MAT1161 – Cálculo de Uma Variável
P1 – 11 de setembro de 2019

Nome Legível : Gabarito

Assinatura :

Matrícula : Turma :

Questão	Valor	Grau	Revisão
1^a	1,5		
2^a	1,0		
3^a	2,5		

T1 (2,0)	P1 Maple (3,0)	P1 (5,0)	Total (10,0)	Revisão

Instruções Gerais:

- A duração da prova é de 1h50min.
- A tolerância de entrada é de 30min após o início da prova. Se um aluno terminar a prova em menos de 30min, deverá aguardar em sala antes de entregar a prova e sair de sala.
- A prova deve ser resolvida apenas nas folhas recebidas e nos espaços reservados para soluções. Não é permitido destacar folhas da prova.
- A prova é sem consulta a professores, fiscais ou a qualquer tipo de material. A interpretação dos enunciados faz parte da prova.
- O aluno só poderá realizar a prova e assinar a lista de presença na sua turma/sala.
- O aluno só poderá manter junto a si: lápis, borracha e caneta. Caso necessário, o fiscal poderá solicitar ajuda a outro aluno e apenas o fiscal repassará o material emprestado.
- O celular deverá ser desligado e guardado.
- O aluno não poderá sair de sala enquanto estiver fazendo a prova.

Instruções Específicas:

- Todas as questões devem ser justificadas de forma clara, rigorosa e de preferência sucinta. Respostas sem justificativas não serão consideradas.
- A prova pode ser resolvida a lápis ou a caneta de tinta azul ou preta. Não é permitido o uso de caneta de tinta vermelha ou verde.
- Não é permitido o uso de calculadora ou qualquer dispositivo eletrônico.
- Esta prova possui 3 questões. Confira.

Questão 1

Seja $c \in \mathbb{R}$. Considere a função f tal que

$$f'(x) = \frac{2x}{\sqrt{x}} + x^2 + cx\,.$$

Sabendo que $(1,1)$ é um ponto de inflexão do gráfico de f, faça o que se pede:

(a) Determine $f''(x)$ e o valor da constante c.

$f'(x) = 2x \cdot x^{-1/2} + x^2 + cx = 2\sqrt{x} + x^2 + cx$

logo $f''(x) = 2 \cdot \frac{1}{2} \cdot x^{-1/2} + 2x + c = \frac{1}{\sqrt{x}} + 2x + c$

se $(1,1)$ é pto. de inflexão, então $f''(1) = 0$:

$f''(1) = 1 + 2 + c = c + 3 = 0 \Rightarrow c = -3$

então, $f''(x) = \frac{1}{\sqrt{x}} + 2x - 3$ //

(b) Determine $f(x)$.

$f(x) = \int f'(x)\,dx = \int 2\sqrt{x} + x^2 - 3x \quad dx$

$= 2 \cdot x^{3/2} \cdot \frac{2}{3} + \frac{x^3}{3} - \frac{3x^2}{2} + K$

Como $(1,1)$ é pto. do gráfico de f; então $f(1) = 1$:

$f(1) = \frac{4}{3} + \frac{1}{3} - \frac{3}{2} + K = \frac{1}{6} + K = 1 \Rightarrow K = \frac{5}{6}$.

então, $f(x) = \frac{4}{3} x^{3/2} + \frac{x^3}{3} - \frac{3}{2} \cdot x^2 + \frac{5}{6}$ //

(c) Determine a equação da reta tangente ao gráfico de f em $x = 1$.

Como $f(1) = 1$ (pois $(1,1)$ pertence ao gráfico de f)

e $f'(1) = 2 + 1 - 3 = 0$ (pelo item (A)),

segue que:

$$y = f'(1)(x-1) + f(1)$$

$$\Rightarrow y = 0.(x-1) + 1$$

$$\Rightarrow y = 1 \; //$$

Questão 2

Determine se as proposições abaixo são verdadeiras ou falsas, justificando suas respostas.

(a) Se $f''(a) = 0$, então $(a, f(a))$ é ponto de inflexão do gráfico de f.

Falsa. Contraexemplo: $f(x) = x^4$, $a = 0$.

Observe que $f''(x) = 12x^2 \Rightarrow f''(0) = 0$, mas $(0,0)$ não é ponto de inflexão do gráfico de f. De fato, $f''(x) \geq 0$, $\forall x \in \mathbb{R}$, ou seja, o gráfico de f nunca muda de concavidade.

(b) Se $f''(a) < 0$, então $f'(a) < 0$.

Falsa. Contraexemplo: $f(x) = -x^2$, $a = -1$.

Observe que $f''(x) = -2 \Rightarrow f''(-1) = -2 < 0$.

Entretanto, $f'(x) = -2x \Rightarrow f'(-1) = 2 > 0$.

Questão 3

Sejam $x_1 < x_2 < x_3$ as raízes da função $f(x) = x^3 - 4x$.

Seja g a função quadrática cujo gráfico passa pelo ponto $(-1, 1)$ e que possui raízes x_1 e x_2.

Seja $\mathcal{R}$ a região delimitada pelos gráficos de f e g.

(a) Determine a expressão da função g.

$x^3 - 4x = 0 \iff x(x^2 - 4) = 0 \iff x = 0, -2, 2$.

Logo, como $x_1 < x_2 < x_3$, temos que $x_1 = -2$, $x_2 = 0$ e $x_3 = 2$.

Equação da parábola que é gráfico de g:

$y = a(x - (-2))(x - 0)$. Substituindo o ponto $(-1, 1)$:

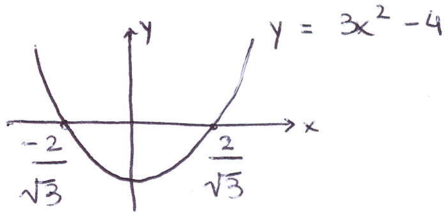
$1 = a(-1 + 2)(-1) \Rightarrow a = -1$

Logo $g(x) = -x(x + 2)$ //

(b) Determine os intervalos de crescimento e de decrescimento de f.

$$f'(x) = 3x^2 - 4 = 0 \iff x = \pm \frac{2}{\sqrt{3}}$$

Estudo de sinal de $f'(x)$:



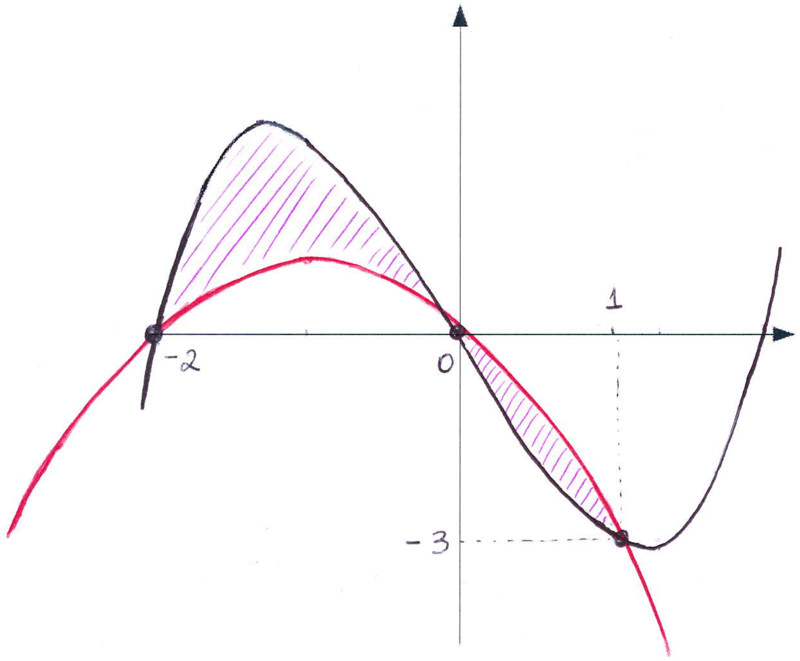
$f'(x)$: $+$ on $\left(-\infty, -\frac{2}{\sqrt{3}}\right)$, $-$ on $\left(-\frac{2}{\sqrt{3}}, \frac{2}{\sqrt{3}}\right)$, $+$ on $\left(\frac{2}{\sqrt{3}}, +\infty\right)$

Logo, intervalos de crescimento de f:

$$\left(-\infty, -2/\sqrt{3}\right], \left[2/\sqrt{3}, +\infty\right)$$

Intervalo de decrescimento de f: $\left[-2/\sqrt{3}, 2/\sqrt{3}\right]$.

(c) Faça abaixo um esboço da região $\mathcal{R}$. Indique explicitamente em seu desenho as coordenadas (abscissas e ordenadas) de todos os pontos de interseção entre os gráficos de f e g.



Interseções:

$$x^3 - 4x = -x(x+2)$$

$$\iff x(x^2 - 4 + x + 2) = 0$$

$$\iff x(x^2 + x - 2) = 0$$

$$\iff x = -2, 0, 1$$

(d) Escreva a área de $\mathcal{R}$ como uma soma de duas integrais na variável x.

$$A(R) = \int_{-2}^{0} x^3 - 4x - (-x(x+2))\, dx + \int_{0}^{1} (-x(x+2)) - (x^3 - 4x)\, dx$$

(e) Calcule a área de $\mathcal{R}$.

$$A(R) = \int_{-2}^{0} x^3 + x^2 - 2x\, dx + \int_{0}^{1} -x^3 - x^2 + 2x\, dx$$

$$= \left(\frac{x^4}{4} + \frac{x^3}{3} - x^2\right)\Bigg|_{x=-2}^{0} + \left(-\frac{x^4}{4} - \frac{x^3}{3} + x^2\right)\Bigg|_{x=0}^{1}$$

$$= 0 - \left(4 - \frac{8}{3} - 4\right) + \left(-\frac{1}{4} - \frac{1}{3} + 1\right) - 0$$

$$= \frac{8}{3} - \frac{1}{4} - \frac{1}{3} + 1$$

$$= \frac{37}{12}$$