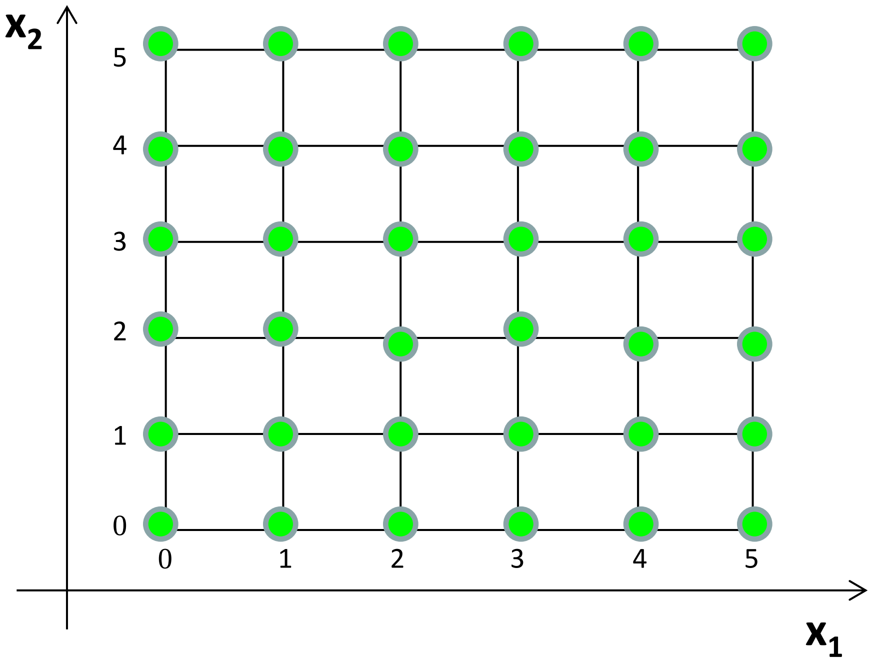
Programação Inteira



A Programação Linear Inteira (PLI) pode ser entendida como uma caso específico da Programação Linear, onde as variáveis devem ser inteiras (ou pelo menos parte delas).

PROBLEMA DE PROGRAMAÇÃO LINEAR - PPL

$$\begin{array}{ll} \text{Maximize:} & Z = 5x_1 + 6x_2 \\ \text{Sujeito a} & x_1 \leq 6 \\ & 2x_2 \leq 12 \\ & 3x_1 + 2x_2 \leq 18 \\ & \boxed{x_1 \geq 0, x_2 \geq 0.} \end{array}$$

PROBLEMA DE PROGRAMAÇÃO LINEAR INTEIRA

$$\begin{array}{ll} \text{Maximize:} & Z = 5x_1 + 6x_2 \\ \text{Sujeito a} & x_1 \leq 6 \\ & 2x_2 \leq 12 \\ & 3x_1 + 2x_2 \leq 18 \\ & \boxed{x_1, x_2 \in Z} \end{array}$$

PROBLEMA RELAXADO...

Exemplos de Aplicações:

1) Utilização de Equipamentos ⇒ xj representa a quantidade de equipamentos. Por exemplo, xj = 2.33 navios petroleiros pode não ter significado prático.

2) Tamanhos de Lotes ⇒ Em algumas situações de planejamento de produção, fazse necessário que xj = 0 ou xj > Lj, onde xj representa a quantidade de produtos produzidos e Lj uma quantidade mínima de produtos xj para compor um lote. Esta situação é um exemplo de restrição “ou -ou” (ou faz um mínimo ou não faz nada).

3) Decisões “Sim-ou-Não” ⇒ xj = 1 ou xj = 0 representando decisões sim ou não (também uma situação de “ou -ou”). Por exemplo, xj = 1 representa construir uma nova fábrica.

Problemas de Programação Inteira são geralmente muito mais difíceis de serem resolvidos quando comparados aos Problemas de Programação Linear (soluções contínuas).
São divididos em três classes:

PROGRAMAÇÃO LINEAR INTEIRA PURA (PLIP)
As soluções são constituídas apenas por números inteiros.

PROGRAMAÇÃO LINEAR INTEIRA MISTA (PLIM)
As soluções admitem números inteiros ou fracionários.

PROGRAMAÇÃO LINEAR INTEIRA BINÁRIA (PLIB)
As soluções são números binários.

PROGRAMAÇÃO LINEAR INTEIRA PURA (PLIP)

- A busca da **solução inteira ótima** pode ser obtida pelo método conhecido por **“Branch-and-Bound”**

- O mesmo trata o problema com inteiros de uma maneira **indireta**.

- Resolve-se uma **sequência de problemas contínuos** ignorando a condição de integralidade das variáveis.

A cada etapa **reduz-se a Região de Busca** pela aplicação de **restrições adicionais forçando a integralidade da solução** até que seja encontrada a **solução inteira ótima**.

Estratégia: Divisão e Conquista

Quando um problema inicial é "grande", sendo este de difícil resolução, divide-o em pequenos subproblemas que possam ser resolvidos de forma simples.

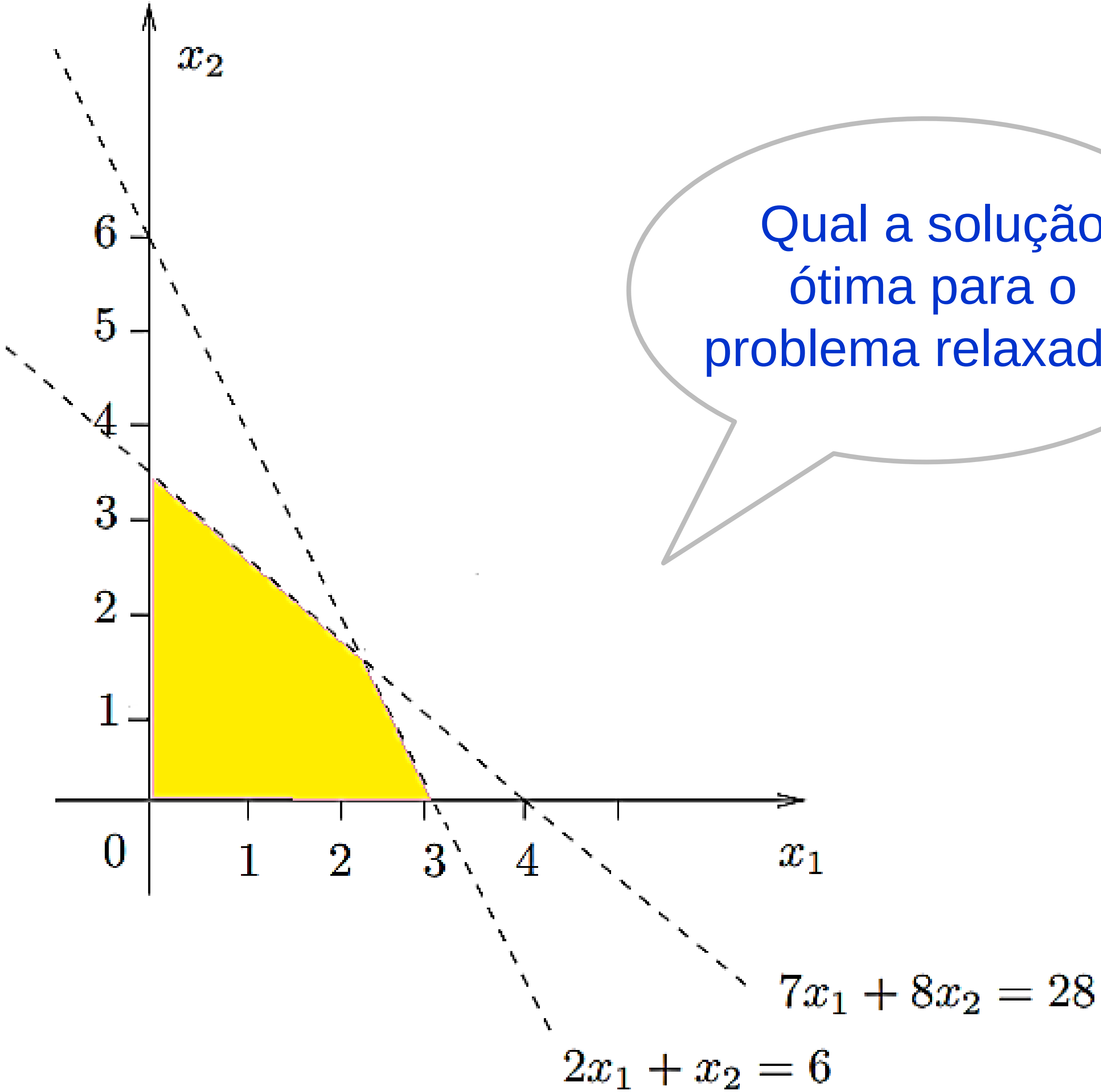
Branching (ramificação) - O conjunto de soluções viáveis é dividido em subproblemas menores.

Conquista ou eliminação - É realizada em dois passos:
1 – Ir para a melhor solução do conjunto (*giving a bound*);
2 – Descartar o subconjunto se o limite (*bound*) indica que não pode conter uma solução ótima.

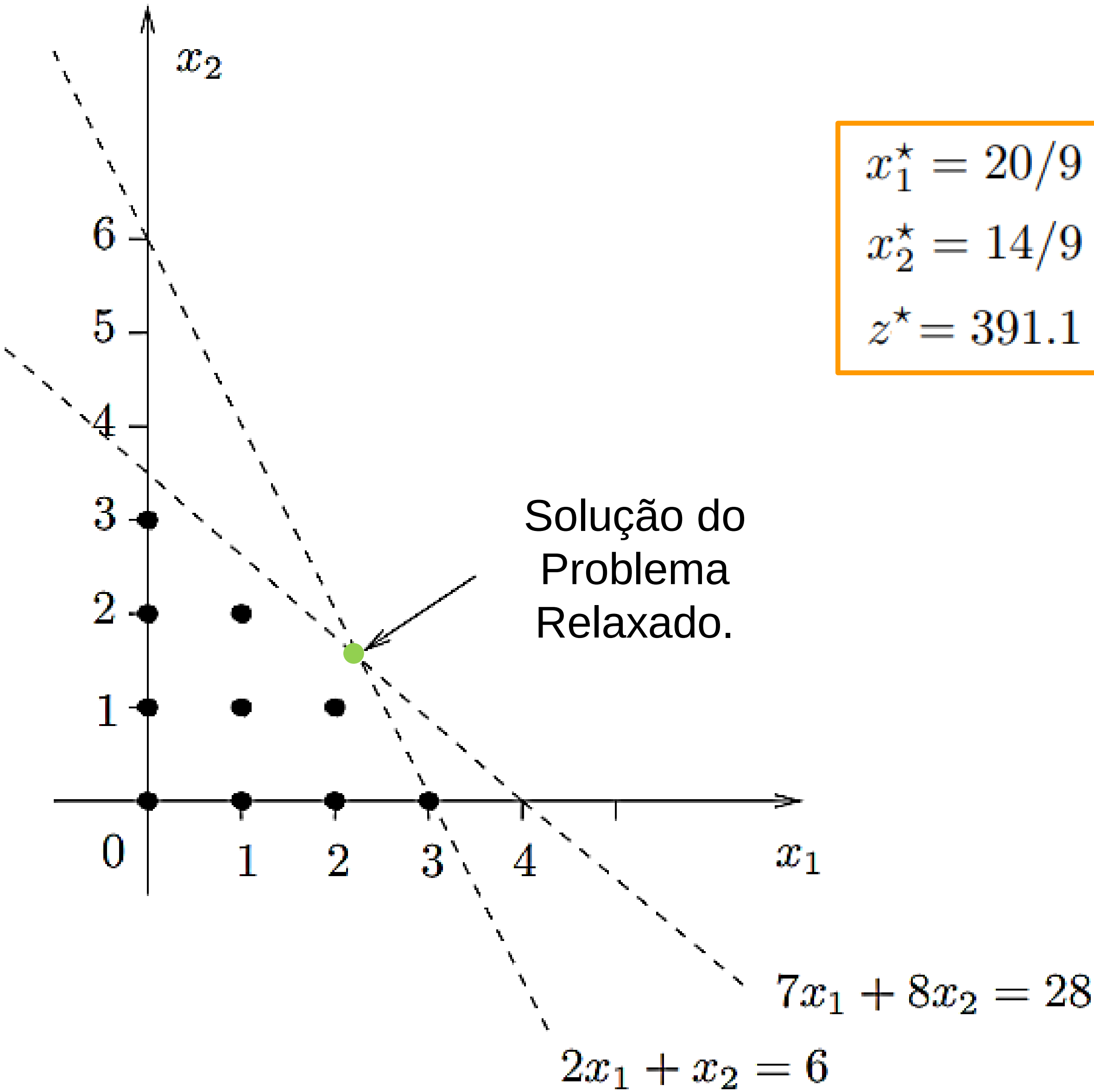
Um moveleiro fabrica dois tipos de painéis de madeira. Dispõe de seis unidades de madeira e 28 horas de trabalho. O painel 1 consome duas unidades de madeira e sete horas de trabalho; o painel 2, uma unidade de madeira e oito horas de trabalho. Os lucros unitários dos painéis são de $120 e $80, respectivamente. O moveleiro gostaria de maximizar seu lucro com a produção de painéis.

$$\begin{array}{lll} \textbf{maximizar} & z = 120x_1 + 80x_2 & \\ \textbf{sujeito a} & 2x_1 + x_2 & \leq \quad 6 \\ & 7x_1 + 8x_2 & \leq \quad 28 \\ & \text{com } x_1 \text{ e } x_2 \text{ variáveis inteiras não-negativas.} & \end{array}$$

MODELO DE PLIP



Qual a solução ótima para o problema relaxado?



$x_1^\star = 20/9$ → 2,23

$x_2^\star = 14/9$ → 1,56

$z^\star = 391.1$

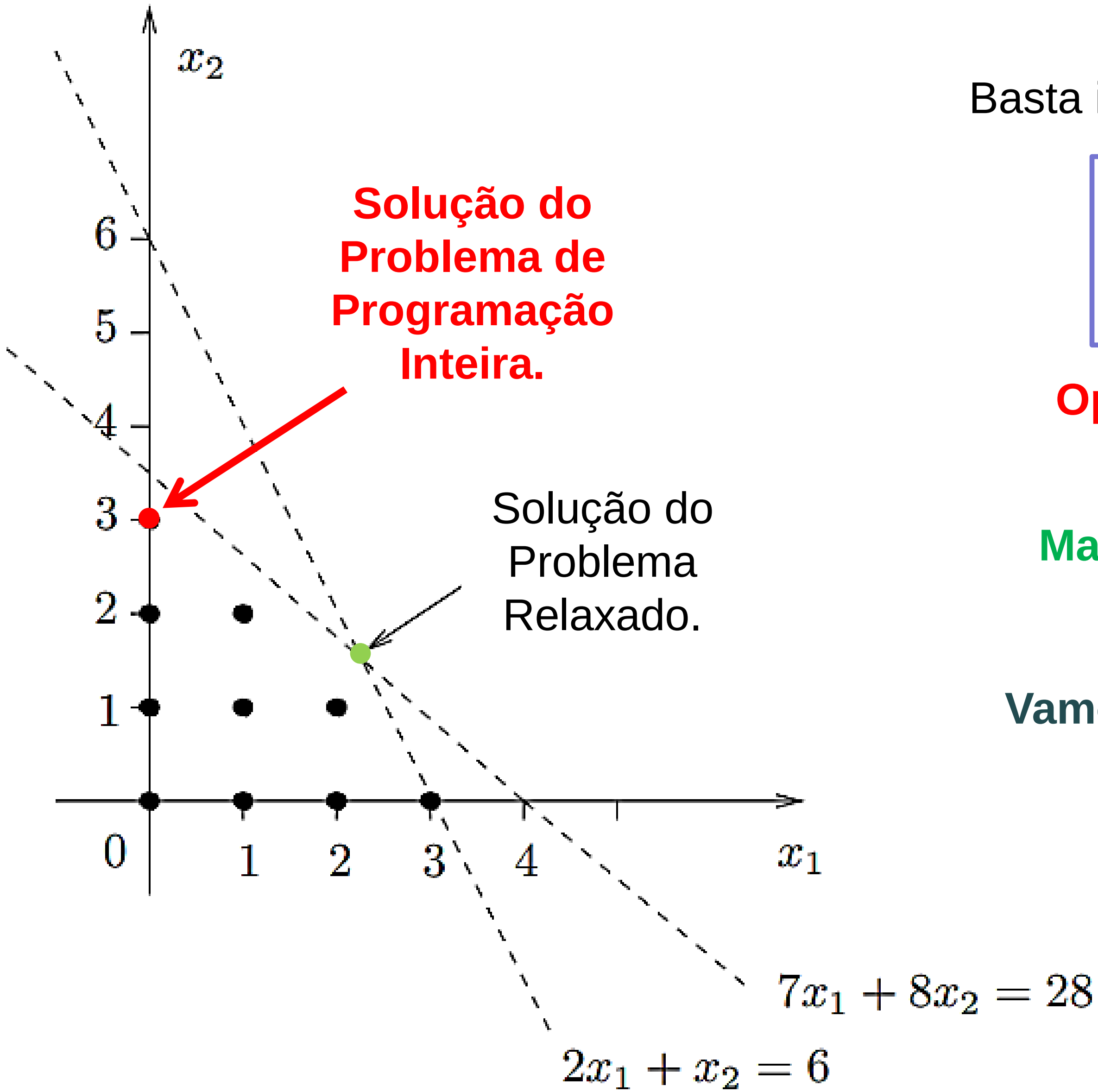
Mas, qual a solução ótima para o problema de programação inteira pura???

Já sei! Basta arredondar!

$$x_1 = 2 \text{ e } x_2 = 1$$

$$z = 320$$

O lucro diminuiu absurdamente!



Basta inspecionar cada vértice! ☺

$$\boxed{\begin{array}{c} x_1^\star = 3,\ x_2^\star = 0 \\ z^\star = 360 \end{array}}$$

Ops! O lucro diminuiu novamente!

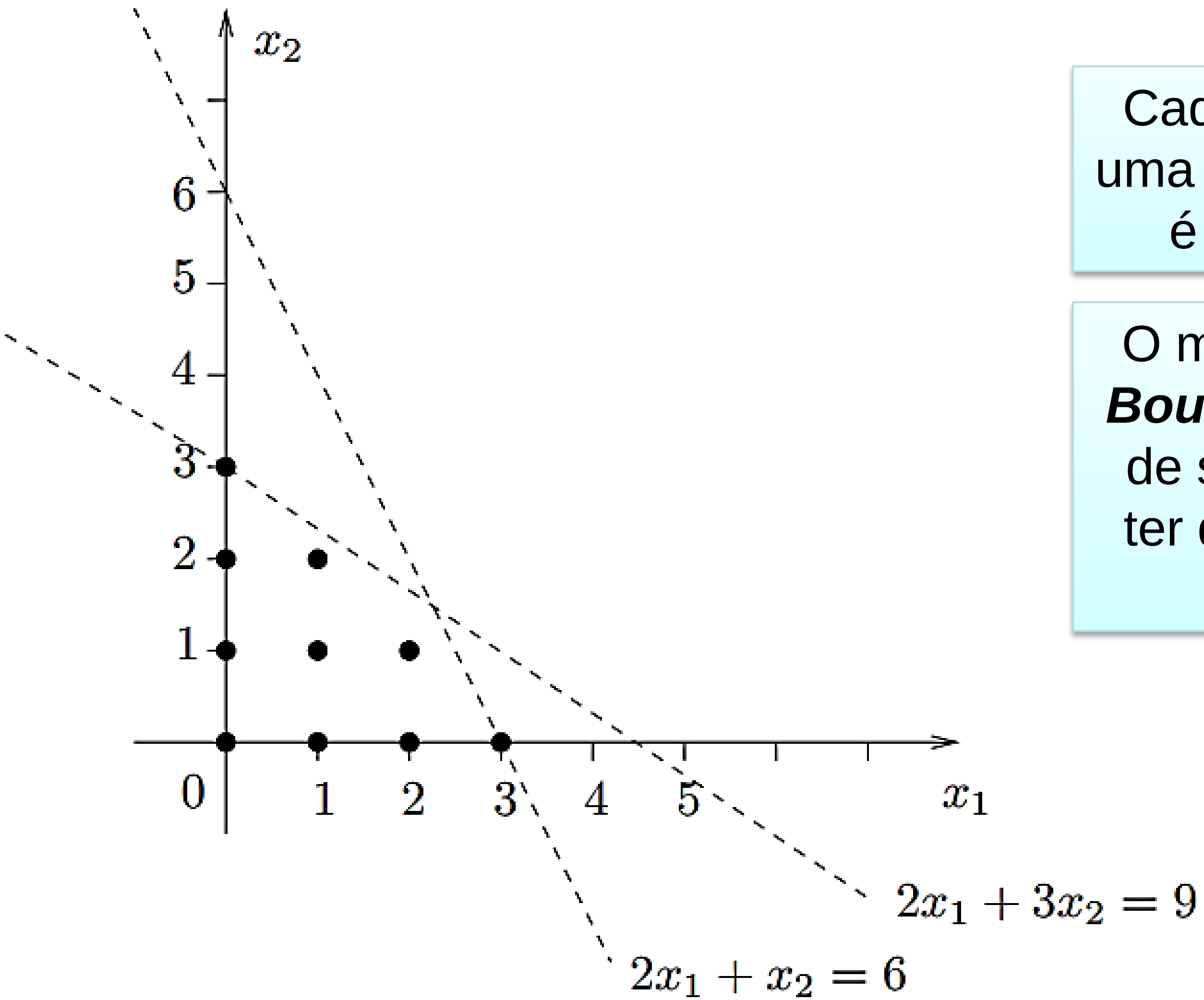
Mas este é o ponto ótimo no PLIP!

Vamos ver como encontrá-lo! ☺

Como exemplo de solução de PLIP, consideraremos o seguinte modelo:

$$
\begin{array}{lll}
\textbf{maximizar} & z = 3x_1 + 4x_2 & \\
\textbf{sujeito a} & 2x_1 + x_2 & \leq \quad 6 \\
 & 2x_1 + 3x_2 & \leq \quad 9
\end{array}
$$

x_1 e x_2 variáveis inteiras não-negativas



Cada bolinha representa uma solução viável, já que é um número inteiro.

O método ***Branch–and–Bound*** explora o conjunto de soluções viáveis sem ter que verificar todos os pontos. ☺

A solução ótima do problema relaxado é:

$$x_1^\star = 2.25 \text{ e } x_2^\star = 1.5$$

$$z^\star = 12.75$$

Esta dá origem a dois novos subproblemas:

$$\begin{array}{lllr} \textbf{maximizar} & z = 3x_1 + 4x_2 & & \\ \textbf{sujeito a} & 2x_1 + x_2 & \leq & 6 \\ & 2x_1 + 3x_2 & \leq & 9 \\ & x_2 & \leq & 1 \end{array}$$

$$\begin{array}{lllr} \textbf{maximizar} & z = 3x_1 + 4x_2 & & \\ \textbf{sujeito a} & 2x_1 + x_2 & \leq & 6 \\ & 2x_1 + 3x_2 & \leq & 9 \\ & x_2 & \geq & 2 \end{array}$$

As novas restrições exploram os pontos em torno de X_2.

X_2 foi escolhido pois sua parte fracionária está mais próxima de 0,5.

$$\begin{array}{lllr} \textbf{maximizar} & z = 3x_1 + 4x_2 & & \\ \textbf{sujeito a} & 2x_1 + x_2 & \leq & 6 \\ & 2x_1 + 3x_2 & \leq & 9 \end{array}$$

P(2)

$$\begin{array}{lllr} \textbf{maximizar} & z = 3x_1 + 4x_2 & & \\ \textbf{sujeito a} & 2x_1 + x_2 & \leq & 6 \\ & 2x_1 + 3x_2 & \leq & 9 \\ & x_2 & \leq & 1 \end{array}$$

P(3)

$$\begin{array}{lllr} \textbf{maximizar} & z = 3x_1 + 4x_2 & & \\ \textbf{sujeito a} & 2x_1 + x_2 & \leq & 6 \\ & 2x_1 + 3x_2 & \leq & 9 \\ & x_2 & \geq & 2 \end{array}$$

Resolvendo-se os subproblemas, tem-se:

$$x_1^\star = 2.5,\ x_2^\star = 1 \text{ e } z^* = 11.5$$

$$x_1^\star = 1.5,\ x_2^\star = 2 \text{ e } z^\star = 12.5$$

Esta está mais próxima da solução ótima do problema relaxado!
Vamos explorá-la!

P(3)

$$\begin{array}{lllll} \textbf{maximizar} & z = 3x_1 + 4x_2 & & \\ \textbf{sujeito a} & 2x_1 + x_2 & \leq & 6. \\ & 2x_1 + 3x_2 & \leq & 9. \\ & x_2 & \geq & 2. \end{array}$$

(P4)

$$\begin{array}{lllll} \textbf{maximizar} & z = 3x_1 + 4x_2 & & \\ \textbf{sujeito a} & 2x_1 + x_2 & \leq & 6. \\ & 2x_1 + 3x_2 & \leq & 9. \\ & x_2 & \geq & 2. \\ & x_1 & \leq & 1. \end{array}$$

(P5)

$$\begin{array}{lllll} \textbf{maximizar} & z = 3x_1 + 4x_2 & & \\ \textbf{sujeito a} & 2x_1 + x_2 & \leq & 6 \\ & 2x_1 + 3x_2 & \leq & 9 \\ & x_2 & \geq & 2 \\ & x_1 & \geq & 2 \end{array}$$

Resolvendo-se os subproblemas, tem-se:

$x_1^\star = 1,\ x_2^\star = 2.33$ e $z^\star = 12.33$

INVIÁVEL!

Vamos explorar esta solução!

$$(P4)\quad \begin{array}{lll} \textbf{maximizar} & z = 3x_1 + 4x_2 & \\ \textbf{sujeito a} & 2x_1 + x_2 & \leq 6 \\ & 2x_1 + 3x_2 & \leq 9 \\ & x_2 & \geq 2 \\ & x_1 & \leq 1 \end{array}$$

$$(P6)\quad \begin{array}{lll} \textbf{maximizar} & z = 3x_1 + 4x_2 & \\ \textbf{sujeito a} & 2x_1 + x_2 & \leq 6 \\ & 2x_1 + 3x_2 & \leq 9 \\ & x_2 & \geq 2 \\ & x_1 & \leq 1 \\ & x_2 & \leq 2 \end{array}$$

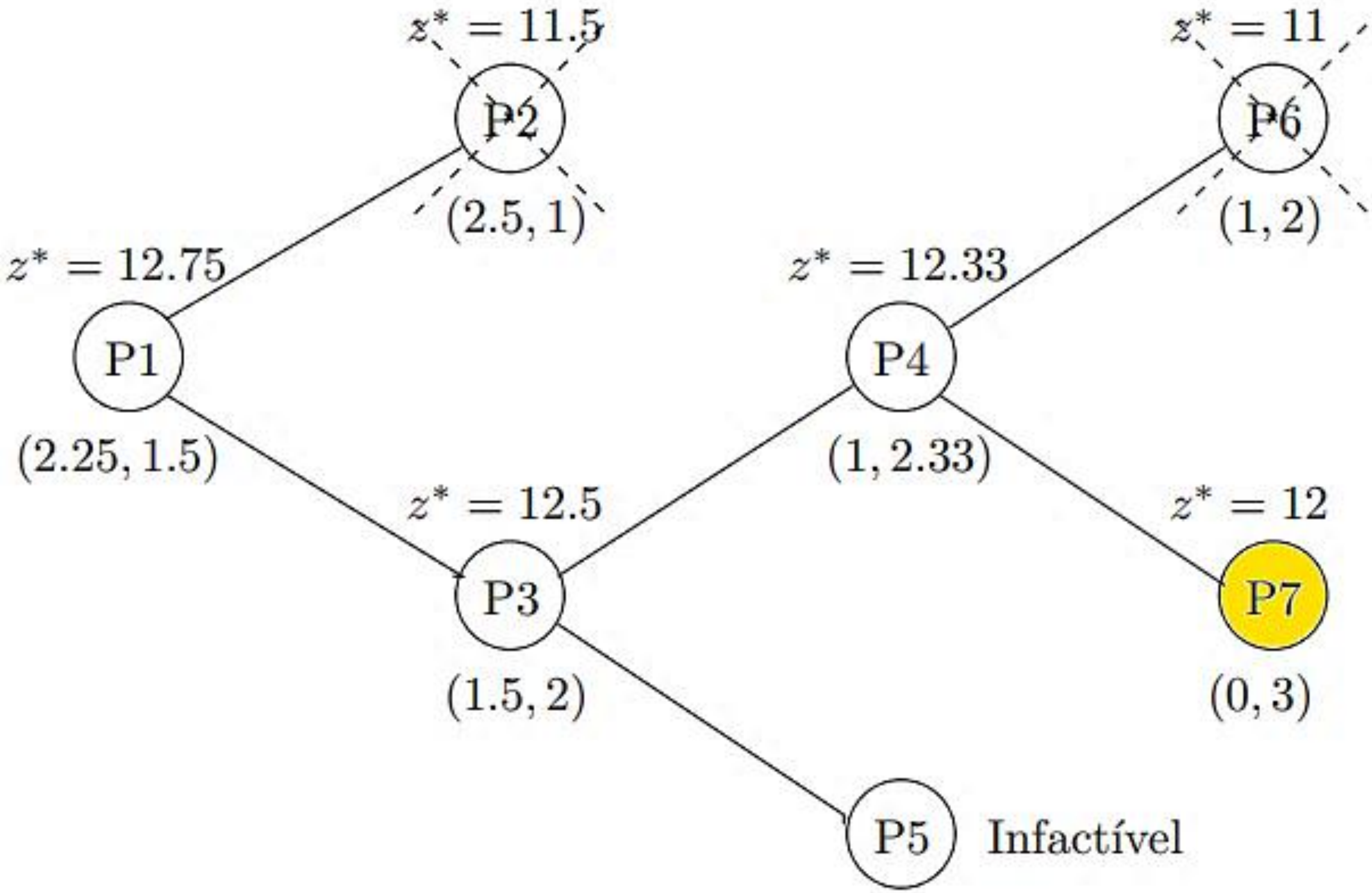
$$(P7)\quad \begin{array}{lll} \textbf{maximizar} & z = 3x_1 + 4x_2 & \\ \textbf{sujeito a} & 2x_1 + x_2 & \leq 6 \\ & 2x_1 + 3x_2 & \leq 9 \\ & x_2 & \geq 2 \\ & x_1 & \geq 2 \\ & x_2 & \geq 3 \end{array}$$

Resolvendo-se os subproblemas, tem-se:

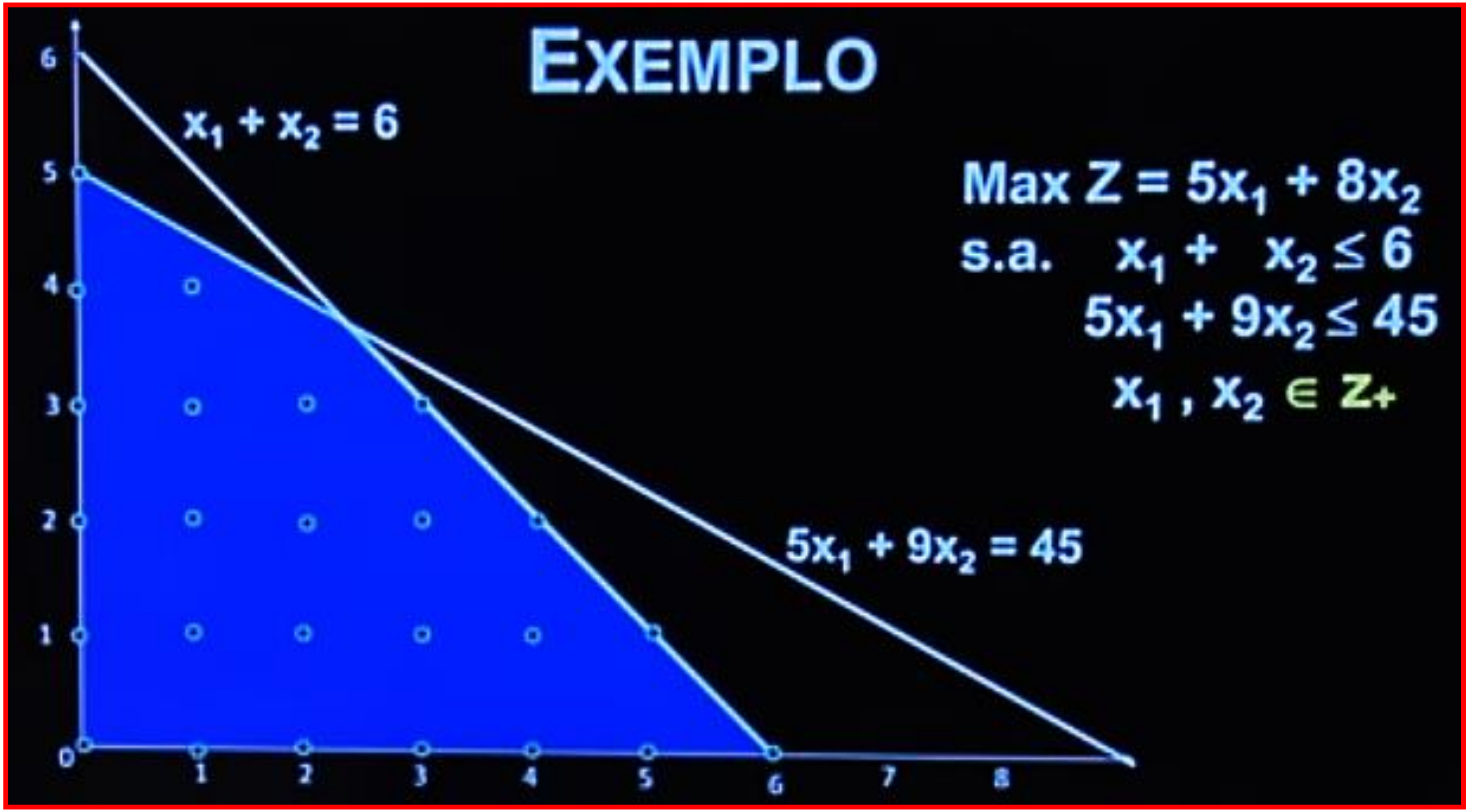
$$x_1^\star = 1,\ x_2^\star = 2 \text{ e } z^\star = 11$$

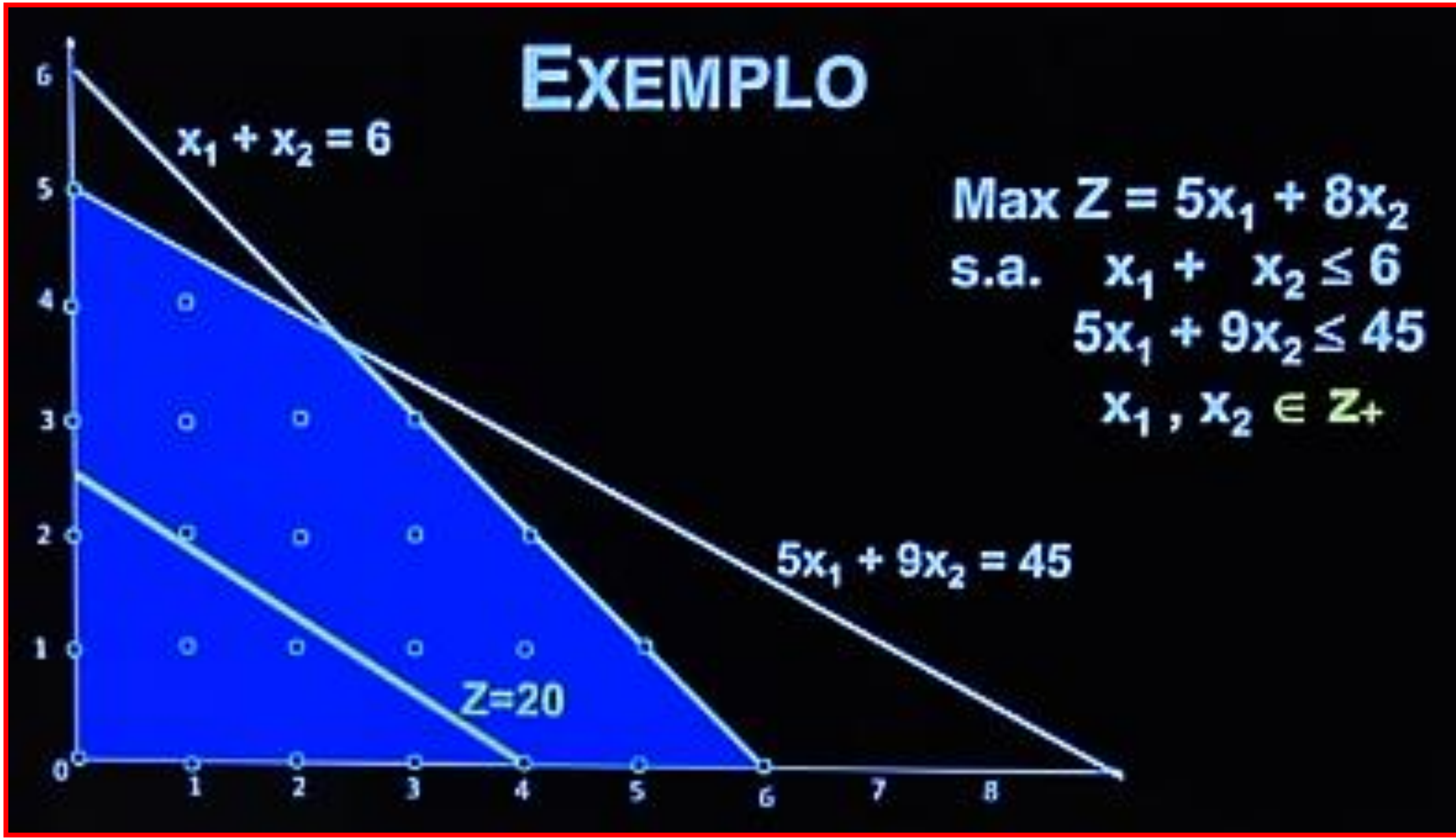
$$x_1^\star = 0,\ x_2^\star = 3 \text{ e } z^\star = 12$$

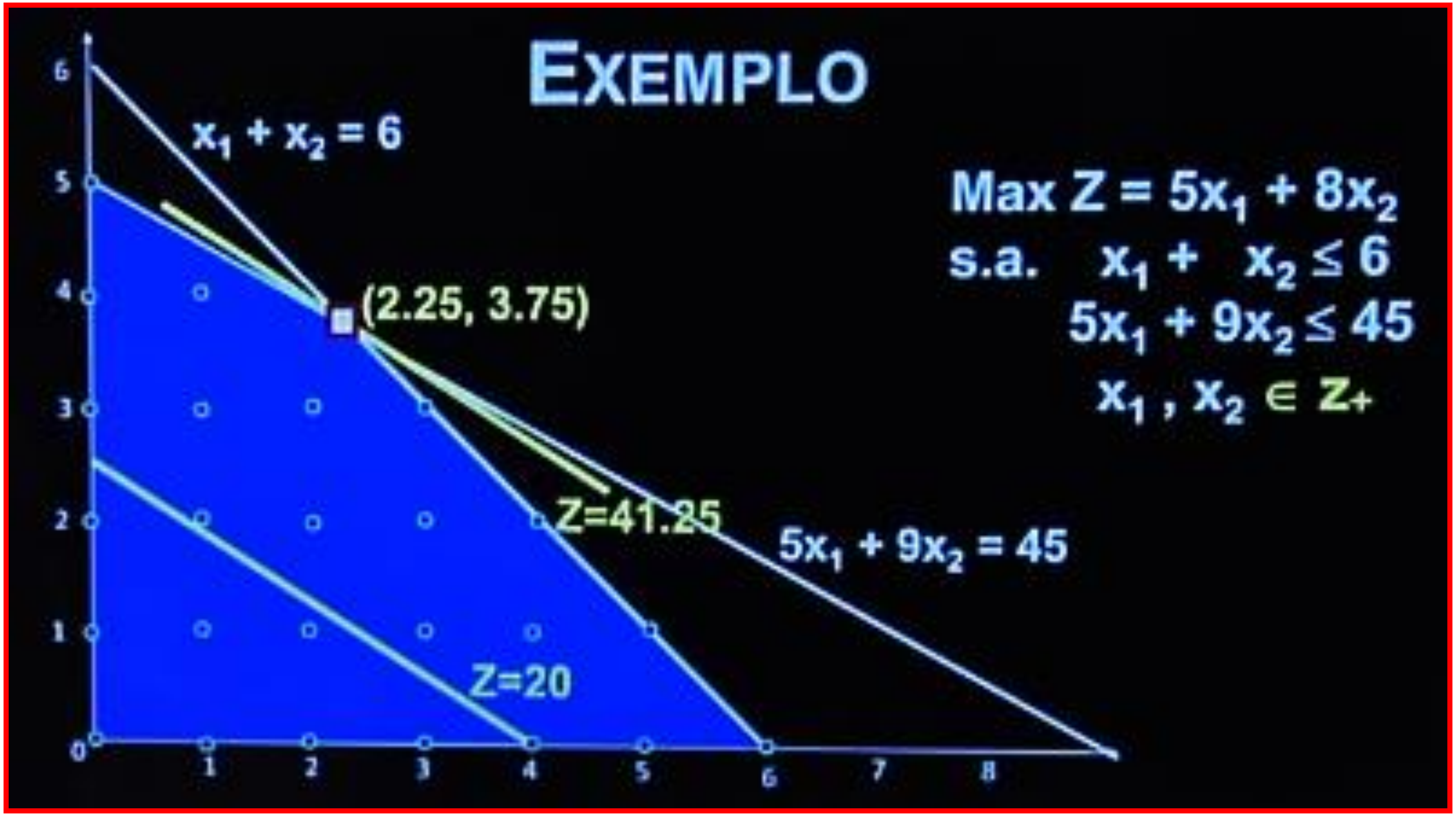
Solução Ótima!


$z^* = 11.5$
P2
$(2.5, 1)$
$z^* = 11$
P6
$(1, 2)$
$z^* = 12.75$
P1
$(2.25, 1.5)$
$z^* = 12.33$
P4
$(1, 2.33)$
$z^* = 12.5$
P3
$(1.5, 2)$
$z^* = 12$
P7
$(0, 3)$
P5
Infactível

VAMOS A MAIS UM EXEMPLO!


EXEMPLO
$x_1 + x_2 = 6$
Max $Z = 5x_1 + 8x_2$
s.a. $x_1 + x_2 \leq 6$
$5x_1 + 9x_2 \leq 45$
$x_1, x_2 \in Z_+$
$5x_1 + 9x_2 = 45$
0
1
2
3
4
5
6
7
8


EXEMPLO
$x_1 + x_2 = 6$
Max $Z = 5x_1 + 8x_2$
s.a. $x_1 + x_2 \leq 6$
$5x_1 + 9x_2 \leq 45$
$x_1 , x_2 \in Z_+$
$5x_1 + 9x_2 = 45$
Z=20
0
1
2
3
4
5
6
7
8



A solução ótima atende ao critério de integralidade???

- A solução ótima para o problema relaxado é 41,25.

Este será o ***upper bound*** para o problema de PLI.

As variáveis de decisão tem valores ótimos iguais a:

$X_1 = 2,25$ e $X_2 = 3,75$.

Ramificação: Escolha a variável que possui parte fracionária mais próxima de 0,5. Caso sejam iguais, escolha a maior delas.

- No exemplo será escolhida X_2.

- Vamos, então explorar os valores inteiros no entorno de X_2:

$$\mathbf{X_2 \leq 3}$$
$$\mathbf{X_2 \geq 4}$$

RAMIFICAÇÃO

Subproblema 1

$$\text{Max } Z = 5x_1 + 8x_2$$

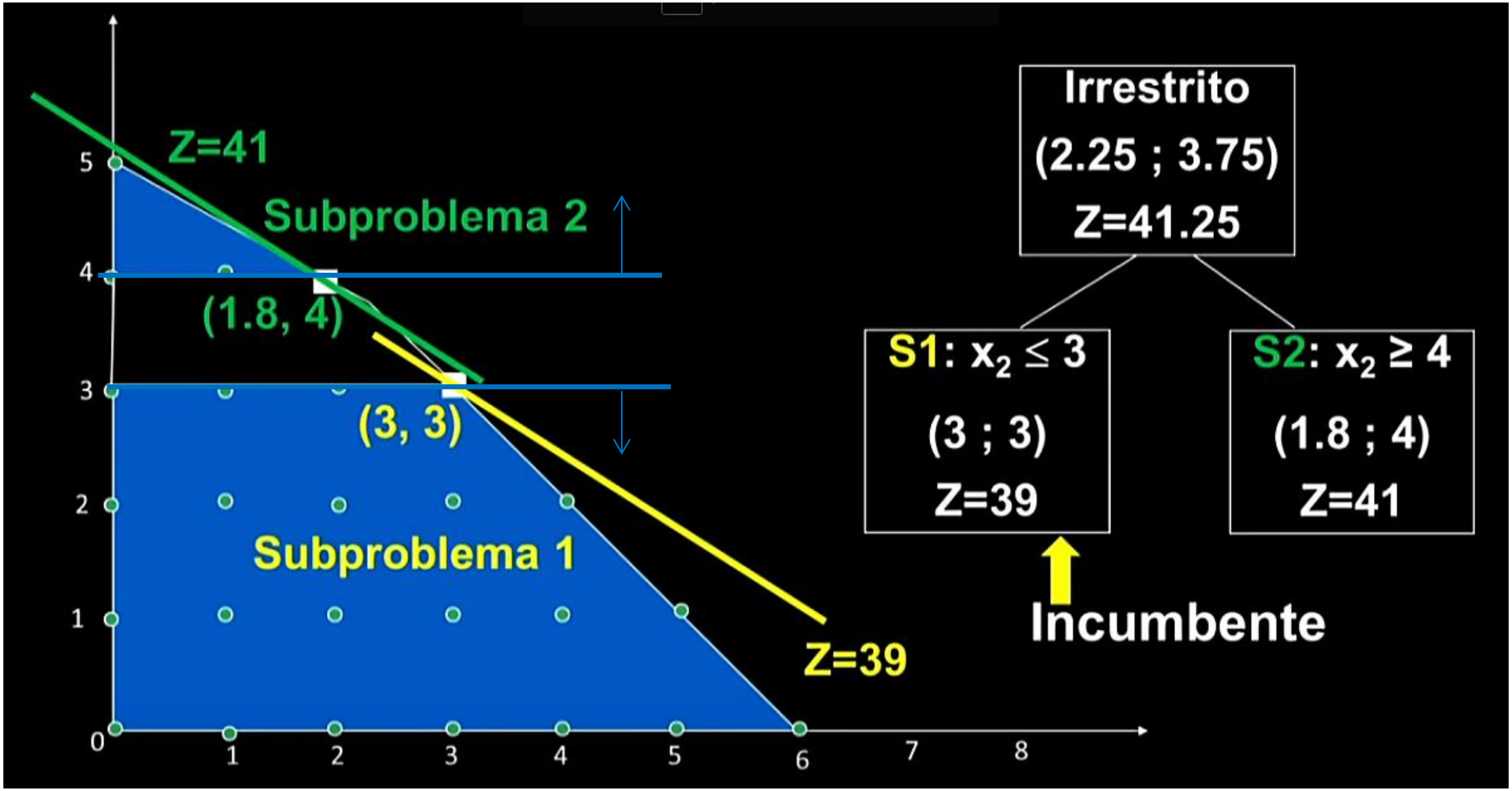
$$\begin{aligned} \text{s.t.} \quad x_1 + x_2 &\leq 6 \\ 5x_1 + 9x_2 &\leq 45 \\ x_2 &\leq 3 \\ x_1, x_2 &\geq 0 \end{aligned}$$

Subproblema 2

$$\text{Max } Z = 5x_1 + 8x_2$$

$$\begin{aligned} \text{s.t.} \quad x_1 + x_2 &\leq 6 \\ 5x_1 + 9x_2 &\leq 45 \\ x_2 &\geq 4 \\ x_1 &\geq 0 \end{aligned}$$

RESOLVENDO OS SUBPROBLEMAS:



A melhor solução "inteira" até o momento, é chamada INCUMBENTE.

O limitante superior passa a ser 41 pois nenhuma solução melhor aparecerá

RAMIFICANDO A MELHOR SOLUÇÃO (S2)

Subproblema 3

Max $Z = 5x_1 + 8x_2$

s.t. $x_1 + x_2 \leq 6$

$5x_1 + 9x_2 \leq 45$

$x_2 \geq 4$

$x_1 \leq 1$

$x_1 \geq 0$

Subproblema 4

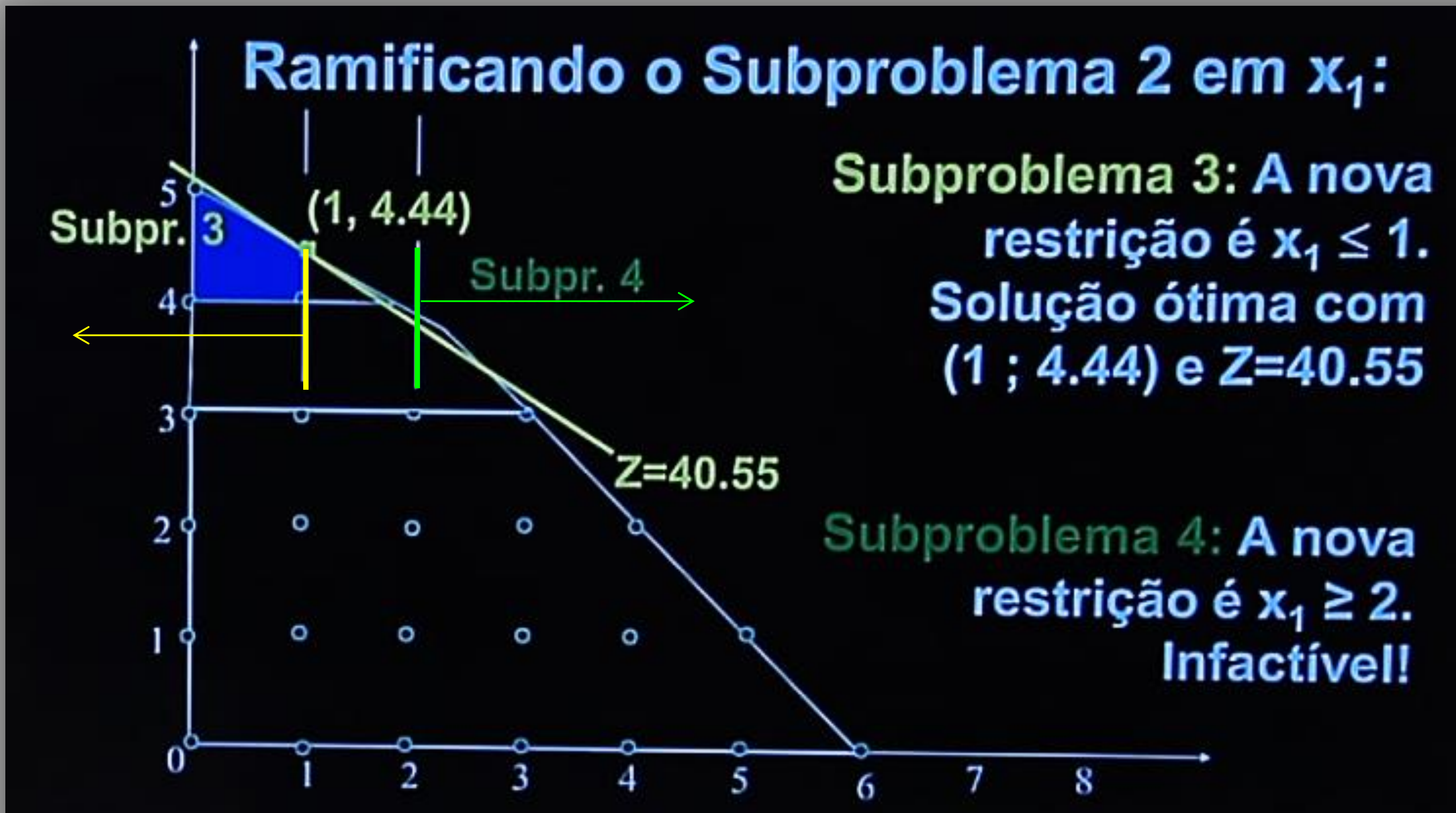
Max $Z = 5x_1 + 8x_2$

s.t. $x_1 + x_2 \leq 6$

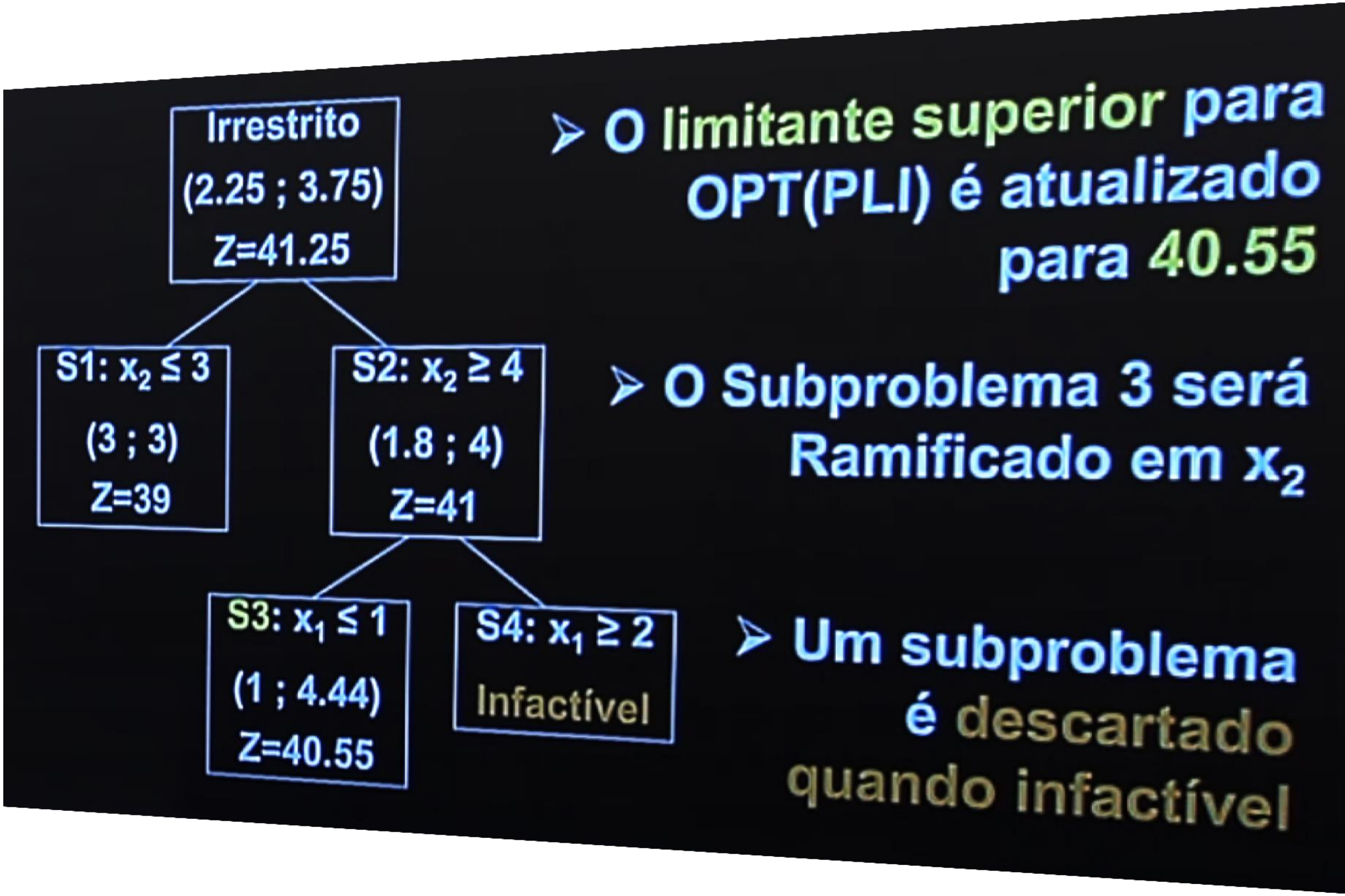
$5x_1 + 9x_2 \leq 45$

$x_2 \geq 4$

$x_1 \geq 2$



Devemos ramificar o subproblema 3!


Irrestrito
(2.25 ; 3.75)
Z=41.25
S1: $x_2 \leq 3$
(3 ; 3)
Z=39
S2: $x_2 \geq 4$
(1.8 ; 4)
Z=41
S3: $x_1 \leq 1$
(1 ; 4.44)
Z=40.55
S4: $x_1 \geq 2$
Infactível
➢ O limitante superior para OPT(PLI) é atualizado para 40.55
➢ O Subproblema 3 será Ramificado em x_2
➢ Um subproblema é descartado quando infactível

RAMIFICANDO A MELHOR SOLUÇÃO (S3)

Subproblema 5

Max $Z = 5x_1 + 8x_2$

s.t. $x_1 + x_2 \leq 6$

$5x_1 + 9x_2 \leq 45$

$\cancel{x_2 \geq 4}$

$x_1 \leq 1$

$\cancel{x_2 \leq 4}$

X1 = 4

$x_1 \geq 0$

Subproblema 6

Max $Z = 5x_1 + 8x_2$

s.t. $x_1 + x_2 \leq 6$

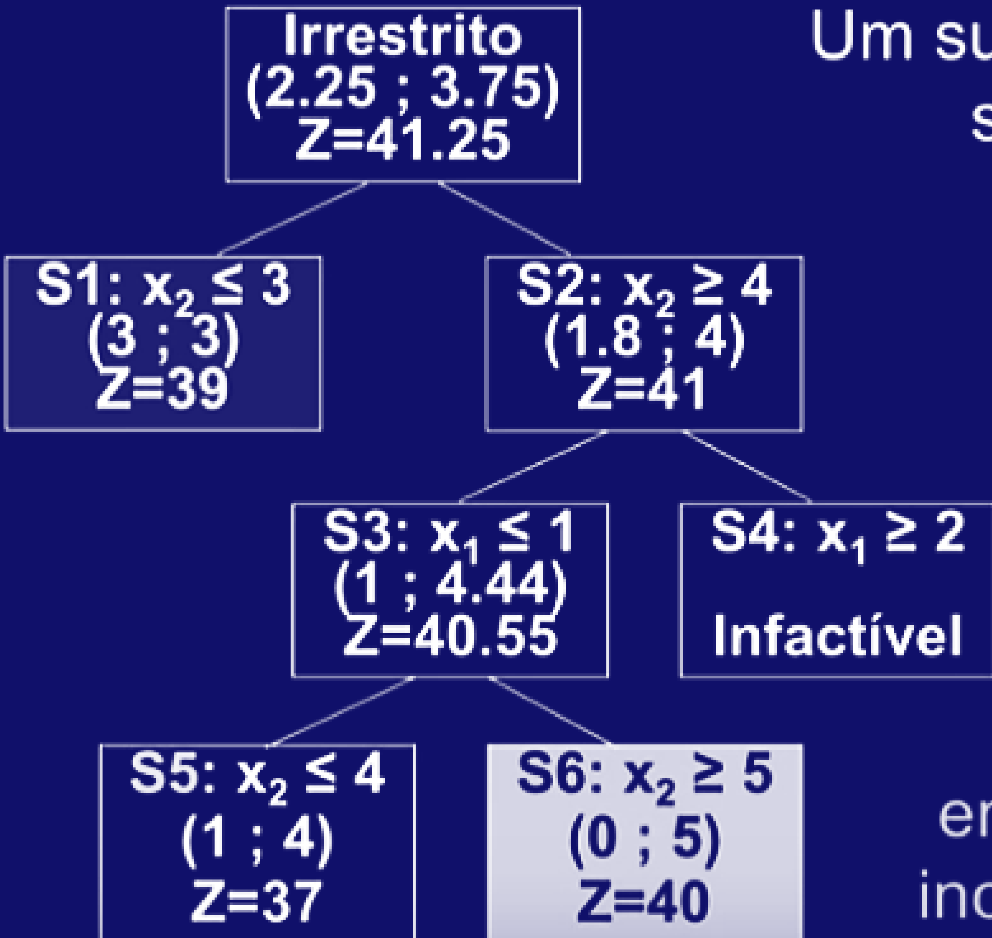
$5x_1 + 9x_2 \leq 45$

$\cancel{x_2 \geq 4}$

$x_1 \leq 1$

$x_2 \geq 5$

$x_1 \geq 0$



Um subproblema é descartado se seu valor ótimo é $\leq Z^*$. Aqui, o subproblema 5 é descartado $37 \leq 39$.

Se um subproblema tem solução ótima x inteira com $Z > Z^*$, em seguida, x substituirá a incumbente.

Exercício:

$$\text{Max } Z = 3x_1 + 4x_2$$

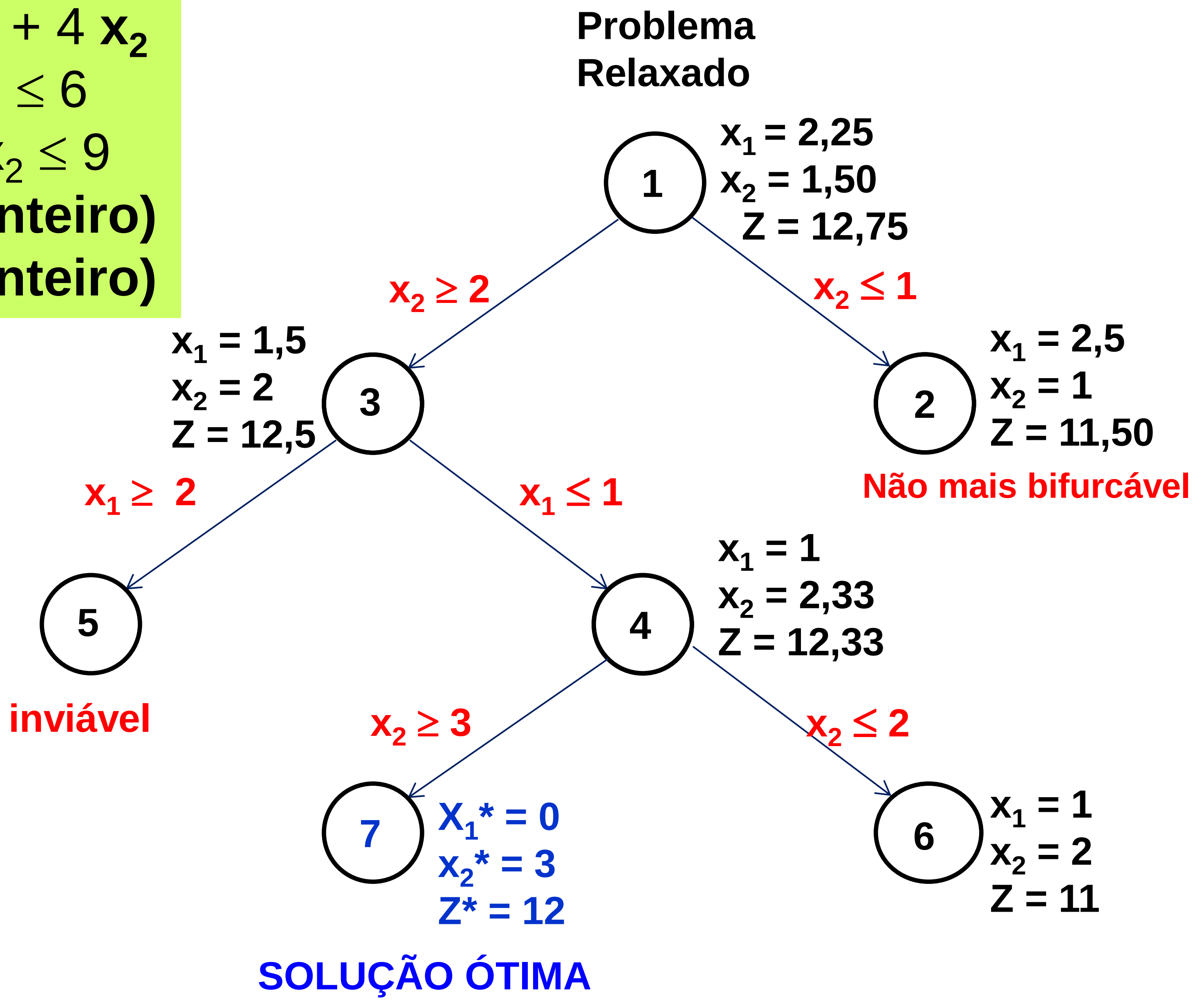
s.a.: $2x_1 + x_2 \le 6$

$2x_1 + 3x_2 \le 9$

$x_1 \ge 0$ (inteiro)

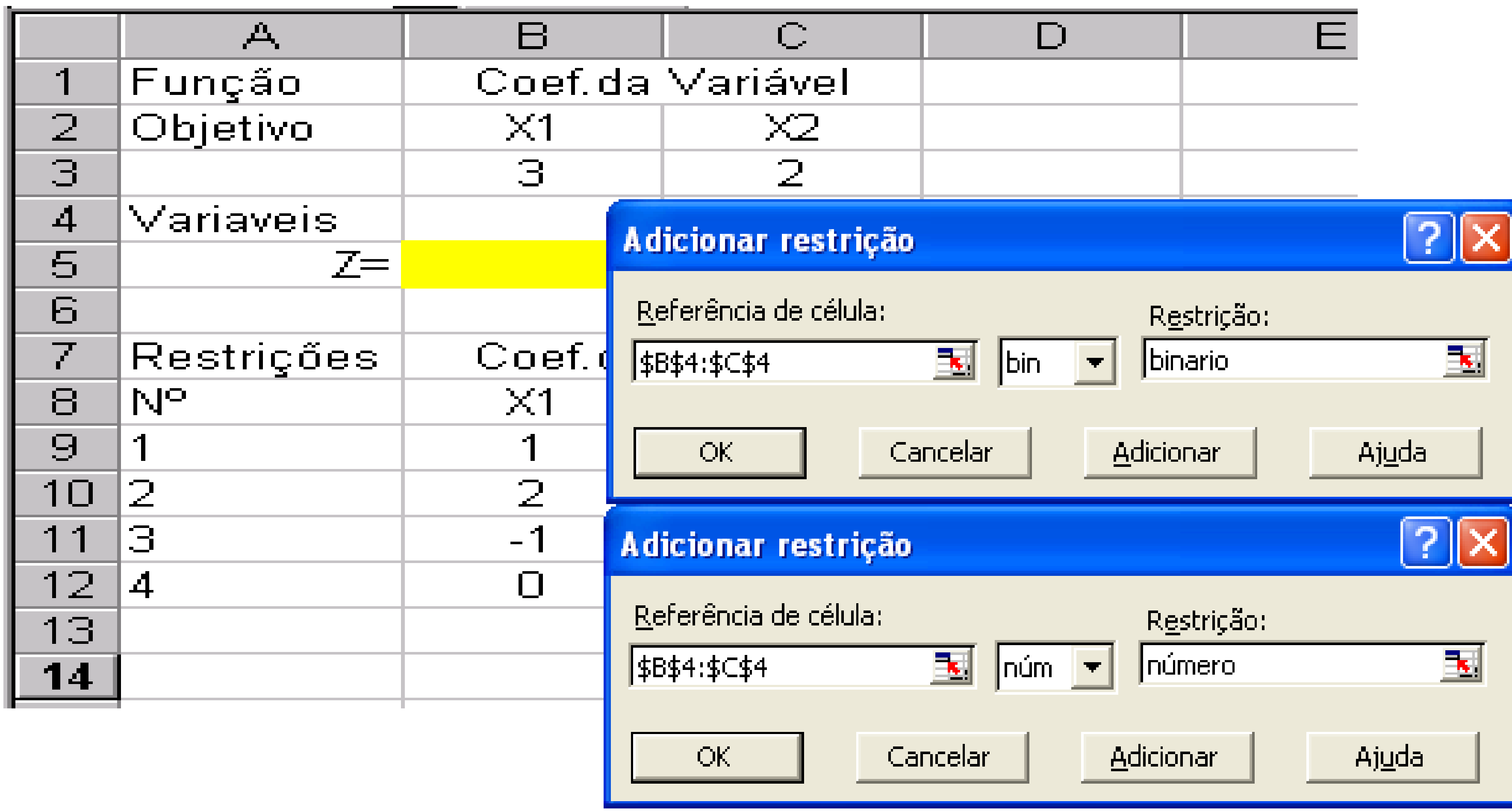
$x_2 \ge 0$ (inteiro)

$$\begin{aligned}
&\textbf{Max } Z = 3\,x_1 + 4\,x_2 \\
&\textbf{s.a.: } 2x_1 + x_2 \leq 6 \\
&\qquad\quad 2x_1 + 3x_2 \leq 9 \\
&\qquad\quad x_1 \geq 0 \text{ (inteiro)} \\
&\qquad\quad x_2 \geq 0 \text{ (inteiro)}
\end{aligned}$$



PROGRAMAÇÃO LINEAR INTEIRA BINÁRIA

PLIB


A
B
C
D
E
Função
Coef. da Variável
Objetivo
X1
X2
3
2
Variaveis
Z=
Restrições
Coef.
Nº
X1
1
1
2
2
3
-1
4
0
Adicionar restrição
Referência de célula:
Restrição:
$B$4:$C$4
bin
binario
OK
Cancelar
Adicionar
Ajuda
Adicionar restrição
Referência de célula:
Restrição:
$B$4:$C$4
núm
número
OK
Cancelar
Adicionar
Ajuda

Problema de Orçamento de Capital
XamXung Tecnologia

A XamXung Tecnologia tem que planejar seus gastos em P&D. A empresa pré-selecionou 4 projetos e deve escolher dentre esses quais deve priorizar em função de restrições orçamentárias. Os dados relevantes encontram-se na tabela abaixo.

		Capital Requerido em 1000xR$				
Projeto	**NPV(8%) (1000xR$)**	**Ano 1**	**Ano 2**	**Ano 3**	**Ano 4**	**Ano 5**
1	105.99	70	15	0	20	20
2	128.90	80	20	25	15	10
3	136.14	90	20	0	30	20
4	117.38	50	30	40	0	20
Capital Disponível:		200	70	70	70	70

- Variáveis de Decisão

$$X_i = \begin{cases} 1, \text{se o projeto i for selecionad o} \\ 0, \text{se o projeto i não for selecionad o} \end{cases} \quad \text{i} = 1,2,3,4$$

- Função Objetivo = Maximizar o somatório NPV

$$Max\ 105.99X_1 + 128.90X_2 + 136.14X_3 + 117.38X_4$$

- **Restrições Orçamentárias**

$$70X_1 + 80X_2 + 90X_3 + 50X_4 \leq 200 \qquad \text{- Ano 1}$$

$$15X_1 + 20X_2 + 20X_3 + 30X_4 \leq 70 \qquad \text{- Ano 2}$$

$$25X_2 + 40X_4 \leq 70 \qquad \text{- Ano 3}$$

$$20X_1 + 15X_2 + 30X_3 \leq 70 \qquad \text{- Ano 4}$$

$$20X_1 + 10X_2 + 20X_3 + 20X_4 \leq 70 \qquad \text{- Ano 5}$$

Modelo Matemático:

$$Max\ 105.99X_1 + 128.90X_2 + 136.14X_3 + 117.38X_4$$

$$st$$

$$70X_1 + 80X_2 + 90X_3 + 50X_4 \leq 200 \quad \text{- Ano 1}$$

$$15X_1 + 20X_2 + 20X_3 + 30X_4 \leq 70 \quad \text{- Ano 2}$$

$$25X_2 + 40X_4 \leq 70 \quad \text{- Ano 3}$$

$$20X_1 + 15X_2 + 30X_3 \leq 70 \quad \text{- Ano 4}$$

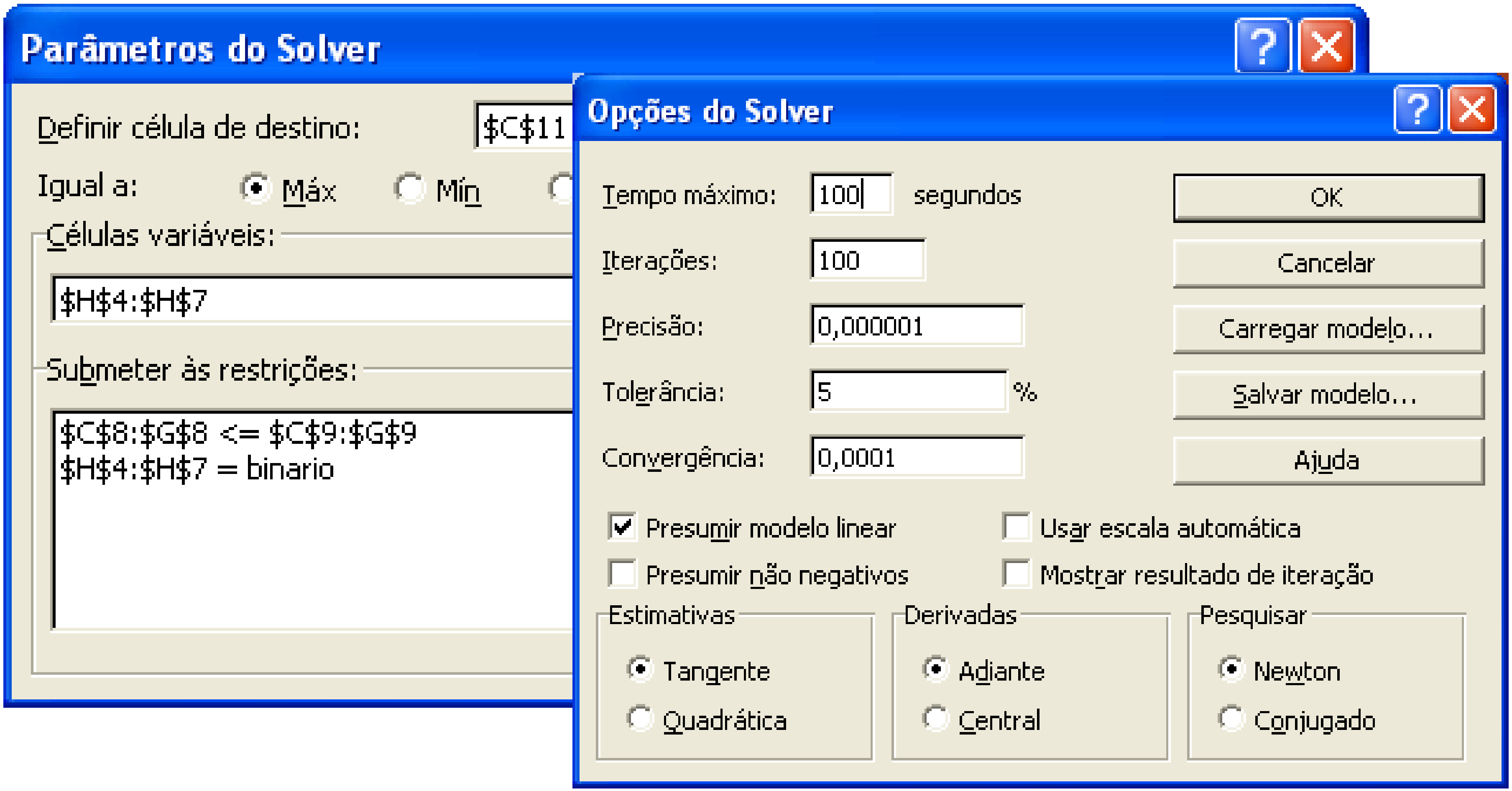
$$20X_1 + 10X_2 + 20X_3 + 20X_4 \leq 70 \quad \text{- Ano 5}$$

$$X_1; X_2; X_3; X_4 \geq 0$$

Utilizando o Solver do Excel

C11 =SOMARPRODUTO(B4:B7;H4:H7)

	A	B	C	D	E	F	G	H
1				Caso LCL Tecnologia				
2								Seleciona
3	Projeto	NPV (8%)	Ano 1	Ano 2	Ano 3	Ano 4	Ano 5	0-Não / 1 - Sim
4	1	$105,99	70	15	0	20	20	0
5	2	$128,90	80	20	25	15	10	0
6	3	$136,14	90	20	0	30	20	0
7	4	$117,38	50	30	40	0	20	0
8	Capital Necessário		0	0	0	0	0	
9	Capital Disponivel		200	70	70	70	70	
10								
11		NPV Total =	0					


Parâmetros do Solver
Definir célula de destino: $C$11
Igual a: Máx Mín
Células variáveis:
$H$4:$H$7
Submeter às restrições:
$C$8:$G$8 <= $C$9:$G$9
$H$4:$H$7 = binario
Opções do Solver
Tempo máximo: 100 segundos
Iterações: 100
Precisão: 0,000001
Tolerância: 5 %
Convergência: 0,0001
OK
Cancelar
Carregar modelo...
Salvar modelo...
Ajuda
Presumir modelo linear
Usar escala automática
Presumir não negativos
Mostrar resultado de iteração
Estimativas
Tangente
Quadrática
Derivadas
Adiante
Central
Pesquisar
Newton
Conjugado

C11 | f_x =SOMARPRODUTO(B4:B7;H4:H7)

	A	B	C	D	E	F	G	H
1				Caso LCL Tecnologia				
2								Seleciona
3	Projeto	NPV (8%)	Ano 1	Ano 2	Ano 3	Ano 4	Ano 5	0-Não / 1 - Sim
4	1	$105,99	70	15	0	20	20	1
5	2	$128,90	80	20	25	15	10	1
6	3	$136,14	90	20	0	30	20	0
7	4	$117,38	50	30	40	0	20	1
8	Capital Necessário		200	65	65	35	50	
9	Capital Disponivel		200	70	70	70	70	
10								
11		NPV Total =	352,2665					

Variáveis Binárias e Condições Lógicas

- As variáveis binárias também se prestam a selecionar alternativas que sejam condicionais.
- No exemplo anterior imagine que não mais do que um dos projetos (1, 3 e 4) pudesse ser selecionado. Deveríamos então adicionar:

$$\boxed{X_1 + X_3 + X_4 \leq 1}$$

- Se apenas um dos projetos 1, 2 e 4 tivesse que ser escolhido obrigatoriamente, deveríamos incluir:

$$\boxed{X_1 + X_2 + X_4 = 1}$$

- Imagine agora que o projeto 1 dependa de uma tecnologia que deve ser desenvolvida pelo projeto 2, isto é, o projeto 1 só pode ser aprovado se e somente se o projeto 2 for aceito. Deveríamos então incluir:

$$\boxed{X_1 - X_2 \leq 0} \begin{cases} X_1 = 0, X_2 = 0 \Rightarrow \text{nenhum dos projetos aceitos} \\ X_1 = 1, X_2 = 1 \Rightarrow \text{ambos os projetos aceitos} \\ X_1 = 0, X_2 = 1 \Rightarrow \text{apenas o projeto 2 foi aceito} \\ X_1 = 1, X_2 = 0 \Rightarrow \text{inviável} \end{cases}$$

Vamos analisar o seguinte exemplo:

$$Max\ Z = 9x_1 + 5x_2 + 6x_3 + 4x_4$$

$$sujeito\ a$$

$$6x_1 + 3x_2 + 5x_3 + 2x_4 \leq 10$$

$$x_3 + x_4 \leq 1$$

$$-x_1 + x_3 \leq 0$$

$$-x_2 + x_4 \leq 0$$

$$\boxed{x_j \text{ é } binário\ para\ j = 1,2,3,4}$$

- Quando se lida com variáveis binárias, a forma mais simples de particionar o problema é fixar o valor de uma das variáveis, como por exemplo, x_1=0 e x_1=1
- Fazendo-se a substituição de x_1 no problema inicial obtém-se dois novos sub-problemas. Estes novos problemas são mais simples (ou menores...) do que o inicial.

Ramificando em subproblemas:

Para x_1=0

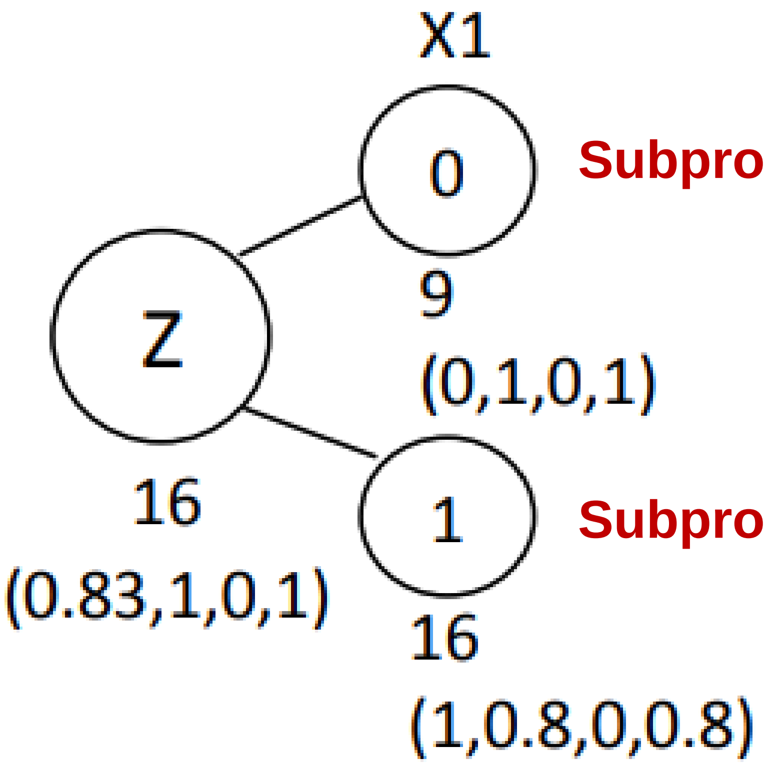
$$Max\ Z = 5x_2 + 6x_3 + 4x_4$$
$$sujeito\ a$$
$$3x_2 + 5x_3 + 2x_4 \leq 10$$
$$x_3 + x_4 \leq 1$$
$$x_3 \leq 0$$
$$-x_2 + x_4 \leq 0$$
$$x_j\ \acute{e}\ bin\acute{a}rio\ para\ j = 2{,}3{,}4$$

Subproblema 1

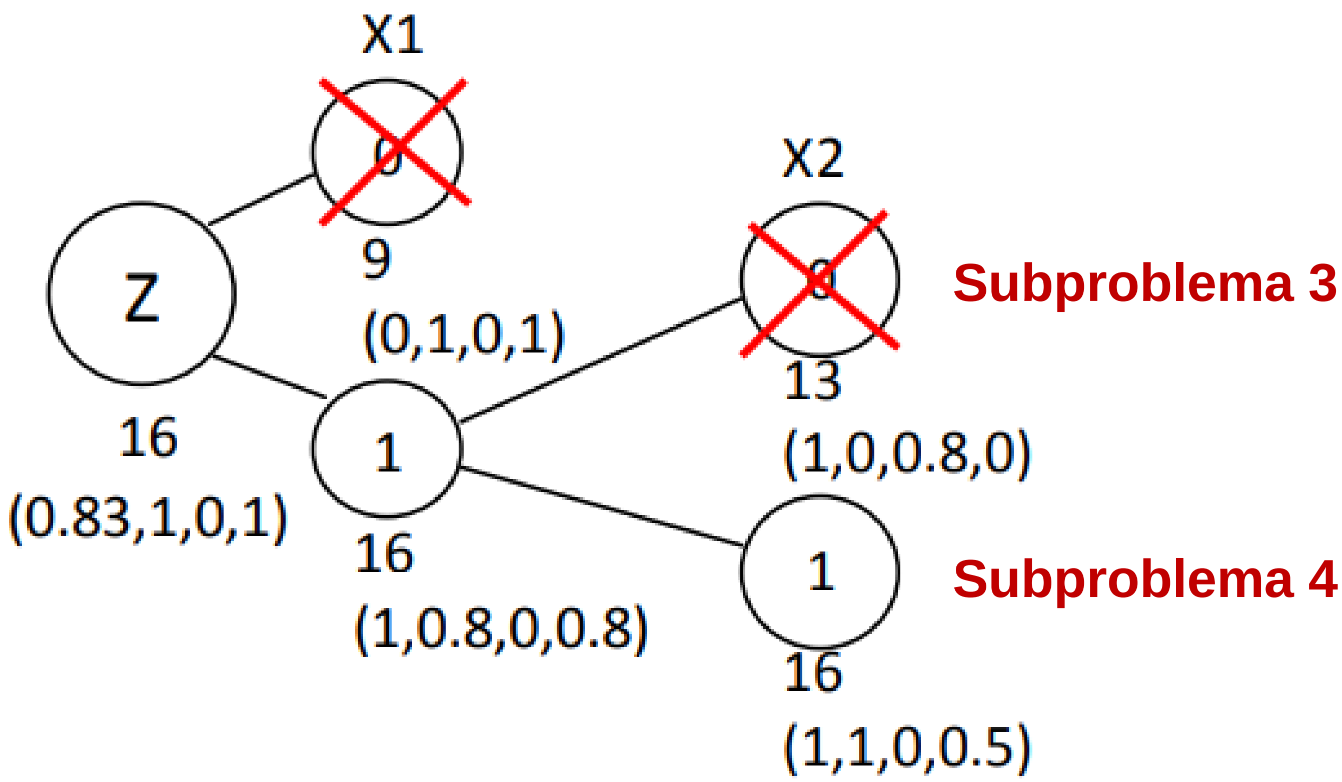
Para x_1=1

$$Max\ Z = 9 + 5x_2 + 6x_3 + 4x_4$$
$$sujeito\ a$$
$$3x_2 + 5x_3 + 2x_4 \leq 4$$
$$x_3 + x_4 \leq 1$$
$$x_3 \leq 0$$
$$-x_2 + x_4 \leq 0$$
$$x_j\ \acute{e}\ bin\acute{a}rio\ para\ j = 2{,}3{,}4$$

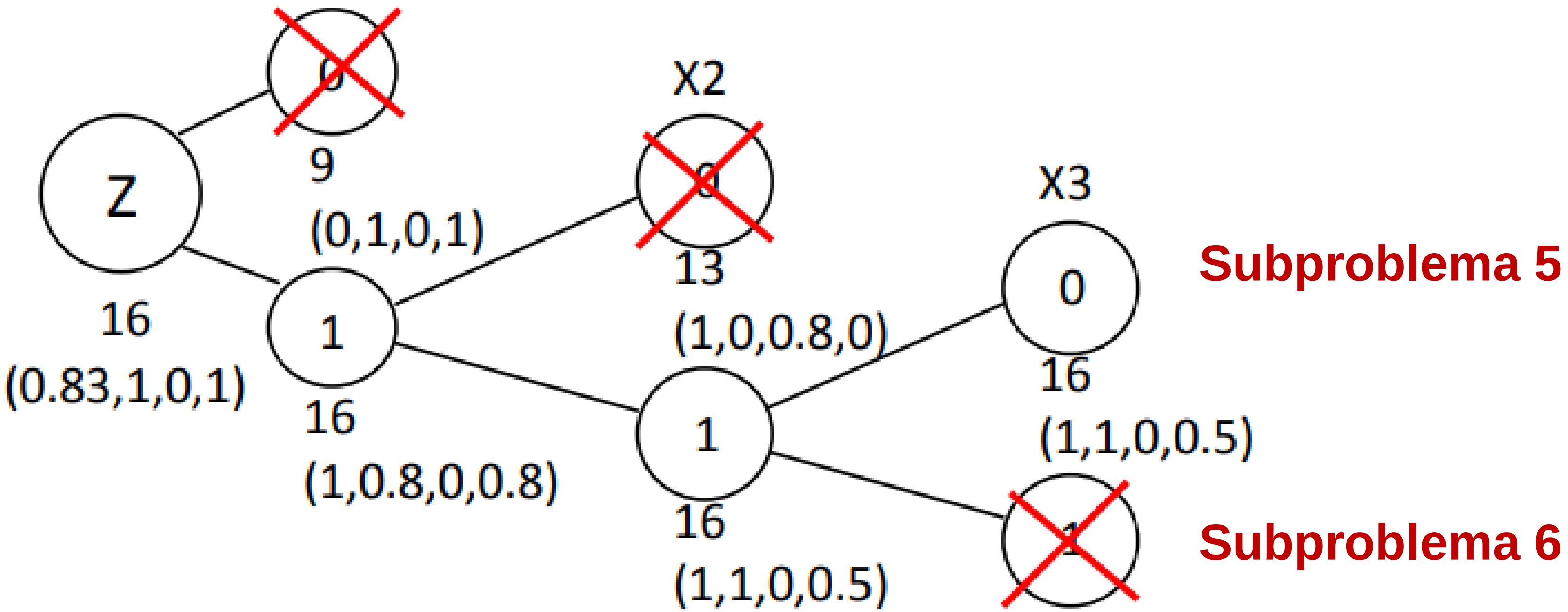
Subproblema 2



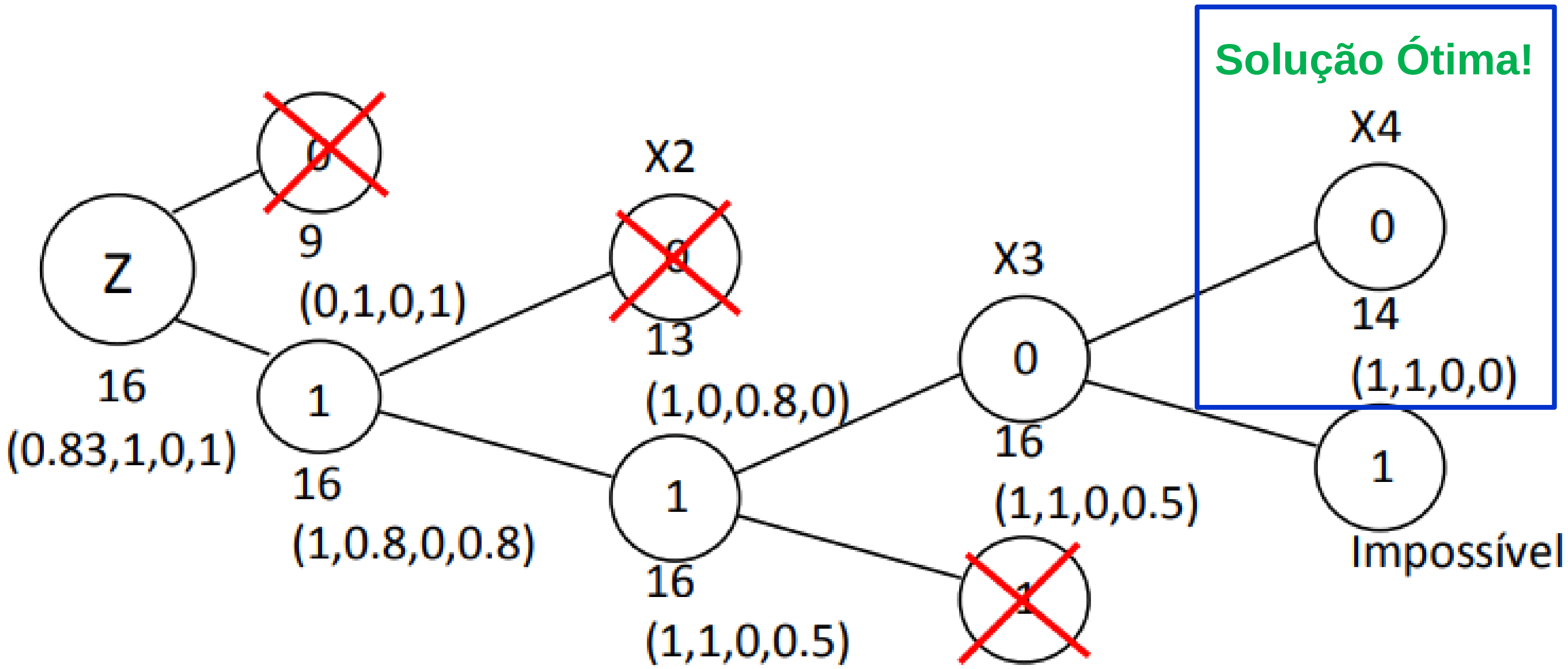
Como o Subproblema 2 apresentou resultado melhor, vamos ramificá-lo!



Como o Subproblema 4 apresentou resultado melhor, vamos ramificá-lo!



Como o Subproblema 5 apresentou resultado melhor, vamos ramificá-lo!


Solução Ótima!
X4
0
14
(1,1,0,0)
Z
16
(0.83,1,0,1)
0
9
(0,1,0,1)
1
16
(1,0.8,0,0.8)
X2
0
13
(1,0,0.8,0)
1
16
(1,1,0,0.5)
X3
0
16
(1,1,0,0.5)
1
1
Impossível