Inatel
Instituto Nacional de Telecomunicações

C210 – Inteligência Computacional

Redes Perceptron

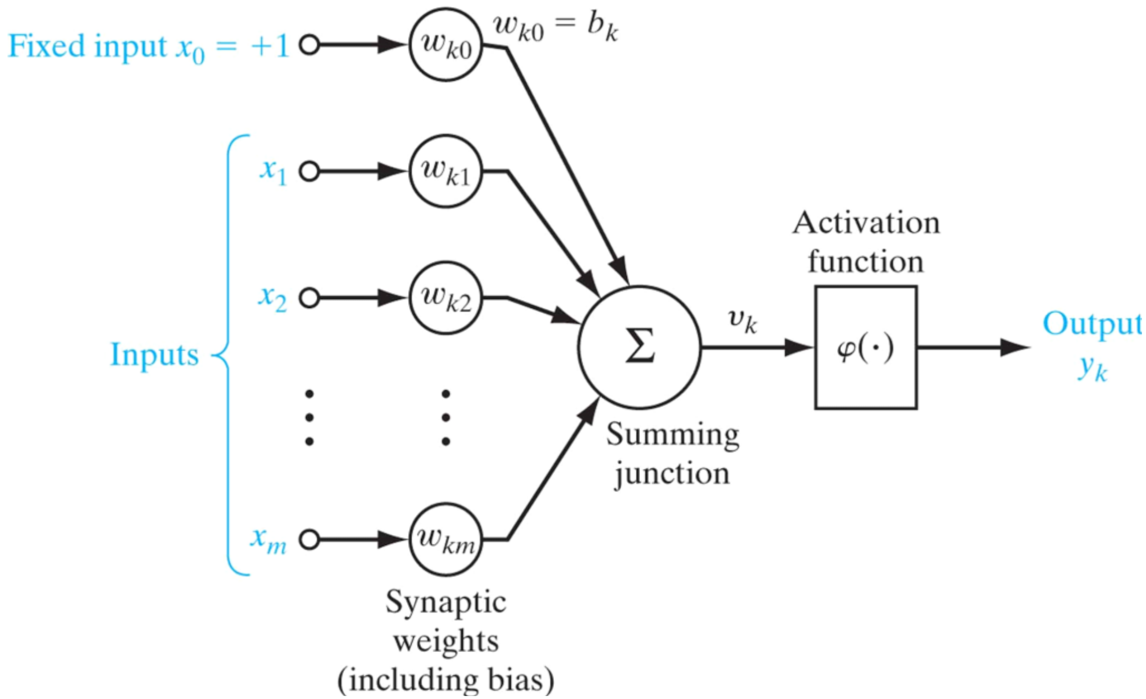
Prof. Me. Marcelo Vinícius Cysneiros Aragão
marcelovca90@inatel.br

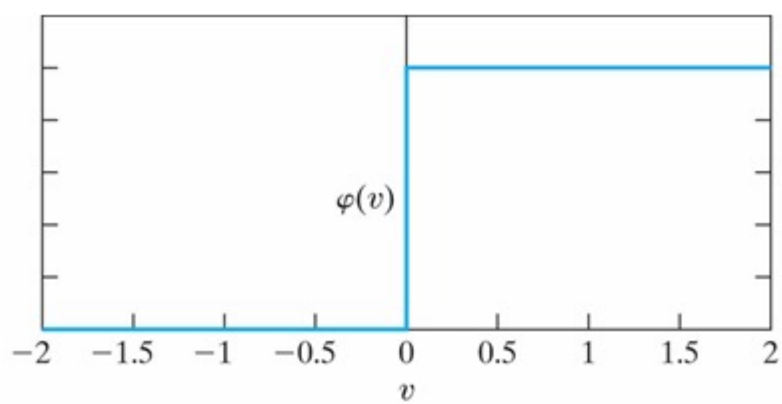
1º semestre / 2022

Perceptrons de camada única

- Idealizado por Rosenblatt (1958), é a forma mais simples de uma rede neural artificial, pois o mesmo é constituído de um único neurônio;
- É considerado uma rede “feed-forward” (alimentação sempre adiante, sem nenhuma realimentação de saída);
- Sua construção é baseada no modelo de neurônio artificial de McCulloch, sendo que sua principal aplicação está na resolução de problemas envolvidos com a classificação de padrões.

Princípio de funcionamento

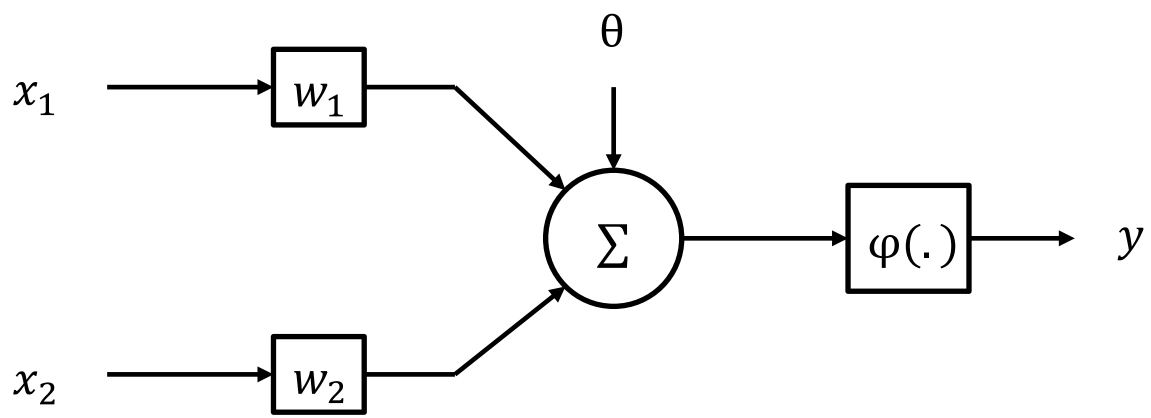




$$y = \begin{cases} +1 & se \quad \sum (w_i * x_i) + b_k \geq 0 \\ -1 & se \quad \sum (w_i * x_i) + b_k < 0 \end{cases}$$

Análise matemática do *Perceptron*

- Para analisar matematicamente o *Perceptron* será considerado um arquitetura com duas entradas;



- A saída do *Perceptron* pode ser escrita em termos matemáticos da seguinte forma:

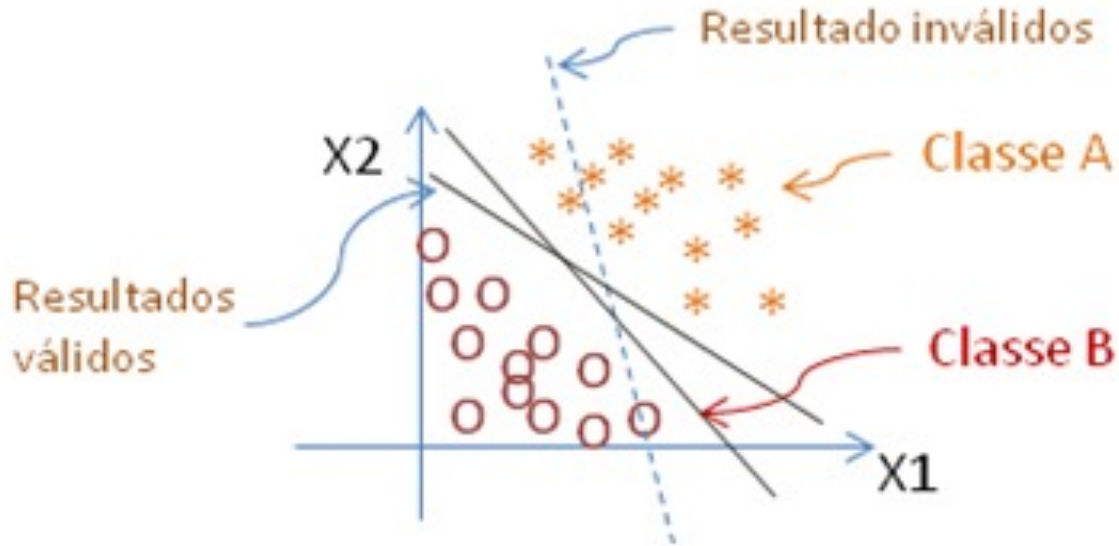
$$y = \begin{cases} +1 \; se \; w_1.x_1 + w_2.x_2 + \theta \geq 0 \\ -1 \; se \; w_1.x_1 + w_2.x_2 + \theta < 0 \end{cases}$$

Análise matemática do Perceptron, cont.

- Expressando a desigualdade através de uma equação do primeiro grau, percebe-se que a fronteira de decisão para este *Perceptron* de duas entradas é representada por uma reta;

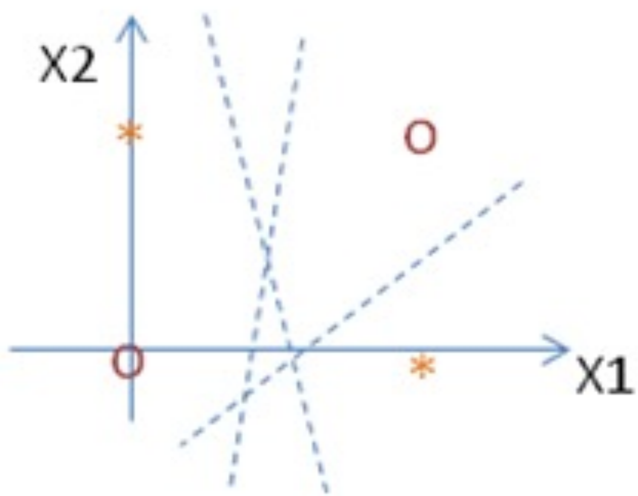
$$w_1.x_1 + w_2.x_2 + b_k = 0$$

- Para a rede *Perceptron*, as classes devem ser "linearmente separáveis"



Problema do XOR

- Para o problema do OU EXCLUSIVO lógico, pode-se utilizar um *Perceptron* de camada única?



X1	X2	y
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	0

Treinamento do *Perceptron*

- O processo de treinamento do *Perceptron* está associado ao ajuste dos pesos sinápticos e do limiar da rede com o objetivo de classificar padrões;
- Para o *Perceptron*, a regra de aprendizado utilizada é a regra de Hebb [Hebb, 1949];
- Resumidamente:
  - se a saída reproduzida é coincidente com a saída desejada, os pesos sinápticos e limiar da rede serão mantidos;
  - caso contrário, os pesos sinápticos e limiar serão ajustados (incrementados/decrementados) proporcionalmente aos valores de seus sinais de entrada; Este processo é repetido sequencialmente para todas as amostras de treinamento até que a saída do *Perceptron* seja similar a saída desejada para cada amostra;

Treinamento do *Perceptron*, cont.

- Em termos matemáticos, as regras de ajuste dos pesos sinápticos e do limiar do neurônio pode ser expresso da seguinte forma:

$$\begin{cases} w_i^{Atual} = w_i^{Anterior} + \eta.\left(d^{(k)} - y\right).x^{(k)} \\ \theta_i^{Atual} = \theta_i^{Anterior} + \eta.\left(d^{(k)} - y\right).x^{(k)} \end{cases}$$

- Em termos de implementação computacional, fica mais fácil tratar as expressões na forma vetorial:

$$w^{Atual} = w^{Anterior} + \eta.\left(d^{(k)} - y\right).x^{(k)}$$

Treinamento do *Perceptron*, cont.

- Onde:

$w = [\theta \ \ w_1 \, w_2 \ldots w_n]$ é o vetor contendo o limiar e os pesos;

$x^{(k)} = [-1 \quad {x_1}^{(k)} \ \ {x_2}^{(k)} \ldots \ {x_n}^{(k)}]$ é a k-ésima amostra de treinamento;

$d^{(k)}$ é o valor desejado para a k-ésima amostra de treinamento;

y é o valor de saída produzido pelo *Perceptron*;

η é uma constante que define a taxa de aprendizagem; Normalmente adota-se $0 < \eta < 1$. Quando muito grande, não converge. Se muito pequena, não chega no resultado.

Algoritmo *Perceptron* - treinamento

1) Obter conjunto de amostras de treinamento $\{x^{(k)}\}$;
2) Associar a saída desejada $\{d^{(k)}\}$ para cada amostra obtida;
3) Iniciar o vetor w com valores aleatórios pequenos;
4) Especificar a taxa de aprendizagem $\{\eta\}$;
5) Iniciar o contador de número de épocas $\{\acute{e}pocas \leftarrow 0\}$;
6) Repetir as instruções:

   6.1) $\text{erro} \leftarrow "inexiste"$;

   6.2) Para todos pares de treinamento $\{x^{(k)}, d^{(k)}\}$, faça:

      6.2.1) $v \leftarrow w^T * x^k$;

      6.2.2) $y \leftarrow$ degrau(v);   (sign no Matlab)

      6.2.3) Se $y\ != \ d^{(k)}$

         6.2.3.1) então $\begin{cases} w \leftarrow w + \eta * \left(d^{(k)} - y\right) * x^{(k)} \\ erro \leftarrow "existe" \end{cases}$

   6.3) $\acute{e}poca \leftarrow \acute{e}poca + 1$;

Até que: $\text{erro} == "inexiste"$

Algoritmo *Perceptron* - operação

1) Obter a amostra a ser classificada $\{x\}$;
2) Utilizar o vetor w ajustado durante o treinamento;
3) Executar as seguintes instruções:
   - 3.1) $v \leftarrow w^T * x$;
   - 3.2) $y \leftarrow$ degrau(v); (sign no Matlab)
   - 3.3) Se $y == -1$
     - 3.3.1) Então: amostra $\boldsymbol{x} \in \{Classe\ A\}$
   - 3.4) Se $y == 1$
     - 3.4.1) Então: amostra $\boldsymbol{x} \in \{Classe\ B\}$

https://code.google.com/p/neural-networks-examples/

Exemplo de treinamento

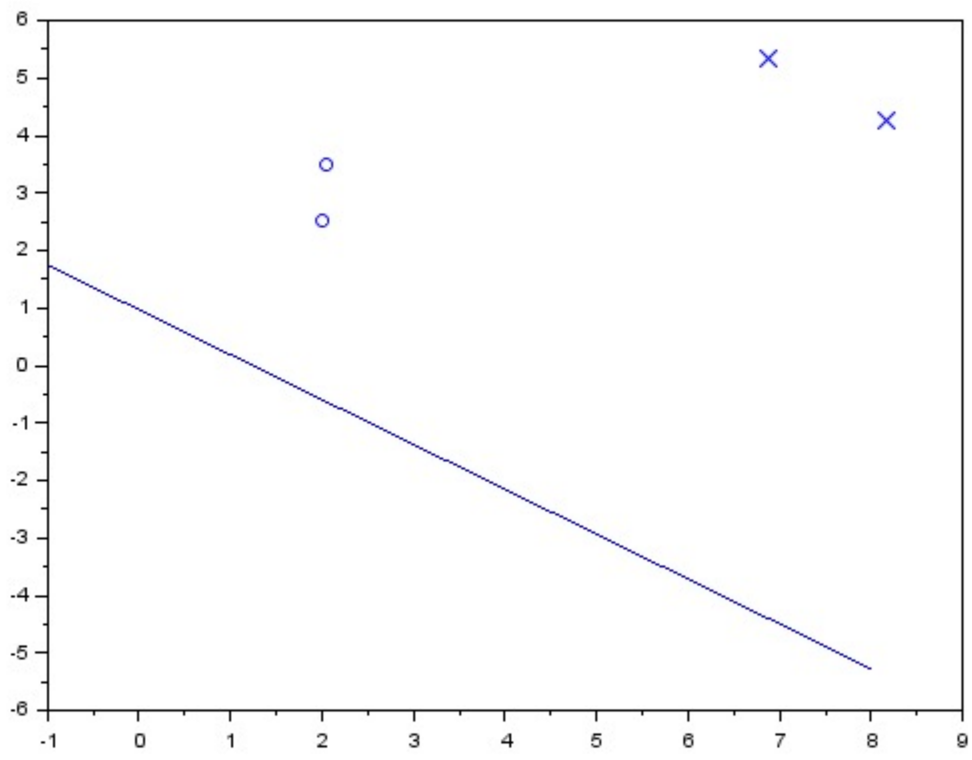
- Supondo um problema a ser mapeado pelo *Perceptron* com duas entradas $\{x_1, x_2\}$;
- Para um conjunto de quatro amostras de treinamento constituídas dos seguintes valores: $\Omega^{(x)} = \{[2.0\ 3.5]; [6.8\ 5.3]; [2.0\ 2.5]; [8.1\ 4.2]\}$.
- Considerando-se ainda que os respectivos valores de saída para cada uma das amostras seja dado por $\Omega^{(d)} = \{[-1]; [+1]; [-1]; [+1]\}$.
- Escolhendo aleatoriamente os pesos sinápticos iniciais: $w = \{0.84; 0.68; 0.88\}$.

$$\Omega^{(x)} = \begin{array}{c} \\ x^{(1)} \\ x^{(2)} \\ x^{(3)} \\ x^{(4)} \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} x_0 & x_1 & x_2 \end{array} \\ \begin{bmatrix} -1 & 2.0 & 3.5 \\ -1 & 6.8 & 5.3 \\ -1 & 2.0 & 2.5 \\ -1 & 8.1 & 4.2 \end{bmatrix} \end{array} \qquad \Omega^{(d)} = \begin{array}{c} d^{(1)} \\ d^{(2)} \\ d^{(3)} \\ d^{(4)} \end{array} \begin{bmatrix} -1 \\ +1 \\ -1 \\ +1 \end{bmatrix}$$

Exemplo de treinamento, cont.

- Após uma época de treinamento:

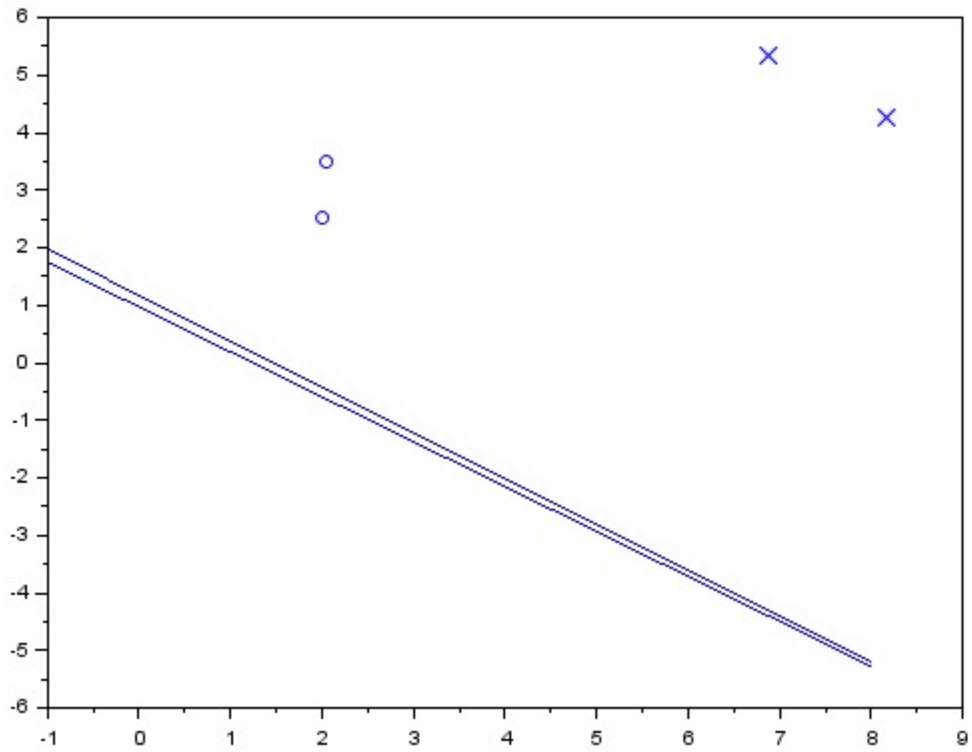
$$w = \{0.88; 0.60; 0.75\}$$



Exemplo de treinamento, cont.

- Após duas épocas de treinamento:

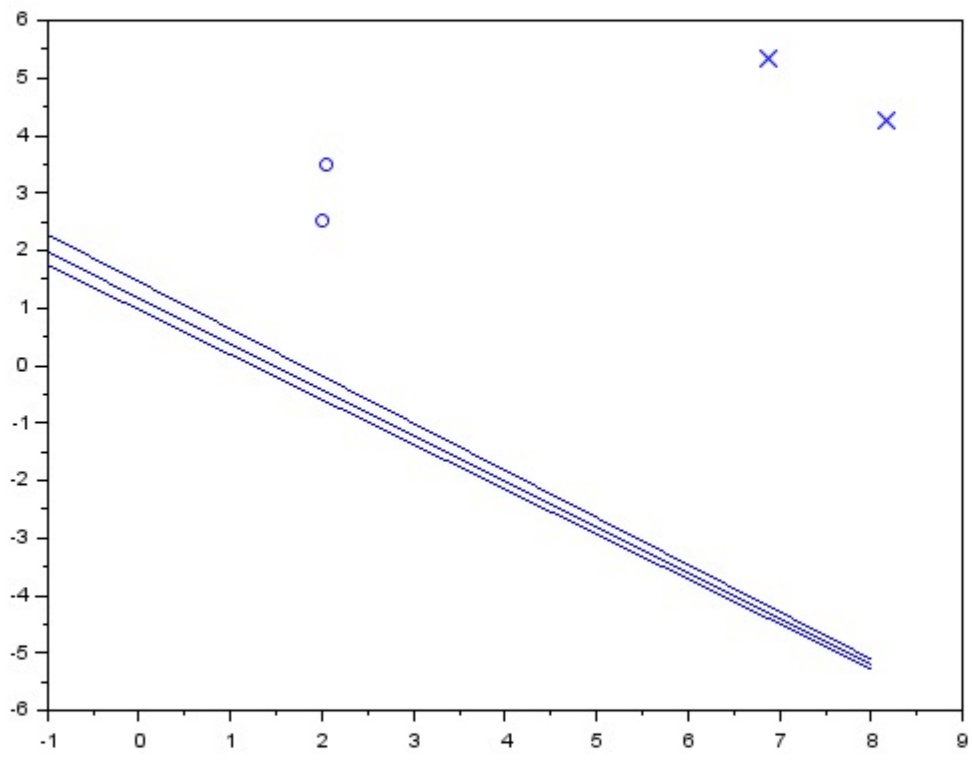
$$w = \{0.93; 0.52; 0.64\}$$



Exemplo de treinamento, cont.

- Após três épocas de treinamento:

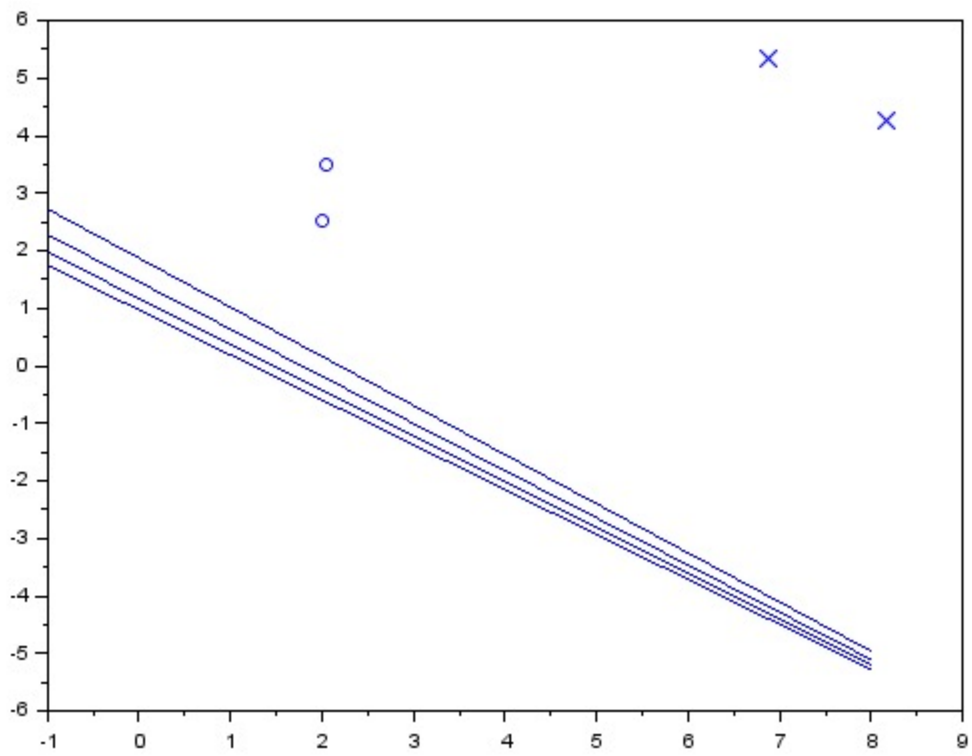
$$w = \{0.97; 0.44; 0.51\}$$



Exemplo de treinamento, cont.

- Após quatro épocas de treinamento:

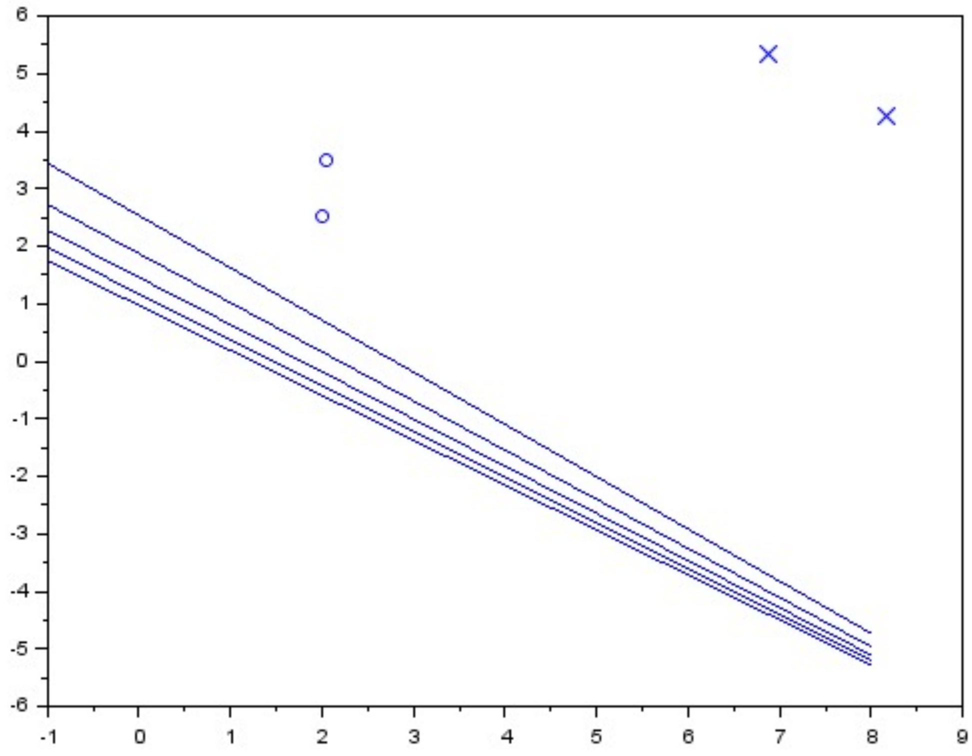
$$w = \{1.0; 0.36; 0.39\}$$



Exemplo de treinamento, cont.

- Após cinco épocas de treinamento:

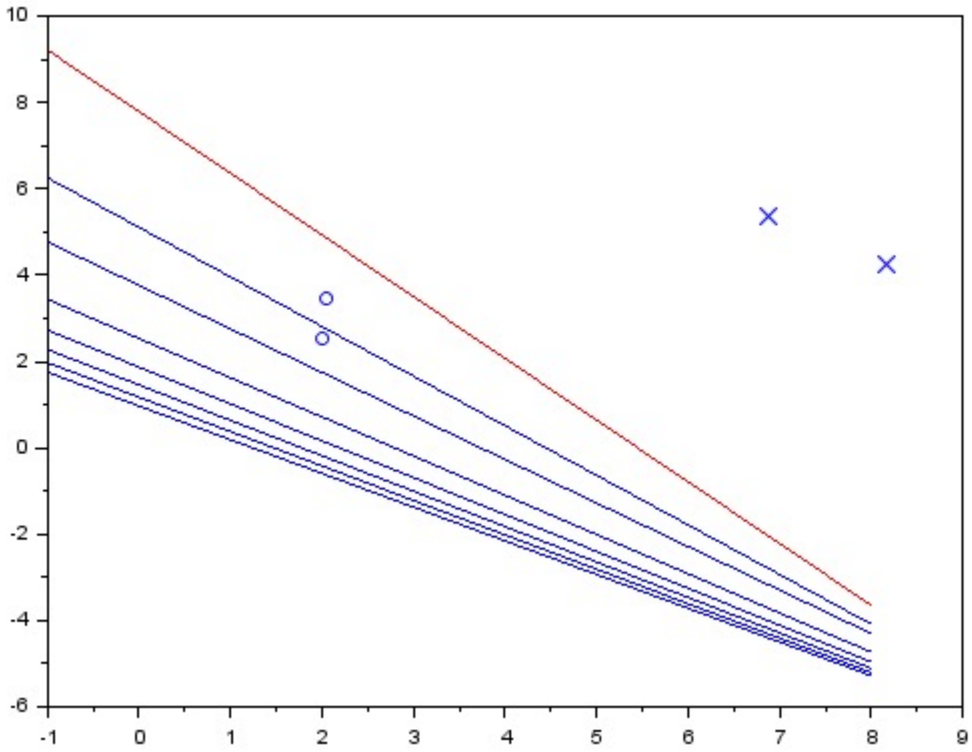
$$w = \{1.04; 0.28; 0.27\}$$



Exemplo de treinamento, cont.

- Após oito épocas de treinamento:

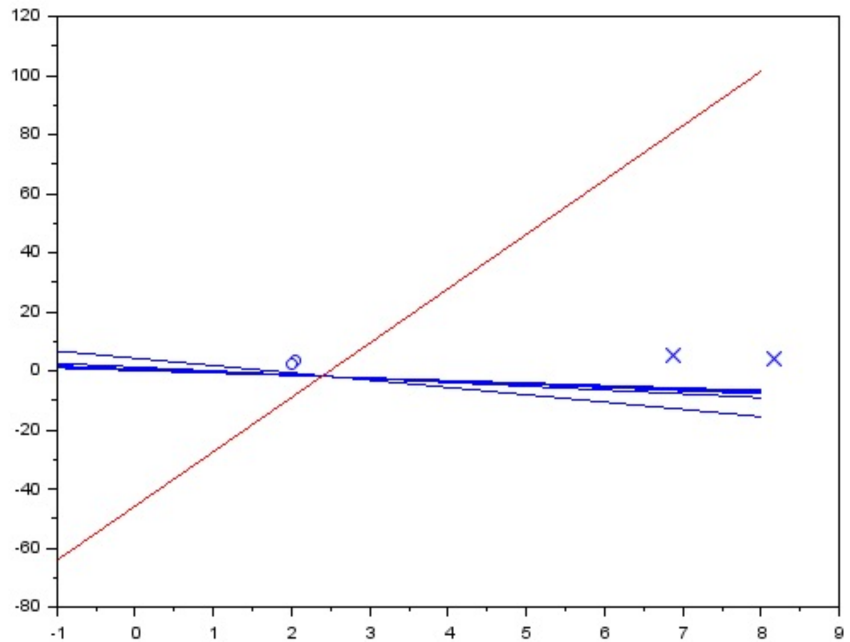
$$w = \{1.09; 0.2; 0.14\}$$



Exemplo de treinamento, cont.

- Usando o mesmo problema anterior porém escolhendo outros valores, aleatoriamente, para os pesos sinápticos iniciais, encontra-se uma solução após 7 épocas de treinamento resultando nos pesos sinápticos finais

$$w = \{0.28; 0.11; -0.01\}.$$



Exercício – Porta Lógica OR

$$\Omega^{(x)} = \begin{bmatrix} -1 & -1 \\ -1 & +1 \\ +1 & -1 \\ +1 & +1 \end{bmatrix} \qquad \Omega^{(d)} = \begin{bmatrix} -1 \\ +1 \\ +1 \\ +1 \end{bmatrix}$$

$$w = [0{,}5 \quad 0{,}7]$$

$$\eta = 0{,}1$$

$$\theta = -1 \quad \mathrm{w}_\theta = 0{,}1$$

Exercício – Porta Lógica OR

$$\Omega^{(x)} = \begin{bmatrix} -1 & -1 \\ -1 & +1 \\ +1 & -1 \\ +1 & +1 \end{bmatrix} \qquad \Omega^{(d)} = \begin{bmatrix} -1 \\ +1 \\ +1 \\ +1 \end{bmatrix}$$

$$w = [0{,}5 \quad 0{,}7]$$

$$\eta = 0{,}1$$

$$\theta = -1 \quad \mathrm{w}_\theta = 0{,}1$$

Adicionando θ *à* $\Omega^{(x)}$ *e* w_θ *à* w*, tem-se:*

$$\Omega^{(x)} = \begin{bmatrix} -1 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & +1 \\ -1 & +1 & -1 \\ -1 & +1 & +1 \end{bmatrix} \qquad w = [0{,}1 \quad 0{,}5 \quad 0{,}7]$$

Exercício – Porta Lógica OR

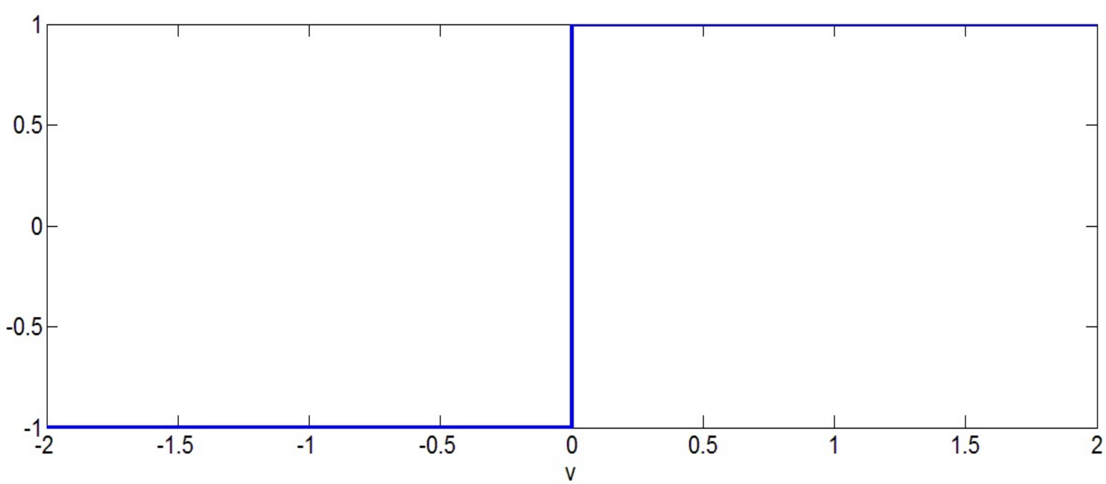
$$\Omega^{(x)} = \begin{bmatrix} -1 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & +1 \\ -1 & +1 & -1 \\ -1 & +1 & +1 \end{bmatrix} \quad \Omega^{(d)} = \begin{bmatrix} -1 \\ +1 \\ +1 \\ +1 \end{bmatrix}$$

$$w = [0{,}1 \quad 0{,}5 \quad 0{,}7]$$

$$\eta = 0{,}1$$

$$\theta = -1 \quad \mathrm{w}_\theta = 0{,}1$$

Obs: observando os valores que $\Omega^{(d)}$ assume, pode-se adotar a função de ativação Heaviside Simétrica (sinal).



$$\varphi(v) = \begin{cases} +1 & se\ v \geq 0 \\ 0 & se\ v = 0 \\ -1 & se\ v < 0 \end{cases}$$

Exercício – Porta Lógica OR

$$\Omega^{(x)} = \begin{bmatrix} -1 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & +1 \\ -1 & +1 & -1 \\ -1 & +1 & +1 \end{bmatrix}$$

$$\Omega^{(d)} = \begin{bmatrix} -1 \\ +1 \\ +1 \\ +1 \end{bmatrix}$$

$$w = [0{,}1 \quad 0{,}5 \quad 0{,}7]$$

$$\eta = 0{,}1$$

$$\phi(.) = sinal$$

1ª época:

$v^{(0)} = (-1).0{,}1 + (-1).0{,}5 + (-1).0{,}7 = -1{,}3$

$y^{(0)} = sign(-1{,}3) = -1$ ACERTOU! $(-1 == -1)$

$v^{(1)} = (-1).0{,}1 + (-1).0{,}5 + (1).0{,}7 = 0{,}1$

$y^{(1)} = sign(0{,}1) = +1$ ACERTOU! $(+1 == +1)$

$v^{(2)} = (-1).0{,}1 + (+1).0{,}5 + (-1).0{,}7 = -0{,}3$

$y^{(2)} = sign(-0{,}3) = -1$ ERROU! $(-1 \,!= +1)$

$$\Delta w = \eta.(d^{(2)} - y^{(2)}).x^{(2)}$$
$$= 0{,}1.(1-(-1)).[-1 \quad +1 \quad -1]$$
$$= [-0{,}2 \quad +0{,}2 \quad -0{,}2]$$

$$w = w + \Delta w$$
$$= [0{,}1 \quad 0{,}5 \quad 0{,}7] + [-0{,}2 \quad +0{,}2 \quad -0{,}2]$$
$$= [-0{,}1 \quad 0{,}7 \quad 0{,}5]$$

Exercício – Porta Lógica OR

$$\Omega^{(x)} = \begin{bmatrix} -1 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & +1 \\ -1 & +1 & -1 \\ -1 & +1 & +1 \end{bmatrix}$$

$$\Omega^{(d)} = \begin{bmatrix} -1 \\ +1 \\ +1 \\ +1 \end{bmatrix}$$

$$w = [-0{,}1 \quad 0{,}7 \quad 0{,}5]$$

$$\eta = 0{,}1$$

$$\phi(.) = sinal$$

1ª época:

$v^{(0)} = (-1).0{,}1 + (-1).0{,}5 + (-1).0{,}7 = -1{,}3$

$y^{(0)} = sign(-1{,}3) = -1$ ACERTOU! $(-1 == -1)$

$v^{(1)} = (-1).0{,}1 + (-1).0{,}5 + (+1).0{,}7 = 0{,}1$

$y^{(1)} = sign(0{,}1) = +1$ ACERTOU! $(+1 == +1)$

$v^{(2)} = (-1).0{,}1 + (+1).0{,}5 + (-1).0{,}7 = -0{,}3$

$y^{(2)} = sign(-0{,}3) = -1$ ERROU! $(-1 \,!= +1)$

$$\Delta w = \eta.(d^{(2)} - y^{(2)}).x^{(2)}$$
$$= 0{,}1.(1-(-1)).[-1 \quad +1 \quad -1]$$
$$= [-0{,}2 \quad +0{,}2 \quad -0{,}2]$$

$$w = w + \Delta w$$
$$= [0{,}1 \quad 0{,}5 \quad 0{,}7] + [-0{,}2 \quad +0{,}2 \quad -0{,}2]$$
$$= [-0{,}1 \quad 0{,}7 \quad 0{,}5]$$

$v(3) = (-1).(-0{,}1) + (+1).0{,}7 + (+1).0{,}5 = 1{,}3$

$y(3) = sign(+1{,}3) = +1$ ACERTOU! $(+1 == +1)$

Exercício – Porta Lógica OR

Neste ponto, o treinamento já pode encerrar?

*Não, pois houve erro de classificação
em pelo menos uma amostra do conjunto.*

*Portanto, deve-se realizar mais
uma época de treinamento.*

Exercício – Porta Lógica OR

$$\Omega^{(x)} = \begin{bmatrix} -1 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & +1 \\ -1 & +1 & -1 \\ -1 & +1 & +1 \end{bmatrix}$$

$$\Omega^{(d)} = \begin{bmatrix} -1 \\ +1 \\ +1 \\ +1 \end{bmatrix}$$

$$w = [-0{,}1 \quad 0{,}7 \quad 0{,}5]$$

$$\eta = 0{,}1$$

$$\phi(.) = sinal$$

2ª época:

$v^{(0)} = (-1).(-0,1) + (-1).0,7 + (-1).0,5 = -1,1$

$y^{(0)} = sign(-1,1) = -1$ ACERTOU! $(-1 == -1)$

$v^{(1)} = (-1).(-0,1) + (-1).0,7 + (+1).0,5 = -0,1$

$y^{(1)} = sign(-0,1) = -1$ ERROU! $(-1 != +1)$

$\Delta w = \eta.(d^{(1)} - y^{(1)}).x^{(1)}$

$= 0,1.(1-(-1)).[-1 \quad -1 \quad +1]$

$= [-0,2 \quad -0,2 \quad +0,2]$

$W = W + \Delta W$

$= [-0,1 \quad 0,7 \quad 0,5] + [-0,2 \quad -0,2 \quad +0,2]$

$= [-0,3 \quad 0,5 \quad 0,7]$

Exercício – Porta Lógica OR

$$\Omega^{(x)} = \begin{bmatrix} -1 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & +1 \\ -1 & +1 & -1 \\ -1 & +1 & +1 \end{bmatrix}$$

$$\Omega^{(d)} = \begin{bmatrix} -1 \\ +1 \\ +1 \\ +1 \end{bmatrix}$$

$$w = [-0{,}3 \quad 0{,}5 \quad 0{,}7]$$

$$\eta = 0{,}1$$

$$\phi(.) = sinal$$

2ª época:

$v^{(0)} = (-1).(-0{,}1) + (-1).0{,}7 + (-1).0{,}5 = -1{,}1$

$y^{(0)} = sign(-1{,}1) = -1$ ACERTOU! $(-1 == -1)$

$v^{(1)} = (-1).(-0{,}1) + (-1).0{,}7 + (+1).0{,}5 = -0{,}1$

$y^{(1)} = sign(-0{,}1) = -1$ ERROU! $(-1 != +1)$

$\Delta w = \eta.(d^{(1)} - y^{(1)}).x^{(1)}$

$= 0{,}1.(1 - (-1)).[-1 \quad -1 \quad +1]$

$= [-0{,}2 \quad -0{,}2 \quad +0{,}2]$

$W = W + \Delta W$

$= [-0{,}1 \quad 0{,}7 \quad 0{,}5] + [-0{,}2 \quad -0{,}2 \quad +0{,}2]$

$= [-0{,}3 \quad 0{,}5 \quad 0{,}7]$

$v^{(2)} = (-1).(-0{,}3) + 1.(0{,}5) + (-1).0{,}7 = 0{,}1$

$y^{(2)} = sign(+0{,}1) = +1$ ACERTOU! $(+1 == +1)$

$v^{(3)} = (-1).(-0{,}3) + 1.(0{,}5) + 1.(0{,}7) = 1{,}5$

$y^{(3)} = sign(+1{,}5) = +1$ ACERTOU! $(+1 == +1)$

Inatel
Instituto Nacional de Telecomunicações

Exercício – Porta Lógica OR

Neste ponto, o treinamento já pode encerrar?

Não, pois houve erro de classificação em pelo menos uma amostra do conjunto.

Portanto, deve-se realizar mais uma época de treinamento.

Exercício – Porta Lógica OR

$$\Omega^{(x)} = \begin{bmatrix} -1 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & +1 \\ -1 & +1 & -1 \\ -1 & +1 & +1 \end{bmatrix}$$

$$\Omega^{(d)} = \begin{bmatrix} -1 \\ +1 \\ +1 \\ +1 \end{bmatrix}$$

$$w = [-0{,}3 \quad 0{,}5 \quad 0{,}7]$$

$$\eta = 0{,}1$$

$$\phi(.) = sinal$$

3ª época:

$v^{(0)} = (-1).(-0{,}3) + (-1).(0{,}5) + (-1).0{,}7 = -0{,}9$

$y^{(0)} = sign(-0{,}9) = -1$ ACERTOU! $(-1=-1)$

$v^{(1)} = (-1).(-0{,}3) + (-1).0{,}5 + 1.0{,}7 = 0{,}5$

$y^{(1)} = sign(+0{,}5) = +1$ ACERTOU! $(1=1)$

$v^{(2)} = (-1).(-0{,}3) + 1.(0{,}5) + (-1).0{,}7 = 0{,}1$

$y^{(2)} = sign(+0{,}1) = +1$ ACERTOU! $(1=1)$

$v^{(3)} = (-1).(-0{,}3) + 1.(0{,}5) + 1(0{,}7) = 1{,}5$

$y^{(3)} = sign(+1{,}5) = +1$ ACERTOU! $(1=1)$

Resultado do treinamento:

$$w = [-0{,}3 \quad 0{,}5 \quad 0{,}7]$$

Exercício – Porta Lógica OR

Neste ponto, o treinamento já pode encerrar?

Sim, pois não houve erro de classificação nas amostras do conjunto.

O resultado do treinamento é, portanto, o vetor de pesos sinápticos ajustados.

Aspectos práticos sobre o *Perceptron*

- Podem existir infinitas soluções para a rede dependendo dos pesos sinápticos iniciais escolhidos. Logo a solução não é ótima e o número de épocas varia;
- A rede divergirá se o problema não for linearmente separável;
- Usando a faixa de separabilidade entre as classes forem muito estreitas, o processo de treinamento pode implicar em instabilidade. Neste caso utiliza-se uma taxa de aprendizagem $\{\eta\}$ bem pequena.
- Quanto mais próxima a superfície de decisão estiver da fronteira de separabilidade, menos épocas serão necessárias para a rede convergir.
- A normalização das entradas para domínios apropriados contribui para o incremento do desempenho da rede.

Código no GitHub

- Implementação em Java (classe Perceptron):

https://github.com/marcelovca90-inatel/EC017/tree/master/NeuralNetworks-java

- Implementação em Python (módulo Perceptron):

https://github.com/marcelovca90-inatel/EC017/tree/master/NeuralNetworks-python

Fim

Inatel
Instituto Nacional de Telecomunicações

Marcelo Vinícius C. Aragão
marcelovca90@inatel.br