



MAT4161/MAT4181 – Cálculo a uma Variável

P1 Maple – 01 de abril de 2024

(Versão II)

Questão 1

Considere as equações das seguintes circunferências:

$$\begin{aligned}(x+1)^2 + y^2 &= 2 \\ (x+2)^2 + (y-1)^2 &= 4\end{aligned}$$

Determine a equação da **parábola** que passa pelo ponto $(-4, 3)$ e também pelos dois pontos de interseção entre as circunferências.

> restart

Primeiramente vamos determinar as coordenadas dos pontos de interseção entre as circunferências:

```
> solve([(x+1)^2+y^2=2, (x+2)^2+(y-1)^2=4])  
{x = 0, y = 1}, {x = -2, y = -1}
```

Seja $y=f(x)$ a equação da parábola que deve ser determinada, onde f é uma função quadrática:

> f:=x->a*x^2+b*x+c

$$f := x \rightarrow a x^2 + b x + c \quad (2)$$

Os pontos $(0, 1)$, $(-2, -1)$ e $(-4, 3)$ pertencem à parábola, então suas coordenadas devem satisfazer a equação $y = f(x)$:

```
> solve([1=f(0), -1=f(-2), 3=f(-4)])
{a = 3/4, b = 5/2, c = 1}
```

Logo, a equação pedida é $y = \frac{3x^2}{4} + \frac{5x}{2} + 1$.

Questão 2

Considere a função f definida por

$$f(x) = \begin{cases} g(x), & x < 2 \\ h(x), & x \geq 2 \end{cases}$$

onde g e h são funções quadráticas.

Sabendo que f é uma função contínua e derivável, escreva expressões para as funções g e h de forma que:

- a reta $y = -2x - 1$ seja tangente ao gráfico de f em $x = -2$,
- a reta $y = 5x - 16$ seja tangente ao gráfico de f em $x = 4$.

```
> restart  
> g:=x->a*x^2+b*x+c  
> h:=x->p*x^2+q*x+r
```

$$g := x \rightarrow a x^2 + b x + c \quad (4)$$

$$h := x \rightarrow p x^2 + q x + r \quad (5)$$

Para determinar os seis coeficientes, vamos resolver um sistema com seis equações.

Condições para que f seja contínua e diferenciável:

$$g(2) = h(2)$$

$$g'(2) = h'(2)$$

Condições para que a reta $y = -2x - 1$ seja tangente ao gráfico de f em $x = -2$:

$$g'(-2) = -2$$

$$g(-2) = -2(-2) - 1 = 3$$

Condições para que a reta $y = 5x - 16$ seja tangente ao gráfico de f em $x = 4$:

$$h'(4) = 5$$

$$h(4) = 5 \cdot 4 - 16 = 4$$

```
> solve([g(2)=h(2), D(g)(2)=D(h)(2), D(g)(-2)=-2, g(-2)=3, D(h)(4)=5, h(4)=4])
```

$$\left\{ a = \frac{1}{4}, b = -1, c = 0, p = \frac{5}{4}, q = -5, r = 4 \right\} \quad (6)$$

Logo,

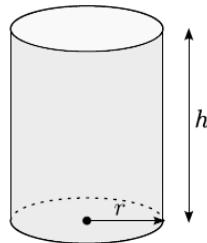
$$g(x) = \frac{x^2}{4} - x$$

$$h(x) = \frac{5x^2}{4} - 5x + 4$$

Questão 3

Deseja-se fabricar um recipiente no formato de cilindro circular reto, aberto do lado superior, com volume de 450 cm^3 . Suponha que na fabricação da lateral e do fundo não há desperdícios de material.

Sejam r e h o raio da base e a altura do cilindro, respectivamente.



Seja A a função de r que fornece a **área** da superfície de todo o recipiente.

Sabendo que a área de um círculo de raio r é πr^2 , e que o comprimento de uma circunferência de raio r é $2\pi r$, faça o que se pede.

- (a) Determine o domínio e uma expressão para a função A .

Obs.: No Maple, π se escreve Pi.

A área da base é πr^2 , e a área lateral é $2\pi r h$.

Para escrever h em termos de r :

$$\text{Volume} = \pi r^2 h = 450 \Rightarrow h = \frac{450}{\pi r^2}$$

Logo,

$$A(r) = \pi r^2 + 2\pi r \left(\frac{450}{\pi r^2} \right) = \pi r^2 + \frac{900}{r}$$

Para determinar o domínio, as únicas restrições impostas pelo problema são $r > 0$ e $h > 0$.

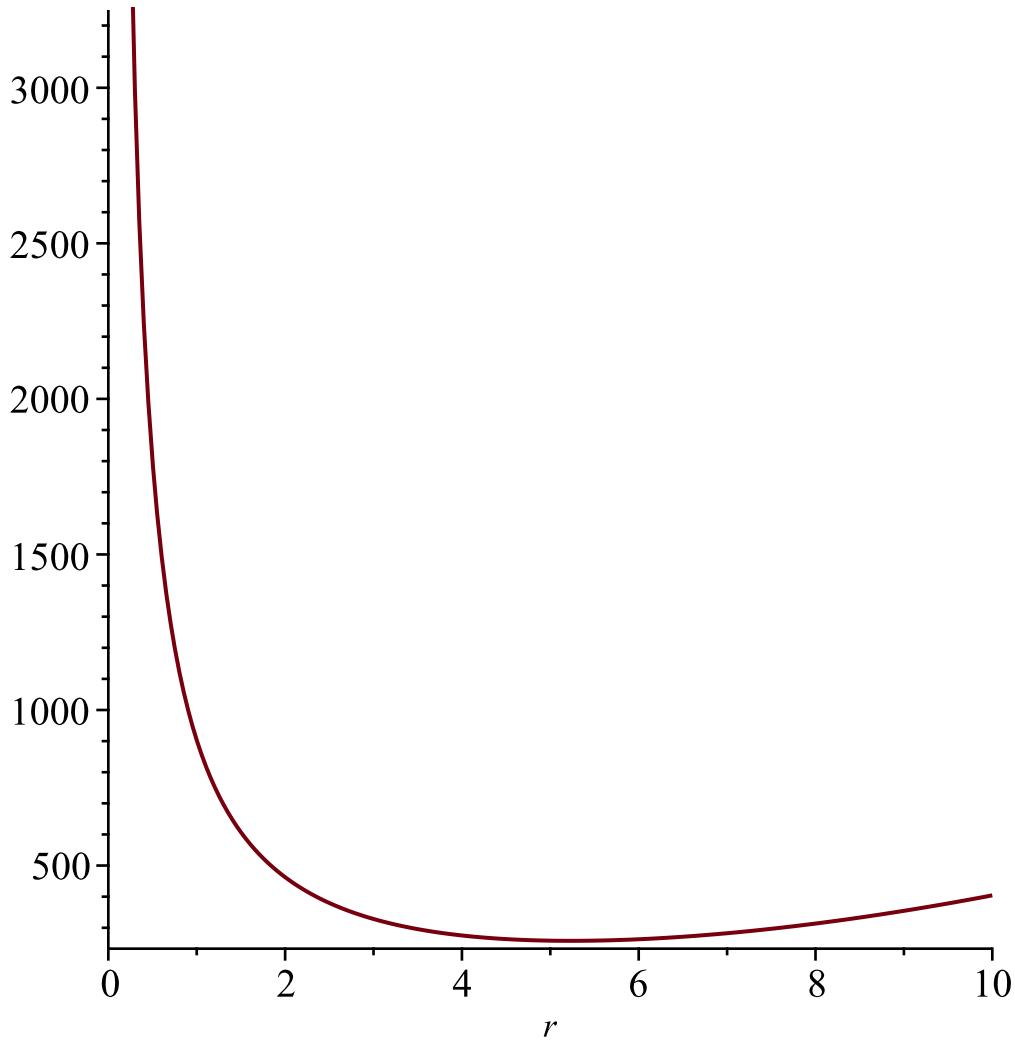
Como $h = \frac{450}{\pi r^2} > 0$ para todo r real, então $\text{Dom}(A) = (0, +\infty)$.

(b) Determine o raio e a altura do recipiente correspondente à **menor** área. Não se esqueça de justificar sua resposta.

```
> restart
> A:=r->Pi*r^2+900/r
```

$$A := r \rightarrow \pi r^2 + \frac{900}{r} \quad (7)$$

```
> plot(A(r), r=0..10)
```



```
> s:=solve(D(A)(r)=0)
```

$$s := \frac{\frac{450^{1/3} (\pi^2)^{1/3}}{\pi}, -\frac{1}{2} \frac{450^{1/3} (\pi^2)^{1/3}}{\pi} + \frac{\frac{1}{2} i \sqrt{3} 450^{1/3} (\pi^2)^{1/3}}{\pi}, -\frac{1}{2} \frac{450^{1/3} (\pi^2)^{1/3}}{\pi} - \frac{\frac{1}{2} i \sqrt{3} 450^{1/3} (\pi^2)^{1/3}}{\pi}}{(8)}$$

```
> evalf(s[1])
```

5.232238677

(9)

O solve forneceu apenas uma solução real (as duas outras são complexas) e, pelo plot acima, vemos que esta solução (que está entre 4 e 6) é de fato um mínimo local da função.

Logo,

```
> rmin:=s[1]
```

$$rmin := \frac{450^{1/3} (\pi^2)^{1/3}}{\pi} \quad (10)$$

```
> hmin:=450/(Pi*rmin^2)
```

$$hmin := \frac{\pi 450^{1/3}}{(\pi^2)^{2/3}} \quad (11)$$

```
> evalf(hmin)
```

5.232238680 (12)

Ou seja, o cilindro de volume 450 cm^3 que possui a menor área é aquele de raio 5.232 cm e altura 5.232 cm.

Obs.: Caso o aluno tenha utilizado o fsolve (com ou sem intervalo de busca), a justificativa precisa ser mais elaborada.

```
> fsolve(D(A)(r)=0)
```

5.232238680 (13)

Sabemos, pelo plot, que 5.232 é um valor de r que **minimiza** a função A . Entretanto, como garantir que este é o mínimo **global**? O gráfico da função foi esboçado apenas no intervalo $[0, 10]$, mas o domínio de A é $(0, +\infty)$. Além disso, o fato do fsolve ter nos dado apenas uma solução não quer dizer que não haja outras.

Vamos então determinar os intervalos de crescimento e de decrescimento de A :

```
> solve(D(A)(r)>0)
```

$$\text{RealRange}\left(\text{Open}\left(\frac{450^{1/3} (\pi^2)^{1/3}}{\pi}\right), \infty\right) \quad (14)$$

```
> solve(D(A)(r)<0)
```

$$\text{RealRange}(-\infty, \text{Open}(0)), \text{RealRange}\left(\text{Open}(0), \text{Open}\left(\frac{450^{1/3} (\pi^2)^{1/3}}{\pi}\right)\right) \quad (15)$$

Como $\text{Dom}(A) = (0, +\infty)$, então

A é decrescente em $\left(0, \frac{450^{1/3} (\pi^2)^{1/3}}{\pi}\right]$ e é crescente em $\left[\frac{450^{1/3} (\pi^2)^{1/3}}{\pi}, +\infty\right)$.

Logo, de fato A possui mínimo global em $r = \frac{450^{1/3} (\pi^2)^{1/3}}{\pi}$.

Critério de correção:

Questão 1 (valor: 1,2)

0,4 pelos pontos de interseção entre as circunferências

0,4 pelo sistema de equações que deve ser satisfeito

0,4 pela equação da parábola

Questão 2 (valor: 1,2)

0,3 por cada par de equações que devem ser satisfeitas (são 3 pares no total)

0,3 pelas expressões de g e h

Questão 3 (valor: 1,6)

Item (a)

0,2 por escrever h em termos de r

0,4 pela expressão $A(r)$

0,2 pelo domínio

Item (b)

0,3 pelo valor de r que minimiza a área

0,4 pela justificativa

0,1 pela altura h