que os seus elementos podem ser representados por:

$$A = \mu_A(x_1)\,/\,x_1 + \mu_A(x_2)\,/x_2 + \cdots + \mu_A(x_n)/x_n$$

no qual o sinal de adição indica composição (concatenação).

Definições

- ✓ **Cardinalidade de conjunto Fuzzy**: É a soma dos graus de pertinência de todos os elementos do conjunto Fuzzy, ou seja:

$$CARD(A) = \sum_{x \in X} \mu_A(x)$$

- ✓ **Cortes em conjuntos Fuzzy**: Um corte α em um conjunto A é especificado por um conjunto *crisp*, que contem todos os elementos de A que possuem grau de pertinência maior ou igual a α, ou seja:

$$A_\alpha = \{x \in X | \mu_A(x) \geq \alpha\}$$

Definições

Exemplo: Seja um conjunto Fuzzy discreto definido por:

$$A = 0{,}3/1 + 0{,}7/2 + 1{,}0/3 + 0{,}9/4 + 0{,}2/6$$

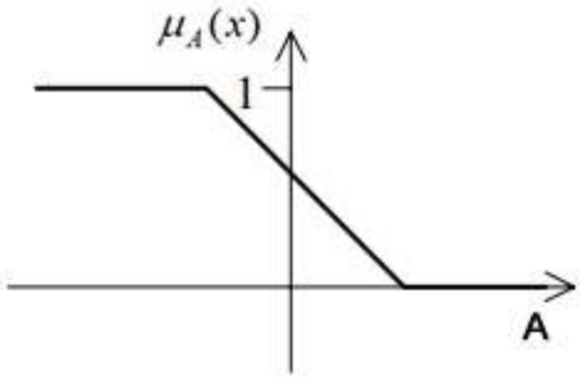
$$com\ X = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$$

1. ALT(A) = 1,0
2. SUPP(A) = {1, 2, 3, 4, 6} (Quando um elemento não está em A, seu grau de pertinência é zero)
3. CARD(A) = 3,1 (0,3 + 0,7 + 1,0 + 0,9 + 0,2)
4. $A_{0,4}$ = {2, 3, 4} (α= 0,4)

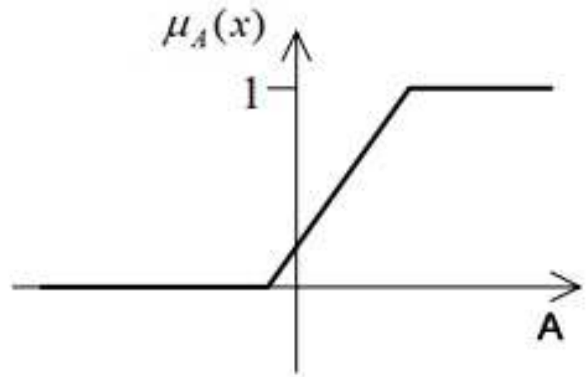
Definições

- ✓ Principais tipos de funções de pertinência associados aos conjuntos Fuzzy

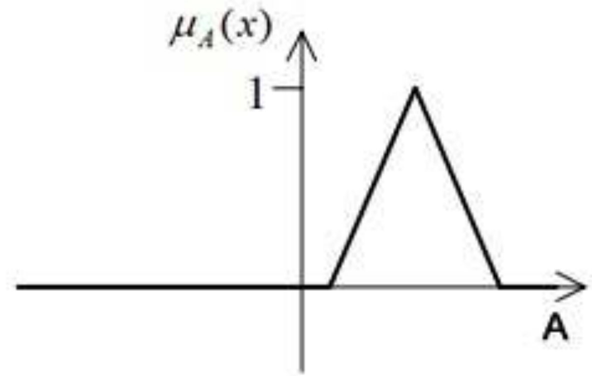
Semi-linear

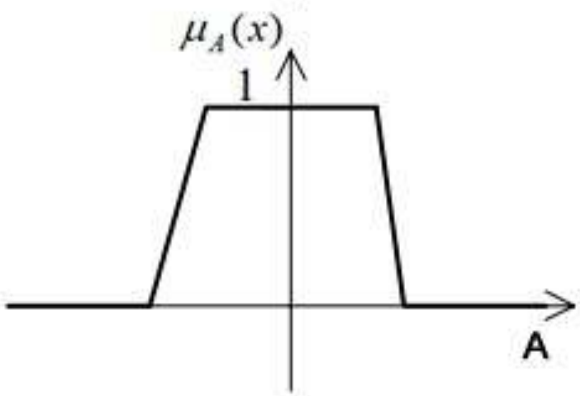


Semi-linear

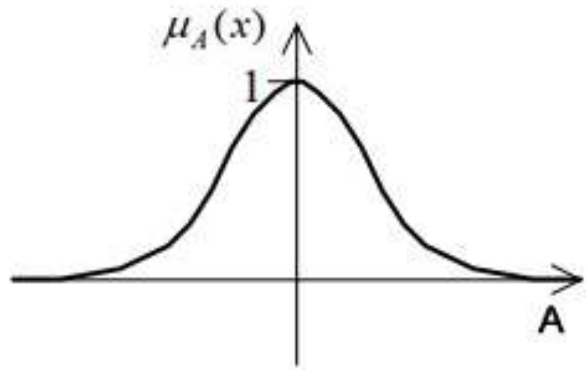


Triangular

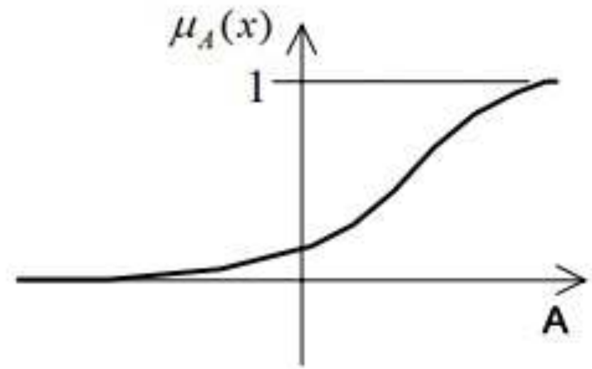




Trapezoidal



Gaussiana



Exponencial

Operações em Conjuntos Fuzzy

Introdução

- Para os sistemas que utilizam a lógica Fuzzy, o processamento das referidas informações é normalmente consistido de operações que são efetuadas sobre os seus conjuntos Fuzzy.

- As operações básicas de união, interseção e complemento são geralmente definidas em função de operadores MAX e MIN, os quais são análogos aos operadores produto e soma da álgebra elementar.

Definições

- ✓ **Conjunto União**: O conjunto união entre dois conjuntos Fuzzy A e B, pertencentes a um mesmo universo de discurso X, é formado por todos valores máximos entre $\mu_A(x)$ e $\mu_B(x)$, para todo $x \in X$

$$\mu_A(x) \cup \mu_B(x) = MAX(\mu_A(x), \mu_B(x))$$

Definições

- **Conjunto Interseção**: É aquele que será formado por todos os valores mínimos entre $\mu_A(x)$ e $\mu_B(x)$, para todo $x \in X$

$$\mu_A(x) \cap \mu_B(x) = MIN(\mu_A(x), \mu_B(x))$$

- **Conjunto Complemento:** O complemento de um conjunto Fuzzy A, pertencente a um universo de discurso X, é formado pela subtração de $\mu_A(x)$ do valor unitário {1}

$$\mu_{\bar{A}}(x) = 1 - \mu_A(x)$$

Exemplos

✓ **Exemplo 1:** sejam os conjuntos Fuzzy A e B, definidos no universo de discurso discreto $\mathrm{X} = \{1, 2, 3, 4, 5\}$, com $\mathrm{A} = 0.2/1 + 0.5/2 + 1.0/3 + 0.8/4 + 0.1/5$ e com $\mathrm{B} = 0.1/1 + 1.0/2 + 0.9/3 + 0.4/4 + 0.3/5$.

Calcule as operações:

$a)\quad \mu_A \cup \mu_B$

$b)\quad \mu_A \cap \mu_B$

$c)\quad \overline{\mu_A}$

$d)\quad \overline{\mu_B}$

Exemplos

- ✓ **Exemplo 1:** sejam os conjuntos Fuzzy A e B, definidos no universo de discurso discreto $X = \{1, 2, 3, 4, 5\}$, com $A = 0.2/1 + 0.5/2 + 1.0/3 + 0.8/4 + 0.1/5$ e com $B = 0.1/1 + 1.0/2 + 0.9/3 + 0.4/4 + 0.3/5$.

Calcule as operações:

a) $\mu_A \cup \mu_B = 0.2/1 + 1.0/2 + 1.0/3 + 0.8/4 + 0.3/5$

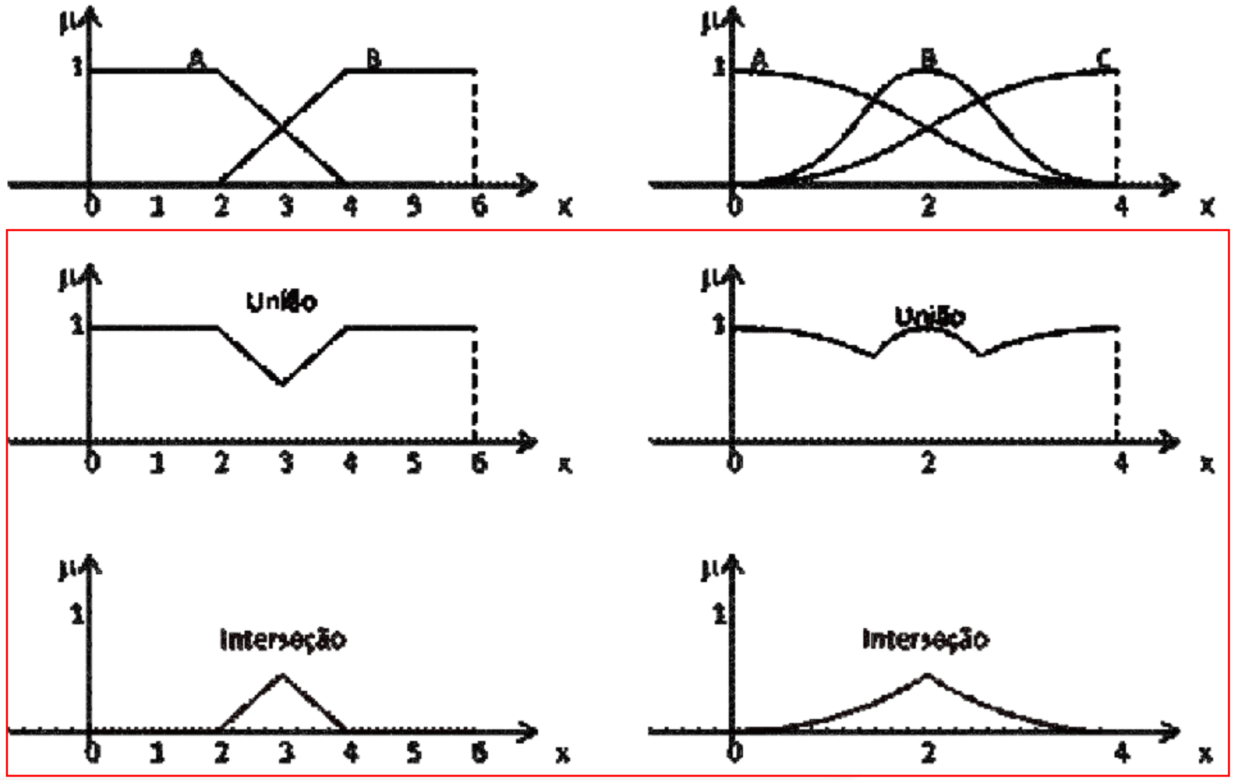
b) $\mu_A \cap \mu_B = 0.1/1 + 0.5/2 + 0.9/3 + 0.4/4 + 0.1/5$

c) $\overline{\mu_A} = 0.8/1 + 0.5/2 + 0.2/4 + 0.9/5$

d) $\overline{\mu_B} = 0.9/1 + 0.1/3 + 0.6/4 + 0.7/5$

Exemplos

- ✓ **Exemplo 2:** Para os conjuntos Fuzzy definidos nos gráficos seguintes, obtenha a união total e a interseção total:



Funções τ-norma e s-norma

- ✓ Na literatura há diversos operadores que executam as operações de união e interseção entre conjuntos Fuzzy.

- ✓ As operações básicas sobre conjuntos Fuzzy são definidas a partir de normas conhecidas da teoria dos conjuntos, que serão descritas a seguir.

τ-norma

- ✓ τ-norma é uma operação matemática binária τ que satisfaz as seguintes propriedades:

$x \tau y = y \tau x$ (comutatividade)

$x \tau (y \tau z) = (x \tau y) \tau z$ (associatividade)

se $\mathrm{x} \le y$ e $w \le z$, (monotonicidade)

então $\mathrm{x} \tau w \le y \tau z$

$x \tau 1 = x$ e $x \tau 0 = 0$ (contorno/condições-limite)

s-norma

- ✓ s-norma é uma operação matemática binária S que satisfaz as seguintes propriedades:

$x\ s\ y = y\ s\ x$ (comutatividade)

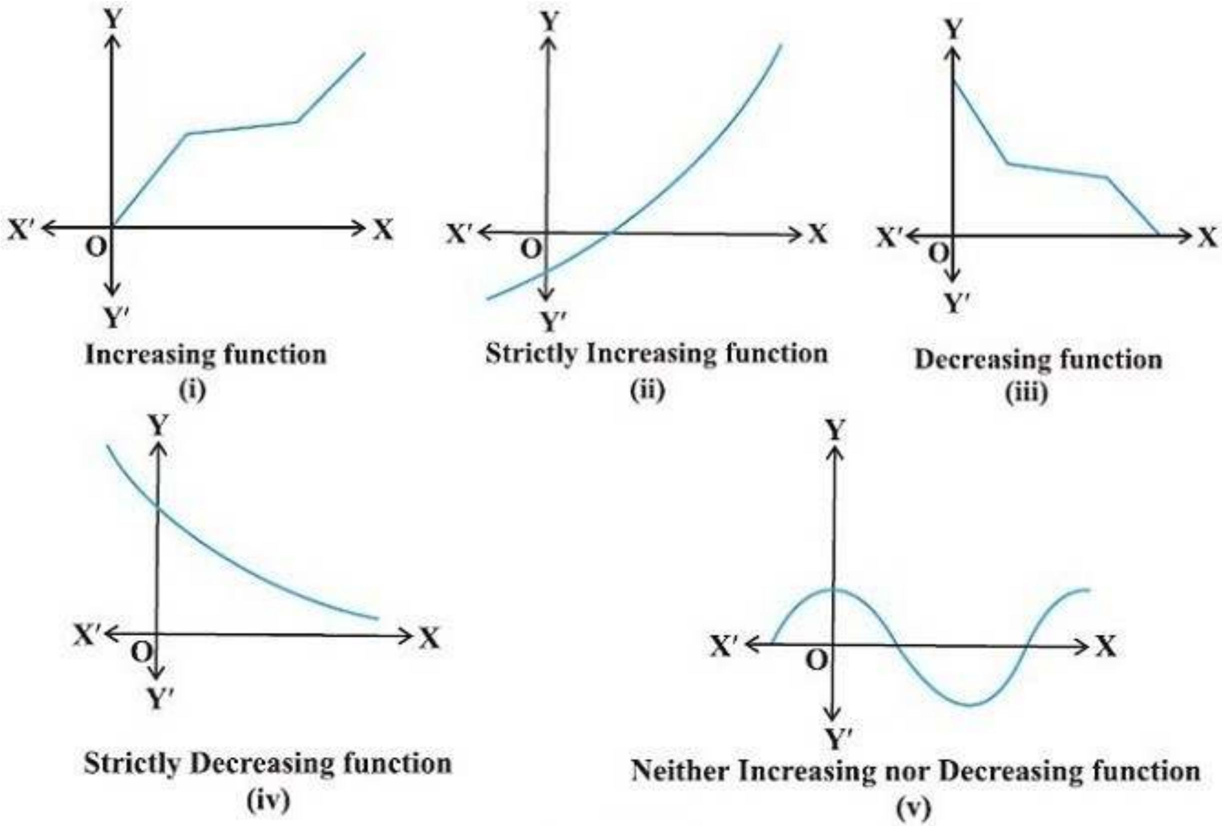
$x\ s\ (y\ s\ z) = (x\ s\ y)\ s\ z$ (associatividade)

se $\mathrm{x} \leq y\ e\ w \leq z$, (monotonicidade)
então $\mathrm{x}\ s\ w \leq y\ s\ z$

$x\ s\ 1 = 1$ e $x\ s\ 0 = x$ (contorno/condições-limite)

Monotonicidade

- Uma função é dita *monótona* em um intervalo se ela for crescente ou decrescente naquele intervalo.



- Fonte: https://www.aplustopper.com/function-increasing-decreasing/

Definições

- Na álgebra booleana as operações típicas compreendem as seguintes funções lógicas básicas: AND, OR, NOT.
- Em conjuntos Fuzzy, foram definidas operações típicas baseadas em τ-normas e S-normas, onde as operações básicas são o mínimo (MIN), o produto algébrico ($*$) e o máximo (MAX).
- O operador MIN pertence a uma τ-norma, enquanto o operador MAX é uma s-norma.

Definições

- As principais τ-normas são definidas por:

- $Mínimo \Rightarrow \mu_A(x) \wedge \mu_B(x) = MIN(\mu_A(x), \mu_B(x))$
- $Produto\ Algébrico \Rightarrow \mu_A(x).\mu_B(x) = \mu_A(x) * \mu_B(x)$
- $Produto\ Limitado \Rightarrow \mu_A(x) \otimes \mu_B(x) = MAX(0, \mu_A(x) + \mu_B(x) - 1)$
- $Produto\ Drástico \Rightarrow \mu_A(x)\ N\ \mu_B(x) = \begin{cases} \mu_A(x),\ se\ \mu_B(x) = 1 \\ \mu_B(x),\ se\ \mu_A(x) = 1 \\ 0,\ caso\ contrário \end{cases}$

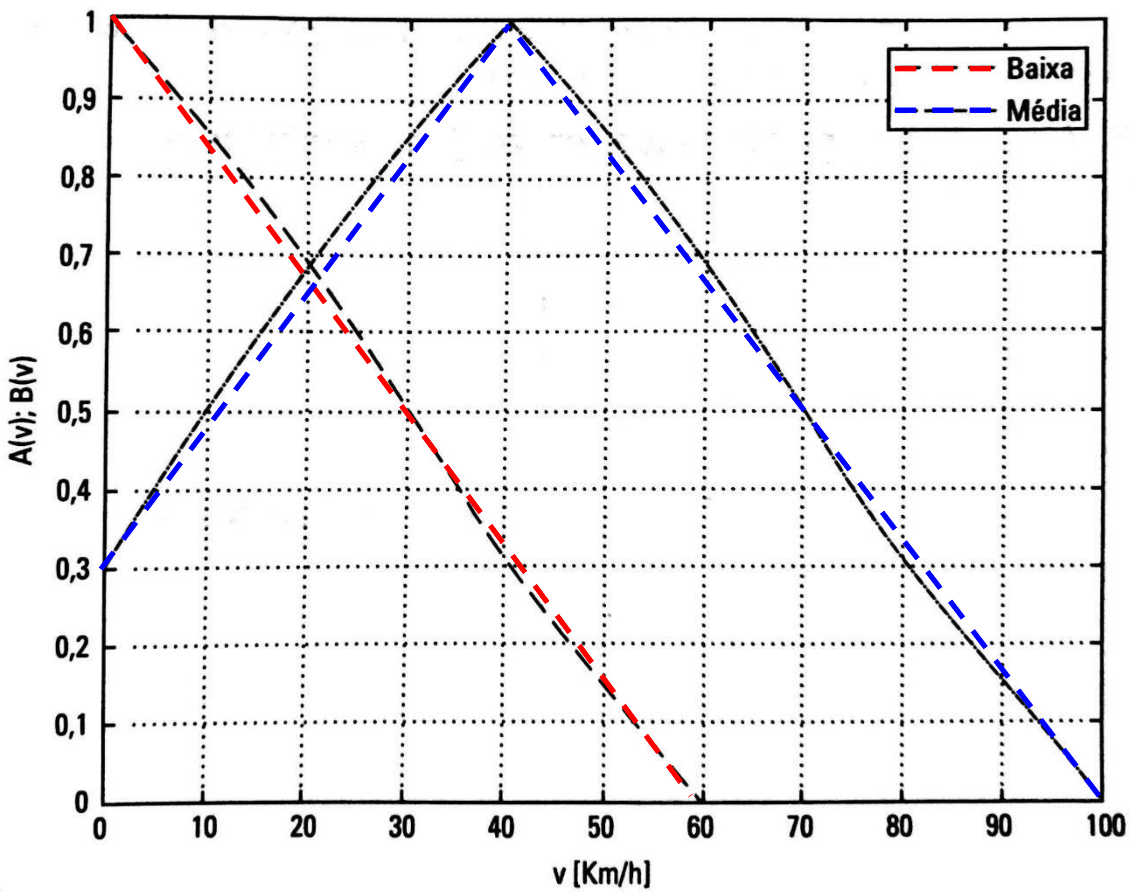
Definições

✓ As principais s-normas são definidas por:

- $Máximo \Rightarrow \mu_A(x) \vee \mu_B(x) = MAX(\mu_A(x), \mu_B(x))$
- $Soma\ Algébrica \ \Rightarrow \mu_A(x) + \mu_B(x) = \mu_A(x) + \mu_B(x) - \mu_A(x) * \mu_B(x)$
- $Soma\ Limitada \ \Rightarrow \ \mu_A(x) \oplus \mu_B(x) = MIN\big(1, \mu_A(x) + \mu_B(x)\big)$
- $Soma\ Drástica \ \Rightarrow \ \mu_A(x)\ \rho\ \mu_B(x) = \begin{cases} \mu_A(x),\ se\ \mu_B(x) = 0 \\ \mu_B(x),\ se\ \mu_A(x) = 0 \\ 1,\ caso\ contrário \end{cases}$

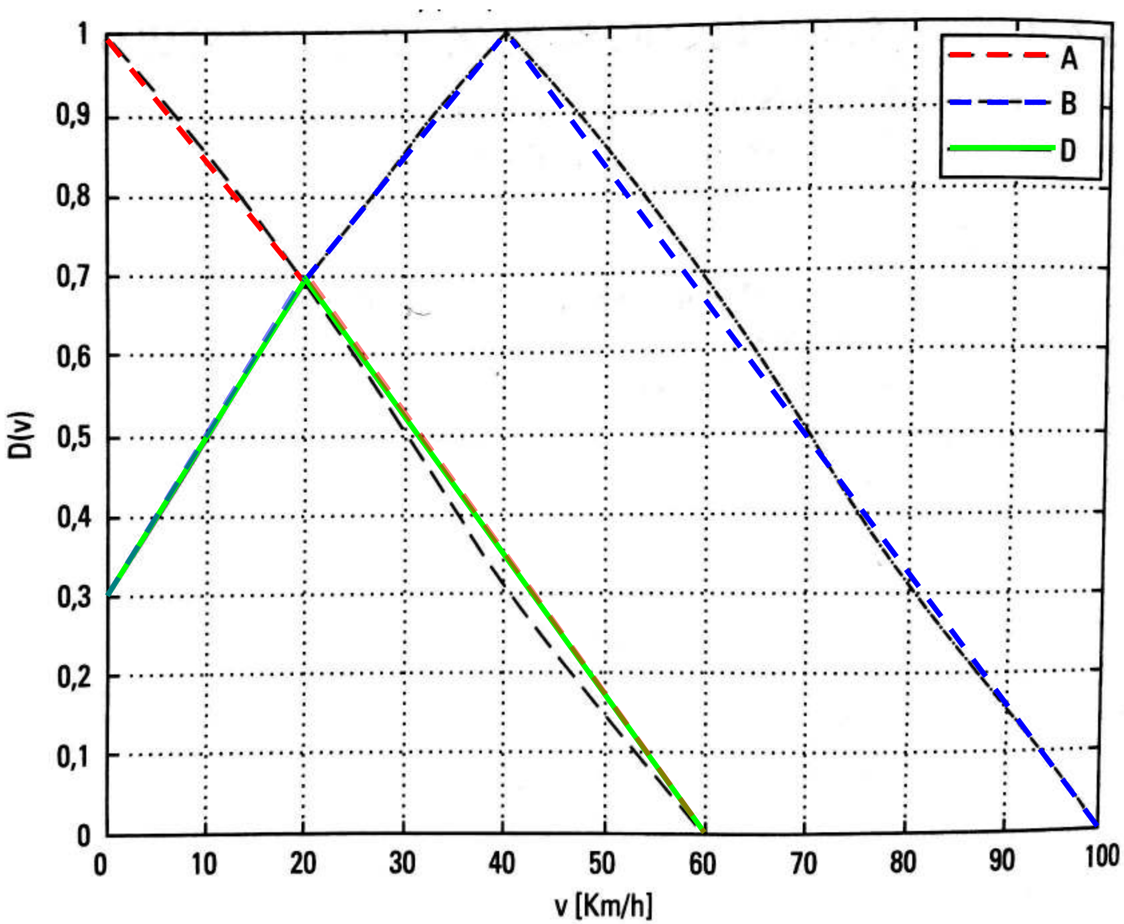
Definições

- ✓ **Exemplo:** a figura a seguir ilustra dois conjuntos Fuzzy (A e B) relacionados com velocidade (v) de um veículo, por exemplo, que receberam as denominações "Baixa" e "Média".



Definições

- ✓ **Exemplo:** a aplicação da operação MIN entre os conjuntos A e B define outro conjunto D = 0,3/0 + 0,7/20 + 0,3/40 + 0/60 + 0/80 + 0/100.



Definições

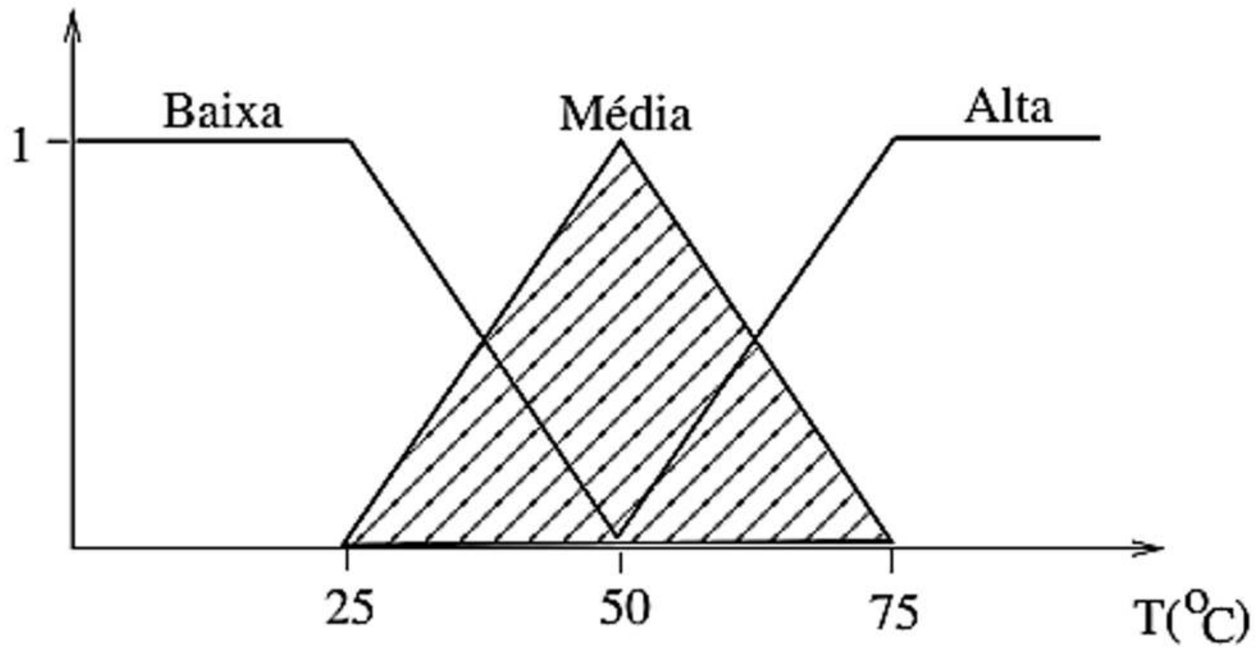
✓ Algoritmo computacional

```
Algoritmo União
declare
        N: Inteiro                      {Quantidade de elementos / Discretização}
        X: Vetor [1 ... N] de reais     {Vetor do universo de discurso}
        A: Vetor [1 ... N] de reais     {Vetor de pertinência de A}
        B: Vetor [1 ... N] de reais     {Vetor de pertinência de B}
        Z: Vetor [1 ... N] de reais.    {Valores de A ∪ B}
inicio
        {Atribuir os valores discretos em X, A e B}
        para I = 1 até N faça
                Z[I] = S_norma(A[I], B[I])
        fim
        Imprima (Z)
fim
```

Sistemas Fuzzy

Variáveis Linguísticas

- Uma variável linguística é uma variável cujos valores são nomes de conjuntos fuzzy.
- Exemplo: a temperatura de um dado processo pode ser uma variável linguística assumindo valores "Baixa", "Média" e "Alta".
- Os valores são descritos por intermédio de conjuntos fuzzy .



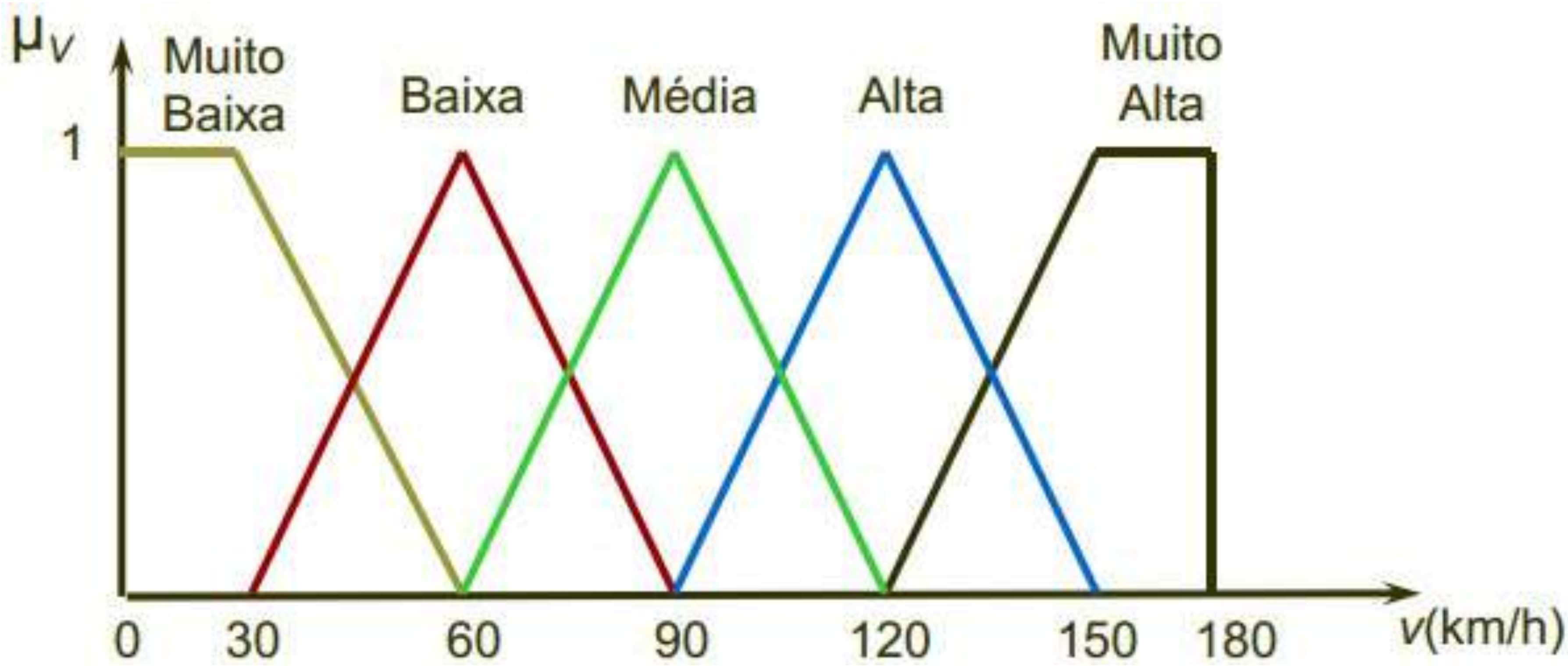
Variáveis Linguísticas

Uma variável linguística é caracterizada pelos seguintes atributos:

- **Nome da variável (x):** rótulo associado a uma variável linguística em específico.
- **Conjunto de termos (T_x):** nomes associados aos valores linguísticos da respectiva variável linguística.
- **Universo de Discurso (U_x)**: domínio (espaço) em que cada variável linguística está definida.
- **Funções de Pertinência (μ_x)**: conjuntos fuzzy que representam cada valor pertencente ao conjunto de termos da variável linguística.

Variáveis Linguísticas

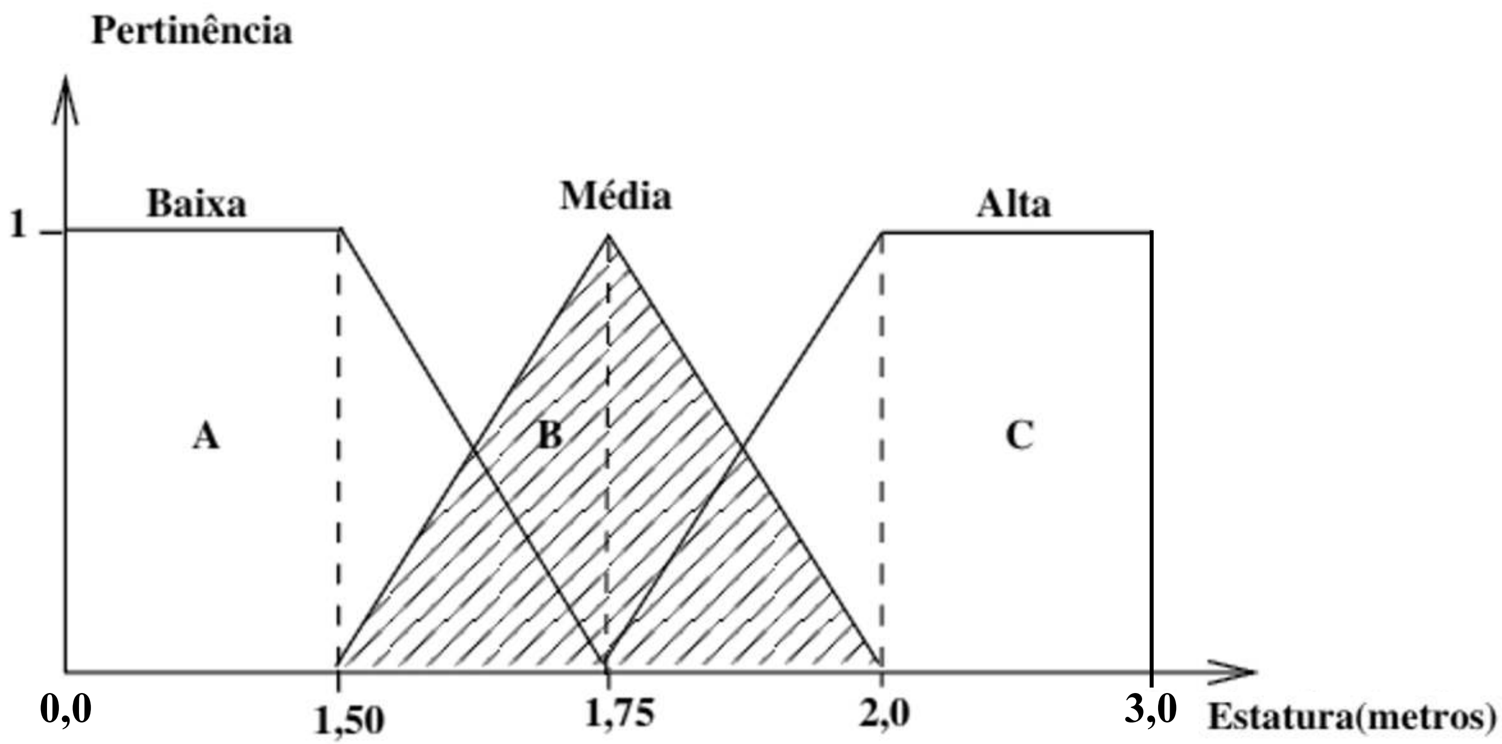
Exemplo 1: seja a variável linguística representada por:



- Nome da variável: v = {velocidade}.
- Conjunto de termos: T_v = {Muito Baixa, Baixa, Média, Alta, Muito Alta}.
- Universo de Discurso: $U_v \in [0;180]$
- Funções de Pertinência: são dadas pelas funções triangulares e trapezoidais mostradas nos gráficos da figura.

Variáveis Linguísticas

Exemplo 2: considere a variável linguística estatura (de pessoas):



- Nome da variável: e = {Estatura}.
- Conjunto de termos: T_e= {Baixa, Média, Alta}.
- Universo de Discurso: $U_e \in [0;3]$
- Funções de Pertinência: São dadas pelas funções triangulares e trapezoidais mostradas nos gráficos da figura.

O Problema da Gorjeta

Dado um conjunto de números entre 0 e 10, representando a qualidade do serviço em um restaurante, onde 0 é péssima e 10 é excelente, qual deve ser a gorjeta?

Para ilustrar o valor da lógica fuzzy, são apresentadas duas soluções diferentes para o mesmo problema: linear e fuzzy.

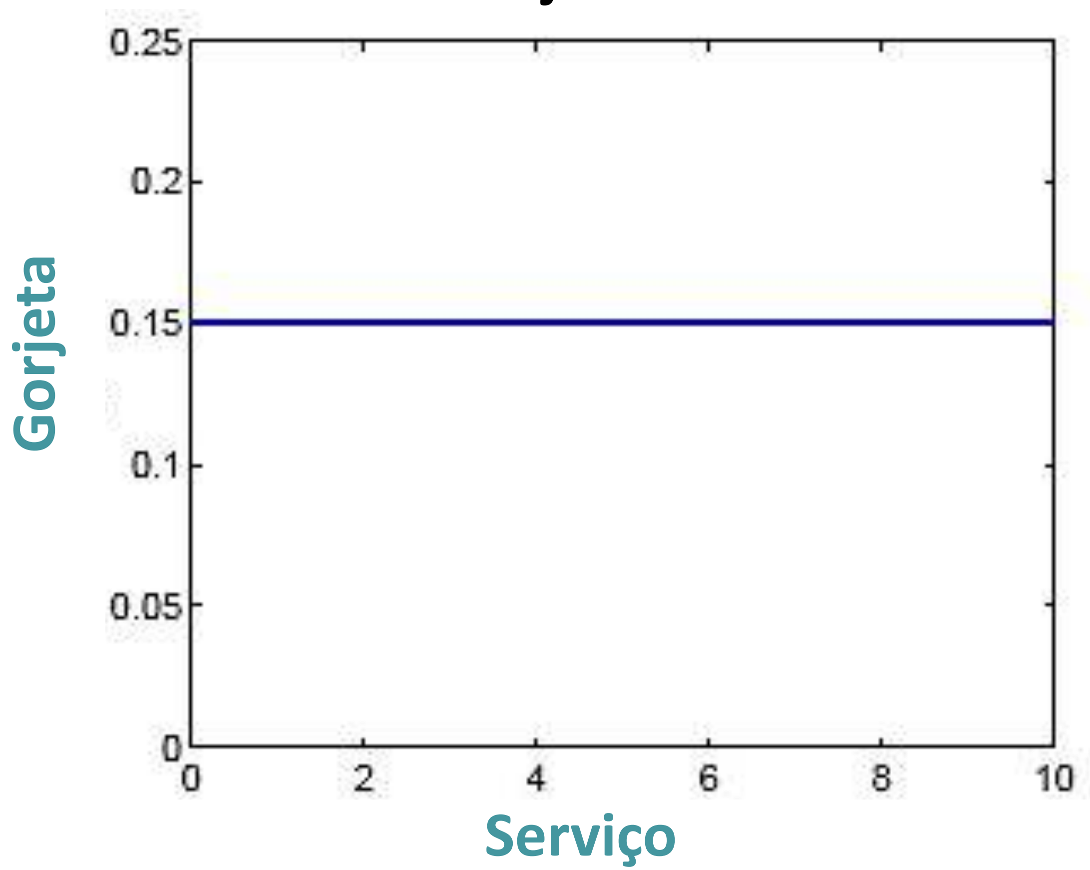
Primeiramente o problema é tratado de maneira convencional que expressam relações lineares e/ou lineares por pares.

Em seguida será feita a abordagem do mesmo sistema usando lógica fuzzy.

O Problema da Gorjeta

Começamos com a relação mais simples possível.
Suponha que a gorjeta seja sempre igual a 15% do valor da conta.

Gorjeta = 0.15



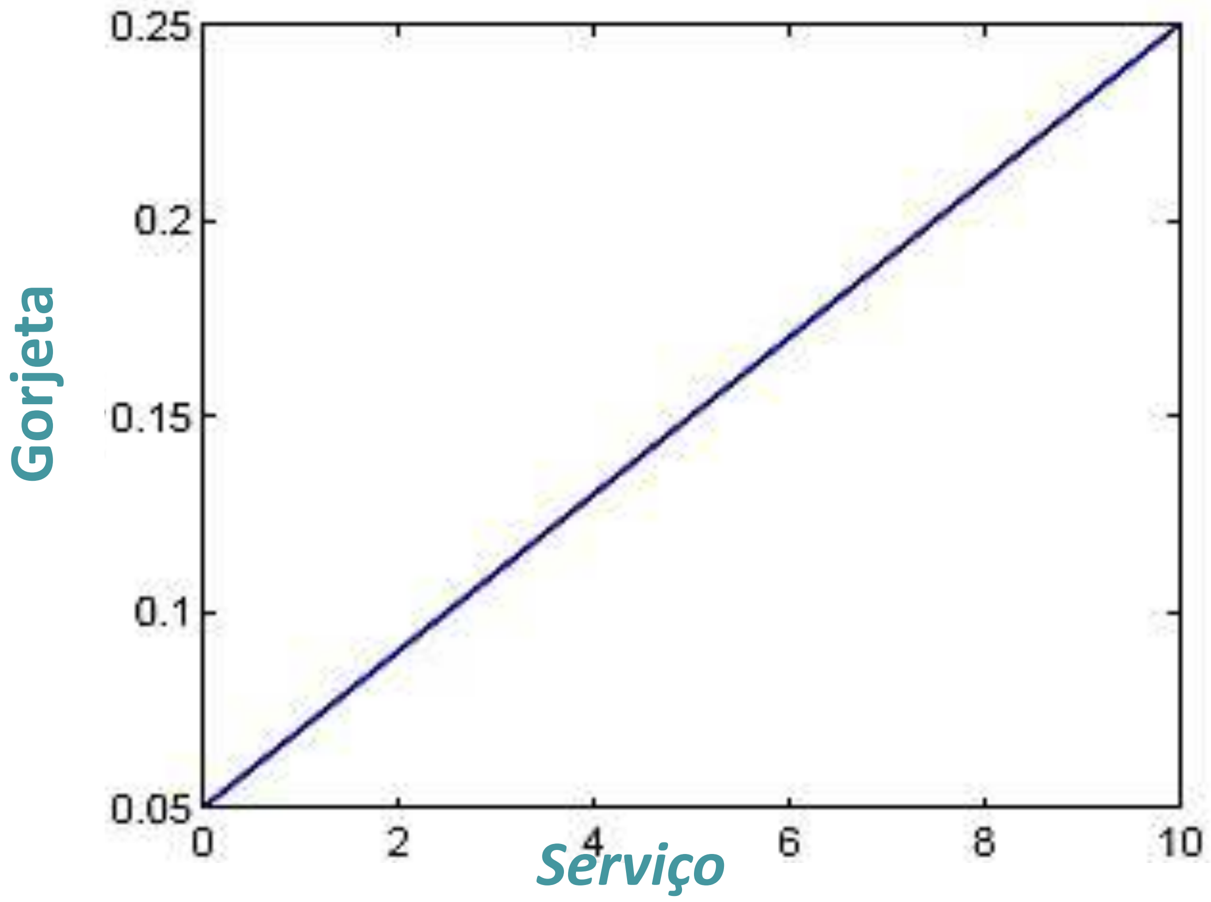
- *O valor de referência da gorjeta é o praticado nos Estados Unidos.*
- *A gorjeta média por uma refeição é de 15% do valor da conta, dependendo da qualidade do serviço praticado*

Esta relação não leva em conta a qualidade do serviço!

O Problema da Gorjeta

Segunda aproximação: como o serviço é avaliado em uma escala de 0 a 10, podemos ter a gorjeta variando linearmente de 5% se o serviço for ruim a 25% se o serviço for excelente.

Gorjeta = 0.05 + (0.20/10)*Serviço



O Problema da Gorjeta

- A fórmula faz o que queríamos e é bastante simples.

- Entretanto, queremos que a gorjeta reflita também a qualidade da comida.

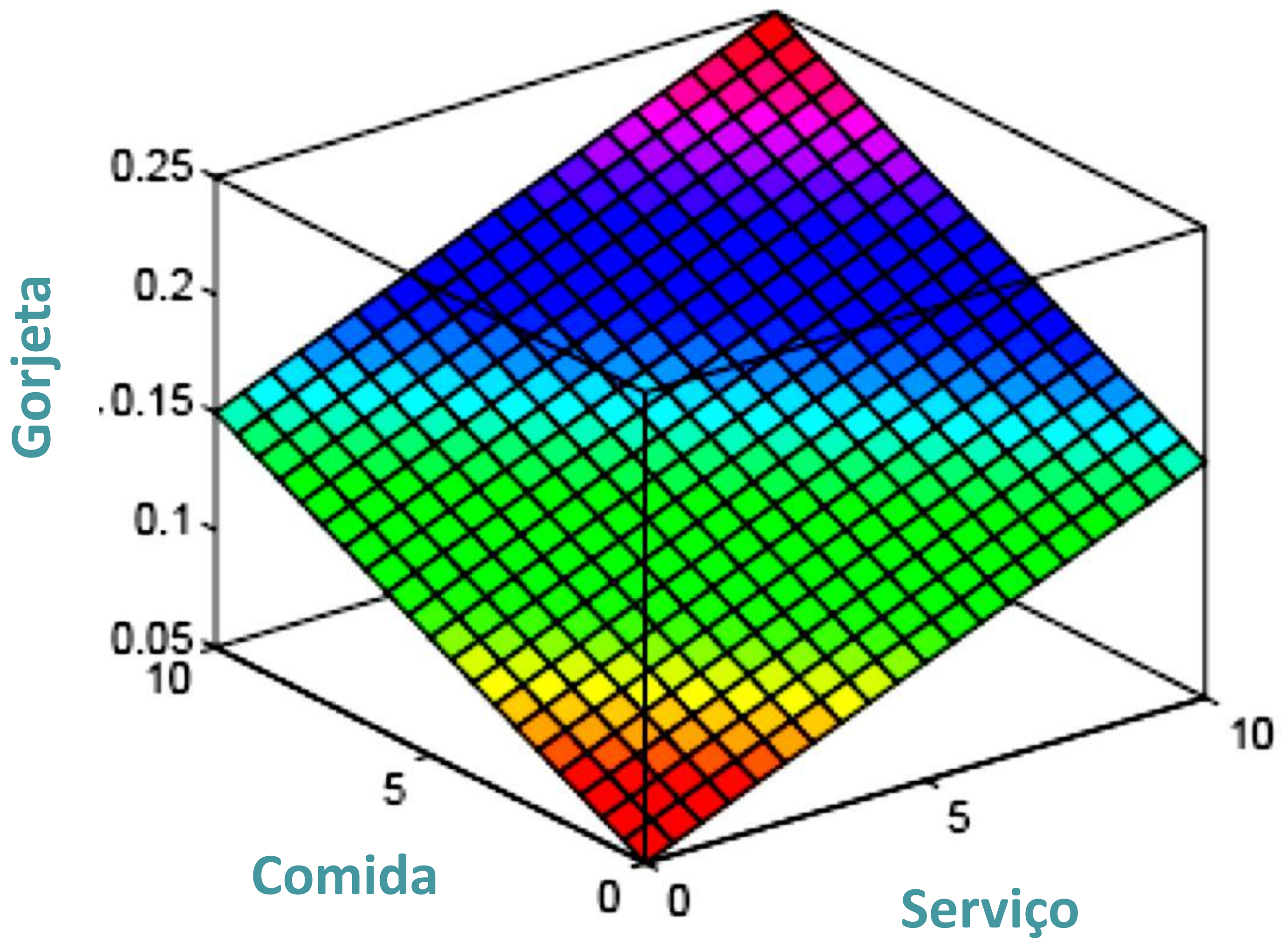
- Esta extensão do problema é definida como:

Dados dois conjuntos de números entre 0 e 10 (onde 0 é "péssimo" e 10 é "excelente") que representam respectivamente a qualidade do serviço e a qualidade da comida, qual deve ser a gorjeta?

O Problema da Gorjeta

A fórmula agora, passa a ser a seguinte:

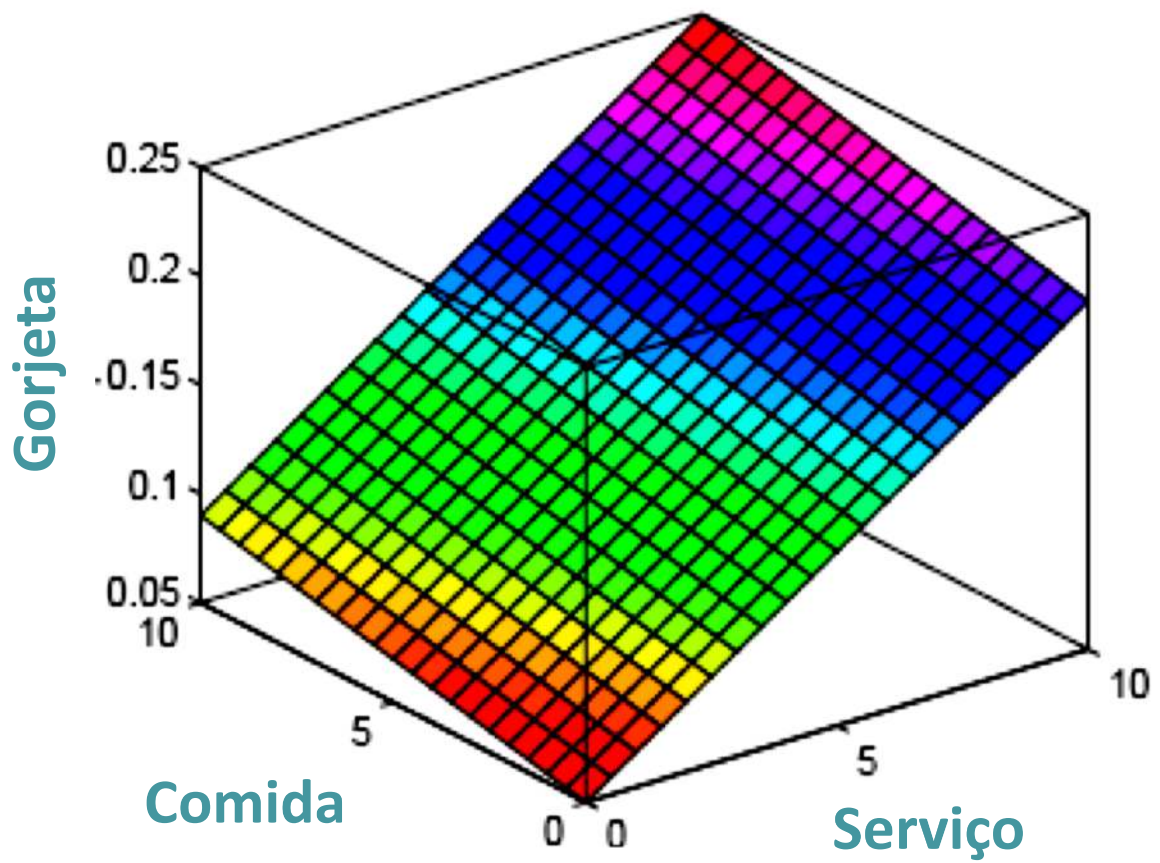
Gorjeta = 0.05 + (0.20/20)*(Serviço + Comida)



O Problema da Gorjeta

Neste caso, o resultado parece bom, mas suponha que desejemos que o serviço seja mais importante do que a qualidade da comida. Assim, o serviço representará 80% da gorjeta, e a comida apenas 20%.

Gorjeta = 0.8*(0.05 + (0.20/10)*Serviço) + 0.2*(0.05 + (0.20/10)*Comida)

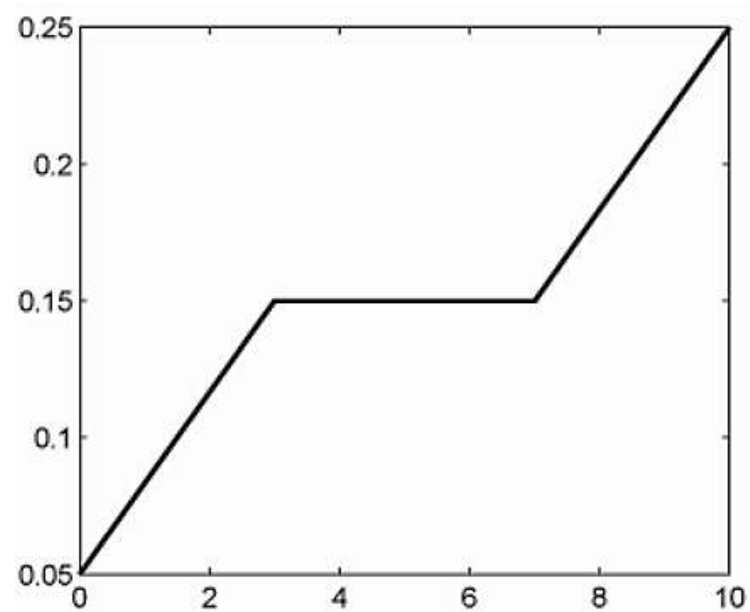


O Problema da Gorjeta

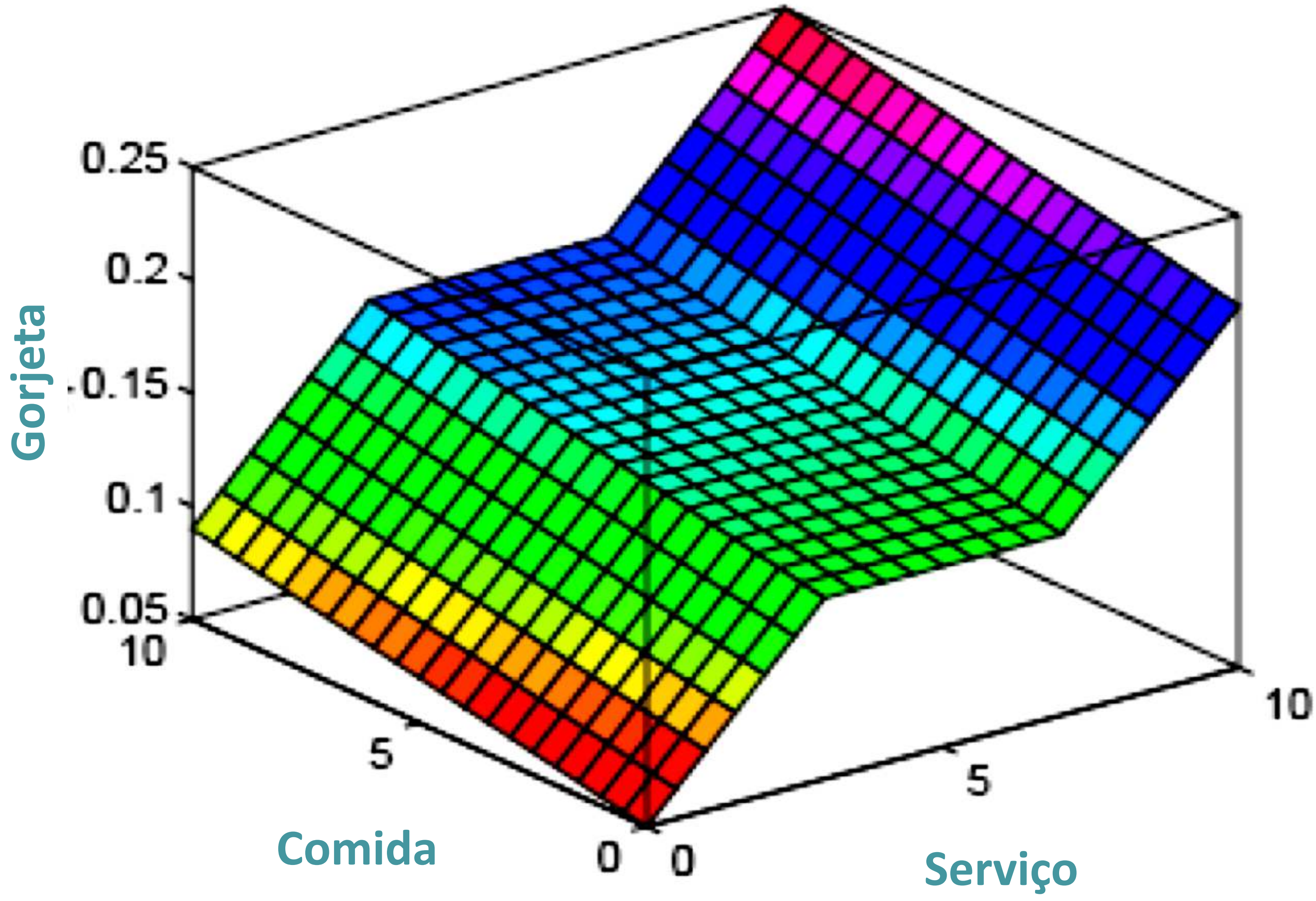
- Ainda assim, a resposta continua muito uniformemente linear.
- Suponha que queiramos uma resposta mais plana no meio, isto é, queremos dar 15% de gorjeta de um modo geral, e só sairemos deste platô se o serviço for excepcionalmente bom ou ruim.
- Retornando ao problema unidimensional que considera somente o serviço, podemos colocar juntos uma simples estrutura condicional:

SE Serviço < 3
Gorjeta = 0.8*(0.05 + (0.10/3)*Serviço) +
0.2*(0.05 + (0.20/10)*Comida);

SENÃO SE Serviço < 7
Gorjeta = 0.15*0.8 +
0.2*(0.05 + (0.20/10)*Comida);
SENÃO
Gorjeta = 0.8+(0.15 + (0.10/3)*(Serviço–7))
+ 0.2*(0.05 + (0.20/10)*Comida)



Expandindo para três dimensões



Abordagem Fuzzy

- O gráfico parece bom, mas a função ficou complicada;
- É um pouco complicado de codificar isto corretamente e a manutenção/modificação futura deste código não é trivial;
- Além disso, é muito menos aparente como o algoritmo funciona para alguém que não acompanhou os passos do processo desde o início;
- Seria bom se pudéssemos capturar os aspectos fundamentais do problema, deixando de lado todos os fatores que poderiam ser arbitrários.

Abordagem Fuzzy

Fazendo uma lista do que realmente importa, pode-se chegar às seguintes condições ou regras descritivas:

se o serviço for ruim então gorjeta é pequena;
se o serviço for bom, a gorjeta é razoável;
se o serviço for excelente então a gorjeta é generosa.

- A ordem em que estas regras são apresentadas aqui é arbitrária, ou seja, não importa qual regra vem antes.
- Se quiséssemos incluir o efeito da comida na gorjeta, poderíamos adicionar as duas seguintes regras:

se a comida for ruim, então gorjeta é pequena;
se a comida for deliciosa, então a gorjeta é generosa.

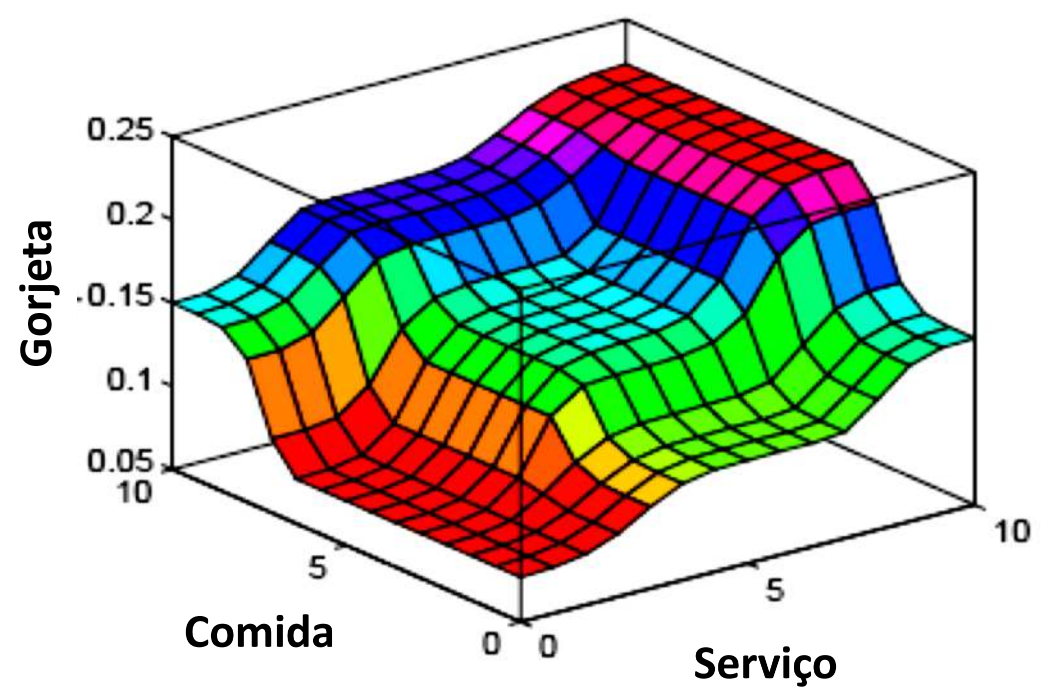
Abordagem Fuzzy

Podemos combinar estes dois diferentes conjuntos de regras em uma lista resumida (com apenas três regras), como abaixo:

Se o serviço for ruim
ou a comida for ruim
então gorjeta é pequena;

Se o serviço for bom
então a gorjeta é razoável;

Se o serviço for excelente
ou a comida for deliciosa
então a gorjeta é generosa.



- Estas três regras são o núcleo de nossa solução.
- Coincidentemente, acabamos de definir as regras para um sistema empregando ***lógica fuzzy***!

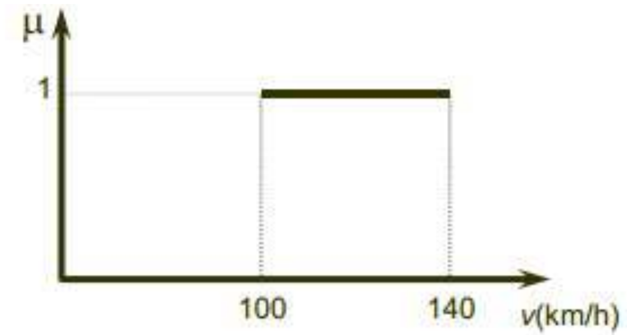
Abordagem Clássica

Abordagem Fuzzy

```
% Establish constants
lowTip=0.05; averTip=0.15; highTip=0.25;
tipRange=highTip-lowTip;
badService=0; okayService=3;
goodService=7; greatService=10;
serviceRange=greatService-badService;
badFood=0; greatFood=10;
foodRange=greatFood-badFood;

% If service is poor or food is rancid, tip is cheap
if service<okayService,
    tip=(((averTip-lowTip)/(okayService-badService)) ...
        *service+lowTip)*servRatio + ...
        (1-servRatio)*(tipRange/foodRange*food+lowTip);
% If service is good, tip is average
elseif service<goodService,
    tip=averTip*servRatio + (1-servRatio)* ...
        (tipRange/foodRange*food+lowTip);
% If service is excellent or food is delicious, tip is generous
else,
    tip=(((highTip-averTip)/ ...
        (greatService-goodService))* ...
        (service-goodService)+averTip)*servRatio + ...
        (1-servRatio)*(tipRange/foodRange*food+lowTip);
end
```

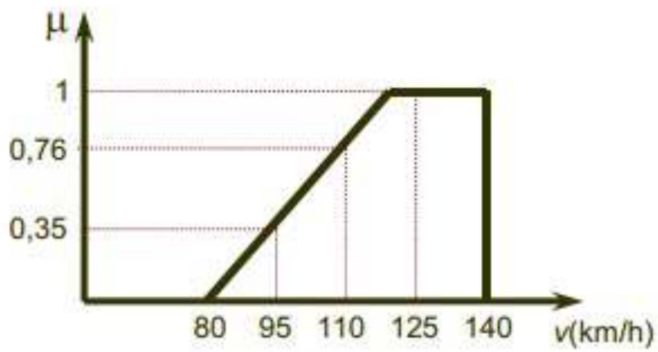
Comparação entre abordagens



Lógica Clássica

objetos pertencem ou não a uma determinada classe

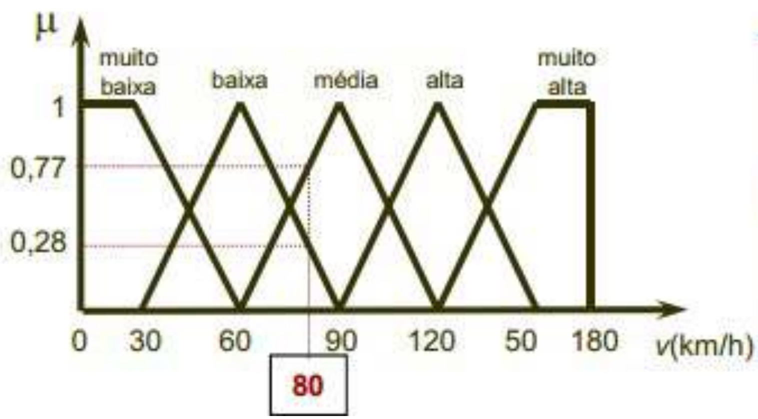
(como tratar paradoxos?)



Lógica Fuzzy

objetos podem pertencer mais (ou menos) a uma determinada classe

(não é probabilidade!)

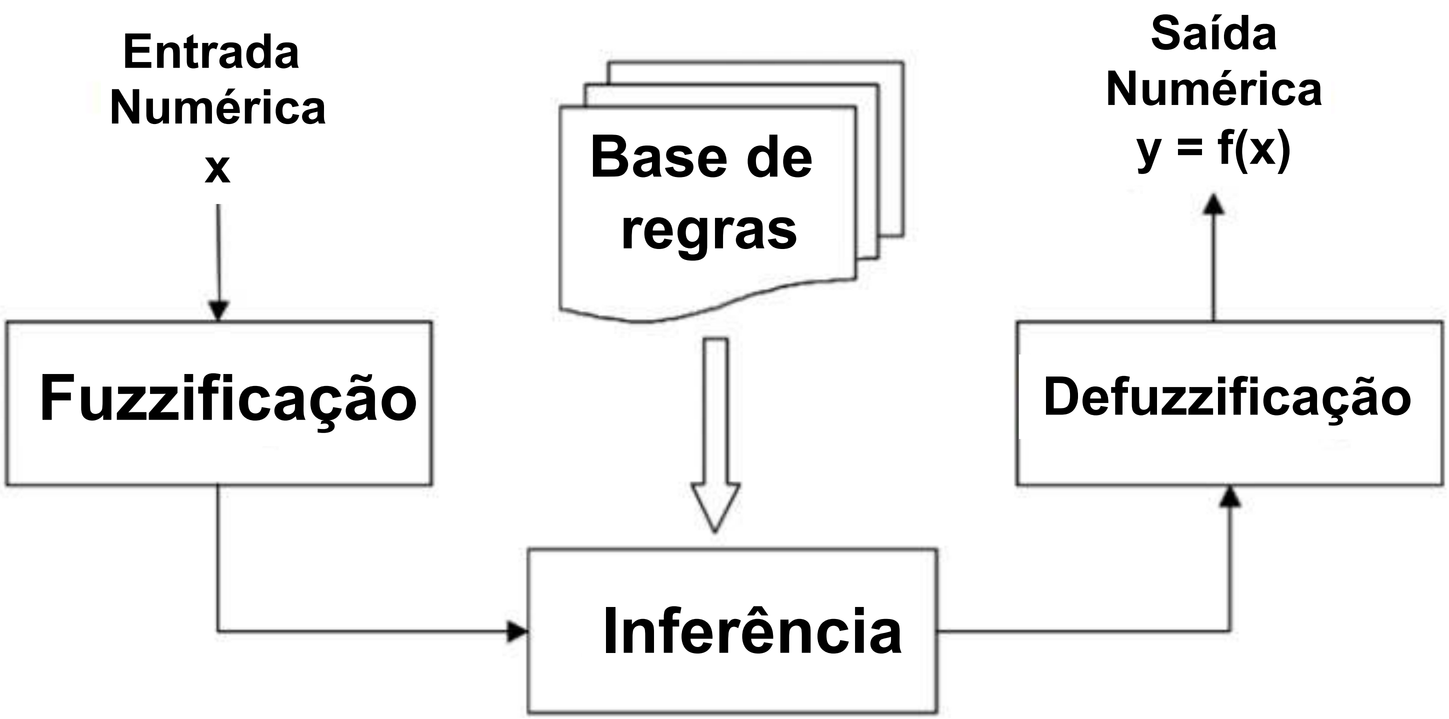


Sistema Fuzzy

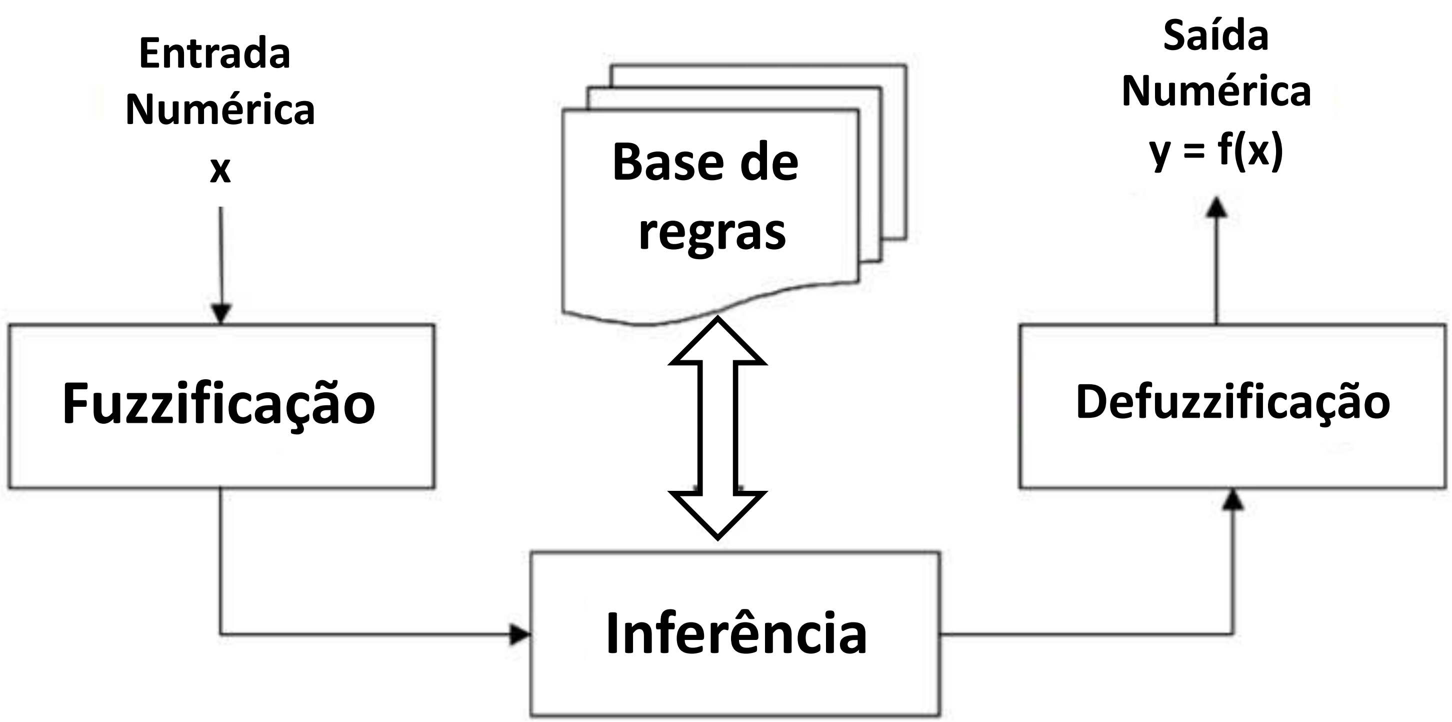
Variáveis representadas por funções de pertinência

Sistemas Fuzzy

- Podemos, então, concluir que um sistema fuzzy é aquele em que as variáveis de entrada e saída são representadas por funções de pertinência através de variáveis linguísticas e relacionadas através de regras do tipo:
  - Se <condição> então <ação>
- Na terminologia da lógica fuzzy:
  - Se <antecedente> então <consequente>

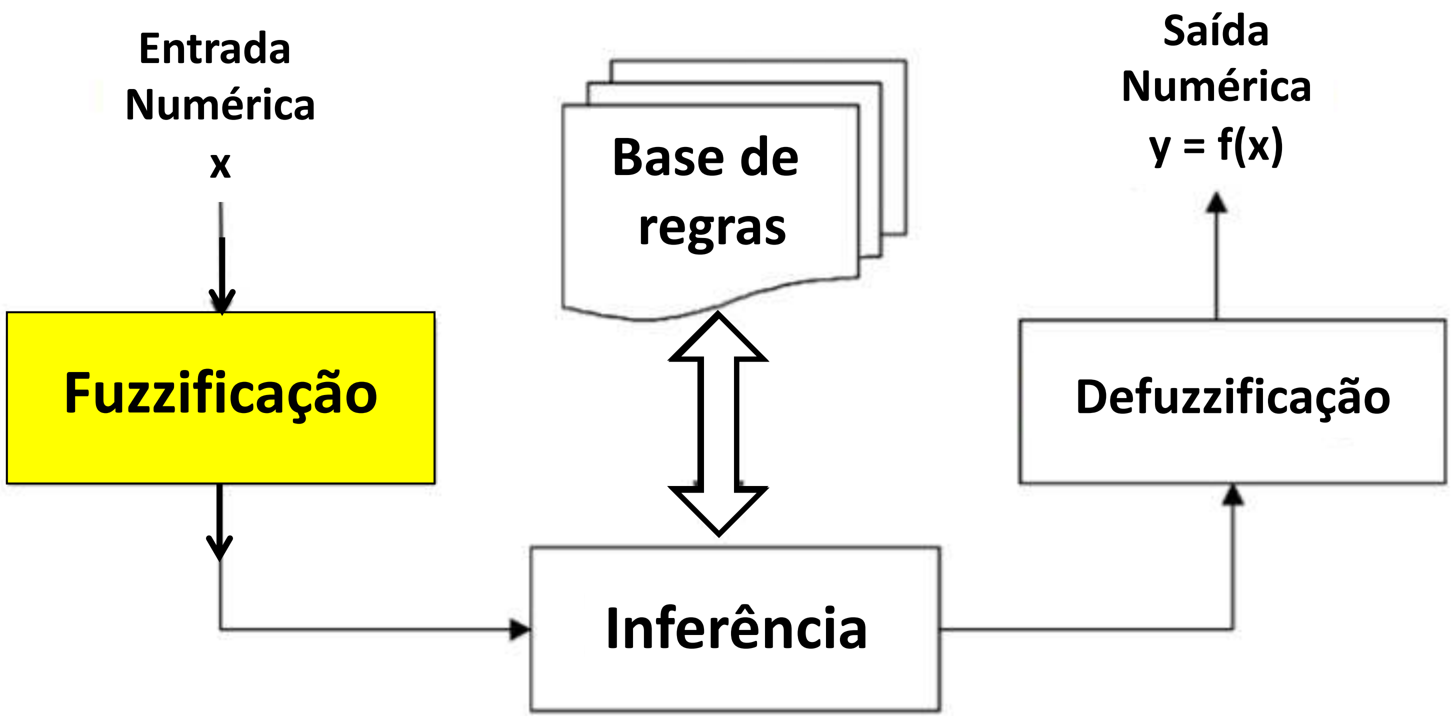


Etapas de processamento



A primeira etapa de processamento de um sistema baseado em lógica fuzzy é a de **fuzzificação**.

Fuzzificação



Esta tem por objetivo classificar o valor numérico de entrada de acordo com termos linguísticos relacionados aos conjuntos fuzzy que definem a função de pertinência.

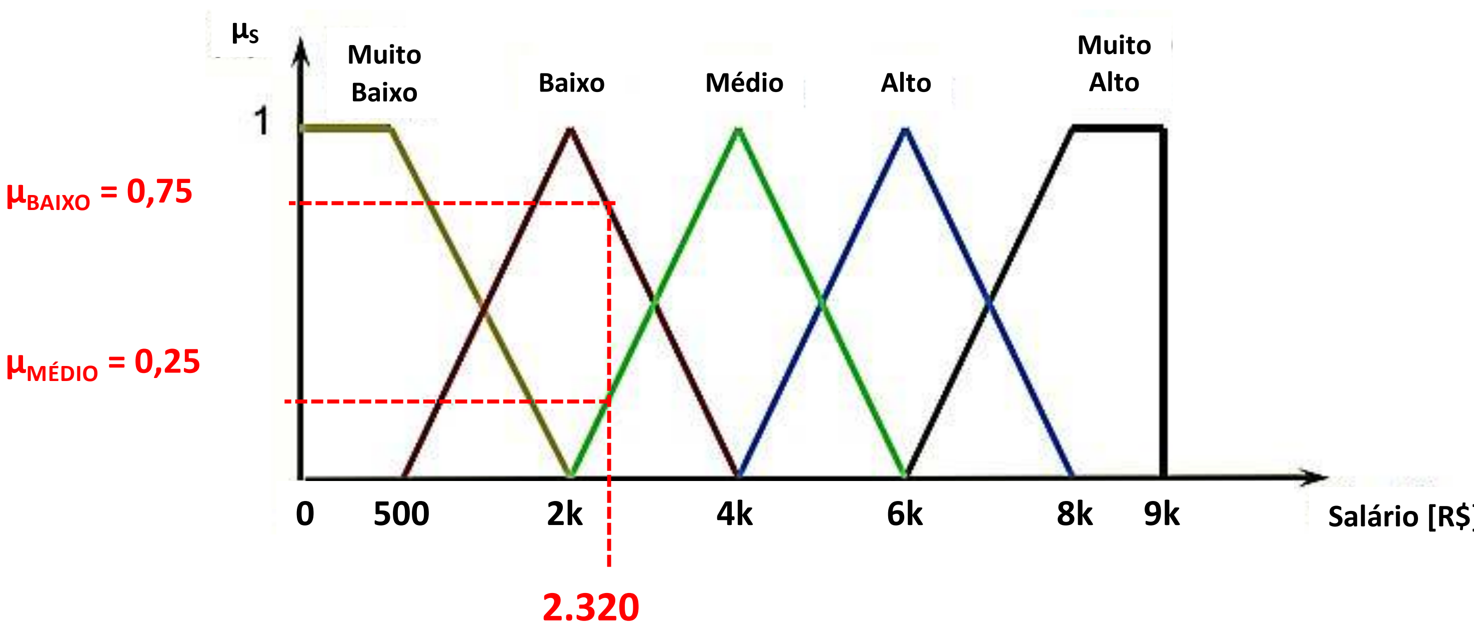
Fuzzificação

Exemplo:

- Dado um valor numérico de entrada, este é classificado por um termo linguístico e um grau de pertinência.
- Ambos dependem da função de pertinência.

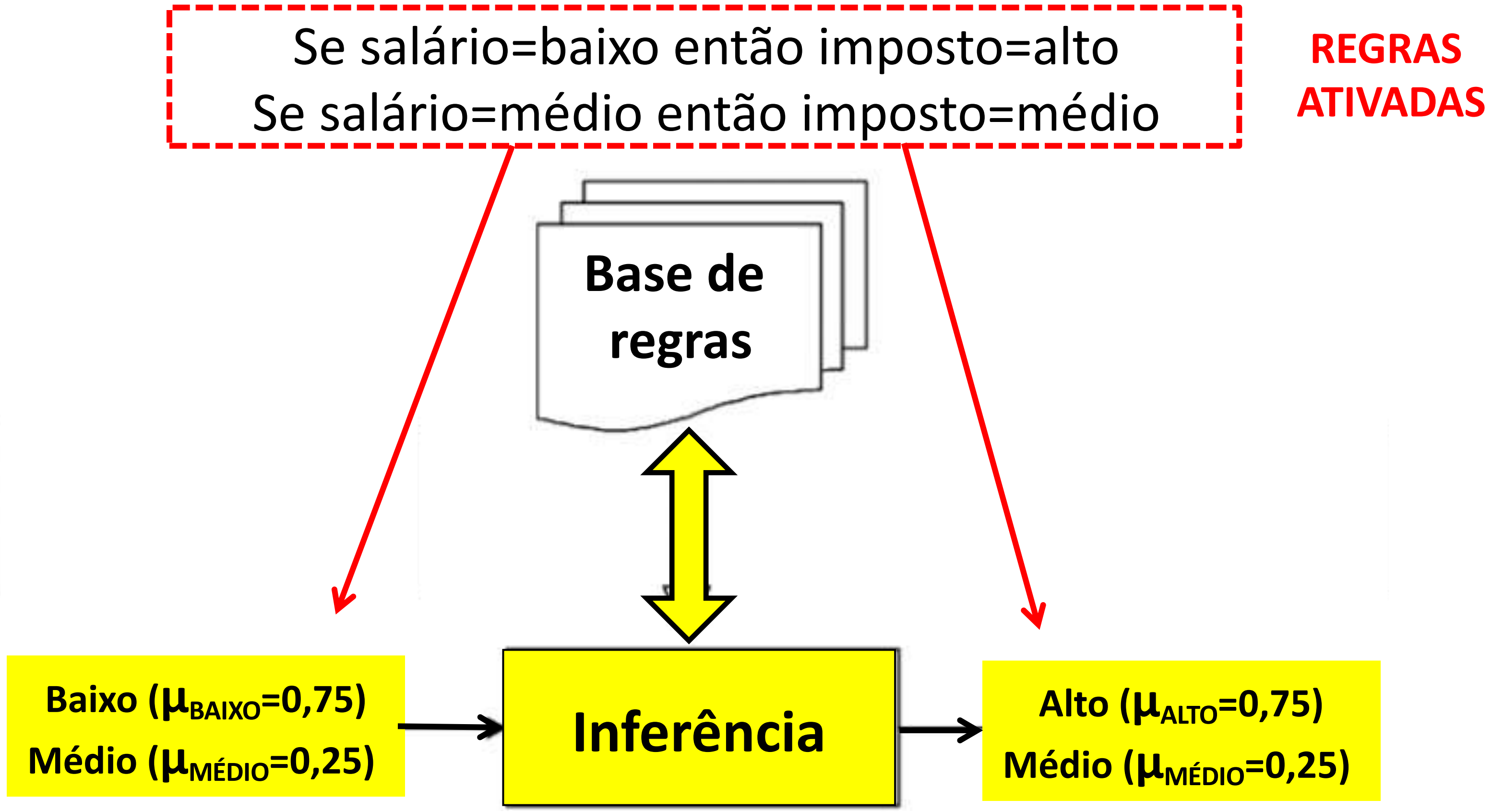
Entrada Numérica

Salário = R$ 2.320 → **Fuzzificação** → **Baixo (μ_{BAIXO}=0,75)** **Médio ($\mu_{MÉDIO}$=0,25)**



Inferência

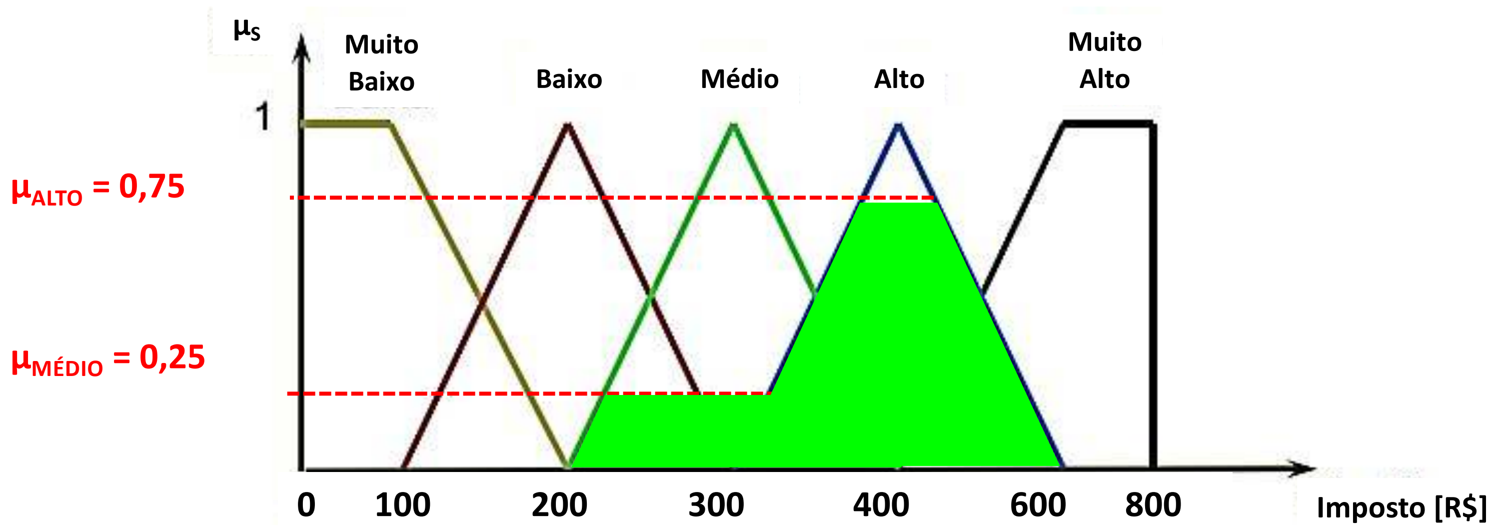
Corresponde ao “raciocínio do sistema”. Tem por objetivo identificar quais regras foram ativadas e quais conjuntos fuzzy de saída serão ativados e com qual intensidade.



Defuzzificação

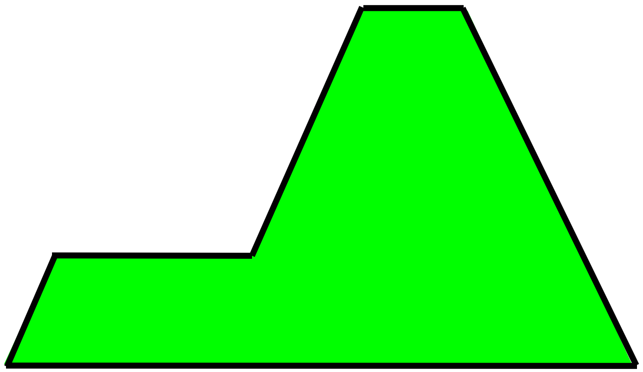
Tem o papel inverso ao da fuzzificação, ou seja, produz uma saída numérica correspondente aos conjuntos de saída ativados.

Alto (μ_{ALTO}=0,75)
Médio ($\mu_{MÉDIO}$=0,25) → **Defuzzificação** → **Saída Numérica**: **Imposto = R$387,50**



Defuzzificação

A questão é: a qual valor numérico corresponde a figura abaixo?

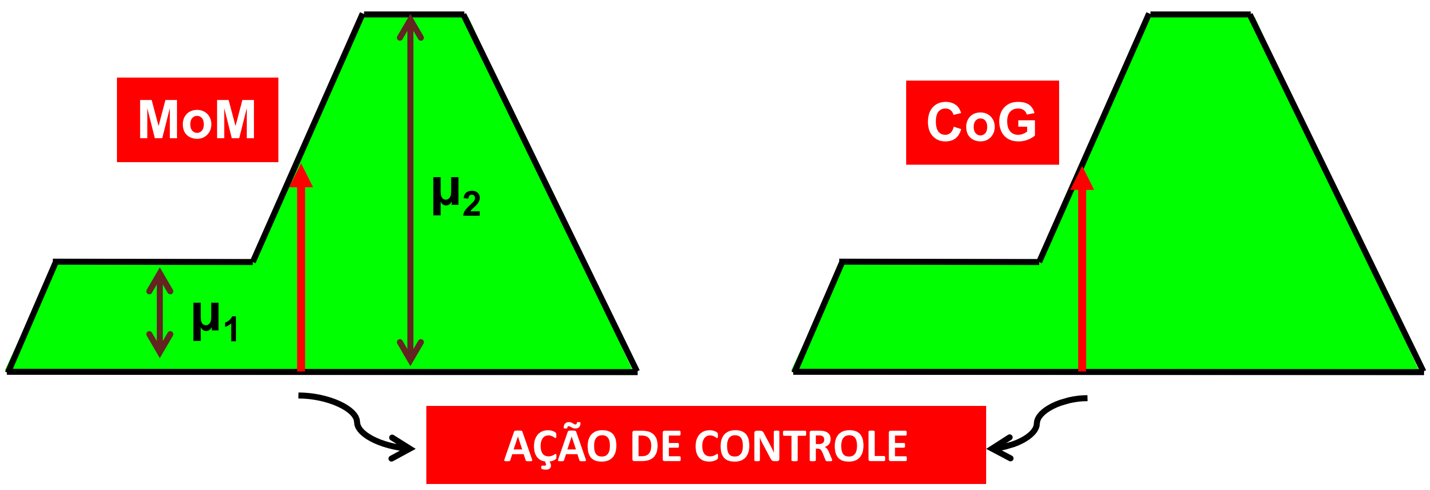


- No contexto fuzzy, há diversas maneiras de se encontrar a resposta para a pergunta anterior.
- O cálculo é feito através de métodos de defuzzificação, sendo os mais utilizados:
  - Centróide
  - Média dos Máximos
  - Centro dos Máximos

Defuzzificação

1) Método da Média dos Máximos (MoM)
Gera uma ação de controle que representa o valor médio de todas as ações de controle individuais cujas funções de pertinência assumem o valor máximo.

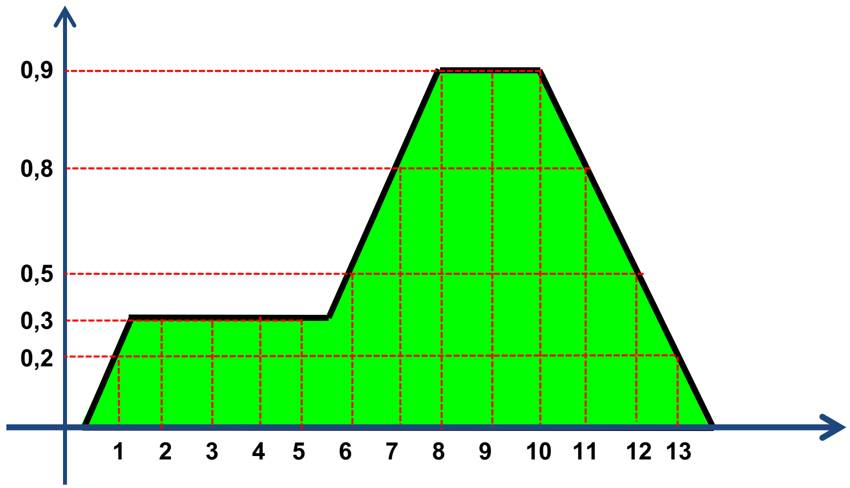
2) Método do Centro de Gravidade (CoG)
A ação de controle numérica é calculada obtendo-se o centro de gravidade da distribuição de possibilidades da ação de controle global.



Defuzzificação

O centro de gravidade é calculado por meio da relação entre o somatório do produto de cada abscissa pelo seu respectivo grau de pertinência e o somatório dos graus de pertinência.

$$CoG = \sum x.\mu(x) \Big/ \sum \mu(x)$$



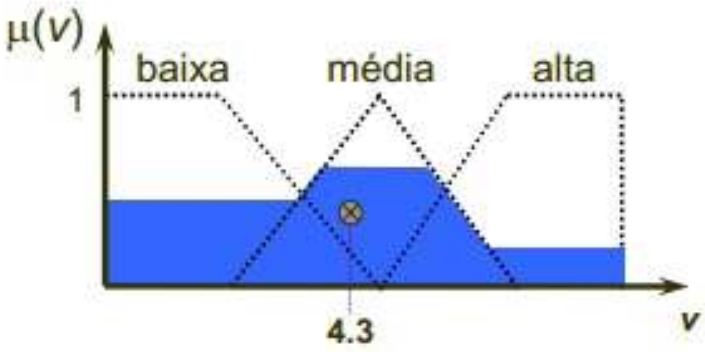
$$\mathrm{CoG} = \frac{1*0{,}2 + (2+3+4+5)*0{,}3 + 6*0{,}5 + 7*0{,}8 + (8+9+10)*0{,}9 + 11*0{,}8 + 12*0{,}5 + 13*0{,}2}{0{,}2 + 4*0{,}3 + 0{,}5 + 0{,}8 + 3*0{,}9 + 0{,}8 + 0{,}5 + 0{,}2} = 7{,}29$$

Defuzzificação

Método do Centro de Área (CDA)

$$CDA = \frac{\sum_{k=1}^{N} \mu(v_k) \cdot v_k}{\sum_{k=1}^{N} \mu(v_k)}$$

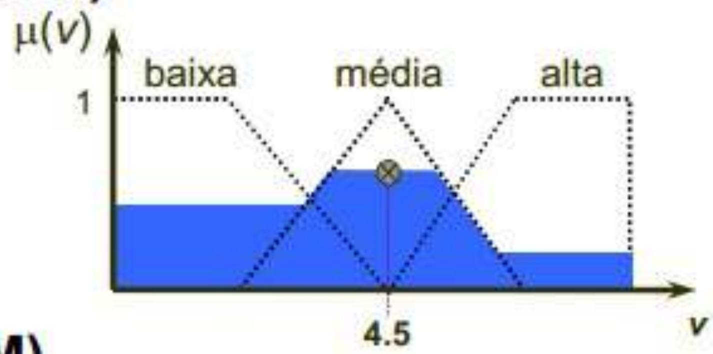
Onde N é o número de discretizações do universo de discurso.



Método da Média dos Máximos (MDM)

$$MDM = \sum_{k=1}^{M} \frac{v_k}{M}$$

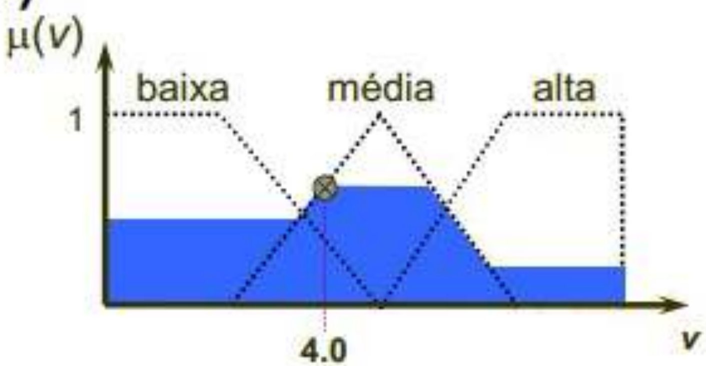
Onde v_k são os valores que contem graus de pertinência máximos e M é a quantidade destes elementos.



Método do Primeiro Máximo (MPM)

$$MPM = \min_{v}\{\max\{\mu(v)\}\}$$

MPM é o valor do universo de discurso onde ocorre o primeiro maior máximo.



Sistemas SISO

Sistemas SISO

<u>Inferência em sistemas SISO</u>
<u>(Única entrada e única saída)</u>

- Em sistemas simples, com entrada e saída únicas, a relação entre conjuntos fuzzy é direta e pode ser escrita através de regras como:

Se <velocidade=alta> então <aceleração=média>

Se <nível=alto> então <abertura_da_válvula=pouca>

Nestes casos, o grau de pertinência da saída é o mesmo da entrada, ou seja, se velocidade for igual a alta com $\mu_{ALTA}=0,7$ então a aceleração será média com $\mu_{MÉDIA}=0,7$.
<u>A relação é direta.</u>

Sistemas MISO

Sistemas MISO

- É possível notar, pelas informações anteriores, que a base de regras armazena o “conhecimento” acerca do comportameto do sistema e o processo de inferência corresponde ao “raciocínio” do mesmo;

- Cabe ressaltar que este não é apenas um processo de busca executado sobre uma base de dados, mas um tipo de mecanismo capaz de extrair conclusões com base em uma série de afirmações declaradas na forma de regras de produção;

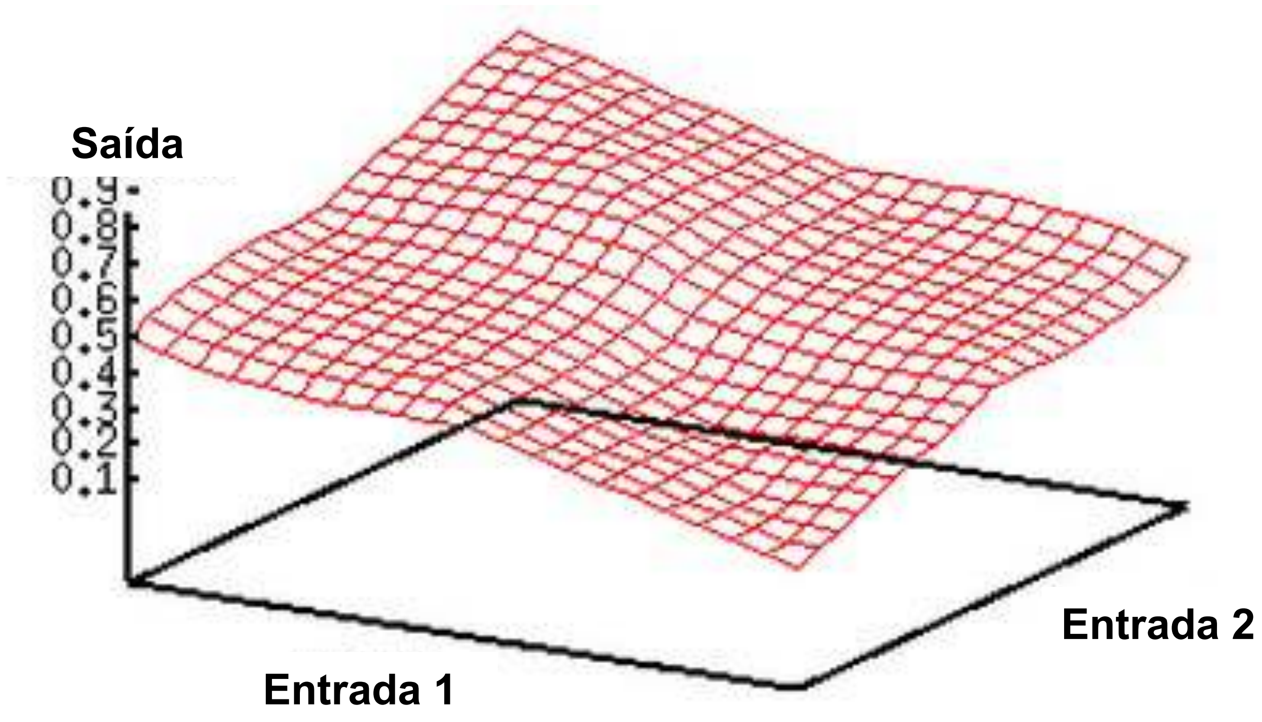
- Este mecanismo é totalmente baseado nas proposições da lógica clássica e torna-se mais complexo à medida que o número de variáveis aumenta.

Sistemas MISO

Inferência em sistemas MISO
(Múltiplas entradas e única saída)

- Neste caso deve-se estabelecer uma relação entre vários conjuntos de entrada com um único valor de saída.

- A saída dependerá do estado das entradas. Um exemplo gráfico desta relação para um sistema com duas entradas é:



Sistemas MISO

<u>Inferência em sistemas MISO</u>
<u>(Múltiplas entradas e única saída)</u>

- No processo de inferência, operações relacionais são utilizadas para "disparar" regras *fuzzy* "Se-Então" existentes na base de regras, de acordo com o estado das variáveis de entrada.

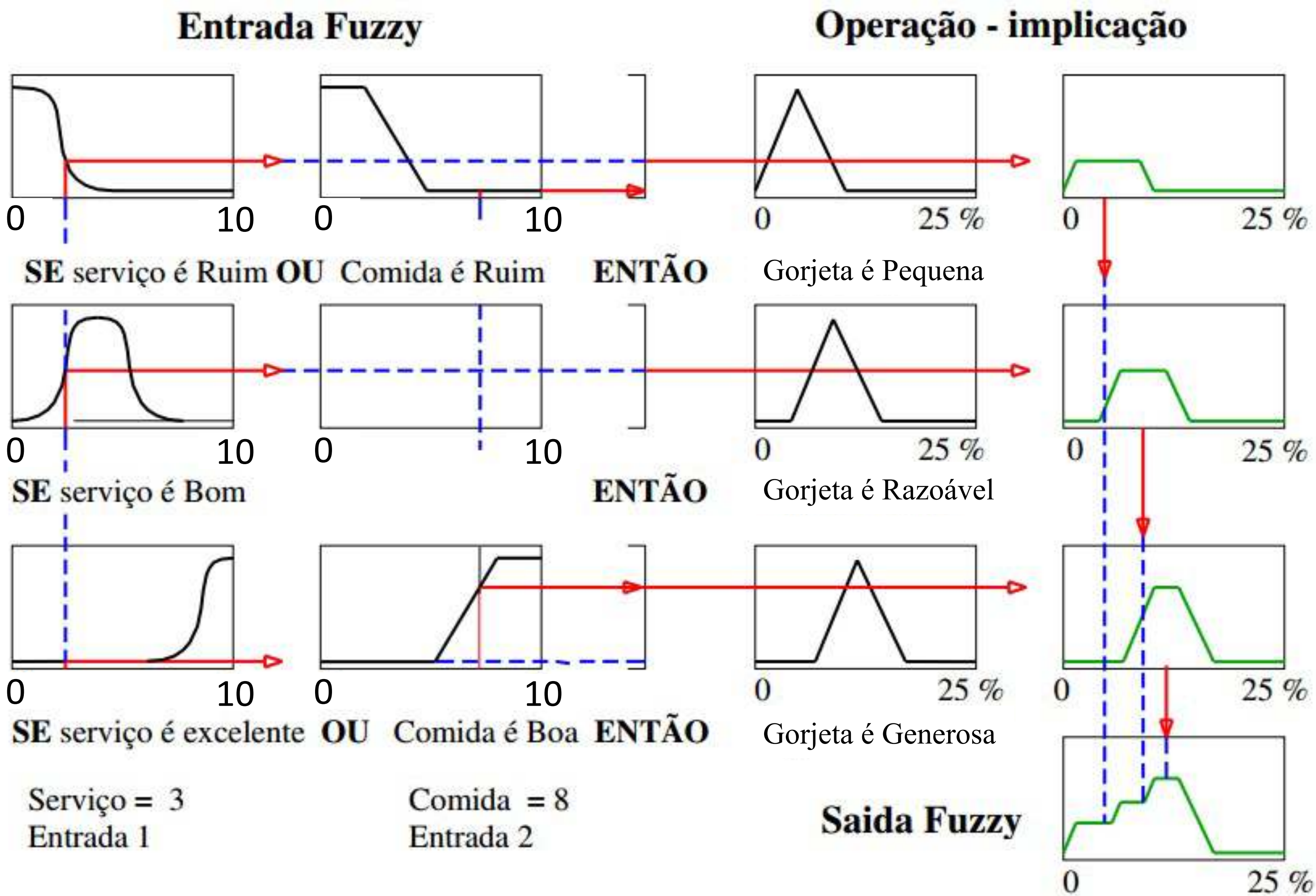
- Como várias regras são ativadas (ou disparadas), tem-se como resultante uma **região** *fuzzy* que está relacionada com a saída do processo.

- Os passos para a obtenção dessa região *fuzzy* de saída são:

- Identificar todas as regras que estejam ativadas;
- Determinar a saída *fuzzy* **de cada uma** das regras ativadas.
- Combinar (**agregar**) todas as saídas *fuzzy* calculadas.

Sistemas MISO

Se o serviço for ruim ou a comida for ruim **então** gorjeta é pequena;
Se o serviço for bom **então** a gorjeta é razoável;
Se o serviço for excelente ou a comida for deliciosa **então** a gorjeta é generosa.



Mamdani x Takagi-Sugeno

<u>Tipos de Sistemas Fuzzy</u>

Na literatura existem vários modelos de sistemas *fuzzy*, que se diferenciam, normalmente, na forma de "expressar" o consequente da regra, ou seja, a ação de controle.

Alguns dos modelos mais conhecidos são o modelo de Mamdani (1973) e o modelo de Takagi-Sugeno (1983).

O primeiro relaciona dois conjuntos *fuzzy* de forma direta enquanto que o segundo dispara uma ação com base na média ponderada entre as saídas ativadas.

Modelo de Mamdani

Modelo de Mamdani

O modelo de Mamdani utiliza conjuntos *fuzzy* nos **consequentes** das regras *fuzzy*.

Neste modelo, a saída da etapa de inferência é representada por um conjunto *fuzzy*, que é o resultado da agregação das saídas, sendo o resultado submetido a defuzzificação.

No modelo Mamdani tanto os antecedentes como os consequentes são mapeados com conjuntos *fuzzy*.

Um exemplo de regra típica num modelo Mamdani:
SE Erro é "Grande" E a Derivada de Erro é "Pequena" Então Torque é "Alto".

Modelo de Mamdani

Caso o sistema em questão tenha mais de uma variável de entrada, é necessário aplicar uma técnica de agregação dos conjuntos antecedentes, que neste caso geralmente é dada pelas τ**-norma (mínimo – interseção)**

Nas aplicações práticas têm-se N regras ativadas, das quais são gerados N conjuntos consequentes, um por regra.

Para obter o conjunto final de saída, é feita a composição dos através de uma **s-norma (máximo - união), pois considera todas as ações de controle isoladamente.**

Agregação e combinação: combinam uma série de conjuntos fuzzy para produzir um único correspondente.

Modelo de Mamdani

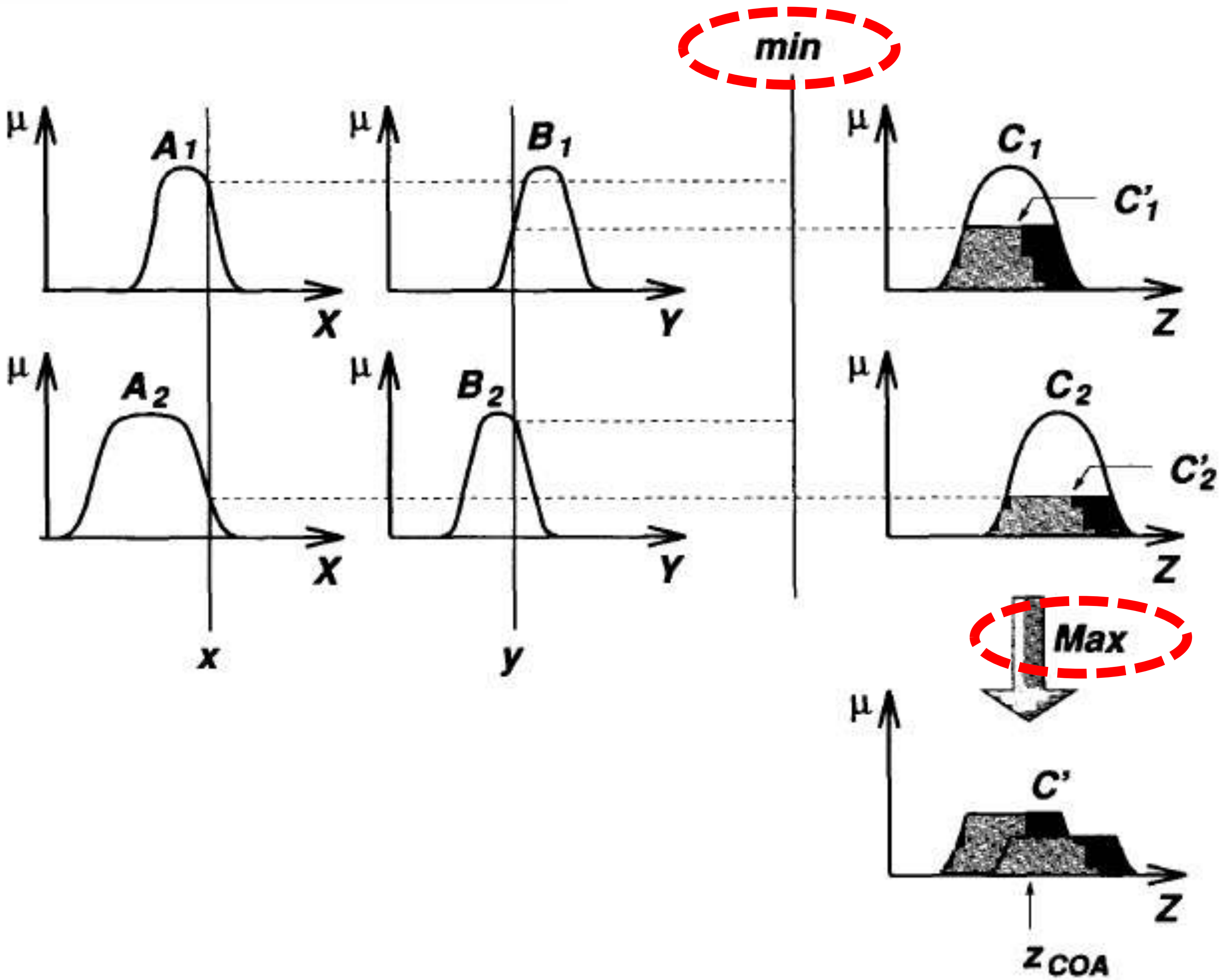
Normas triangulares:

Fornecem modelos genéricos para as operações de intersecção e união de conjuntos *fuzzy*:

• **Normas triangulares (τ-normas):** intersecção;
Associada, normalmente ao **ANTECENDENTE** das regras ativadas.

• **Co-normas triangulares (s-normas):** união;
Associada, normalmente ao **CONSEQUENTE** das regras ativadas.

Modelo de Mamdani



Exemplo completo

Especificação das Variáveis do Problema

- A determinação da pressão, num sistema automatizado para freios automotivos, pode ser estimada a partir da quantidade de movimento (massa e velocidade) do veículo.
- Os especialistas envolvidos com o projeto do sistema especificaram o seguinte sistema *fuzzy* para ser aplicado neste problema:

- Variáveis de Entrada:

- Velocidade (km/h) $\rightarrow v \in [0; 180]$
- Massa do veículo (ton) $\rightarrow m \in [0; 2,4]$

-Variável de Saída:

- Pressão no freio (atm) $\rightarrow p \in [0; 1]$

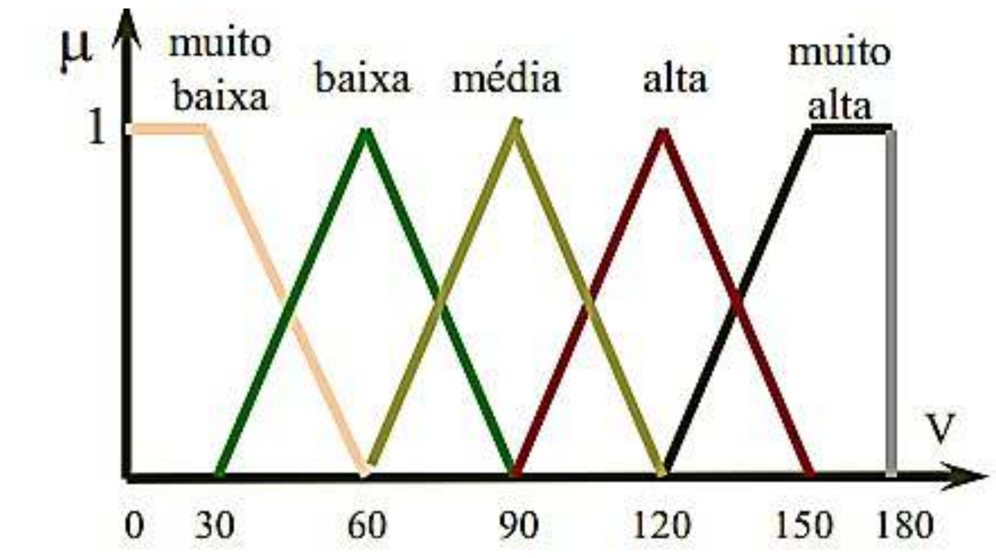
Especificação das Variáveis do Problema

- A fim de validar o sistema em questão, deseja-se, então, saber qual a pressão a ser exercida nos freios de um veículo com massa de 1,5 ton a uma velocidade instantânea igual a 155 km/h.

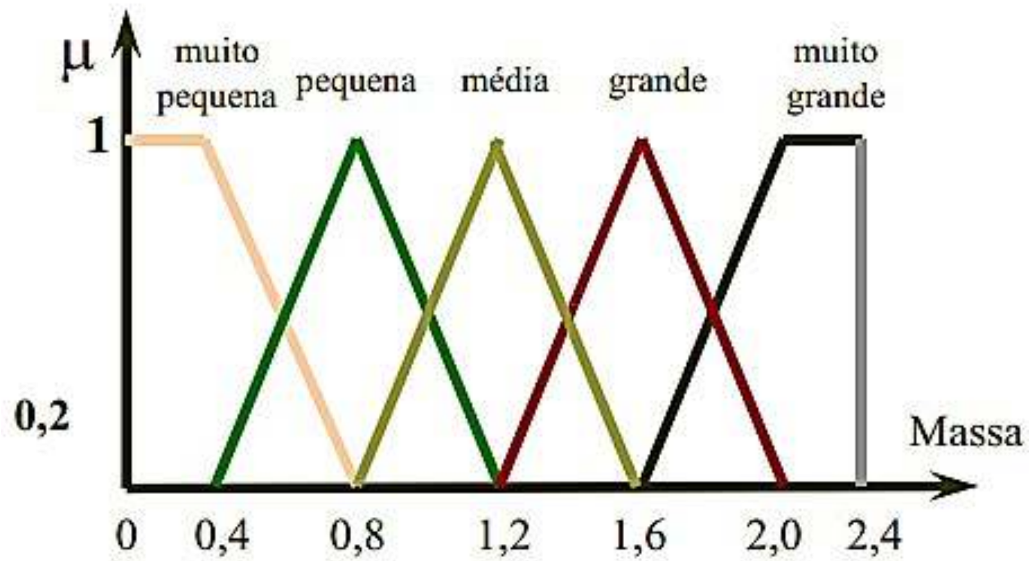
- Os operadores fuzzy a serem utilizados serão os seguintes:

→ **Conectivo** => E (Mínimo), OU (Máximo)
→ **Implicação** => Mamdani
→ **Agregação** => Máximo
→ **Defuzzificação** => Centróide

Especificação de Funções de Pertinência

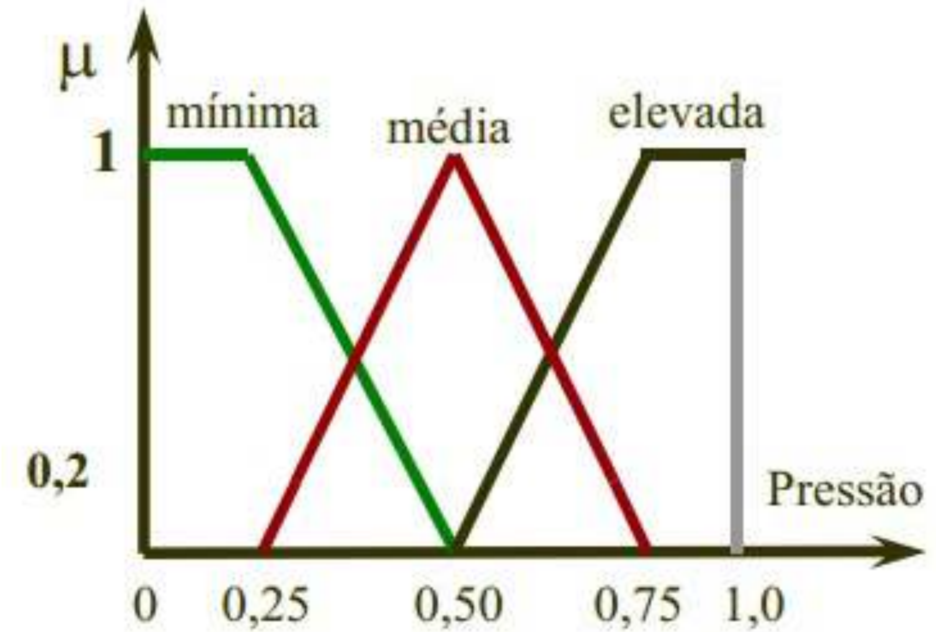


<u>- Variável de Entrada:</u>
Velocidade (km/h)
→ v ∈ [0; 180]



<u>- Variável de Entrada</u>
Massa do veículo (ton)
→ m ∈ [0; 2,4]

Especificação de Funções de Pertinência



-Variável de Saída: Pressão no freio (atm) → p ∈ [0; 1]

Especificação da Base de Regras

Após análise do problema, foi decidido que todas as regras do sistema seriam do tipo:

Se (velocidade é “alta”) E (massa é “grande”)

Então a pressão no freio é “elevada”

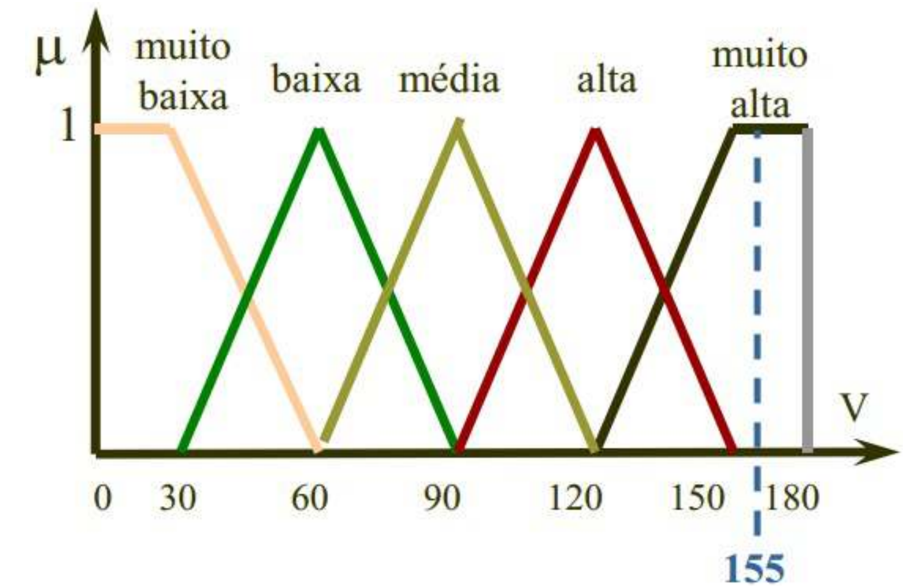
massa \ velocidade	MB	BA	ME	AL	MA
MP	MI	MI	MI	ME	ME
PE	MI	MI	MI	ME	ME
ME	MI	MI	ME	ME	ME
GR	ME	ME	EL	EL	EL
MG	ME	ME	EL	EL	EL

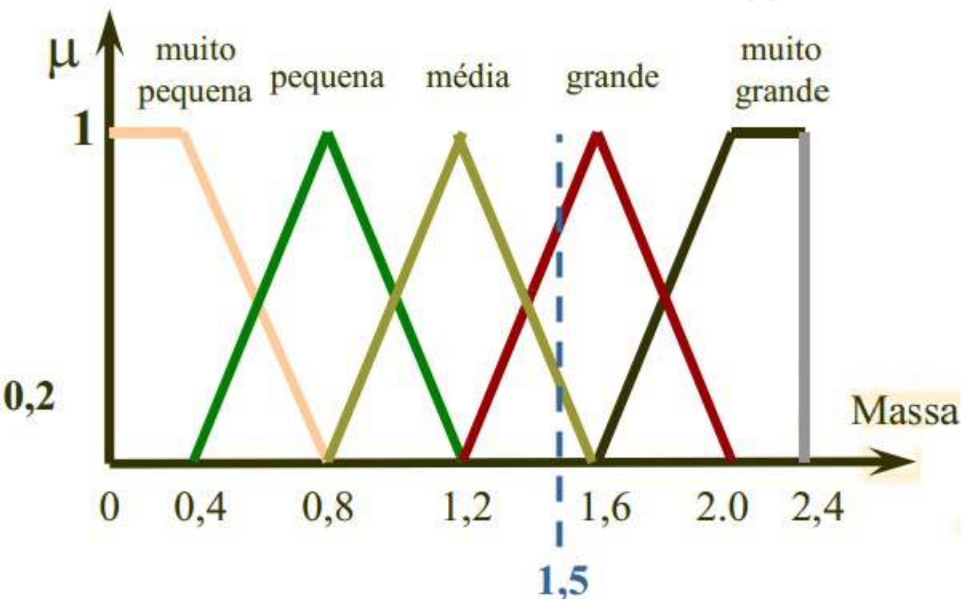
Velocidade:
MB (muito baixa), BA (baixa),
ME (média), AL (alta),
MA (muito alta)

Massa: MP (muito pequena),
PE (pequena), ME (média),
GR (grande), MG (muito grande)

Pressão: MI (mínima),
ME (média), EL (elevada)

Fuzzificação das Variáveis





- Para (v=155 km/h) e (m=1,5 ton), tem-se duas regras ativadas, conforme as funções de pertinência das entradas.
- As regras ativadas estão circuladas em azul.

massa \ velocidade	MB	BA	ME	AL	MA
MP	MI	MI	MI	ME	ME
PE	MI	MI	MI	ME	ME
ME	MI	MI	ME	ME	ME
GR	ME	ME	EL	EL	EL
MG	ME	ME	EL	EL	EL

Implicação

Levando-se em conta os seguintes valores de entrada:

v= 155 km/h

e

m = 1,5 ton

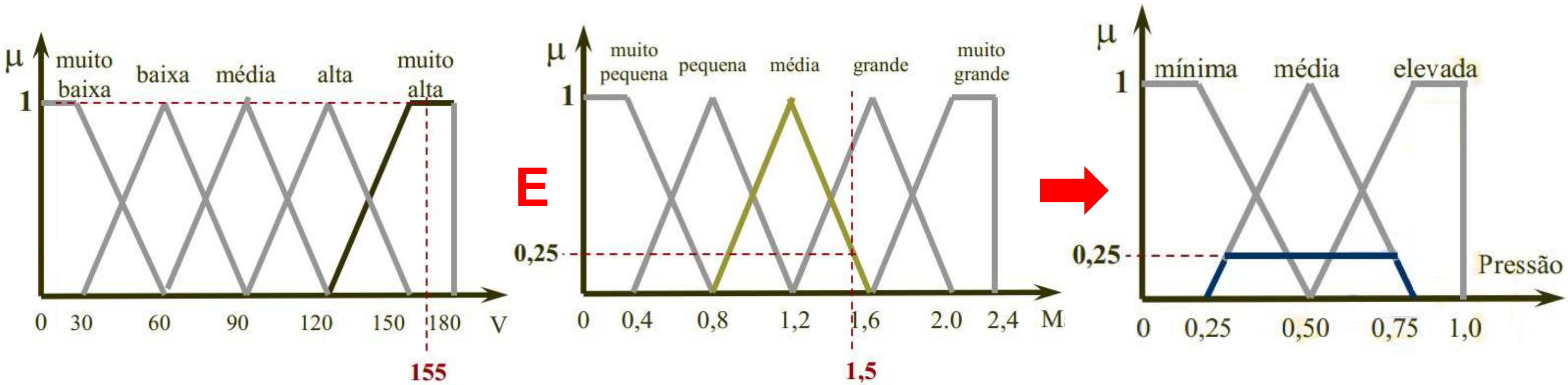
É possível verificar que as seguintes regras foram ativadas:

1ª - Se (velocidade é “muito alta”) E (massa é “média”)
Então a pressão no freio é “média”

2ª - Se (velocidade é “muito alta”) E(massa é “grande”)
Então a pressão no freio é “elevada”

Implicação (PRIMEIRA REGRA)

Conectivo **E (AND)** => Mínimo
Implicação **ENTÃO** => Mamdani (Operador "Mínimo")



Se (velocidade é "**muito alta**") **E** (massa é "**média**") **Então** pressão é "**média**")

$\mu_{\text{MUITO ALTA}} = 1$

$\mu_{\text{MÉDIA}} = 0,25$

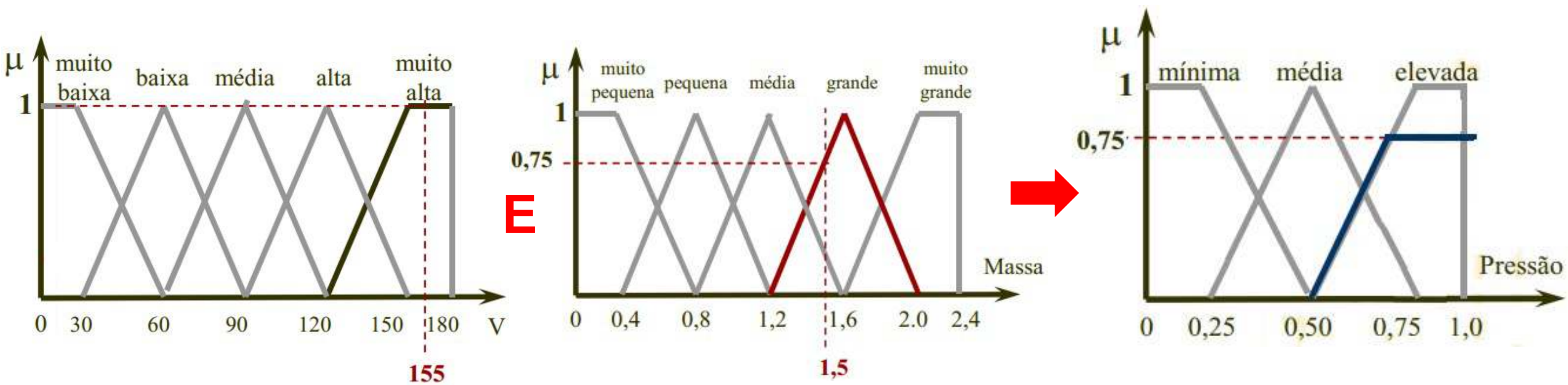
$\mu(\text{MUITO ALTA} \cap \text{MÉDIA}) =$

Mín (1; 0,25) = 0,25

Implicação (SEGUNDA REGRA)

Conectivo **E (AND)** => Mínimo

Implicação **ENTÃO** => Mamdani (Operador "Mínimo")



Se (velocidade é "**muito alta**") **E** (massa é "**grande**") **Então** pressão é "**elevada**")

$\mu_{\text{MUITO ALTA}} = 1$

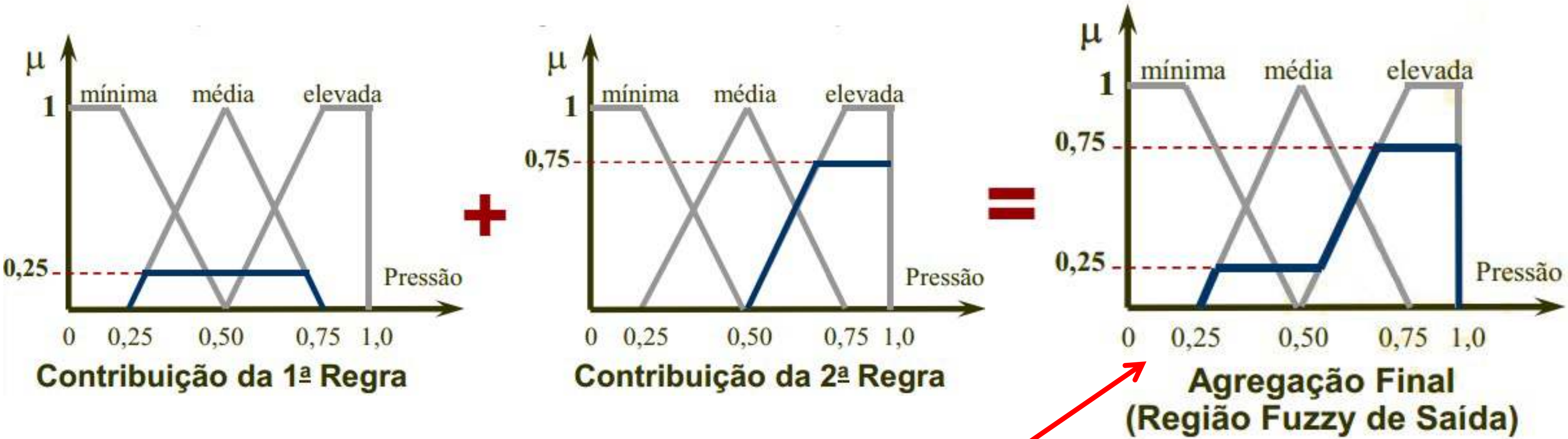
$\mu_{\text{GRANDE}} = 0{,}75$

$\mu_{(\text{MUITO ALTA} \cap \text{GRANDE})} =$

Mín (1; 0,75) = 0,75

Agregação

- Sua função é agregar (combinar) as contribuições das regras ativadas.
- Operador de Agregação → **Máximo** (entre as curvas que delimitam as regiões de contribuição de cada regra ativada)



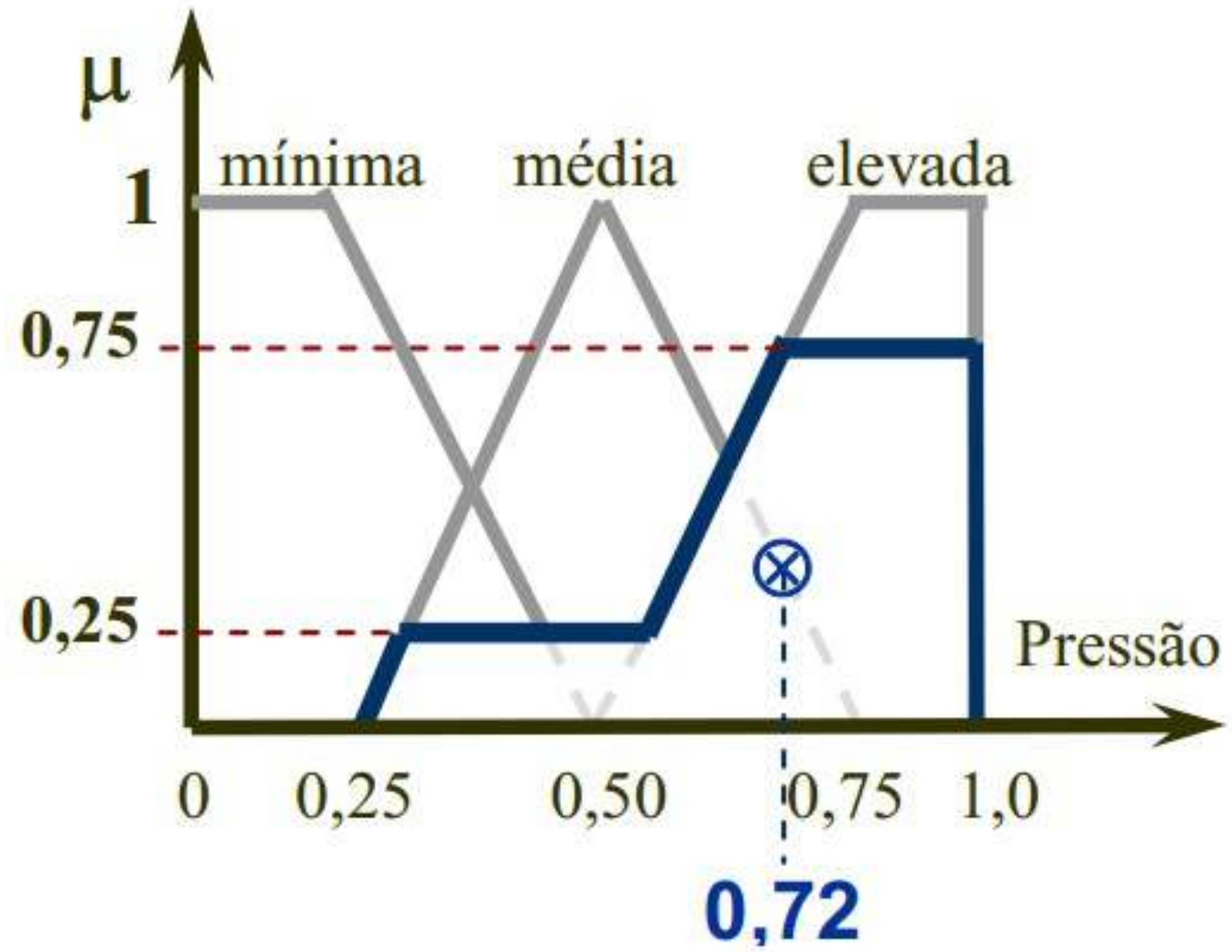
$\mu_{(FINAL)}$ = **MÁX (0,25; 0,75)**

Defuzzificação

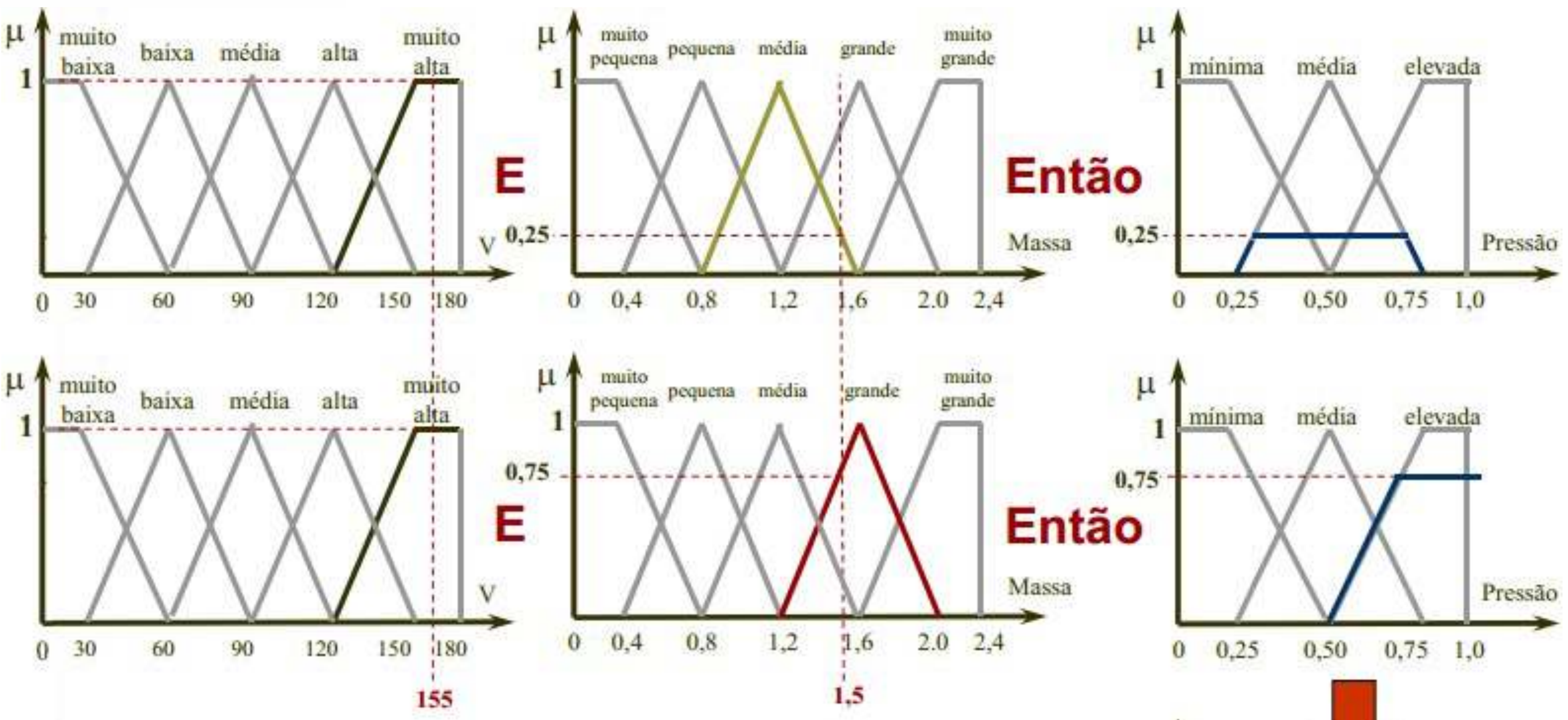
- Operador de Defuzzificação → Centróide

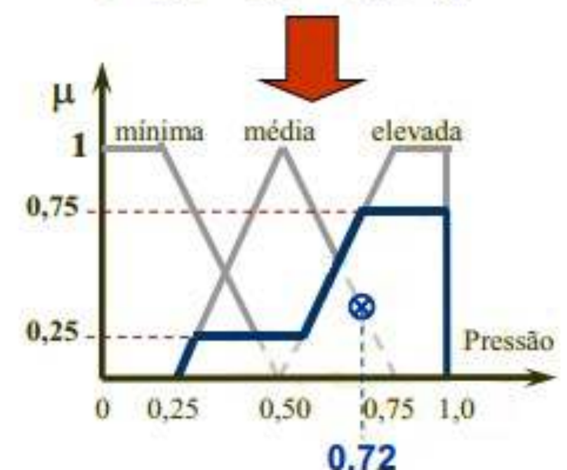
(Aproximação do Centróide)	
x	u(x)
0,25	0,00
0,30	0,25
0,55	0,25
0,65	0,75
1,00	0,75

Σu(x)*x	1,45
Σu(x)	2,00
Centróide	0,73



Resumo





Conectivo → E (Mínimo), OU (Máximo)

Implicação → Mamdani

Agregação → Máximo

Defuzzificação → Centróide

Modelo de Takagi-Sugeno

Modelo de Takagi-Sugeno

- No modelo de Takagi-Sugeno (TS), o consequente de cada regra é função das variáveis de entrada;
- A saída final de todas as regras é determinada pela média ponderada das saídas geradas por cada um das regras.
- Os coeficientes de ponderação são definidos pelos graus de ativação das respectivas regras.
- Uma regra típica de um modelo Sugeno é da seguinte forma:

  SE Erro=x e a Derivada_do_Erro=y então Torque é τ_i = a.x+b.y+c

  Onde τ_i é o valor de saída de cada um das regras.

Referências Bibliográficas

[1] LIMA, I.; PINHEIRO, C. A. M.; **Inteligência Artificial**, 1ºed. – Cap. 2

[2] Terano, T., Asai, K., Sugeno, M. - **Fuzzy Systems Theory and its Applications** - Editora Academic Press, 1992 (ISBN: 0126852456)

[3] Driankov, Dimiter - **An introduction to fuzzy control** - Editora Springer-Verlag , 1996 (ISBN: 3540606912)

[4] MAMDANI, E. H. **Aplications of fuzzy algorithms for control of simple dynamic plant**. Proc. IEEE 121, vol. 12, p. 1585-1588, 1973.

[5] TAKAGI, Tomohiro; SUGENO, Michio. Derivation of fuzzy control rules from human operator's control actions. **IFAC Proceedings Volumes**, v. 16, n. 13, p. 55-60, 1983.

[6] Material de aula de Inteligência Artificial. Prof. Yvo Marcelo Chiaradia. Inatel, 2019.