

Questão 1

Seja $f(x) = x \ln\left(1 - \frac{1}{x}\right)$.

(a) Em uma prova sem o auxílio do Maple, um aluno escreveu o seguinte:

$$\text{Como } \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{x} = 0, \text{ então } \lim_{x \rightarrow -\infty} \ln\left(1 - \frac{1}{x}\right) = \ln(1) = 0.$$

$$\text{Logo, } \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 0.$$

Sem utilizar o Maple, corrija a resolução do aluno e determine corretamente o valor de $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$.

Solução:

A primeira linha da resolução do aluno está correta. Ele errou apenas ao concluir que $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 0$, pois $\lim_{x \rightarrow -\infty} x = -\infty$ e $\lim_{x \rightarrow -\infty} \ln\left(1 - \frac{1}{x}\right) = 0$, logo, $\lim_{x \rightarrow -\infty} x \cdot \ln\left(1 - \frac{1}{x}\right)$ é uma indeterminação da forma $(-\infty) \cdot 0$.

Forma correta de calcular o limite:

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} x \cdot \ln\left(1 - \frac{1}{x}\right) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\ln\left(1 - \frac{1}{x}\right)}{\frac{1}{x}} \quad (\text{indeterminação da forma } 0/0, \text{ logo, podemos aplicar}$$

$$\text{L'Hopital}) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\frac{1}{1 - \frac{1}{x}} \cdot \left(-\left(-\frac{1}{x^2}\right)\right)}{-\frac{1}{x^2}} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{-1}{1 - \frac{1}{x}} = -1.$$

(b) Determine as equações das retas assíntotas horizontais do gráfico de f , caso existam.

```
> f:=x->x*ln(1-1/x)
```

$$f := x \mapsto x \ln\left(1 - \frac{1}{x}\right) \quad (1)$$

```
> limit(f(x), x=infinity)
```

$$-1 \quad (2)$$

```
> limit(f(x), x=-infinity)
```

$$-1 \quad (3)$$

Logo, existe uma única assíntota horizontal, $y = -1$.

(c) Determine as equações das retas assíntotas verticais do gráfico de f , caso existam.

Vamos primeiramente verificar qual é o domínio de f . As restrições são:

$$x \neq 0$$

$$1 - \frac{1}{x} > 0$$

```
> solve(1-1/x>0)
```

$$(-\infty, 0), (1, \infty) \quad (4)$$

Logo, $\text{Dom}(f) = (-\infty, 0) \cup (1, \infty)$.

Procurando por assíntotas verticais em $x=0$ e $x=1$:

```
> limit(f(x), x=0, left)
```

$$0 \quad (5)$$

```
> limit(f(x), x=1, right)
```

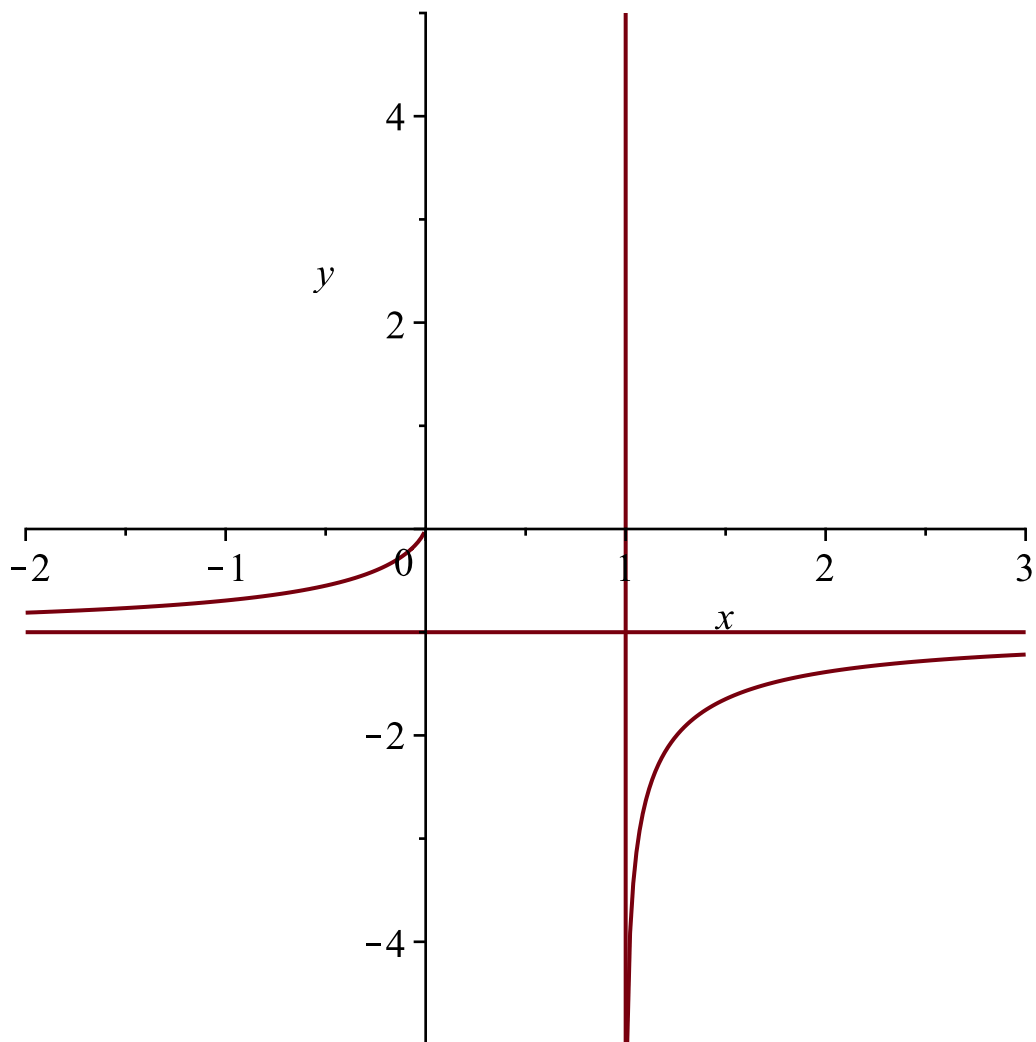
$$-\infty \quad (6)$$

Logo, existe uma única assíntota vertical, $x = 1$.

(d) Esboce o gráfico de f e suas retas assíntotas, caso existam.

```
> with(plots):
```

```
> implicitplot([y=f(x), y=-1, x=1], x=-2..3, y=-5..5, numpoints=100000)
```



Questão 2

Seja $y = k$, $k < 0$, a equação de uma reta assíntota horizontal da função $f(x) = \arctan(-2x)$.

Considere a região

$$\mathcal{R} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y \leq f(x), k \leq y \leq 0, -1 \leq x \leq 4\}.$$

(a) Esboce a região \mathcal{R} .

```
> restart
```

```
> f:=x->arctan(-2*x)
```

$f := x \mapsto \arctan(-2x)$

```
> limit(f(x), x=infinity)
```

(7)

(8)

$$-\frac{\pi}{2} \quad (8)$$

```
> limit(f(x), x=-infinity)
```

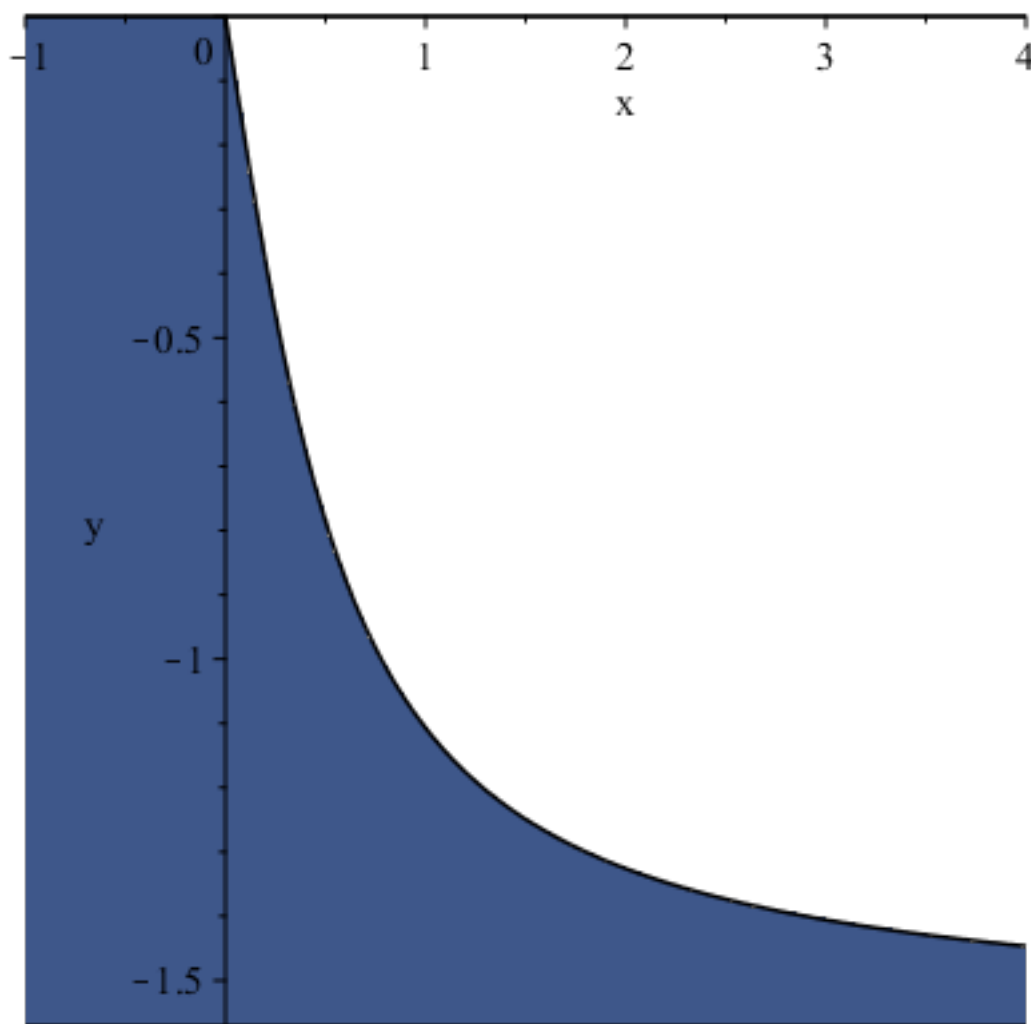
$$\frac{\pi}{2} \quad (9)$$

```
> k:=-Pi/2
```

$$k := -\frac{\pi}{2} \quad (10)$$

```
> with(plots):
```

```
> inequal([y<=f(x), y<=0, y>=k], x=-1..4, y=k..0)
```



(b) Calcule a área de \mathcal{R} utilizando integrais na variável x .

Obs.: Respostas aproximadas devem ser dadas com 3 casas decimais corretas.

```
> Areax:=int(0-k, x=-1..0)+int(f(x)-k, x=0..4)
```

$$Areax := \frac{5\pi}{2} - 4 \arctan(8) + \frac{\ln(5)}{4} + \frac{\ln(13)}{4} \quad (11)$$

```
> evalf(Areax)
```

$$3.111813124 \quad (12)$$

Logo, a área de R é aproximadamente 3,111.

(c) Calcule a área de \mathcal{R} utilizando integrais na variável y .

Obs.: Respostas aproximadas devem ser dadas com 3 casas decimais corretas.

```
> solve(y=f(x), x)
```

$$-\frac{\tan(y)}{2} \quad (13)$$

```
> Areay:=int(4-(-1), y=k..arctan(-8))+int(-1/2*tan(y)-(-1), y=arctan(-8)..0)
```

$$Areay := \frac{5\pi}{2} - 4 \arctan(8) + \frac{\ln(5)}{4} + \frac{\ln(13)}{4} \quad (14)$$

```
> evalf(Areay)
```

$$3.111813124 \quad (15)$$

Novamente, a área de R é aproximadamente 3,111.