Inatel

M020 – Matemática Discreta

1. LÓGICA FORMAL
1.1 Sentenças, Representação Simbólica e Tautologias

Marcelo Vinícius Cysneiros Aragão

marcelovca90@inatel.br

Proposições

- A lógica formal pode representar afirmações que fazemos em linguagem cotidiana para apresentar fatos ou transmitir informações.
- Uma **proposição** (ou **declaração**) é uma sentença que é falsa ou verdadeira.
- Quais das sentenças a seguir podem ser consideradas proposições?
  - Dez é menor do que sete.
  - Como está você?
  - Ela é muito talentosa.
  - Existe vida em outros planetas do universo.

Proposições

- A lógica formal pode representar afirmações que fazemos em linguagem cotidiana para apresentar fatos ou transmitir informações.
- Uma **proposição** (ou **declaração**) é uma sentença que é falsa ou verdadeira.
- Quais das sentenças a seguir podem ser consideradas proposições?
  - Dez é menor do que sete.
  - Como está você?
  - Ela é muito talentosa.
  - Existe vida em outros planetas do universo.

Conectivos e Valores Lógicos

- Ao falar ou escrever, combinamos frases simples por meio de conectivos, como *e*, para formar sentenças compostas mais interessantes.
- O valor lógico de uma proposição composta depende dos valores lógicos de seus componentes e dos conectivos usados.
- Exemplo: se combinarmos as seguintes afirmações verdadeiras, “Elefantes são grandes” e “Bolas de futebol são redondas”, usando o conectivo *e*, obtemos a seguinte proposição verdadeira: “Elefantes são grandes e bolas de futebol são redondas”.

Conectivos e Valores Lógicos

- Para representar proposições, adotaremos letras maiúsculas do início do alfabeto, como A, B e C. Elas são chamadas de **letras de proposição**.

- Para representar conectivos lógicos, utilizaremos símbolos como ∧ (e), ∨ (ou), etc.

- Portanto, a proposição $A \wedge B$ pode ser lida como “A e B”.

Conjunção (∧)

- Considere a proposição $A \wedge B$.
  - A e B podem ser chamados de **elementos** ou **fatores** da expressão.
  - Se A e B forem ambas verdadeiras, então $A \wedge B$ deve ser considerada verdadeira.
- Diante disto:
  - Se A é verdadeira e B é falsa, qual seria o valor lógico de $A \wedge B$?
  - Se A é falsa e B é verdadeira, qual seria o valor lógico de $A \wedge B$?
  - Se A e B são falsas, qual seria o valor lógico de $A \wedge B$?

A	**B**	$A \wedge B$
V	V	V
V	F	F
F	V	F
F	F	F

Disjunção (∨)

- Considere a proposição $A \vee B$.
  - A e B podem ser chamados de elementos ou fatores da expressão.
  - Se A e B são proposições verdadeiras, então $A \vee B$ deve ser considerada verdadeira.
  - A conclusão acima fornece a primeira linha da tabela-verdade. Como podemos completá-la?

A	B	$A \vee B$
V	V	V
V	F	V
F	V	V
F	F	F

Condicional/Implicação ($\rightarrow$)

- Proposições podem ser combinadas na forma “se proposição 1, então proposição 2”.
- Se A denota a proposição 1 e B a 2, a proposição composta é denotada por $A \rightarrow B$ (leia-se “A implica B”).
- O conectivo lógico aqui é o **condicional** (ou a **implicação**) e significa que a verdade de A implica, ou leva a, a verdade de B.
- No condicional $A \rightarrow B$, A é a proposição **antecedente** e B a **consequente**.

Condicional/Implicação (→)

- A tabela-verdade para o condicional não é tão óbvia quanto as outras.
- Suponhamos que alguém observe que:

“Se eu passar no teste de economia, então vou ao cinema sexta-feira.”

- Se a pessoa não passar no teste, então – independente se ele vai ou não ao cinema – não é possível afirmar que a observação é falsa.
- Na dúvida, seria razoável dizer que a afirmação é verdadeira.
- Por convenção, $A \rightarrow B$ é considerada verdadeira se A for falsa, independentemente do valor lógico de B.

Condicional/Implicação (→)

- Diante do que foi apresentado no slide anterior, eis a tabela-verdade para o operador condicional (→).

A	B	$A \rightarrow B$
V	V	V
V	F	F
F	V	V
F	F	V

Bicondicional/Equivalência ($\leftrightarrow$)

- O conectivo bicondicional (ou equivalência) é simbolizado por $\leftrightarrow$.
- A expressão $\mathrm{A} \leftrightarrow B$ é uma abreviação de $(\mathrm{A} \rightarrow B) \wedge (B \rightarrow A)$.
- Podemos escrever a tabela-verdade para o bicondicional construindo, passo a passo, a tabela para $(\mathrm{A} \rightarrow B) \wedge (B \rightarrow A)$.

A	B	$A \rightarrow B$	$B \rightarrow A$	$(\mathrm{A} \rightarrow B) \wedge (B \rightarrow A)$
V	V	V	V	V
V	F	F	V	F
F	V	V	F	F
F	F	V	V	V

- Da tabela vemos que $\mathrm{A} \leftrightarrow B$ é verdadeira exatamente quando A é igual a B.

Negação (‘)

- Os conectivos lógicos vistos até agora são **conectivos binários**, pois juntam duas expressões, através de um conectivo lógico, produzindo uma terceira expressão.
- Um **conectivo unário** age em uma expressão para produzir uma segunda expressão.
- A negação de A – simbolizada por A’ – é lida como “não A”.

A	A’
V	F
F	V

Conectivos e Valores Lógicos

- Devido à riqueza da língua portuguesa, palavras com significados ligeiramente diferentes são representadas pelo mesmo conectivo lógico. A tabela abaixo mostra expressões comuns em português associadas a diversos conectivos lógicos.

Expressão em Português	Conectivo Lógico	Expressão Lógica
e; mas; também; além disso	Conjunção	$A \wedge B$
ou	Disjunção	$A \vee B$
Se A, então B. A implica B. A, logo B. A só se B; A somente se B. B segue de A. A é uma condição suficiente para B; basta A para B. B é uma condição necessária para A.	Condicional	$A \to B$
A se e somente se B A é condição necessária e suficiente para B.	Bicondicional (equivalência)	$A \leftrightarrow B$
não A É falso que A … Não é verdade que A …	Negação	A'

Exercícios

PROBLEMA PRÁTICO 5

Escreva o antecedente e o consequente de cada uma das proposições a seguir (sugestão: coloque cada proposição na forma se/então).

a. Se a chuva continuar, então o rio vai transbordar.
b. Uma condição suficiente para a falha de uma rede elétrica é que a chave desligue.
c. Os abacates só estão maduros quando estão escuros e macios.
d. Uma boa dieta é uma condição necessária para um gato ser saudável.

Exercícios

PROBLEMA PRÁTICO 5

Escreva o antecedente e o consequente de cada uma das proposições a seguir (sugestão: coloque cada proposição na forma se/então).

a. Se a chuva continuar, então o rio vai transbordar.
b. Uma condição suficiente para a falha de uma rede elétrica é que a chave desligue.
c. Os abacates só estão maduros quando estão escuros e macios.
d. Uma boa dieta é uma condição necessária para um gato ser saudável.

Conectivos e Valores Lógicos

- A negação de uma proposição deve ser feita com cuidado, **especialmente no caso de uma proposição composta**. A tabela a seguir dá alguns exemplos.

Proposição	Negação Correta	Negação Incorreta
Vai chover amanhã.	É falso que vá chover amanhã. Não vai chover amanhã.	
Pedro é alto e magro.	É falso que Pedro seja alto e magro. Pedro não é alto ou não é magro. Pedro é baixo ou gordo.	Pedro é baixo e gordo. Essa é uma proposição muito forte. Pedro não tem ambas as propriedades (ser alto e ser magro) mas ainda pode ter uma delas.
O rio é raso ou está poluído.	É falso que o rio seja raso ou esteja poluído. O rio não é raso nem está poluído. O rio é fundo e não está poluído.	O rio não é raso ou não está poluído. Essa é uma proposição muito fraca. O rio não tem nenhuma das duas propriedades, não deixa de ter apenas uma delas.

Exercícios

PROBLEMA PRÁTICO 6

Quais das proposições a seguir representa A' se A é a proposição "Júlia gosta de manteiga mas detesta creme"?

a. Júlia detesta manteiga e creme.
b. Júlia não gosta de manteiga nem de creme.
c. Júlia não gosta de manteiga mas adora creme.
d. Júlia odeia manteiga ou gosta de creme.

Exercícios

PROBLEMA PRÁTICO 6

Quais das proposições a seguir representa A' se A é a proposição “Júlia gosta de manteiga mas detesta creme”?

a. Júlia detesta manteiga e creme.
b. Júlia não gosta de manteiga nem de creme.
c. Júlia não gosta de manteiga mas adora creme.
d. Júlia odeia manteiga ou gosta de creme.

Conectivos e Valores Lógicos

- É possível encadear letras de proposição, conectivos e parênteses (ou colchetes) para formar novas expressões, como:

$$(\mathrm{A} \rightarrow B) \wedge (B \rightarrow A)$$

- É claro que, como em uma linguagem de programação, certas *regras de sintaxe* (regras que dizem quais as cadeias formam expressões válidas) têm que ser obedecidas; por exemplo, a cadeia abaixo não seria considerada válida.

$$\mathrm{A}\ )) \wedge \wedge \rightarrow BC)$$

Conectivos e Valores Lógicos

- Uma cadeia que forma uma expressão válida é denominada uma **fórmula bem formulada** ou **fbf**.
- Para reduzir o número de parênteses necessários em uma fbf, estipula-se uma ordem de aplicação dos conectivos lógicos. A *ordem de precedência* é a seguinte*:*
  1. Para conectivos dentro de vários parênteses, efetua-se primeiro as expressões dentro dos parênteses mais internos
  2. ‘
  3. ∧ , ∨
  4. →
  5. ↔
- Em uma fbf com diversos conectivos, o último a ser aplicado é o **conectivo principal**.

Exercícios

- Qual o significado da expressão $\mathrm{A} \vee \mathrm{B}'$?

( ) $\mathrm{A} \vee (\mathrm{B}')$ ( ) $(\mathrm{A} \vee \mathrm{B})'$

- Qual o significado da expressão $\mathrm{A} \vee \mathrm{B} \rightarrow \mathrm{C}$?

( ) $(\mathrm{A} \vee \mathrm{B}) \rightarrow \mathrm{C}$ ( ) $\mathrm{A} \vee (\mathrm{B} \rightarrow \mathrm{C})$

- Identifique os conectivos principais das expressões acima.

Exercícios

- Qual o significado da expressão $A \vee B'$?

(X) $A \vee (B')$ ( ) $(A \vee B)'$

- Qual o significado da expressão $A \vee B \rightarrow C$?

(X) $(A \vee B) \rightarrow C$ ( ) $A \vee (B \rightarrow C)$

- Identifique os conectivos principais das expressões acima.

Conectivos e Valores Lógicos

- Fbfs compostas de letras de proposições e conectivos lógicos têm valores lógicos que dependem dos valores lógicos associados às suas letras de proposições.
- Escrevemos a tabela-verdade para qualquer fbf a partir de seus componentes, da mesma forma como foi feito para a expressão $(\mathrm{A} \rightarrow B) \wedge (B \rightarrow A)$.
- O conectivo principal aparece na última coluna da tabela.
- A tabela abaixo mostra a tabela-verdade para a fbf $A \vee \mathrm{B}' \rightarrow (A \vee B)'$. O conectivo principal, de acordo com as regras de precedência, é o condicional.

A	B	B'	$A \vee B'$	$A \vee B$	$(A \vee B)'$	$A \vee B' \rightarrow (A \vee B)'$
V	V	F	V	V	F	F
V	F	V	V	V	F	F
F	V	F	F	V	F	V
F	F	V	V	F	V	V

Exercícios

PROBLEMA PRÁTICO 7

Construa tabelas-verdade para as fbfs a seguir:

a. $(\mathrm{A} \rightarrow B) \leftrightarrow (B \rightarrow A)$ (lembre-se que $C \leftrightarrow D$ é verdadeira precisamente quando C e D têm os mesmos valores lógicos)

$b.$ $(\mathrm{A} \vee A') \rightarrow (B \wedge B')$

$c.$ $[(A \wedge B') \rightarrow C']'$

d. $(\mathrm{A} \rightarrow B) \leftrightarrow (B' \rightarrow A')$

Exercícios

PROBLEMA PRÁTICO 7

a.

A	B	$A \to B$	$B \to A$	$(A \to B) \leftrightarrow (B \to A)$
V	V	V	V	V
V	F	F	V	F
F	V	V	F	F
F	F	V	V	V

b.

A	B	A'	B'	$A \vee A'$	$B \wedge B'$	$(A \vee A') \to (B \wedge B')$
V	V	F	F	V	F	F
V	F	F	V	V	F	F
F	V	V	F	V	F	F
F	F	V	V	V	F	F

c.

A	B	C	B'	$A \wedge B'$	C'	$(A \wedge B') \to C'$	$[(A \wedge B') \to C']'$
V	V	V	F	F	F	V	F
V	V	F	F	F	V	V	F
V	F	V	V	V	F	F	V
V	F	F	V	V	V	V	F
F	V	V	F	F	F	V	F
F	V	F	F	F	V	V	F
F	F	V	V	F	F	V	F
F	F	F	V	F	V	V	F

d.

A	B	A'	B'	$A \to B$	$B' \to A'$	$(A \to B) \leftrightarrow (B' \to A')$
V	V	F	F	V	V	V
V	F	F	V	F	F	V
F	V	V	F	V	V	V
F	F	V	V	V	V	V

Tautologias

- Uma fbf que assume apenas o valor V é denominada uma **tautologia**.
- Uma tautologia é “intrinsecamente verdadeira” pela sua própria estrutura; ela é verdadeira independentemente dos valores lógicos atribuídos às suas letras de proposição.
- Exemplo:

$\boldsymbol{A} \vee \boldsymbol{A}'$**: “Hoje vai ter sol ou hoje não vai ter sol.”**

- A proposição acima tem que ser sempre verdadeira, já que uma ou outra das duas coisas tem que acontecer.

Vide problema prático 7d.

Tautologias

- Uma fbf que assume apenas o valor F é denominada uma **contradição**.
- Uma tautologia é “intrinsecamente falsa” pela sua própria estrutura.

- Exemplo:

$\boldsymbol{A \wedge A'}$: **“Hoje é terça-feira e hoje não é terça-feira.”**

- A proposição acima tem que ser sempre falsa, independentemente do dia da semana a qual “hoje” esteja se referindo.

Vide problema prático 7b.

Tautologias

- Suponha que P e Q representam duas fbfs e suponha que a fbf $\mathrm{P} \leftrightarrow \mathrm{Q}$ seja uma tautologia.
- Se fizermos uma tabela-verdade usando as letras de proposição P e Q, então os valores lógicos de P e de Q seriam sempre iguais em todas as linhas da tabela.
- Nesse caso, dizemos que P e Q são **fbfs equivalentes**; denotamos essa propriedade por $A \Leftrightarrow B$.

Vide problema prático 7d.

Tautologias

- Abaixo, são listadas algumas equivalências tautológicas.
- Contradições e tautologias são representadas por 0 e 1, respectivamente.

1a. $A \vee B \Leftrightarrow B \vee A$	1b. $A \wedge B \Leftrightarrow B \wedge A$	(comutatividade)
2a. $(A \vee B) \vee C \Leftrightarrow A \vee (B \vee C)$	2b. $(A \wedge B) \wedge C \Leftrightarrow A \wedge (B \wedge C)$	(associatividade)
3a. $A \vee (B \wedge C) \Leftrightarrow (A \vee B) \wedge (A \vee C)$	3b. $A \wedge (B \vee C) \Leftrightarrow (A \wedge B) \vee (A \wedge C)$	(distributividade)
4a. $A \vee 0 \Leftrightarrow A$	4b. $A \wedge 1 \Leftrightarrow A$	(elementos neutros)
5a. $A \vee A' \Leftrightarrow 1$	5b. $A \wedge A' \Leftrightarrow 0$	(complementares)

- Note que as equivalências estão agrupadas em cinco pares. Em cada par, uma pode ser obtida da outra substituindo ∨ por ∧, ∧ por ∨, 0 por 1 ou 1 por 0.
- Cada equivalência em um dos pares é a **dual** da outra.

Tautologias

- Duas equivalências adicionais muito úteis são as Leis de De Morgan, assim nomeadas em honra ao matemático inglês do século XIX, Augusto de Morgan, o primeiro a enunciá-las.

Leis de De Morgan: $(A \vee B)' \Leftrightarrow A' \wedge B'$ e $(A \wedge B)' \Leftrightarrow A' \vee B'$

- Cada uma é a dual da outra. As leis de De Morgan auxiliam na negação de uma proposição composta (recapitule o problema prático 6).

Exercícios

★**1.** Quais das frases a seguir são proposições?

a. A lua é feita de queijo verde.
b. Ele é, certamente, um homem alto.
c. Dois é um número primo.
d. O jogo vai acabar logo?
e. Os juros vão subir ano que vem.
f. Os juros vão descer ano que vem.
g. $x^2 - 4 = 0$.

1. (a), (c), (e), (f)

Exercícios

★4. Encontre o antecedente e o conseqüente de cada uma das proposições a seguir:

a. O crescimento sadio de plantas é conseqüência de quantidade suficiente de água.

b. O aumento da disponibilidade de informação é uma condição necessária para um maior desenvolvimento tecnológico.

c. Serão introduzidos erros apenas se forem feitas modificações no programa.

d. A economia de energia para aquecimento implica boa insulação ou vedação de todas as janelas.

4. a. Antecedente: quantidade suficiente de água
Conseqüente: crescimento sadio de plantas

b. Antecedente: maior desenvolvimento tecnológico
Conseqüente: aumento da disponibilidade de informação

c. Antecedente: serão introduzidos erros
Conseqüente: foram feitas modificações no programa

d. Antecedente: economia de energia
Conseqüente: boa insulação ou vedação de todas as janelas

Exercícios

6. Escreva a negação de cada fbf a seguir:
   - ★a. Se a comida é boa, então o serviço é excelente.
   - ★b. Ou a comida é boa, ou o serviço é excelente.
   - c. Ou a comida é boa e o serviço é excelente, ou então está caro.
   - d. Nem a comida é boa, nem o serviço é excelente.
   - e. Se é caro, então a comida é boa e o serviço é excelente.

6. a. A comida é boa mas o serviço é ruim.
b. A comida é ruim e o serviço também.

Exercícios

★**11.** Escreva cada uma das proposições compostas a seguir em notação simbólica usando letras de proposição para denotar as componentes.

a. Se os preços subirem, então haverá muitas casas para vender e elas serão caras; mas se as casas não forem caras, então, ainda assim, haverá muitas casas para vender.

b. Tanto ir dormir como ir nadar é uma condição suficiente para a troca de roupa; no entanto, mudar a roupa não significa que se vai nadar.

c. Vai chover ou nevar mas não ambos.

d. Se Jane vencer ou perder, vai ficar cansada.

e. Ou Jane irá vencer ou, se perder, ela ficará cansada.

11. **a.** A: os preços subirem; B: haverá muitas casas; C: casas serão caras

$[A \rightarrow B \wedge C] \wedge (C' \rightarrow B)$

b. A: ir dormir; B: ir nadar; C: trocar de roupa

$[(A \vee B) \rightarrow C] \wedge (C \rightarrow B)'$

c. A: vai chover; B: vai nevar

$(A \vee B) \wedge (A \wedge B)'$

d. A: Jane vence; B: Jane perde; C: Jane vai ficar cansada

$(A \vee B) \rightarrow C$

e. A: Jane vence; B: Jane perde; C: Jane vai ficar cansada

$A \vee (B \rightarrow C)$

Exercícios

14. Construa tabelas-verdade para as fbfs a seguir. Note quaisquer tautologias ou contradições.

★a. $(A \to B) \leftrightarrow A' \vee B$

★b. $(A \wedge B) \vee C \to A \wedge (B \vee C)$

14. a.

A	B	$A \to B$	A'	$A' \vee B$	$(A \to B) \leftrightarrow A' \vee B$
V	V	V	F	V	V
V	F	F	F	F	V
F	V	V	V	V	V
F	F	V	V	V	V

Tautologia

b.

A	B	C	$A \wedge B$	$(A \wedge B) \vee C$	$B \vee C$	$A \wedge (B \vee C)$	$(A \wedge B) \vee C \to A \wedge (B \vee C)$
V	V	V	V	V	V	V	V
V	V	F	V	V	V	V	V
V	F	V	F	V	V	V	V
V	F	F	F	F	F	F	V
F	V	V	F	V	V	F	F
F	V	F	F	F	V	F	V
F	F	V	F	V	V	F	F
F	F	F	F	F	F	F	V

Exercícios

17. Construa tabelas-verdade para verificar que as fbfs a seguir são tautologias.

★a. $A \vee A'$

b. $(A')' \leftrightarrow A$

★c. $A \wedge B \rightarrow B$

d. $A \rightarrow A \vee B$

e. $(A \vee B)' \leftrightarrow A' \wedge B'$ (Lei de De Morgan)

f. $(A \wedge B)' \leftrightarrow A' \vee B'$ (Lei de De Morgan)

g. $A \vee A \leftrightarrow A$

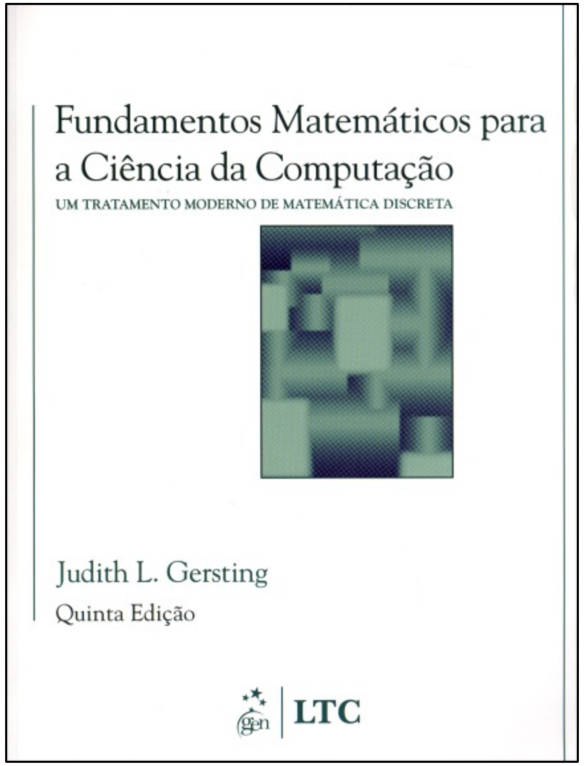
17. a.

A	A'	$A \vee A'$
V	F	V
F	V	V

c.

A	B	$A \wedge B$	$A \wedge B \rightarrow B$
V	V	V	V
V	F	F	V
F	V	F	V
F	F	F	V

Referência Bibliográfica



GERSTING, Judith L.; IÓRIO, Valéria de Magalhães, Fundamentos matemáticos para a ciência da computação: um tratamento moderno de matemática discreta. 5 ed. Rio de Janeiro, RJ: LTC, 2004, 597 p. ISBN 978-85-216-1422-7.