Inatel

C209 – Computação Gráfica e Multimídia
EC212 – Computação Gráfica

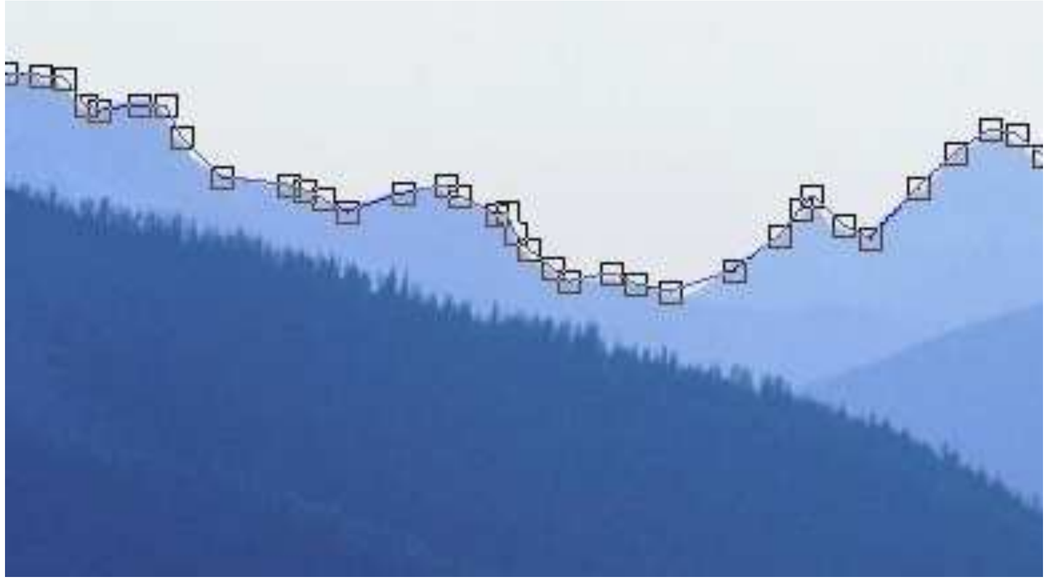
Curvas e Superfícies

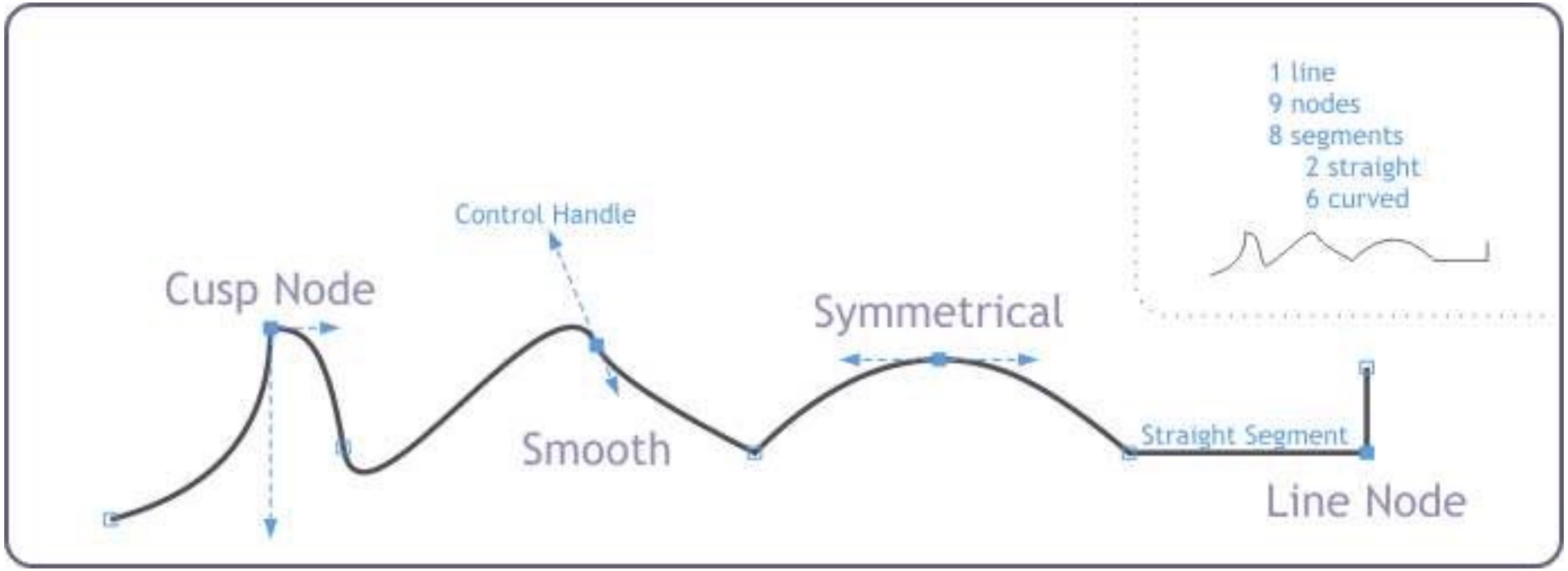
Marcelo Vinícius Cysneiros Aragão
marcelovca90@inatel.br

Introdução

- Curvas e superfícies são importantes em diversas áreas tanto na criação de objetos sintéticos quanto na visualização de fenômenos científicos.
- O estudo de curvas é a base na geração de formas mais simples ou objetos complexos, assim como para todo estudo de superfícies.
- Uma simples representação de curva pode ser feita como uma sucessão de linhas retas, porém, curvas e superfícies complexas demandam uma maneira mais eficiente de representação.

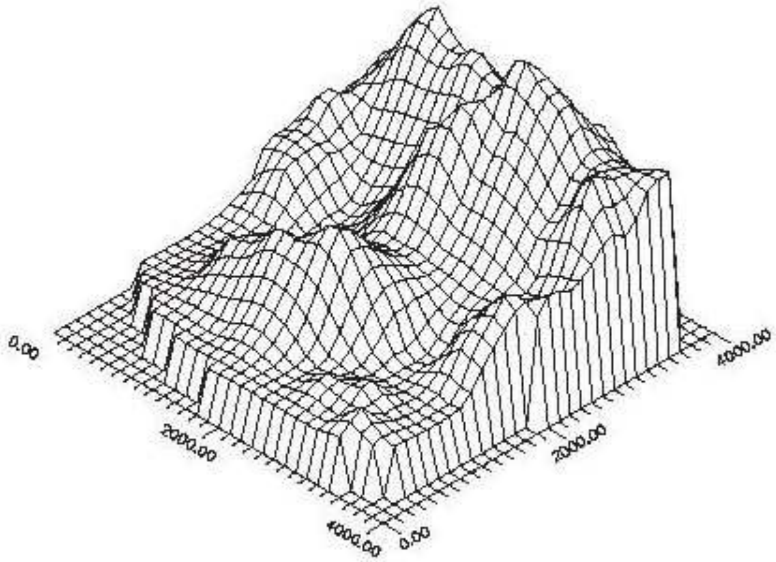
Introdução

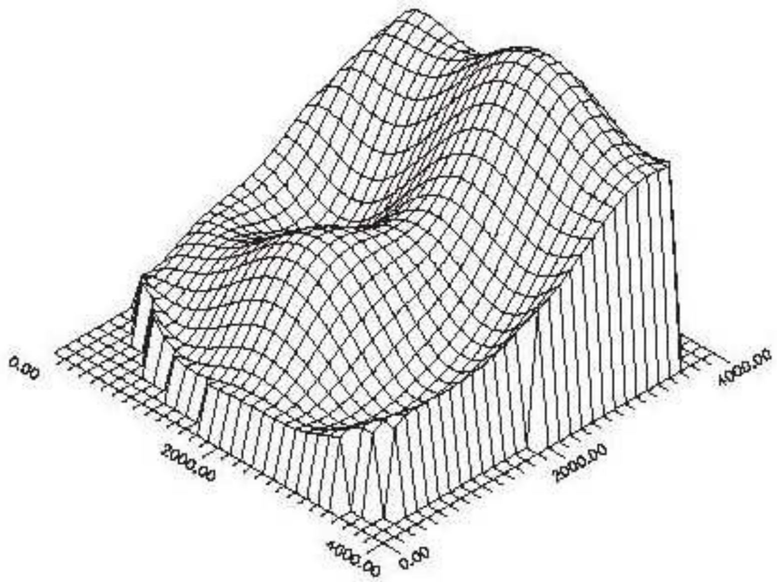



1 line
9 nodes
8 segments
2 straight
6 curved
Control Handle
Cusp Node
Symmetrical
Smooth
Straight Segment
Line Node

Introdução

- Um exemplo de superfície é apresentado abaixo, na qual duas superfícies são exibidas com o mesmo conjunto de pontos.
- De acordo com a técnica de geração de superfície utilizada, e também de acordo com o objetivo do usuário, é possível se obter objetos distintos a partir de um mesmo conjunto de pontos.
- De forma geral, podemos ver superfícies como uma generalização das curvas.



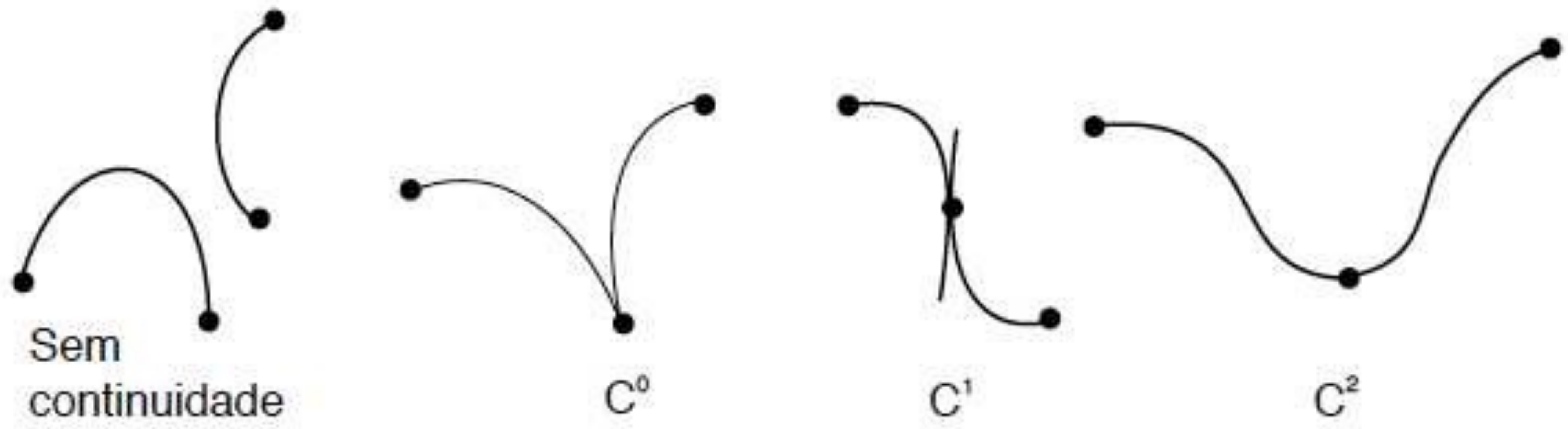


Curvas

- Em se tratando das curvas, a geração é feita baseada em alguns pontos já conhecidos.
- Considerando esses pontos, há 2 formas principais de geração da curva:
  - Geração de uma curva que passe por todos os pontos
  - Identificação da melhor curva que represente os pontos, independente de passar por eles ou não.
- Uma questão importante no estudo de curvas (e também em superfícies) é sua continuidade nos pontos de junção.

Curvas

- Uma continuidade de ordem 0 indica que a curva se encontra em um ponto, de ordem 1 indica que há continuidade na derivada primeira, e de ordem 2 que há continuidade na derivada segunda.

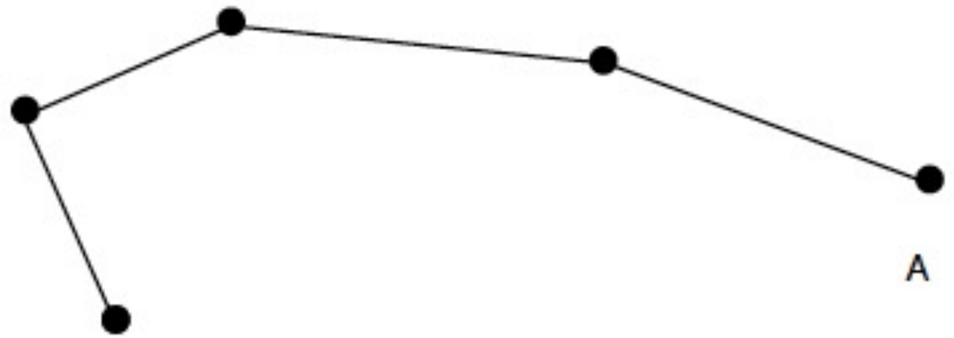


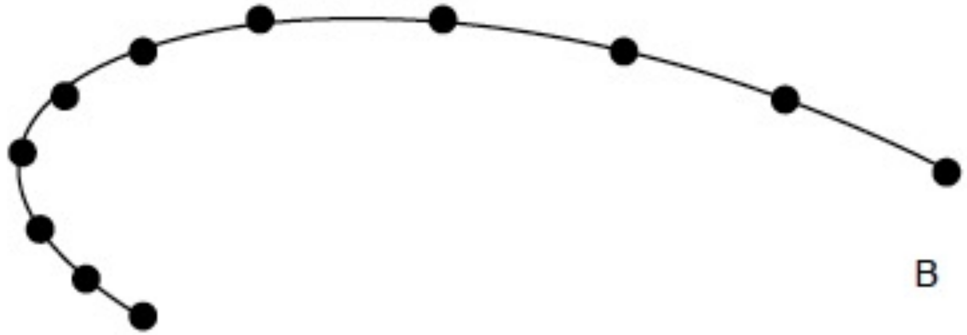
Representação de Curvas

- **Conjunto de pontos**
- A representação mais simples de um curva é por meio de um conjunto de pontos, que visualmente tenham a aparência de uma curva, ou pela conexão dos pontos considerando segmentos.
- Porém, para curvas suaves, o uso de segmentos de retas pode não ser satisfatório; nesse caso é necessário obter mais pontos a partir do domínio em questão ou aumentar o número de pontos na região por interpolação ou aproximação.

Representação de Curvas

- **Conjunto de pontos**
- Esquerda: número de pontos pequenos → curva acentuada
- Direita: número de pontos maior → curva suave





Representação de Curvas

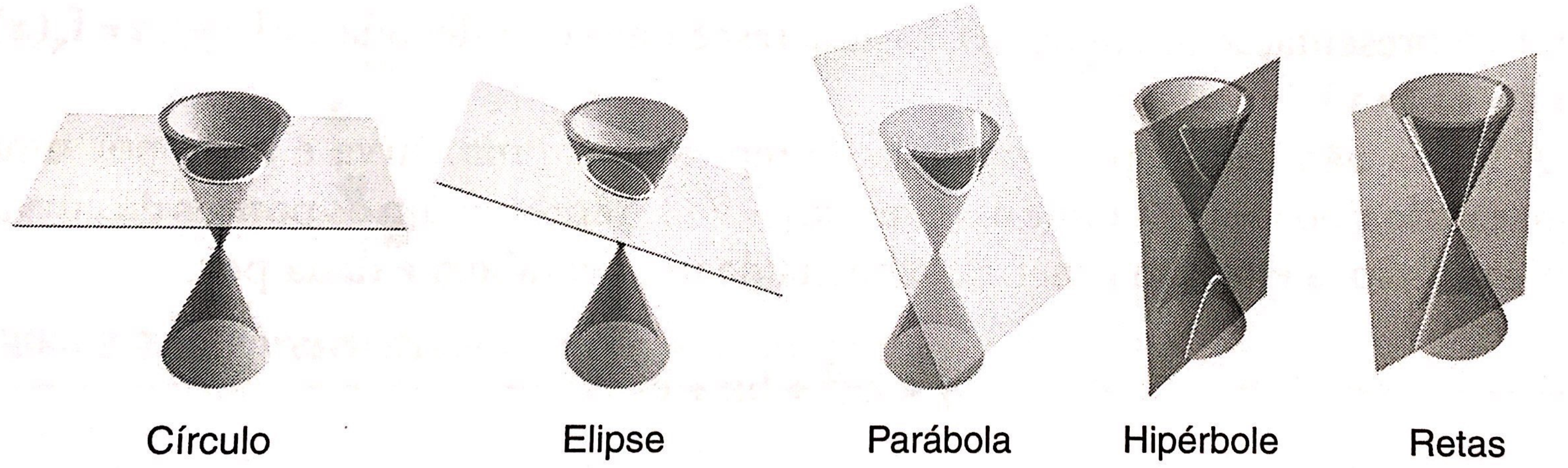
- **Representação analítica**
- As representações analíticas consideram uma ou mais equações para representar a curva. Essa forma:
  - É mais eficiente: por ser mais precisa, devido a se ter a posição exata por onde a curva irá passar;
  - É mais compacta: por ser representada por equações, não necessita de espaço para armazenamento dos pontos;
  - Facilita o cálculo, pois cada ponto é gerado diretamente da equação.

Representação de Curvas

- **Representação analítica não paramétrica**
- Nas representações não paramétricas a posição em y é dada como uma função de x, e vice-versa. Esta representação se divide em explicita e implícita.
  - Na forma explícita, como o próprio nome diz, dado explicitamente uma das posições, se obtém um único valor para a outra posição, ou seja, dado o valor de y se obtém um valor para x. Exemplo: $y = 2x - 1$
  - Na forma implícita, cada valor de y pode gerar mais de um valor para x. Exemplo: $x^2 + y^2 - r^2 = 0$

Representação de Curvas

- **Representação analítica não paramétrica**
- Polinômios são geralmente usados para representar curvas, pois são muito fáceis de combinar, derivar, integrar ou avaliar seu valor em algum ponto.
- O grau do polinômio corresponde à ordem ou grau da curva.
- Exemplo: $\mathrm{Ax^2 + bxy + cy^2 + dx + ey + f = 0}$



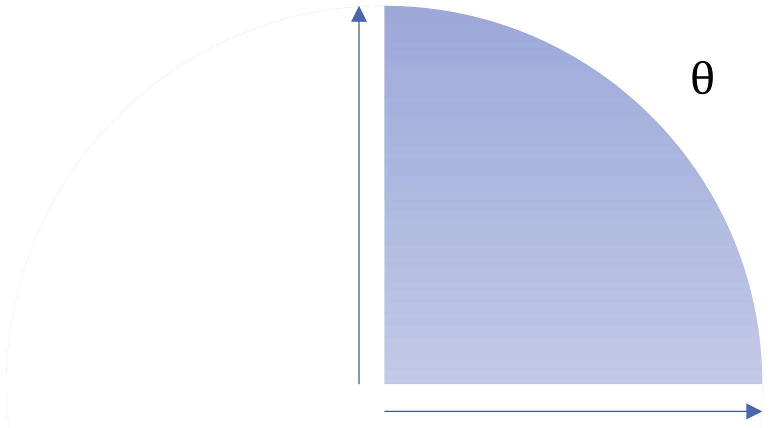
Representação de Curvas

- **Representação analítica paramétrica**
- Na forma paramétrica, usa-se um parâmetro (t, θ, etc) para definir as coordenadas dos pontos da curva.
- Por exemplo: a equação de um quarto de círculo de raio $r=10$ pode ser descrita como:
  - $x = 10 \cos(\theta) = f_x(\theta)$
  - $y = 10 \operatorname{sen}(\theta) = f_y(\theta)$
- Na forma paramétrica, cada coordenada de um ponto de uma curva é representada como uma função de um único parâmetro.

Representação de Curvas

- **Representação analítica paramétrica**
- A posição de um ponto nesta curva é, portanto, dada por:

$$P(\theta) = (x(\theta), y(\theta))$$



Representação de Curvas

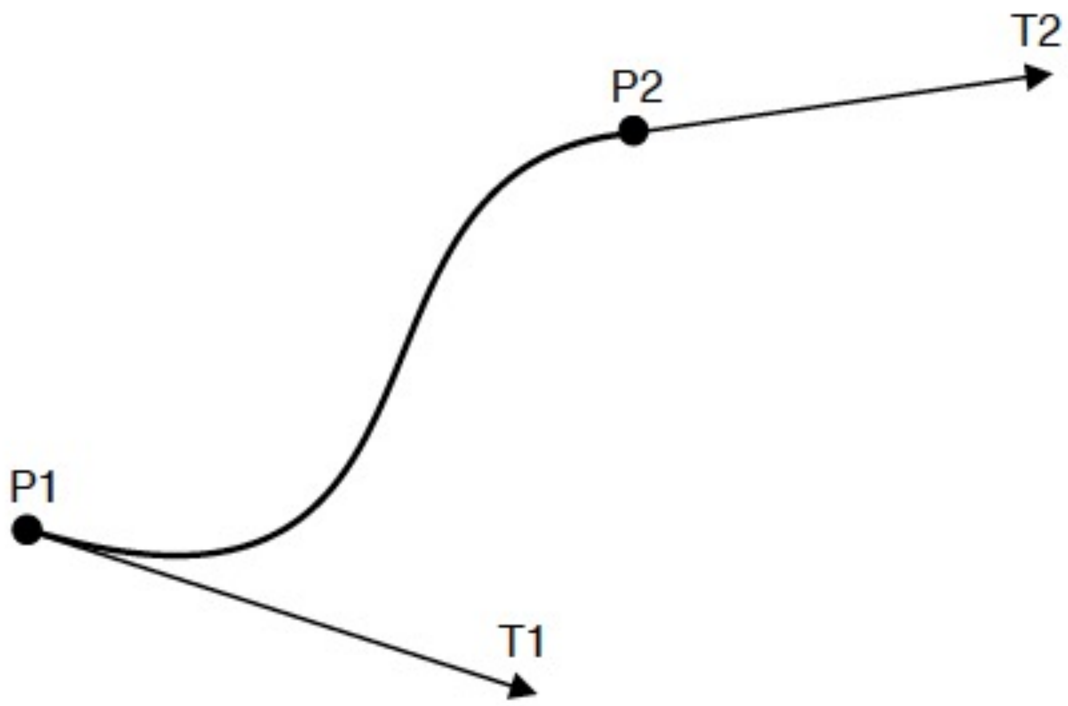
- Algumas curvas não podem ser facilmente descritas por expressões analíticas em toda sua extensão.
- Nesses casos, as descrições dão-se pela união de diversas curvas.
- São conhecidas como curvas paramétricas de terceira ordem. Exemplos: Hermite, Bézier e Splines.
- São geradas por um polinômio cúbico e pela definição de um conjunto determinado de pontos de controle.

Representação de Curvas: Hermite

- O uso de polinômios de terceira ordem para ajuste de curvas foi extensamente descrito pelo matemático francês Charles Hermite (1822-1901).
- Ele também é conhecido por outras várias entidades matemáticas.
- A formulação de Hermite é básica para o entendimento dos demais polinômios de ajuste de curvas.

Representação de Curvas: Hermite

- Para gerar uma curva de Hermite, são necessários quatro fatores:
  - Dois pontos P1 e P2, que descrevem os pontos inicial e final da curva;
  - Dois vetores T1 e T2, que descrevem as tangentes e seus pesos na curva em P1 e P2, ou seja, T1 indica como a curva deixa o ponto T2, e como encontra o ponto P2.

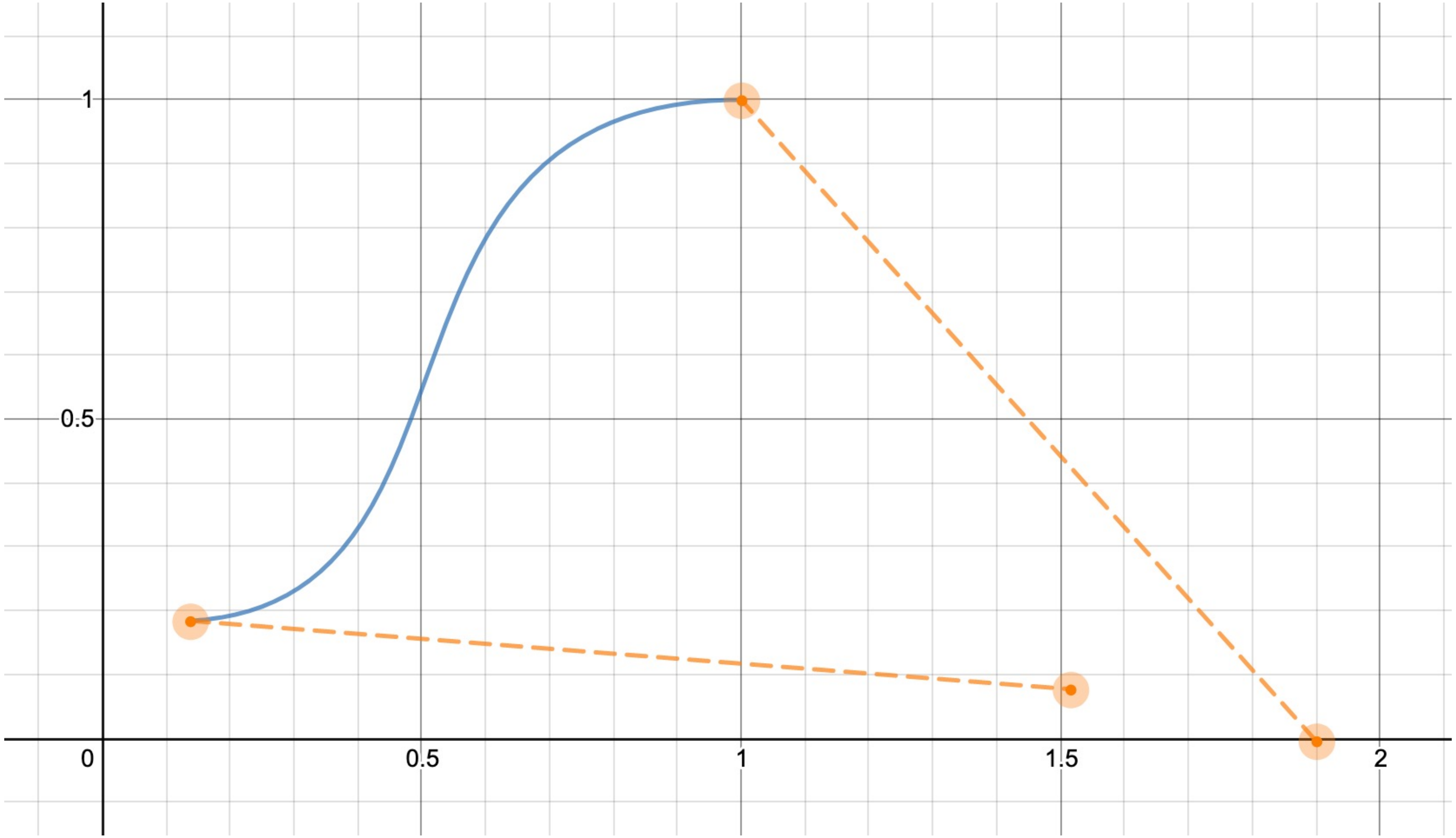


Representação de Curvas: Hermite

https://www.youtube.com/embed/vvwT_5RGlxY?start=27&end=66

Representação de Curvas: Hermite

https://www.desmos.com/calculator/5knm5tkr8m

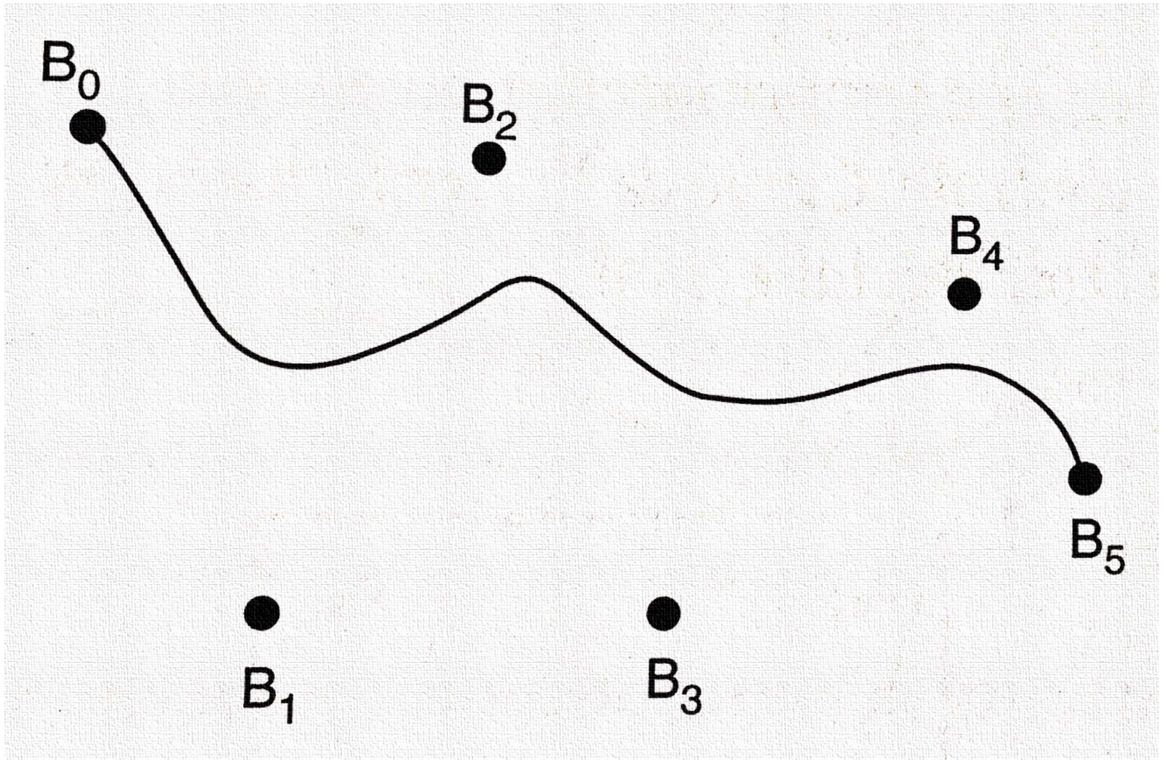


Representação de Curvas: Bézier

- A curva de Bézier foi desenvolvida por Pierre Bézier (1910-1999) durante seus trabalhos em projetos de automóveis para a Renault francesa no início da década de 1960.
- A grande maioria dos softwares de computação gráfica disponíveis no mercado utiliza o conceito da curva de Bézier, como o Adobe Illustrator, Corel Draw, Auto CAD, 3D Max etc.

Representação de Curvas: Bézier

- Bézier baseou sua curva nos princípios descritos por Hermite, com a diferença básica que para a determinação das tangentes nos pontos de início e fim da curva utilizam-se pontos de controle (e não vetores).

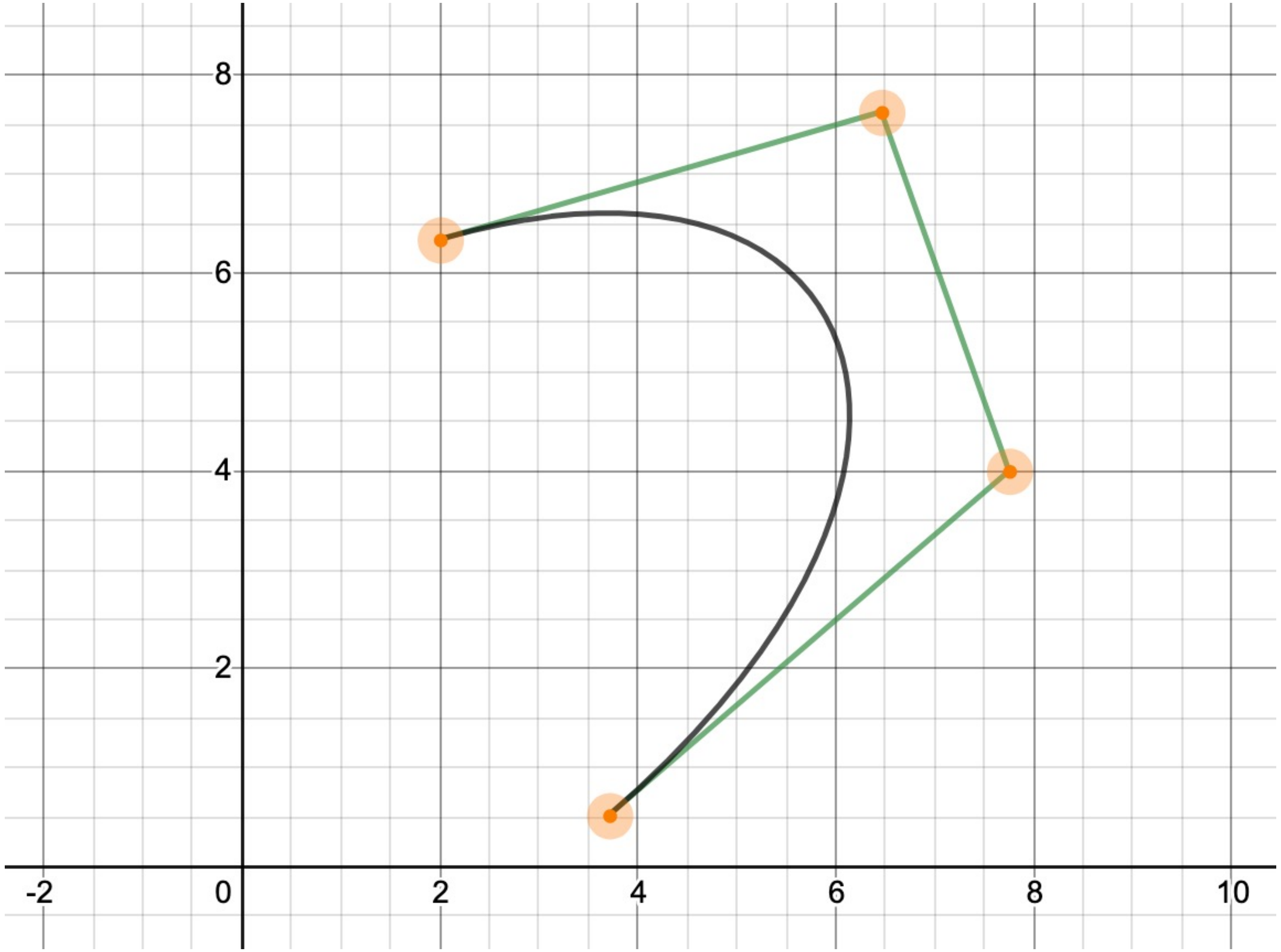


Representação de Curvas: Bézier

https://www.youtube.com/embed/vvwT_5RGlxY?start=5&end=25

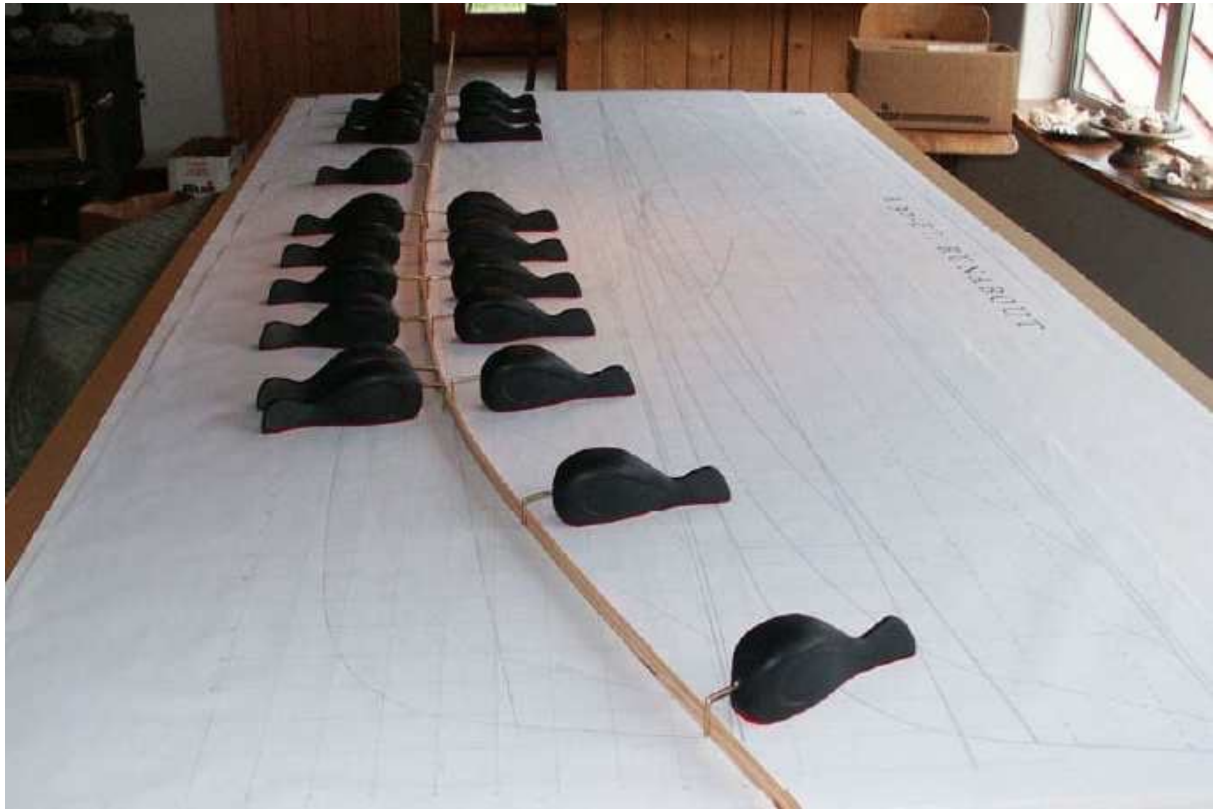
Representação de Curvas: Bézier

https://www.desmos.com/calculator/glfmhasrbo



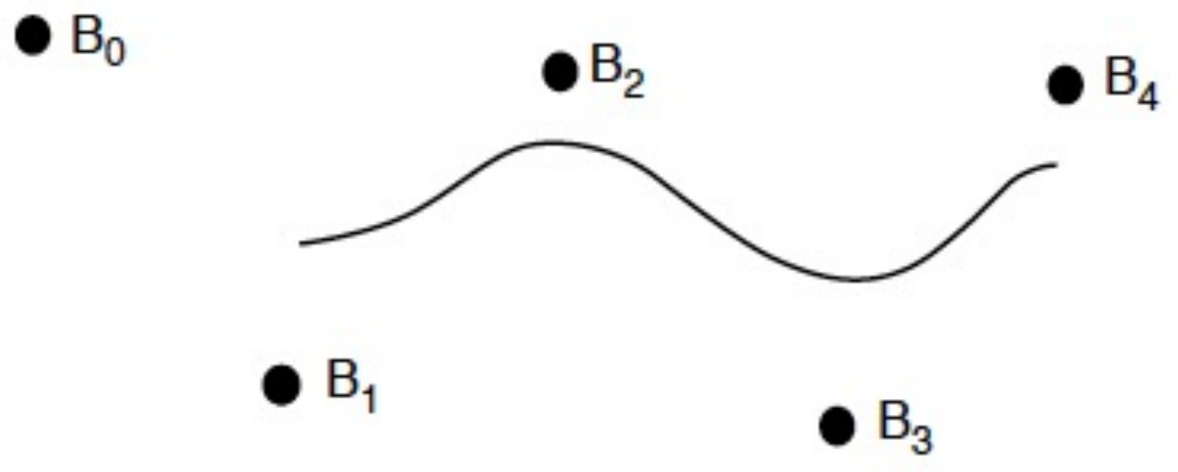
Representação de Curvas: Splines

- O nome Spline faz alusão ao termo da língua inglesa utilizado para denominar régua flexível usada em desenhos para gerar curvas suaves, a qual a alteração em qualquer ponto afeta a curva toda.



Representação de Curvas: Splines

- A curva B-Spline é uma "versão" da Spline, com controle local, ou seja, as alterações em um ponto afetam apenas os vizinhos mais próximos.
- Além disso, as curvas B-Spline não necessariamente passam por algum ponto de controle.



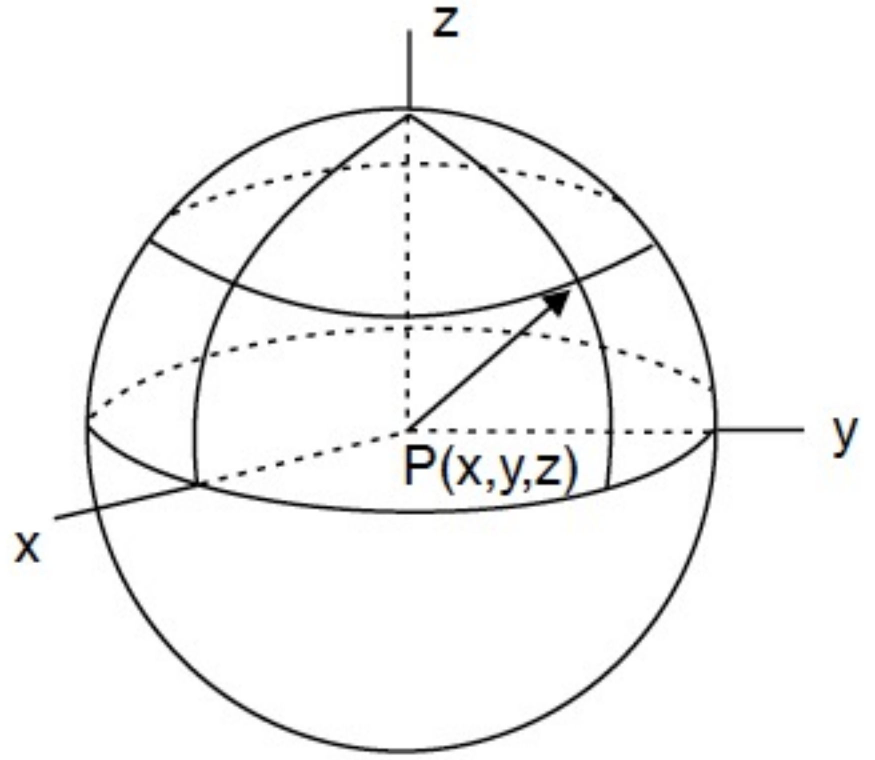
Representação de Curvas: Splines

https://www.youtube.com/embed/X0uurzdHzHI?start=2&end=26

Superfícies

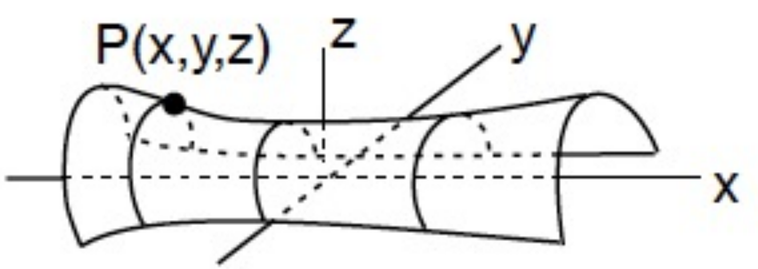
- De forma geral, as superfícies são uma generalização das curvas.
- Sendo assim, também podem ser geradas por um conjunto de pontos, ter representação analítica, explícita ou implícita, paramétrica ou não paramétrica.
- O slide a seguir mostra duas superfícies muito conhecidas e as equações que as geraram.
- Essas superfícies não estão na forma paramétrica, portanto, cada ponto sobre elas é uma função de suas coordenadas (x,y,z).

Superfícies



Esfera com centro (x_0,y_0,z_0)

Equação: $(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2 + (z-z_0)^2=r^2$

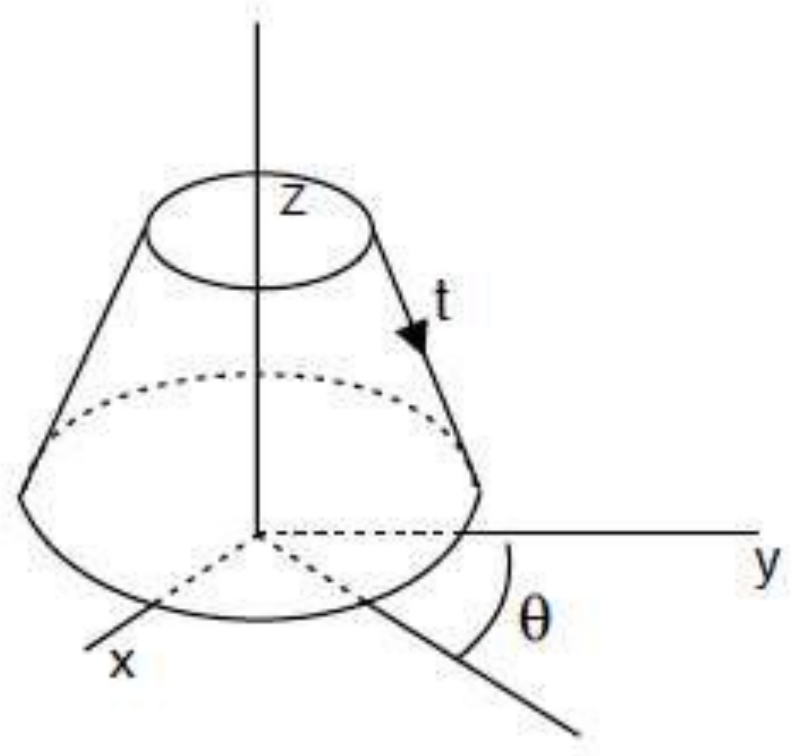


Parabolóide Hiperbólico

Equação: $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=\frac{z}{c}$

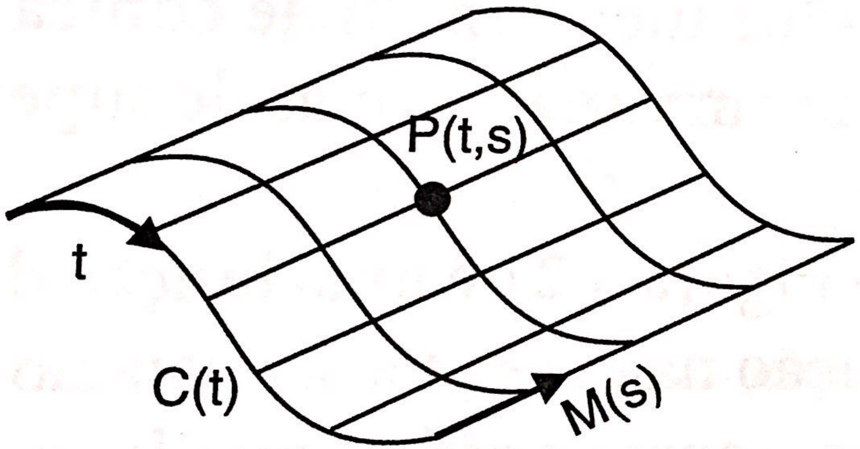
Superfícies de revolução

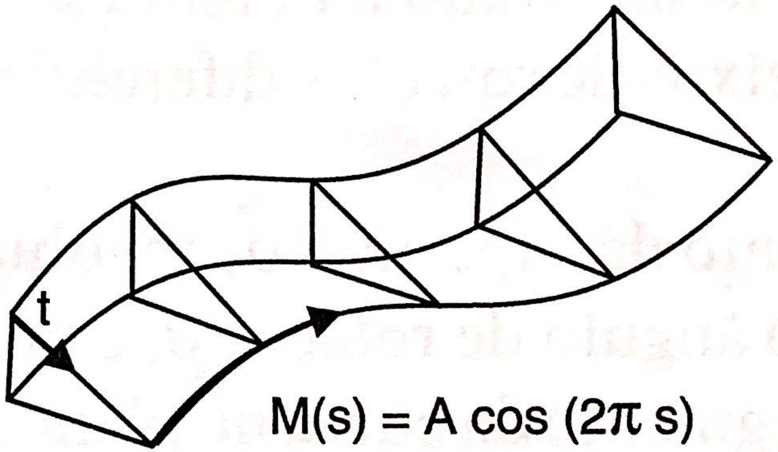
- A rotação de uma curva plana em torno de um eixo produz a família mais conhecida de superfícies.
- Assim, um segmento de reta girando de 360º em torno do eixo z produz uma superfície cônica.
- Curvas, ângulos e eixos de rotações diferentes produzem várias formas de superfícies de revolução.



Superfícies geradas por deslocamento

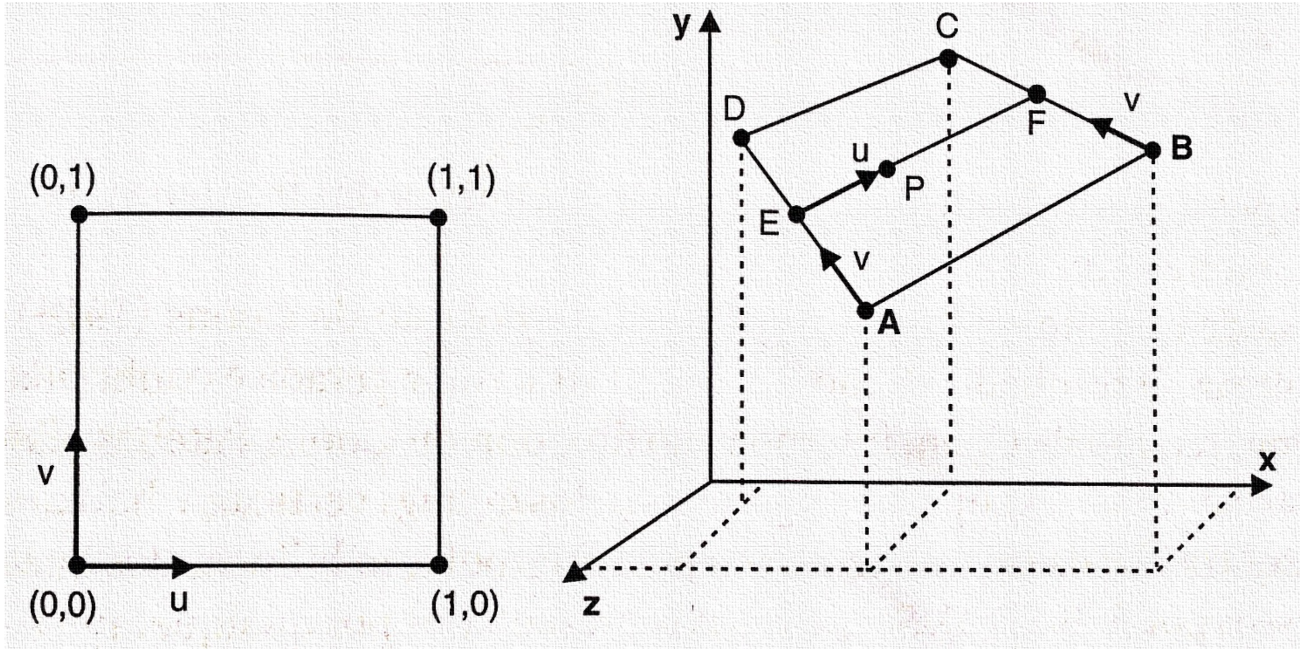
- Translações e deslocamentos genéricos de curvas produzem diversas formas de superfícies.
- Esta forma de geração é denominada "sweeping" (varredura).
- A geração por rotação pode ser considerada um caso particular de sweeping, no qual o deslocamento é uma rotação.
- Mais precisamente, sweeping é o procedimento de gerar uma superfície através do movimento de uma curva ou figura plana ao longo de um caminho.





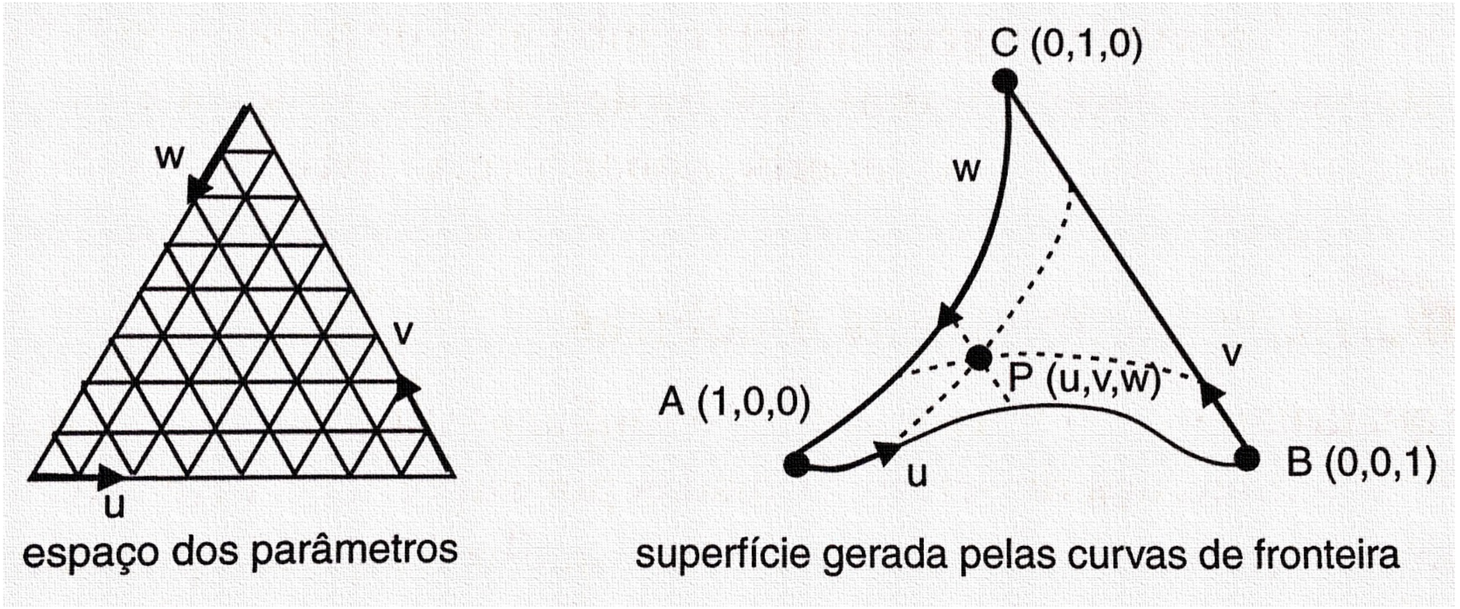
Superfícies geradas por interpolação bilinear

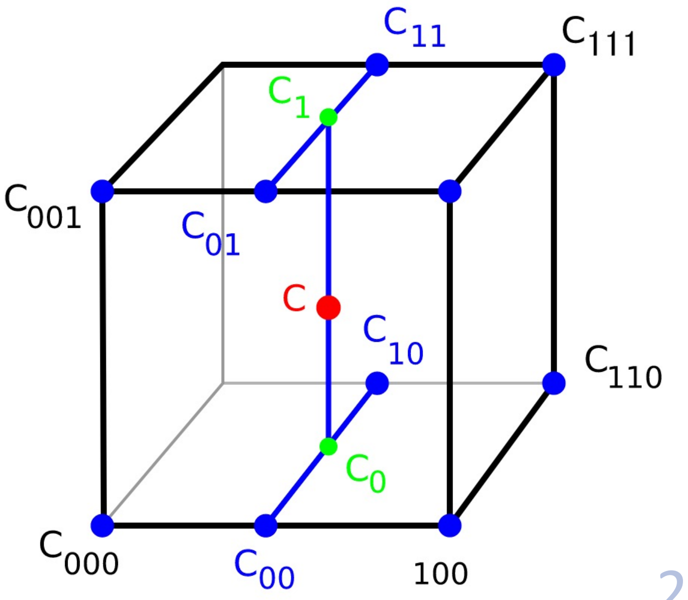
- A geração de superfícies a partir da expressão da curva ou dos pontos que descrevem seus limites é uma das formas mais úteis; muito empregada nas construções navais, aeroespaciais e na análise numérica, onde há necessidade de discretização de domínios (elementos finitos ou de contorno).

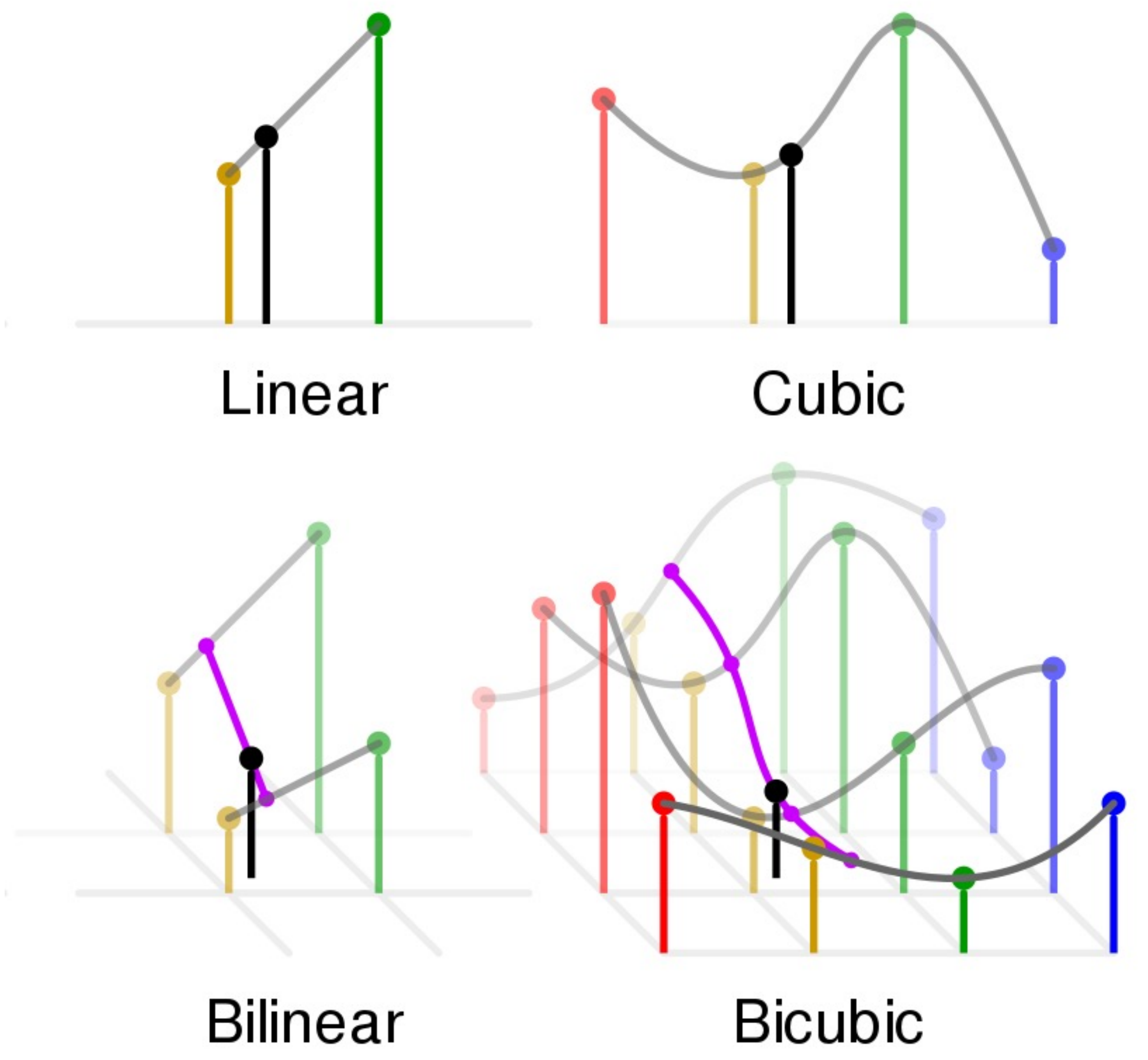


Superfícies geradas por interpolações trilineares

- As interpolações trilineares são úteis no caso da definição da superfície por 3 curvas de fronteira.
- Nessa interpolação, um ponto do interior é definido por três parâmetros u, v e w, como um com valores entre 0 e 1.
- Como as superfícies são elementos 2D, ou seja, sempre podem ser descritas com apenas dois parâmetros, obviamente há a restrição adicional de que $w + v + u = 1$ em qualquer ponto.







Linear
Cubic
Bilinear
Bicubic

Referências

- josuehmachado - Bezier and Hermite.

Disponível em <https://www.youtube.com/watch?v=vvwT_5RGlxY>.

- Damian Rzeszot - B-Spline.

Disponível em <https://www.youtube.com/watch?v=X0uurzdHzHI>.

- AZEVEDO, Eduardo. CONCI, Aura. **Computação gráfica: geração de imagens. Rio de Janeiro: Campus**, 2503.