MAT4161 – Cálculo a uma Variável
P1 – 30 de setembro de 2024

Nome Legível : Gabarito

Assinatura :

Matrícula : Turma :

Questão	Valor	Grau	Revisão
1^a	$2,0$		
2^a	$2,0$		

AG1 (2,0)	P1 Maple (4,0)	P1 (4,0)	Total (10,0)	Revisão

Instruções Gerais:

- A duração da prova é de 1h50min.
- A tolerância de entrada é de 30min após o início da prova. Se um aluno terminar a prova em menos de 30min, deverá aguardar em sala antes de entregar a prova e sair de sala.
- A prova deve ser resolvida apenas nas folhas recebidas e nos espaços reservados para soluções. Não é permitido destacar folhas da prova.
- A prova é sem consulta a professores, fiscais ou a qualquer tipo de material. A interpretação dos enunciados faz parte da prova.
- O aluno só poderá realizar a prova e assinar a lista de presença na sua turma/sala.
- O aluno só poderá manter junto a si: lápis, borracha e caneta. Caso necessário, o fiscal poderá solicitar ajuda a outro aluno e apenas o fiscal repassará o material emprestado.
- O celular deverá ser desligado e lacrado dentro do saco plástico fornecido pelo fiscal.
- O aluno não poderá sair de sala enquanto estiver fazendo a prova.

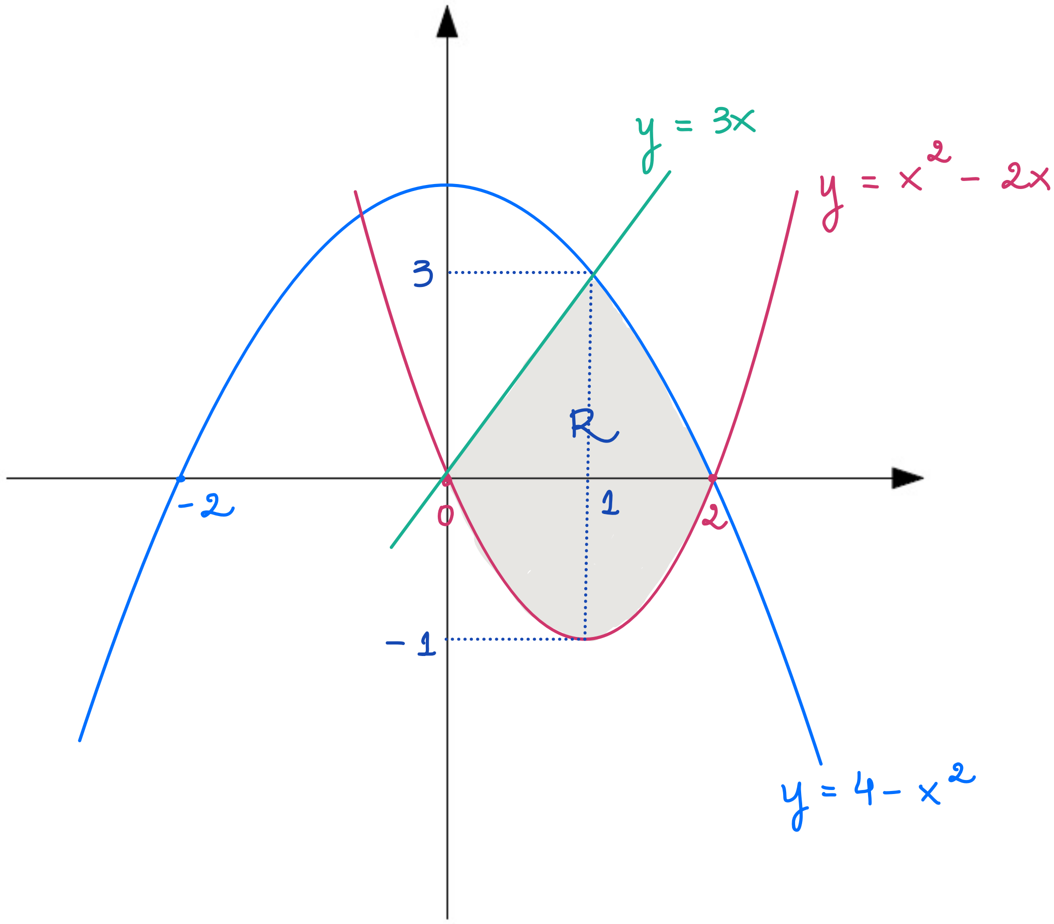
Instruções Específicas:

- Todas as questões devem ser justificadas de forma clara, rigorosa e de preferência sucinta. Respostas sem justificativas não serão consideradas.
- A prova pode ser resolvida a lápis ou a caneta de tinta azul ou preta. Não é permitido o uso de caneta de tinta vermelha ou verde. Não é permitido o uso de corretivo líquido.
- Não é permitido o uso de calculadora ou qualquer dispositivo eletrônico.
- Esta prova possui 2 questões. Confira.

Questão 1. Seja $\mathcal{R}$ a região dada por

$$\mathcal{R} = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid y \leq 3x, \;\; y \leq 4 - x^2, \;\; y \geq x^2 - 2x\}$$

(a) Esboce a região $\mathcal{R}$.



Interseções:

$3x = 4 - x^2$

$\iff x^2 + 3x - 4 = 0$

$\iff x = -4, 1$

$3x = x^2 - 2x$

$\iff x^2 - 5x = 0$

$\iff x(x-5) = 0$

$\iff x = 0, 5$

$4 - x^2 = x^2 - 2x$

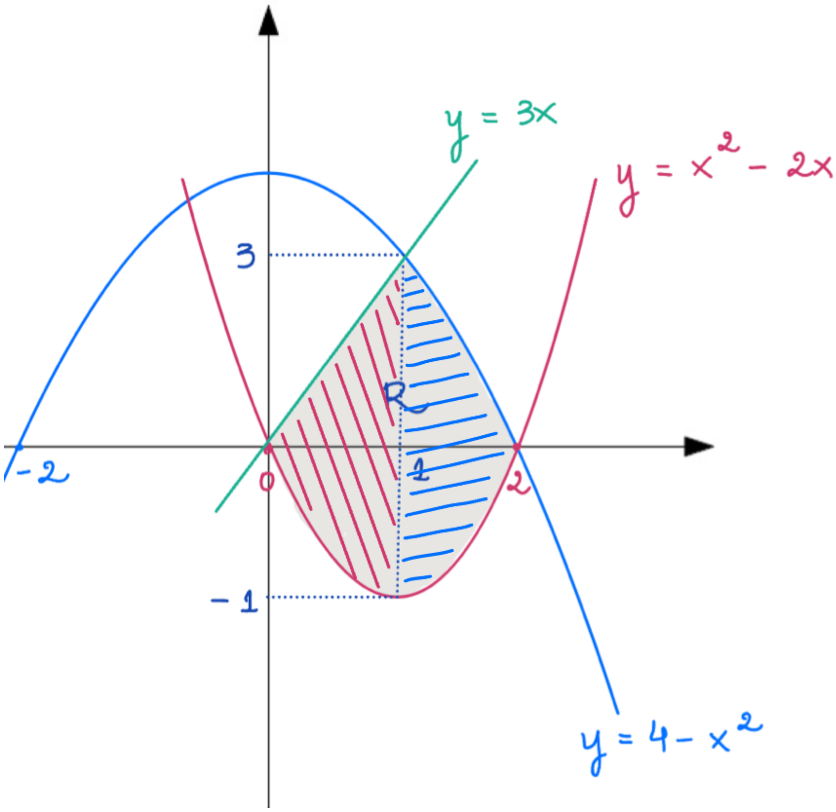
$\iff 2x^2 - 2x - 4 = 0$

$\iff x^2 - x - 2 = 0$

$\iff x = -1, 2$

(b) Escreva a área da região $\mathcal{R}$ através de uma soma de duas integrais na variável x.

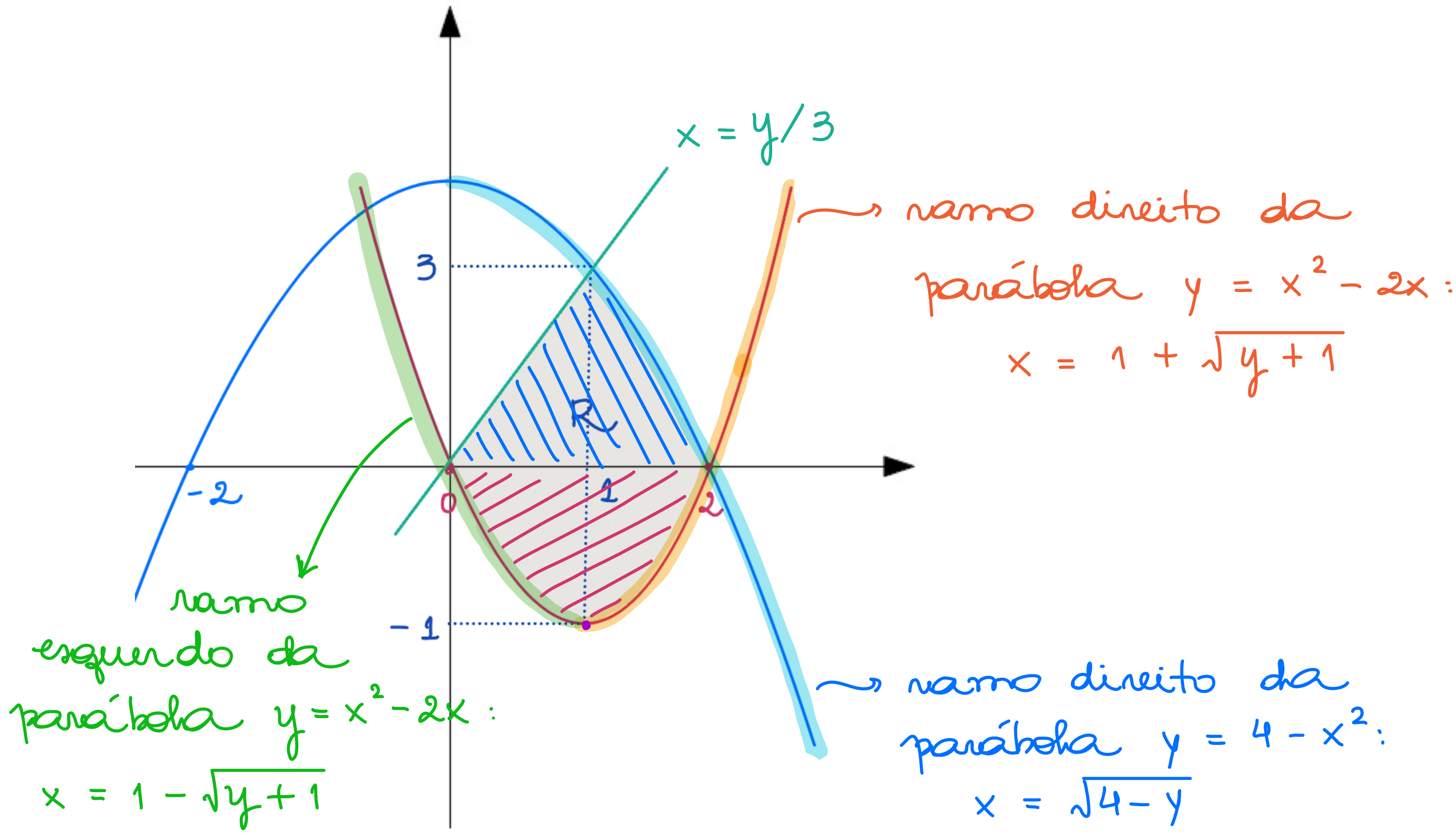
Atenção: Neste item não é necessário calcular a integral.



$$A(R) = \int_0^1 3x - (x^2 - 2x)\, dx + \int_1^2 4 - x^2 - (x^2 - 2x)\, dx$$

(c) Escreva a área da região $\mathcal{R}$ através de uma soma de duas integrais na variável y.

Atenção: Neste item não é necessário calcular as integrais.



Escrevendo as curvas como (união de) gráficos de funções de y:

- $y = 3x \iff x = \dfrac{y}{3}$

- $y = 4 - x^2 \iff x^2 = 4 - y \iff x = \pm\sqrt{4-y}$

- $y = x^2 - 2x \iff y = (x-1)^2 - 1 \iff (x-1)^2 = y+1$

  Outra forma de isolar x:

  $x^2 - 2x - y = 0$

  Bhaskara com $a = 1, b = -2, c = -y$

  $\iff x - 1 = \pm\sqrt{y+1}$

  $\iff x = 1 \pm \sqrt{y+1}$

Logo

$$A(R) = \int_{-1}^{0} (1+\sqrt{y+1}) - (1-\sqrt{y+1})\, dy + \int_{0}^{3} \sqrt{4-y} - \frac{y}{3}\, dy$$

(d) Calcule a área da região $\mathcal{R}$ utilizando o método que preferir.

Pelo item (A):

$$A(R) = \int_0^1 3x - (x^2 - 2x)\,dx + \int_1^2 4 - x^2 - (x^2 - 2x)\,dx$$

$$= \int_0^1 -x^2 + 5x\,dx + \int_1^2 -2x^2 + 2x + 4\,dx$$

$$= \left(-\frac{x^3}{3} + \frac{5x^2}{2}\right)\Bigg|_0^1 + \left(-\frac{2x^3}{3} + x^2 + 4x\right)\Bigg|_1^2$$

$$= \left(-\frac{1}{3} + \frac{5}{2}\right) - (-0 + 0) + \left(-\frac{16}{3} + 4 + 8\right) - \left(-\frac{2}{3} + 1 + 4\right)$$

$$= -\frac{1}{3} + \frac{5}{2} - \frac{16}{3} + 12 + \frac{2}{3} - 5$$

$$= -5 + \frac{5}{2} + 7$$

$$= 2 + \frac{5}{2} = \frac{9}{2} \;//$$

Questão 2. Seja $f : [0, 2\pi] \to \mathbb{R}$ a função definida por

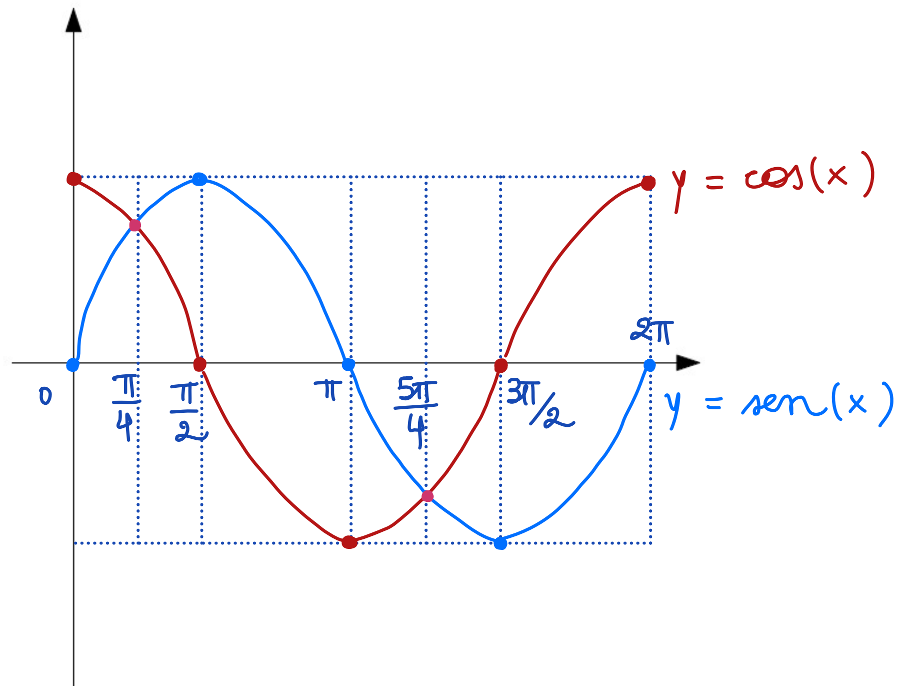
$$f(x) = \operatorname{sen}(x) + \cos(x) + 1.$$

(a) Esboce abaixo, em um mesmo sistema de eixos coordenados, os gráficos das funções

$$g(x) = \cos(x) \qquad \text{e} \qquad h(x) = \operatorname{sen}(x)$$

no intervalo $[0, 2\pi]$.

Em seguida, determine os intervalos de crescimento e de decrescimento de f.



$f'(x) = \cos(x) - \operatorname{sen}(x)$

Estudo de sinal de f':

- $f'(x) \geq 0 \iff \cos(x) - \operatorname{sen}(x) \geq 0 \iff \cos(x) \geq \operatorname{sen}(x)$

$\iff x \in \left[0, \frac{\pi}{4}\right] \cup \left[\frac{5\pi}{4}, 2\pi\right]$

Logo os int. de crescimento de f são $\left[0, \frac{\pi}{4}\right]$ e $\left[\frac{5\pi}{4}, 2\pi\right]$.

- Analogamente, $f'(x) \leq 0 \iff x \in \left[\frac{\pi}{4}, \frac{5\pi}{4}\right]$.

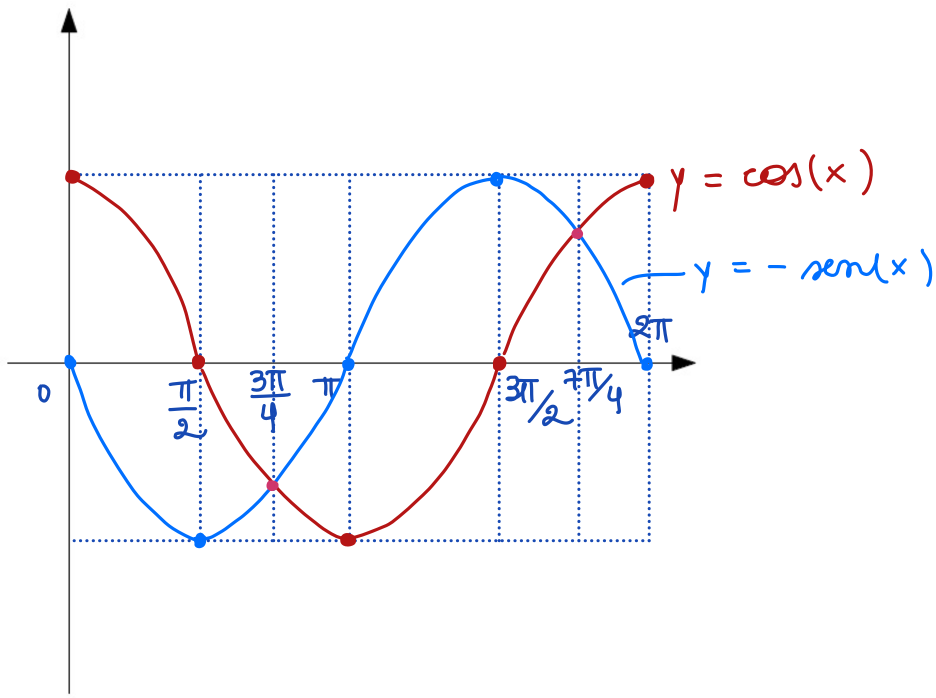
Logo o int. de decrescimento de f é $\left[\frac{\pi}{4}, \frac{5\pi}{4}\right]$.

(b) Esboce abaixo, em um mesmo sistema de eixos coordenados, os gráficos das funções

$$j(x) = -\operatorname{sen}(x) \qquad \text{e} \qquad g(x) = \cos(x)$$

no intervalo $[0, 2\pi]$.

Em seguida, determine os intervalos onde o gráfico de f é côncavo para cima e onde é côncavo para baixo.



$f''(x) = -\operatorname{sen}(x) - \cos(x)$

Estudo de sinal de f'':

- $f''(x) \geq 0 \iff -\operatorname{sen}(x) - \cos(x) \geq 0 \iff -\operatorname{sen}(x) \geq \cos(x)$

$\iff x \in \left[\frac{3\pi}{4}, \frac{7\pi}{4}\right]$

Logo, o int. de concav. p/ cima do gráfico de f é

$\left[\frac{3\pi}{4}, \frac{7\pi}{4}\right]$

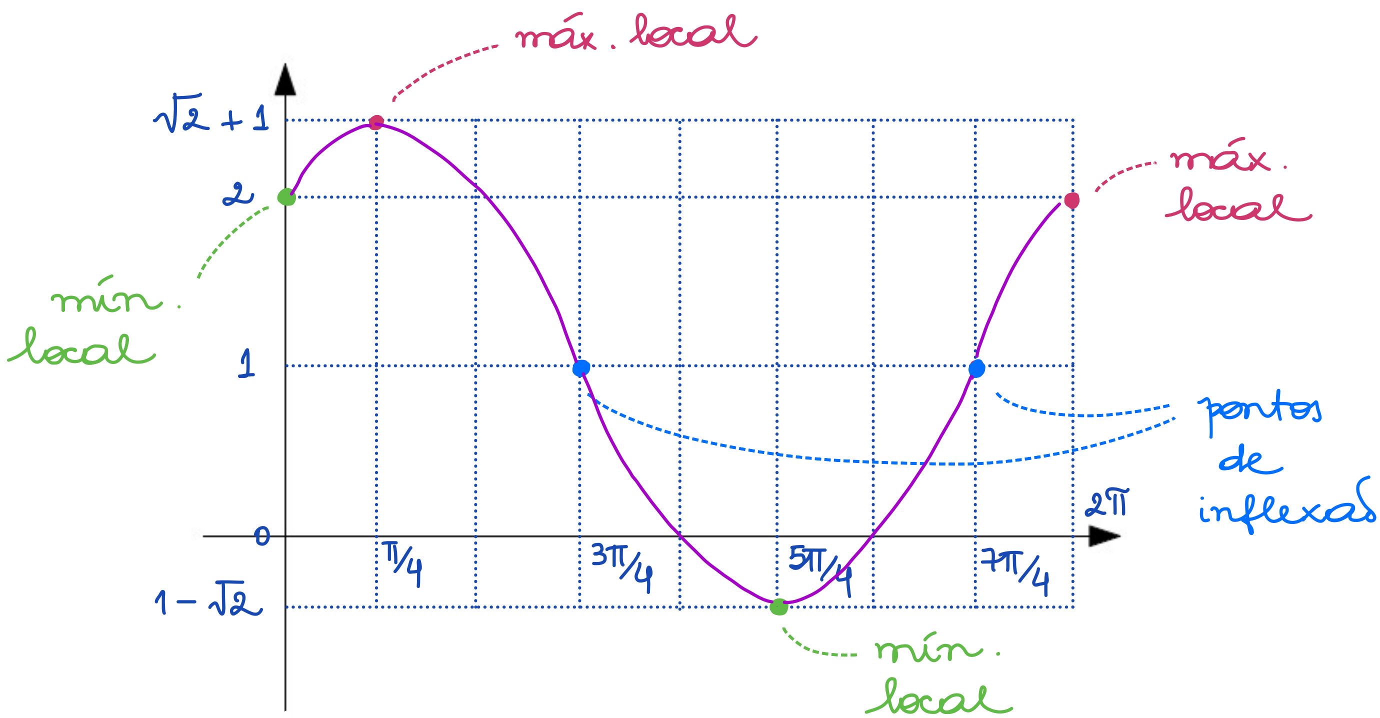
- Analogamente, $f''(x) \leq 0 \iff x \in \left[0, \frac{3\pi}{4}\right] \cup \left[\frac{7\pi}{4}, 2\pi\right]$.

Logo, os int. de concav. p/ baixo do gráfico de f são

$\left[0, \frac{3\pi}{4}\right]$ e $\left[\frac{7\pi}{4}, 2\pi\right]$.

(c) Utilizando as informações obtidas nos itens (a) e (b), esboce abaixo o gráfico de f em seu domínio.

Indique em seu desenho as abscissas e ordenadas de todos os pontos de máximo e de mínimo local de f, e também de seus pontos de inflexão.



$f(x) = \operatorname{sen}(x) + \cos(x) + 1$

<u>Ordenadas dos extremos locais:</u>

$f(0) = 0 + 1 + 1 = 2$

$f(\pi/4) = \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2} + 1 = \sqrt{2} + 1$

$f(5\pi/4) = -\frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2} + 1 = 1 - \sqrt{2}$

$f(2\pi) = 0 + 1 + 1 = 2$

<u>Ordenadas dos pontos de inflexão:</u>

$f(3\pi/4) = \frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2} + 1 = 1$

$f(7\pi/4) = -\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2} + 1 = 1$