

M210 OTIMIZAÇÃO



DECISÃO !

- Em geral, as decisões consideram o custo e o(s) benefício(s).
- Em grande parte dos casos são tomadas de forma intuitiva.
- Muitas vezes consideramos aspectos subjetivos que incluem nossa experiência, preconceitos, valores, etc.



O que é uma decisão ? Há necessidade de uma decisão ?

- Decidir é escolher entre duas ou mais alternativas. Se não há consenso não há decisão.
- Vale lembrar que deixar as ações seguirem seu curso normal pode ser uma decisão.
- Pode-se corrigir uma decisão errada, pagando-se um preço pelo erro, mas não pode corrigir uma indecisão.

Fatores que afetam a tomada de decisão

- Quanto tempo tem-se disponível?
- Qual a influência do ambiente interno/externo?
- Qual o “tamanho” do risco?
- O quão importante é a decisão?
- Quais as pessoas envolvidas?
- Há interesses envolvidos?
- Qual o nível hierárquico dos envolvidos?
- Etc.

A PESQUISA OPERACIONAL E O PROCESSO DE TOMADA DE DECISÃO

- Um profissional que assume uma função em uma empresa logo se depara com situações onde deverá tomar algum tipo de decisão.
- À medida que este profissional vai ascendendo na carreira, os problemas e as decisões vão se tornando mais complexas e de maior responsabilidade.
- Tomar decisões é uma tarefa básica da gestão, nos seus vários níveis, estratégico, gerencial (tático) ou operacional.

Em geral, a tomada de decisão envolve as seguintes etapas:

Identificação do problema

- Talvez seja a etapa mais difícil.
- Os problemas na prática não estão, inicialmente, claros, definidos e delimitados.
- É importante perceber quais são os demais sistemas que interagem com o sistema onde se insere o problema a ser tratado.
- É fundamental se ter uma equipe de analistas multidisciplinar para o problema seja visto de prismas diferentes e isso seja incorporado na sua solução.

Formulação do(s) objetivo(s)

- Nesta etapa devem ser identificados e formulados (muitas vezes matematicamente) os objetivos que deverão ser atingidos.
- Em alguns casos, podem-se ter vários objetivos que podem ser qualitativos (por exemplo, satisfação do cliente), quantitativos (custo ou lucros) ou ainda conflitantes;

Análise das limitações

- Deve-se levantar as restrições que limitarão as soluções a serem propostas.
- Comumente, essas limitações dizem respeito ao atendimento de tempo/prazo, orçamento, demandas, capacidades (transporte, produção e armazenamento), tecnologia (equipamentos e processos), inventários (matéria-prima, subconjuntos e produtos acabados), entre outros;

Avaliação das alternativas

O “decisor”, frente as alternativas, deverá, utilizando algum procedimento, escolher a “melhor solução”.

Muitas vezes a solução ótima pode não ter uma relação custo-benefício que permita sua adoção pela empresa, e uma outra solução que atende esses requisitos pode vir a ser a escolhida.

Nesse processo de avaliação de alternativas, o decisor poderá utilizar uma abordagem qualitativa ou quantitativa:

Abordagem Qualitativa

Se aplica em problemas simples, corriqueiros, repetitivos, com pouco impacto financeiro ou social, onde é fundamental a experiência do decisor (ou de sua equipe de analistas) em situações anteriores semelhantes.

Nestes casos, adota-se uma solução similar àquela já utilizada com sucesso num problema semelhante;

Abordagem Quantitativa

- É a recomendada quando os problemas são complexos, novos, envolvem grande volume de recursos humanos, materiais e financeiros, têm alto impacto no ambiente onde se insere (empresa ou sociedade).
- Aqui, recomenda-se o uso dos preceitos da ótica científica e os métodos quantitativos (algoritmos) disponíveis a obtenção de uma solução.

Neste contexto é que a Pesquisa Operacional se insere, auxiliando o profissional a desenvolver um procedimento coerente e consistente de auxílio à tomada de decisão

Áreas da Pesquisa Operacional

- Modelos de Programação Matemática (Otimização Matemática)
- Modelo de Teoria dos Estoques
- Modelos de Teoria das Filas
- Modelos de Teoria dos Jogos
- Modelo de Teoria dos Grafos

Áreas da Programação Matemática

 Otimização Linear (Programação Linear);

Otimização Não-Linear;

Otimização em Redes;

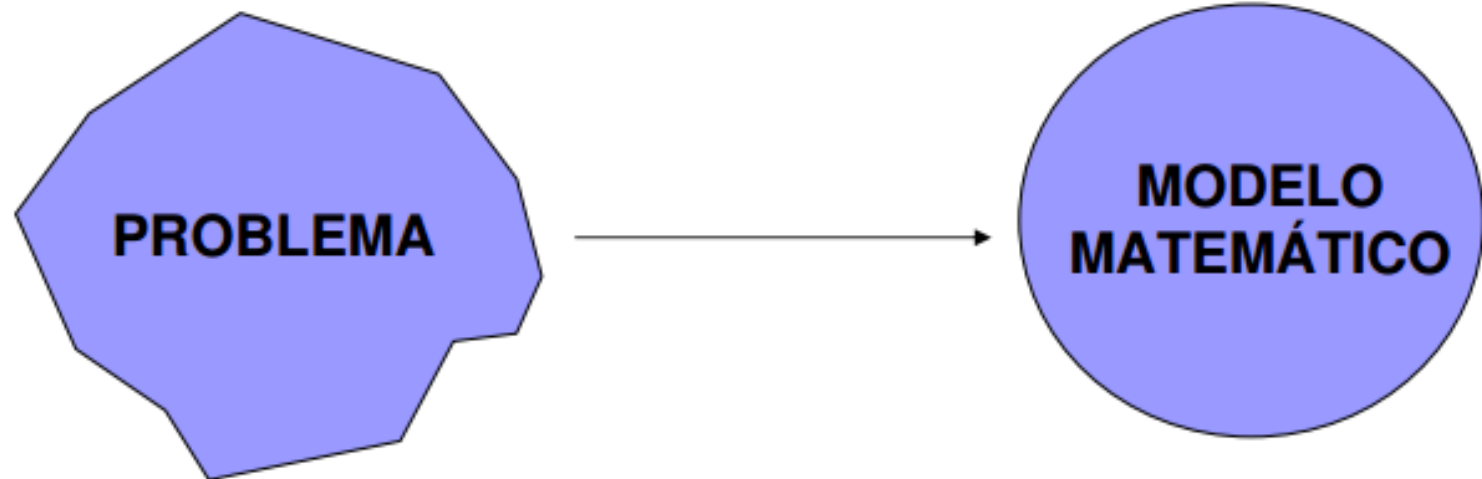
Otimização Multiobjetivo.

 Otimização Discreta (programação Linear Inteira);

FASES DA RESOLUÇÃO DE UM PROBLEMA PELA PESQUISA OPERACIONAL

Pode-se, de uma forma simplificada, subdividir a resolução de um problema pela PO em cinco etapas:

- (a) Formulação do Problema (Identificação do Sistema)
- (b) Construção do Modelo Matemático
- (c) Obtenção da Solução
- (d) Teste do Modelo e da Solução Obtida
- (e) Implementação



Ao iniciar o processo de modelagem precisamos responder a seguinte pergunta:

Você conhece o problema a ser modelado?

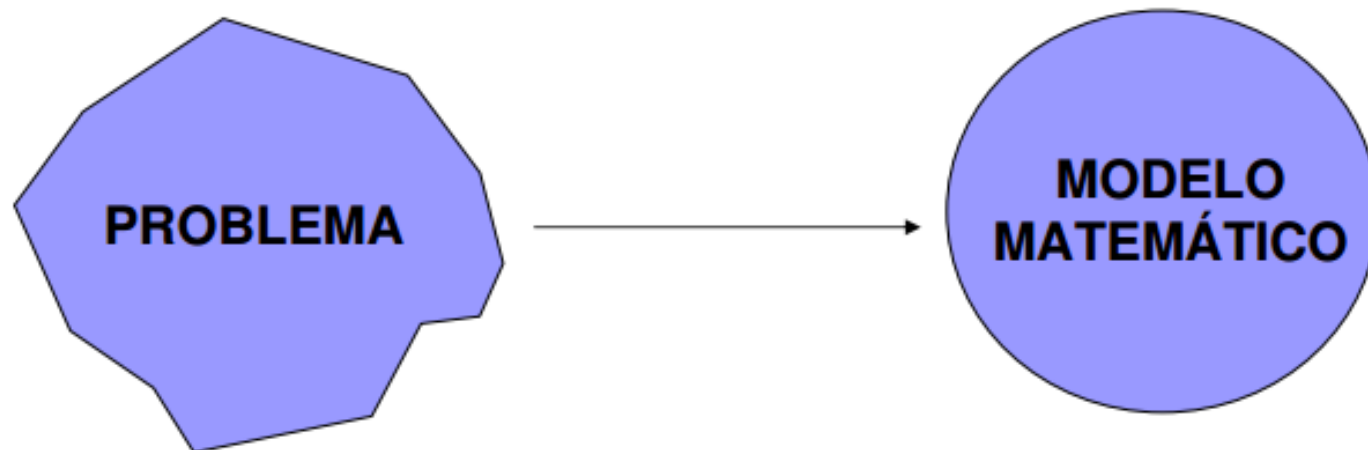
Antes do processo de modelagem é necessário analisar o objeto de estudo.

Seria um erro dos mais inocentes acreditar em um pré-conhecimento sem o devido estudo e análise do problema.

O não conhecimento do problema pode produzir um modelo que não reflete a realidade (não verifica e não valida o problema em análise).

ETAPAS NA FORMULAÇÃO DO MODELO MATEMÁTICO:

- ✓ **Identificar as variáveis de decisão do problema**
- ✓ **Construir sua função objetivo**
- ✓ **Definir suas restrições**



OTIMIZAÇÃO LINEAR

PROBLEMAS CLÁSSICOS:

Os problemas clássicos de PL podem ser enquadrados em três categorias:

- ✓ **Problema da mistura**
- ✓ **Problemas de planejamento**
- ✓ **Problemas de alocação de recursos**
- ✓ **Problemas de corte e empacotamento**

PROBLEMAS CLÁSSICOS: o problema da mistura

- **Estão entre os primeiros problemas de programação linear implementados com sucesso na prática.**
- **Essa classe de problemas consiste em combinar materiais com o objetivo de gerar produtos com características convenientes (respeitando as restrições) minimizando seu custo de produção.**
- **Exemplos:**
 - **Formulação de rações / dietas**
 - **Formulação de produtos na indústria química**
 - **Formulação de ligas metálicas**

Problema 1: Problema da Mistura

- ✓ Quanto comprar de cada insumo?
- ✓ Quanto fabricar de cada produto?

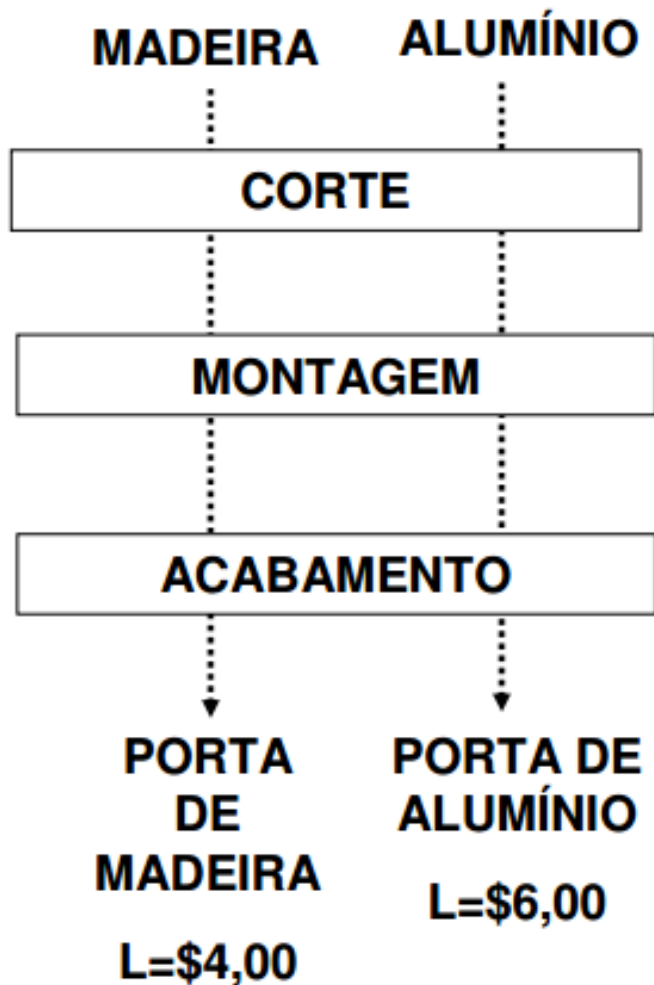


	Gasolina Pura	Octanas	Aditivos	Lucro
Gasolina Verde	22%	50%	28%	R\$ 0,48/l
Gasolina Azul	55%	32%	13%	R\$ 0,40/l
Gasolina Amarela	72%	20%	8%	R\$ 0,29/l
Disponibilidade (l)	3.200.000	2.400.000	1.100.000	

PROBLEMAS CLÁSSICOS: problemas de planejamento

- **Esta é uma classe de problemas bastante ampla sendo aplicável a problemas de planejamento da produção e financeiro.**
- **Essa classe de problemas (produção) consiste em decidir quais produtos e quanto fabricar em um período respeitando as restrições (máquinas, insumos, demanda, capacidade de armazenagem,...) maximizando o lucro obtido.**
- **Exemplos:**
 - **Mix de produção (planejamento estático)**
 - **Planejamento em múltiplos períodos**

Problema 2: Mix de Produção (planejamento estático)



	Corte	Montagem	Acabamento
Madeira	1,5 h/porta	3,0 h/porta	1 h/porta
Alumínio	4,0 h/porta	1,5 h/porta	1 h/porta
Disponibilidade	24 h	21 h	8 h

Problema 2: Mix de Produção

Curto prazo: planejamento da produção

- ✓ **Quanto comprar de cada insumo?**
- ✓ **Quanto fabricar de cada produto?**

Médio prazo: expansão da produção

- ✓ **Quais etapas do processo são gargalo?**

Problema 3: Problema do Planejamento da Produção

Um fabricante de barcos deve decidir quantas unidades serão fabricadas nos próximos 4 trimestres.

Em sua carteira de pedidos há 40 barcos a serem entregues no primeiro trimestre, 60 no segundo trimestre, 75 no terceiro trimestre e 25 no quarto trimestre.

No início do primeiro trimestre o fabricante terá 10 barcos em estoque e tem capacidade de produzir 40 barcos por trimestre (nesse caso cada barcos custa \$40.000).

Há a possibilidade de produzir unidades adicionais, porém o custo unitário vai para \$45.000.

O custo de carregamento (manter um barco estocado) é de \$2.000.

Faça o planejamento da produção objetivando minimizar o custo total nos próximos 4 trimestres.

PROBLEMAS CLÁSSICOS: probl. alocação de recursos

- **Esta é uma classe de problemas aplicável aos problemas operacionais das empresas (programação das atividades).**
- **Essa classe de problemas consiste em decidir como os recursos existentes (recursos humanos, aeronaves, equipamentos,...) serão alocados de forma a atender o planejamento, minimizando a quantidade de recursos necessários.**
- **Exemplos:**
 - **Alocação dos funcionários**
 - **Alocação de aeronaves e tripulantes.**

PROBLEMAS CLÁSSICOS: probl. corte e empacotamento

Problema 5: Corte de rolos de papel

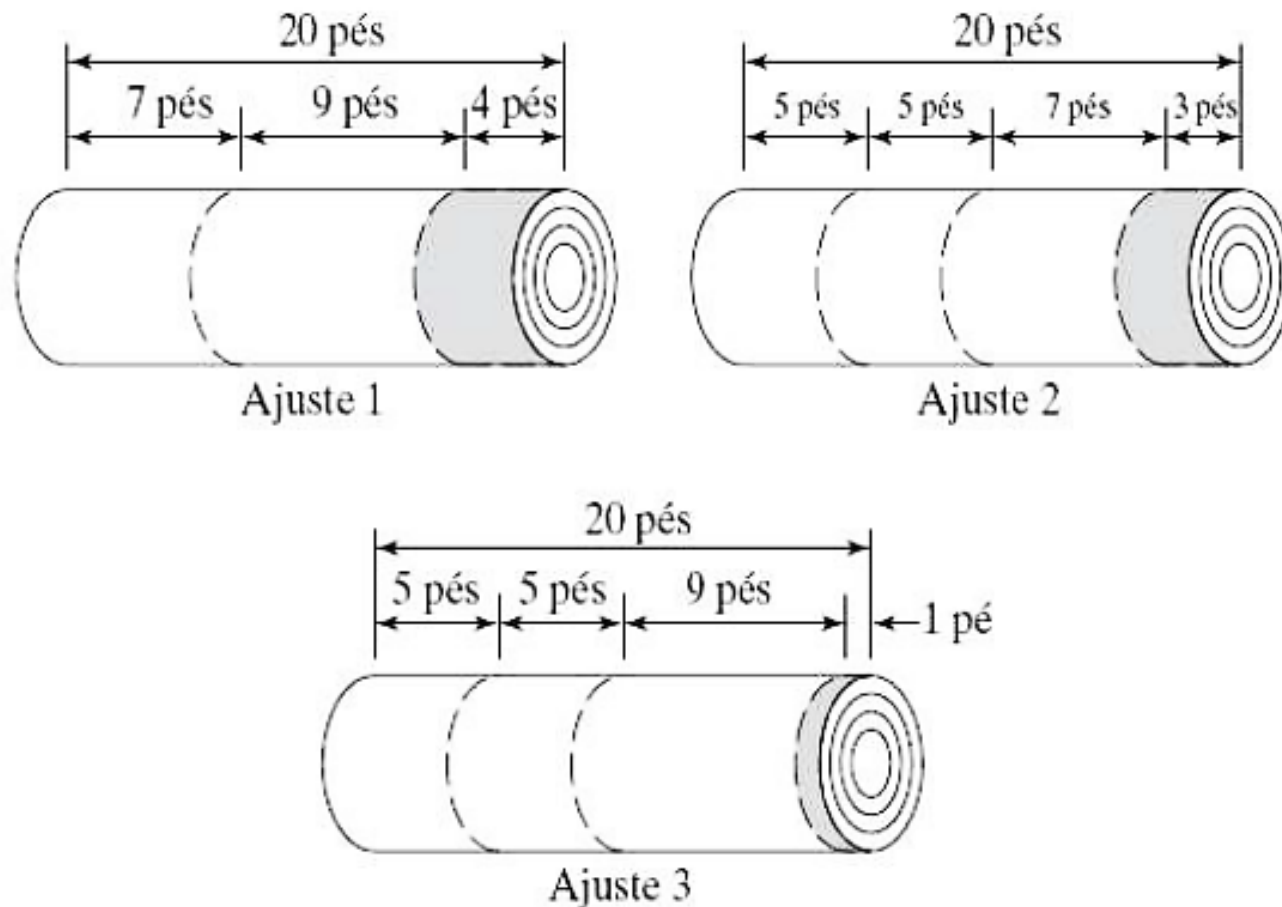
Uma empresa fabrica rolos de papel com 20 pés de comprimento (diâmetro padrão). Em uma certa semana recebeu 3 pedidos:

Pedido	Largura desejada (pés)	Número de rolos desejado
1	5	150
2	7	200
3	9	300

Como fazer as entregas de forma a minimizar a perda devido ao corte dos rolos?

Problema 5: Corte de rolos de papel

Perda por corte (área sombreada) para ajustes das facas 1, 2 e 3



MODELAGEM EM PROGRAMAÇÃO LINEAR

Determinação do *mix* de produção

Uma companhia deseja programar a produção de um utensílio de cozinha que requer o uso de dois tipos de recursos – mão-de-obra e material. A companhia está considerando a fabricação de três modelos e o seu departamento de engenharia forneceu os dados a seguir:

	Modelo		
	A	B	C
Mão-de-obra (horas por unidade)	7	3	6
Material (kg por unidade)	4	4	5
Lucro (\$ por unidade)	4	2	3

O suprimento de material é de 200 kg por dia. A disponibilidade diária de mão-de-obra é 150 horas. Formule um modelo de Programação Linear para determinar a produção diária de cada um dos modelos de modo a maximizar o lucro total da companhia.

Formulação do modelo

1. Identificação das variáveis de decisão:

X_A – produção diária do modelo A

X_B – produção diária do modelo B

X_C – produção diária do modelo C

2. Identificação do objetivo: maximização do lucro total

$$\text{Lucro Total} = L = 4X_A + 2X_B + 3X_C$$

$$\text{Max } L = 4X_A + 2X_B + 3X_C$$

3. Identificação das restrições:

$$(\text{Limitação de mão-de-obra}) \longrightarrow 7X_A + 3X_B + 6X_C \leq 150$$

$$(\text{Limitação de material}) \longrightarrow 4X_A + 4X_B + 5X_C \leq 200$$

$$(\text{Não-negatividade}) \longrightarrow X_A \geq 0, X_B \geq 0, X_C \geq 0.$$

Modelo

Encontrar números X_A , X_B , X_C tais que:

$$\text{Max } L = 4X_A + 2X_B + 3X_C$$

Sujeito as restrições:

$$\begin{aligned} 7X_A + 3X_B + 6X_C &\leq 150 \\ 4X_A + 4X_B + 5X_C &\leq 200 \\ X_A \geq 0, \quad X_B \geq 0, \quad X_C &\geq 0 \end{aligned}$$

Seleção de mídia para propaganda

Uma companhia de propaganda deseja planejar uma campanha em 03 diferentes meios: TV, rádio e revistas. Pretende-se alcançar o maior número de clientes possível. Um estudo de mercado resultou em:

	TV horário normal	TV horário nobre	Rádio	Revistas
Custo	40.000	75.000	30.000	15.000
Clientes Atingidos	400.000	900.000	500.000	200.000
Mulheres Atingidas	300.000	400.000	200.000	100.000

Obs: valores válidos para cada veiculação da propaganda.

A companhia não quer gastar mais de \$ 800.000 e, adicionalmente, deseja:

- (1) Que no mínimo 2 milhões de mulheres sejam atingidas;
- (2) Gastar no máximo \$ 500.000 com TV;
- (3) Que no mínimo 03 veiculações ocorram no horário normal TV;
- (4) Que no mínimo 02 veiculações ocorram no horário nobre TV;
- (5) Que o nº. de veiculações no rádio e revistas fiquem entre 05 e 10, para cada meio de divulgação.

Formular um modelo de PL que trate este problema, determinando o nº. de veiculações a serem feitas em cada meio de comunicação, de modo a atingir o máximo possível de clientes.

Resolução do exemplo “seleção de mídia para propaganda”

Variáveis de decisão:

X_1 = n°. de exposições em horário normal na tv.

X_2 = n°. de exposições em horário nobre na tv.

X_3 = n°. de exposições feitas utilizando rádio

X_4 = n°. de exposições feitas utilizando revistas.

Função-objetivo:

“Maximizar n°. de clientes atingidos”

$$\text{Max } Z = 400.000X_1 + 900.000X_2 + 500.000X_3 + 200.000X_4$$

Restrições:

Orçamento:

$$40.000X_1 + 75.000X_2 + 30.000X_3 + 15.000X_4 \leq 800.000$$

Mulheres atingidas:

$$300.000X_1 + 400.000X_2 + 200.000X_3 + 100.000X_4 \geq 2.000.000$$

Gasto com TV

$$40.000X_1 + 75.000X_2 \leq 500.000$$

Nº. de veiculações em TV, rádio e revistas

$$X_1 \geq 3, X_2 \geq 2, 5 \leq X_3 \leq 10, 5 \leq X_4 \leq 10$$

Não-negatividade

$$X_1, X_2, X_3, X_4 \geq 0.$$

Problema da Refinaria de Petróleo

Uma refinaria de petróleo destila óleo cru, proveniente de duas fontes: Arábia Saudita e Venezuela, e produz três produtos: gasolina, querosene e lubrificantes. Os óleos têm diferentes composições químicas e fornecem diferentes quantidades de destilados por barril processado. Cada barril da Arábia dá 0,3 barril de gasolina, 0,4 de querosene e 0,2 de lubrificante. Para o barril proveniente da Venezuela estas quantidades são respectivamente: 0,4, 0,2 e 0,3. Em ambos os casos há 10% de resíduos. Os óleos diferem em custo e disponibilidade. A refinaria pode comprar até 9000 barris da Arábia a \$ 20,00 o barril e até 6000 barris da Venezuela a \$ 15,00 o barril. Contratos da refinaria com distribuidores exigem que ela produza 2000 barris por dia de gasolina, 1500 de querosene e 500 de lubrificantes. Como cumprir os contratos gastando o mínimo?

Formulação do Problema : As variáveis de decisão são obviamente as quantidades de óleo cru a serem adquiridas da Arábia Saudita e Venezuela. Sejam estas variáveis x_1 e x_2 em número de mil-barris/dia, respectivamente. Os dados deste problema podem ser esquematicamente escritos na Tabela.

Tabela : Dados do problema de produção para maximização dos lucros.

	Quantidade de Óleo Cru		Quantidade a ser produzida
	Arábia Saudita (x_1)	Venezuela (x_2)	
Gasolina	0,3	0,4	2000
Querosene	0,4	0,2	1500
Lubrificantes	0,2	0,3	500
Compra Possível	9000	6000	
Custo	20	15	

<i>Minimize</i>	$z = 20x_1 + 15x_2$	
<i>sujeito a :</i>	$0,3x_1 + 0,4x_2 \geq 2000$	(Gasolina)
	$0,4x_1 + 0,2x_2 \geq 1500$	(Querosene)
	$0,2x_1 + 0,3x_2 \geq 500$	(Lubrificantes)
	$x_1 \leq 9000$	(Arábia Saudita)
	$x_2 \leq 6000$	(Venezuela)
	$x_1, x_2 \geq 0$	(Não – negatividade)

DESAFIO!

Considere que um investidor dispõe de R\$6.000,00 e deve avaliar a possibilidade de compra dos seguintes tipos de ações:

- Tipo 1: preço unitário de compra de R\$5,00 e rentabilidade anual estimada de 30%
- Tipo 2: preço unitário de compra de R\$3,00 e rentabilidade anual estimada de 35%

O investidor não deseja adquirir mais do que 1750 ações. Seu corretor só consegue comprar 1000 ações do tipo 1 e 1500 do tipo 2. Com base nestas informações, que quantidades deve comprar de cada tipo de ação?

Considere também que seu objetivo é maximizar o total de capital no fim de um ano.

EXERCÍCIOS



RESOLUÇÃO GRÁFICA DE MODELOS DE PL

RESOLUÇÃO GRÁFICA DE MODELOS DE PL

- Aplicável para modelos com 02 variáveis de decisão
- Útil para a ilustração de alguns conceitos básicos utilizados na resolução de modelos de maior porte.

Etapas a serem seguidas na resolução gráfica

1º Passo: identificar a *região viável* do modelo, isto é, quais são os pares (X_1, X_2) que satisfazem a todas as restrições.

2º Passo: achar a melhor solução viável, denominada *Solução Ótima* e denotada por (X_1^*, X_2^*) , que leva ao *valor ótimo* da função-objetivo Z^* .

Problema de *mix* de Produção

Fabricação de dois modelos de brinquedos: B_1 e B_2 .

- Lucros unitários/dúzia: R\$ 8,00 para B_1 e R\$ 5,00 para B_2

- Recursos disponíveis:

1000 kg de plástico especial.

40 horas para produção semanal.

• Requisitos do Departamento de Marketing:

Produção total não pode exceder 700 dúzias;

A quantidade de dúzias de B_1 não pode exceder em 350 a quantidade de dúzias de B_2 .

• Dados técnicos:

B_1 requer 2 kg de plástico e 3 minutos por dúzia.

B_2 requer 1 kg de plástico e 4 minutos por dúzia.

Variáveis de decisão:

X_1 : produção semanal de B_1 (em dúzias).

X_2 : produção semanal de B_2 (em dúzias).

Função Objetivo: Maximizar o Lucro semanal

Maximize $8X_1 + 5X_2$ (Lucro semanal)

Sujeito a:

$2X_1 + 1X_2 \leq 1000$ (Plástico - Kg)

$3X_1 + 4X_2 \leq 2400$ (Tempo de produção - minutos)

$X_1 + X_2 \leq 700$ (Produção total)

$X_1 - X_2 \leq 350$ (*mix*)

$X_j \geq 0, j = 1,2$ (Não negatividade)

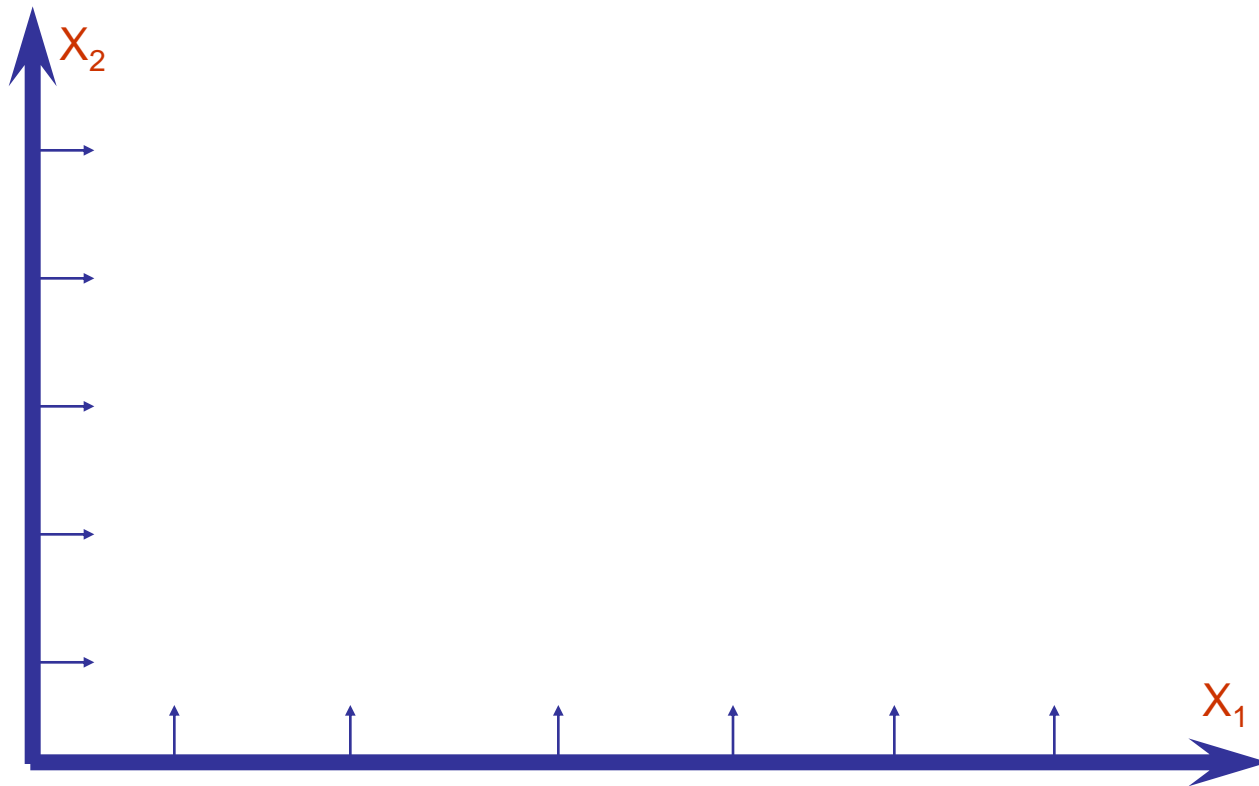
Conceitos importantes:

- Os pontos (X_1 , X_2) que satisfazem todas as restrições do modelo formam a **Região Viável**.

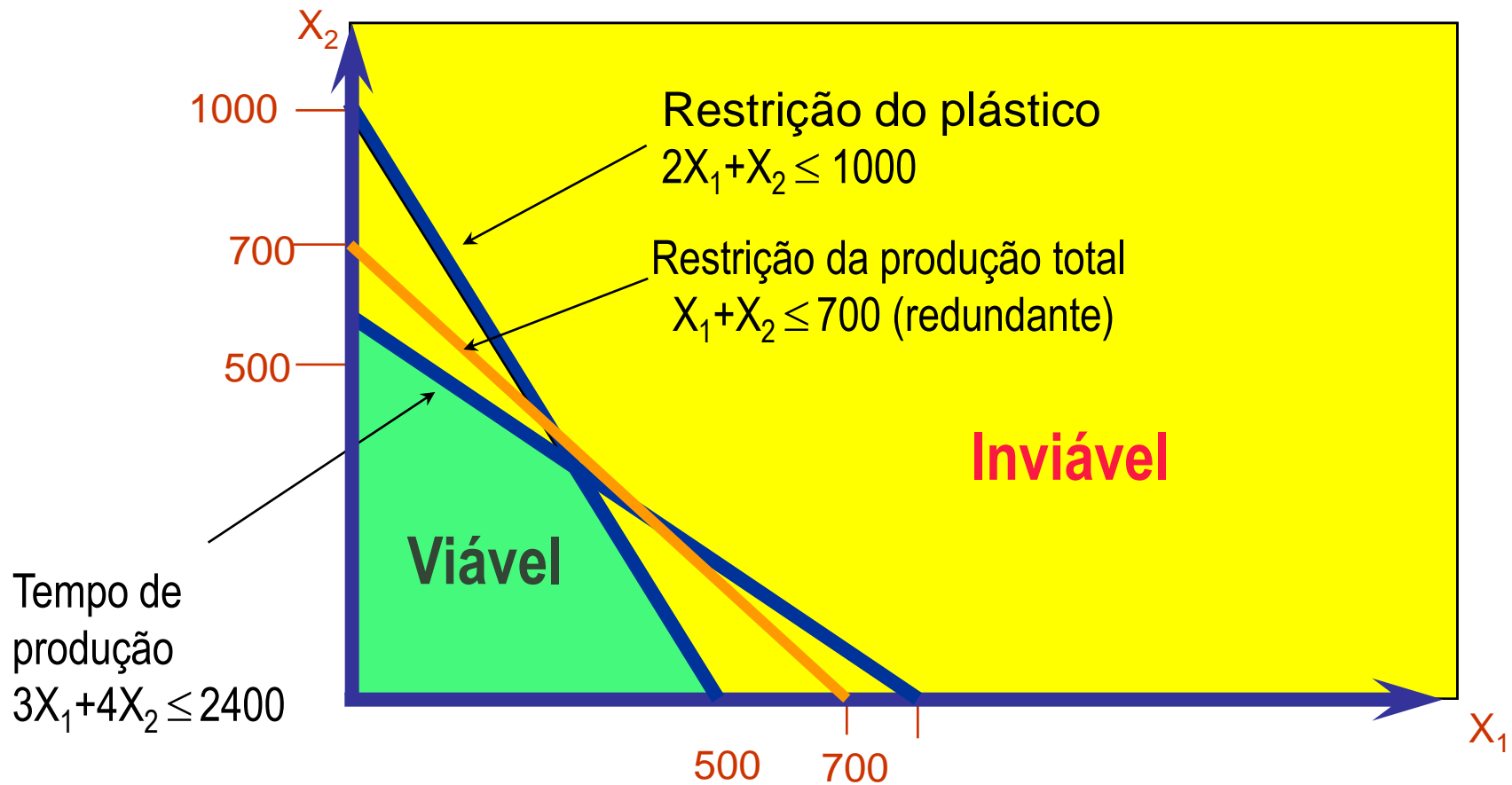
* Esses pontos são chamados de **Soluções Viáveis**.

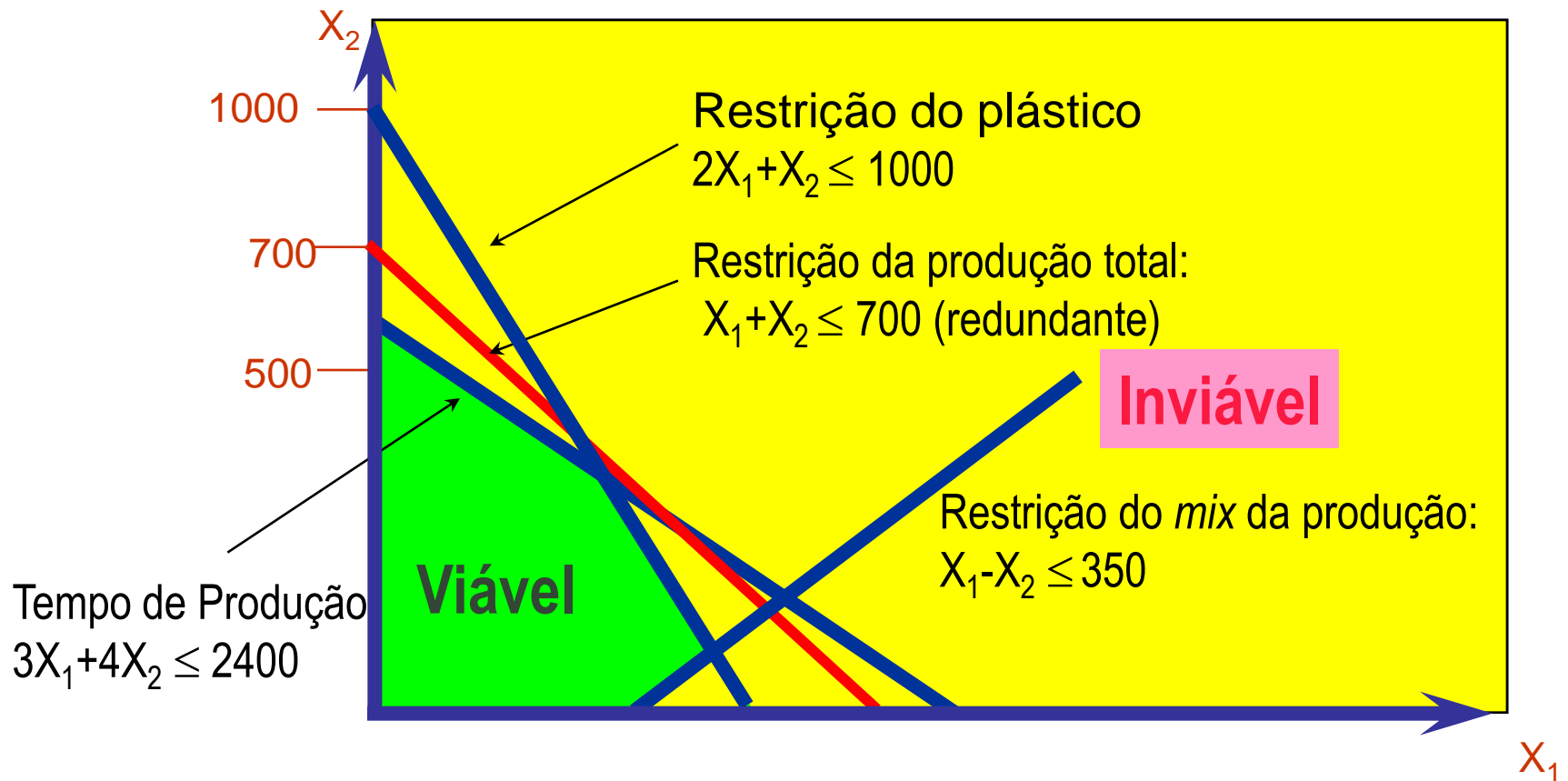
Usando a resolução gráfica pode-se representar todos as restrições (semi-planos), a função objetivo (reta) e os três tipos de pontos viáveis.

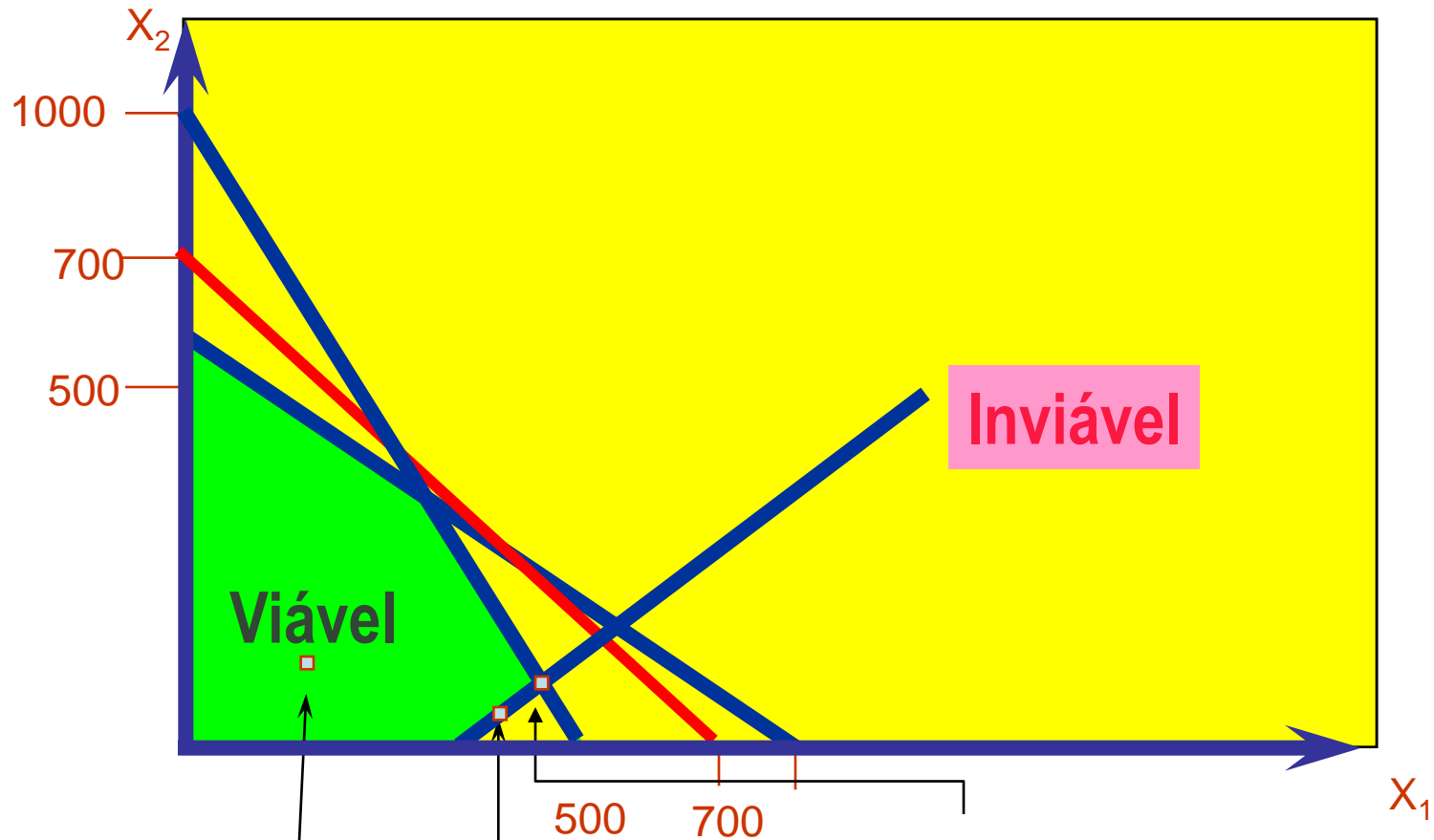
Representando as condições de não negatividade



Representando as outras restrições

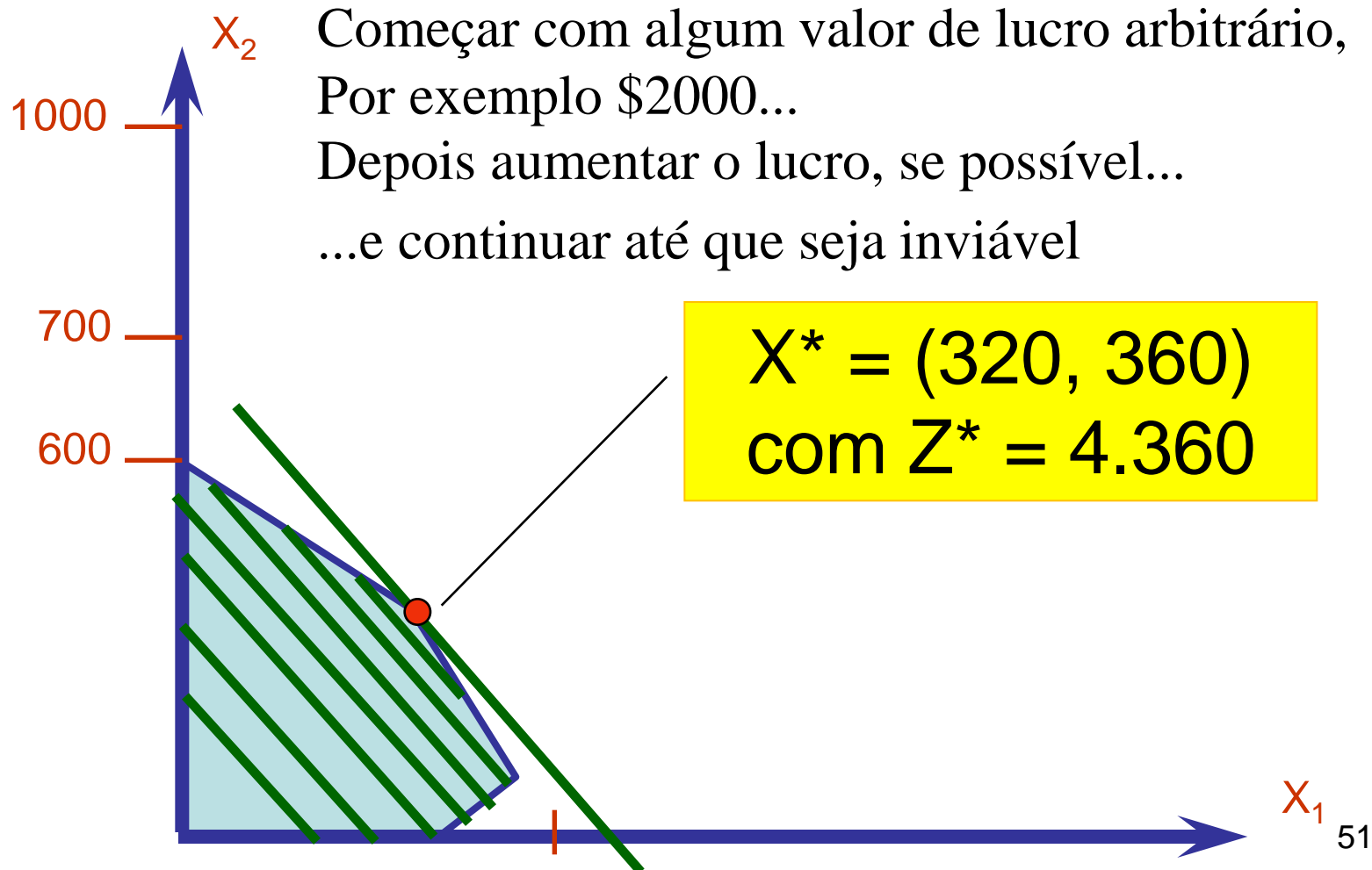






Pontos interiores. Pontos na fronteira. Pontos extremos.

Há três tipos de pontos viáveis.



EXERCÍCIOS

