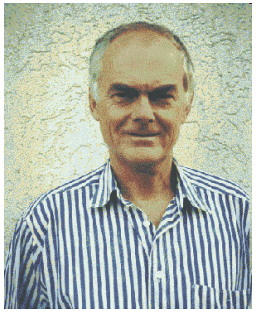
INF 1010
Estruturas de Dados Avançadas

Árvores Rubro Negras

Árvores rubro-negras ou vermelho e preto (red-black tree)



Rudolf Bayer (1939-...)

Rudolf Bayer (1972). "Symmetric binary B-Trees: Data structure and maintenance algorithms". *Acta Informatica* **1** (4): 290--306.

Árvores Rubronegras

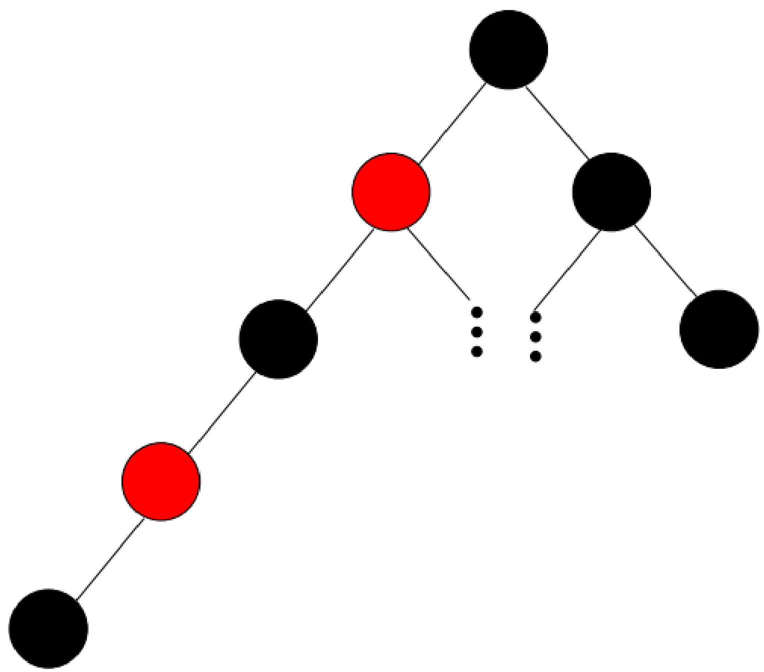
São árvores auto-ajustáveis, que procuram manter o balanceamento de forma automática mediante as seguintes restrições:

1. Todo nó é **vermelho** ou **preto**
2. A raiz é **preta**
3. As folhas são os nós NULL e são **pretas**
4. Nós **vermelhos** só tem **filhos pretos**
5. Todos os caminhos a partir da raiz da árvore até suas folhas passa pelo mesmo número de nós **pretos (altura negra)**

Árvores Rubronegras

Estas restrições garantem que o maior caminho entre a raiz e as folhas é no máximo o dobro do menor caminho.

Elas garantem um balanceamento razoável



Outra definição

A partir de uma ABB, ponteiros nulos são substituídos por nós externos (pretos).

Propriedades dos nós:

RB1: Raiz e nós externos são pretos

RB2: Nenhum caminho da raiz até um nó externo pode possuir dois **nós vermelhos consecutivos**

RB3: Todos os caminhos da raiz até um nó externo devem possuir o mesmo número de **nós pretos**.

Propriedades das arestas:

Uma aresta de um pai para um **filho preto** é **preta**.

Uma aresta de um pai para um **filho vermelho** é **vermelha**.

RB1’: Arestas de um nó interno para um nó externo são **pretas**

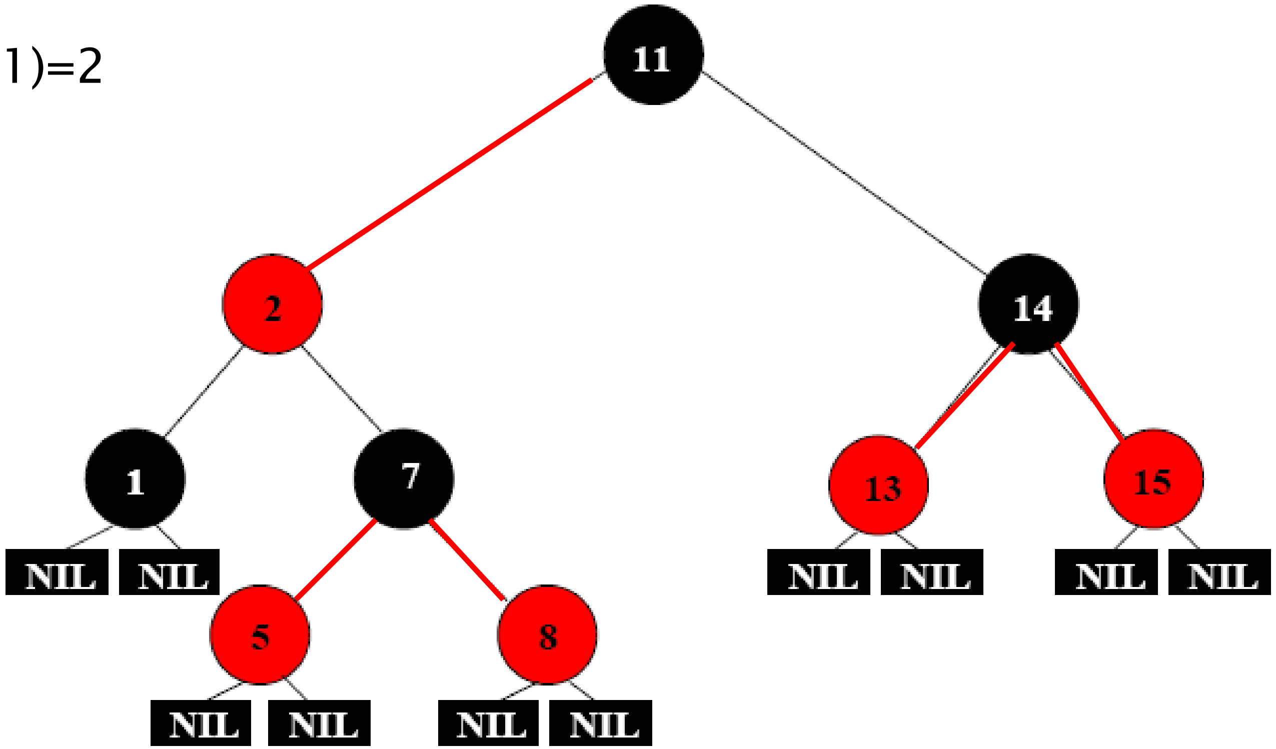
RB2’: Nenhum caminho da raiz até um nó externo pode ter duas **arestas vermelhas consecutivas**

RB3’: Todos os caminhos da raiz até um nó externo têm o mesmo número de **arestas pretas**.

Formas de representação

h(11)=4

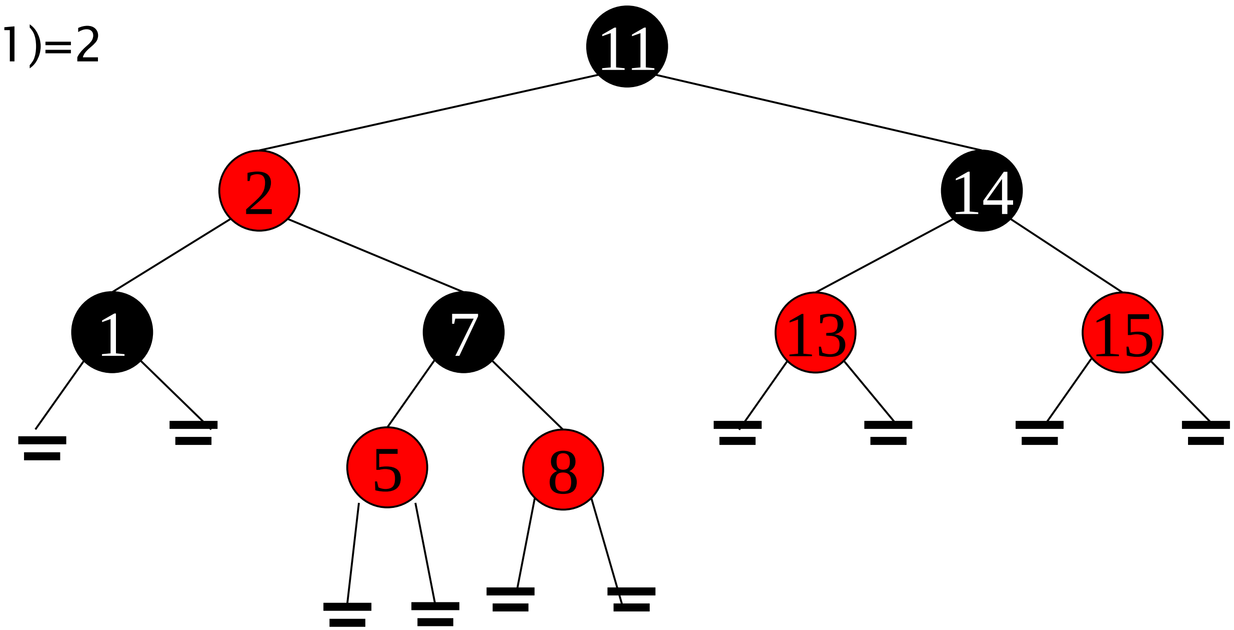
bh(11)=2



Formas de representação

h(11)=4

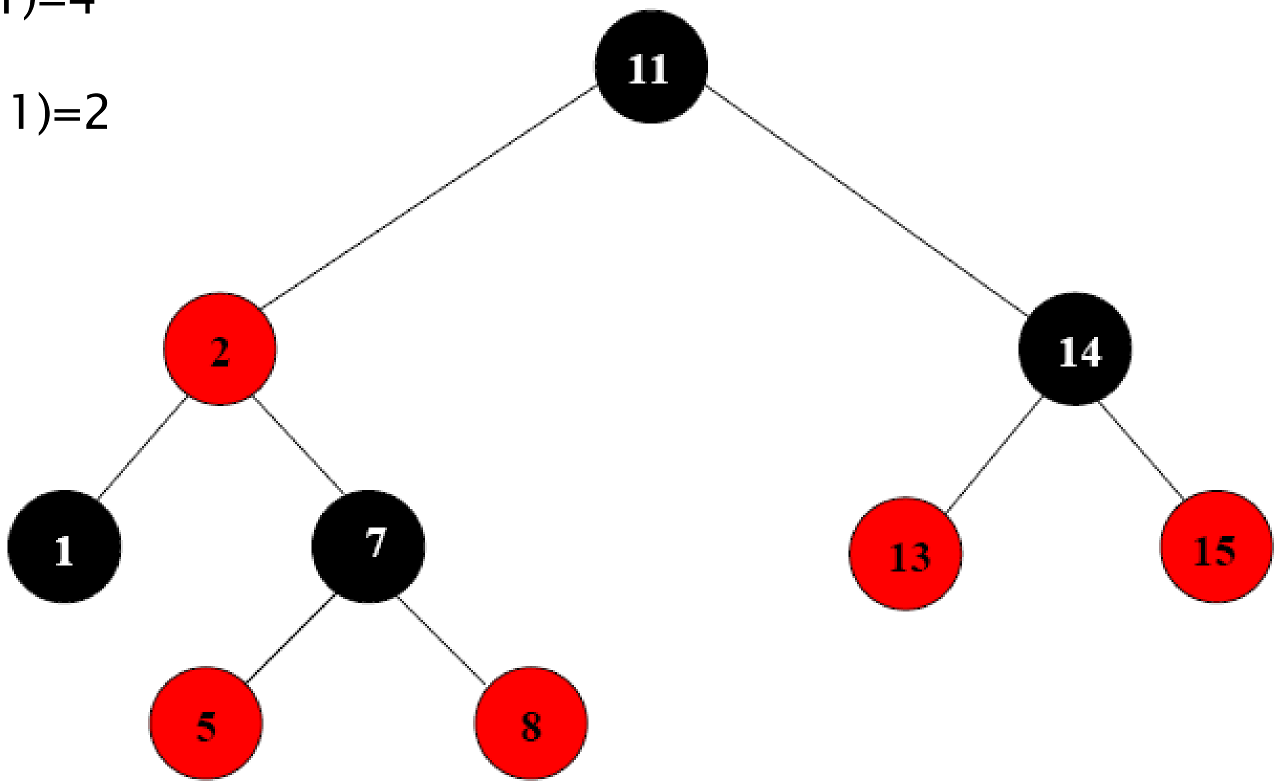
bh(11)=2



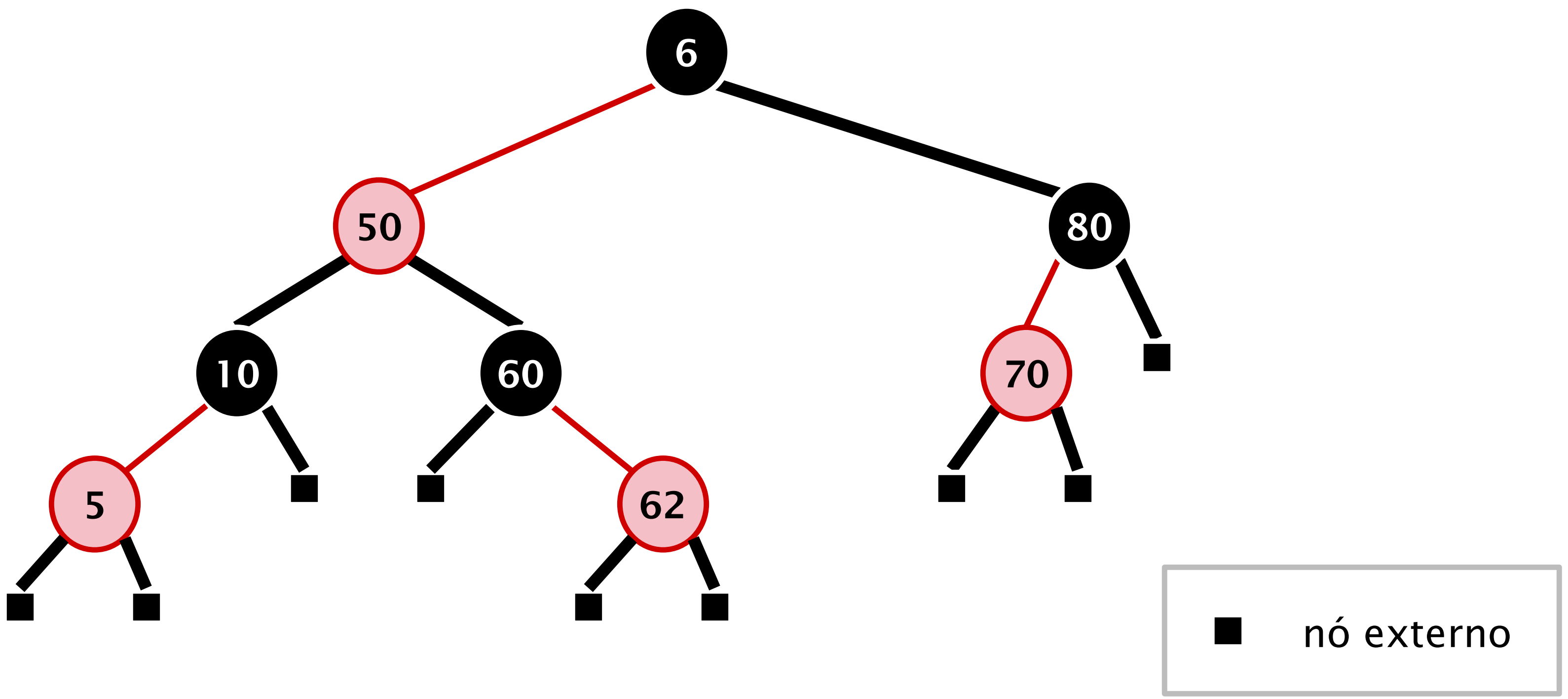
Formas de representação

h(11)=4

bh(11)=2



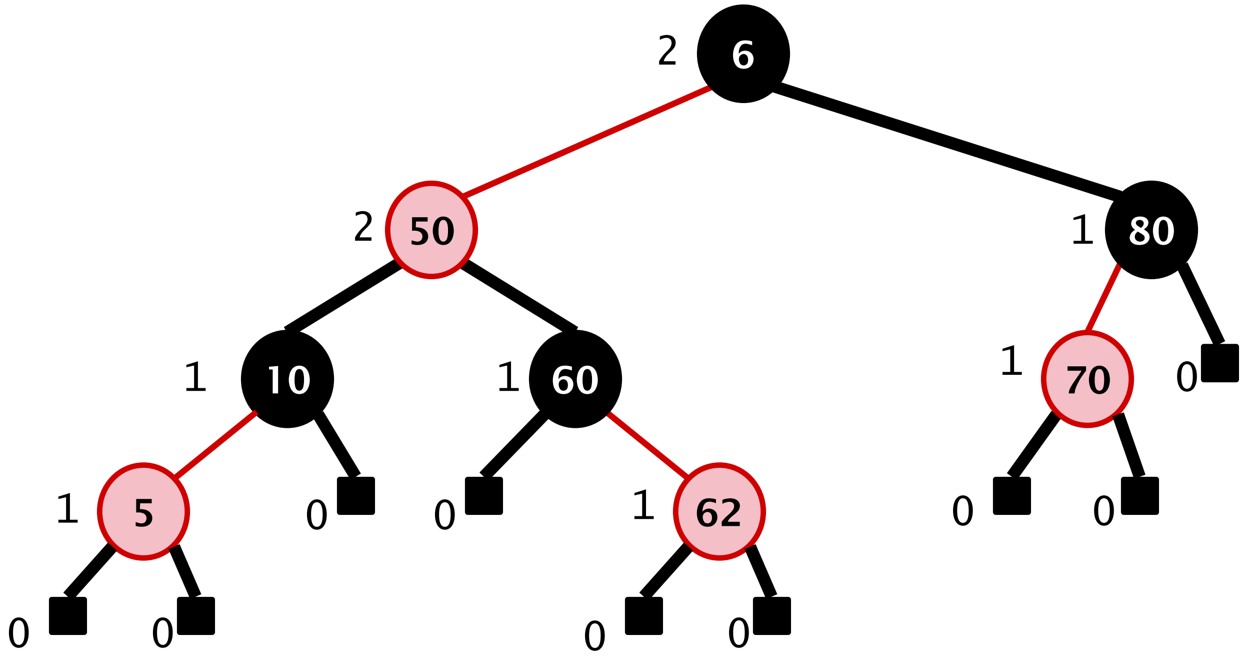
Árvore Red-Black



Árvore Red-Black - definição

Altura negra (rank) de um nó:

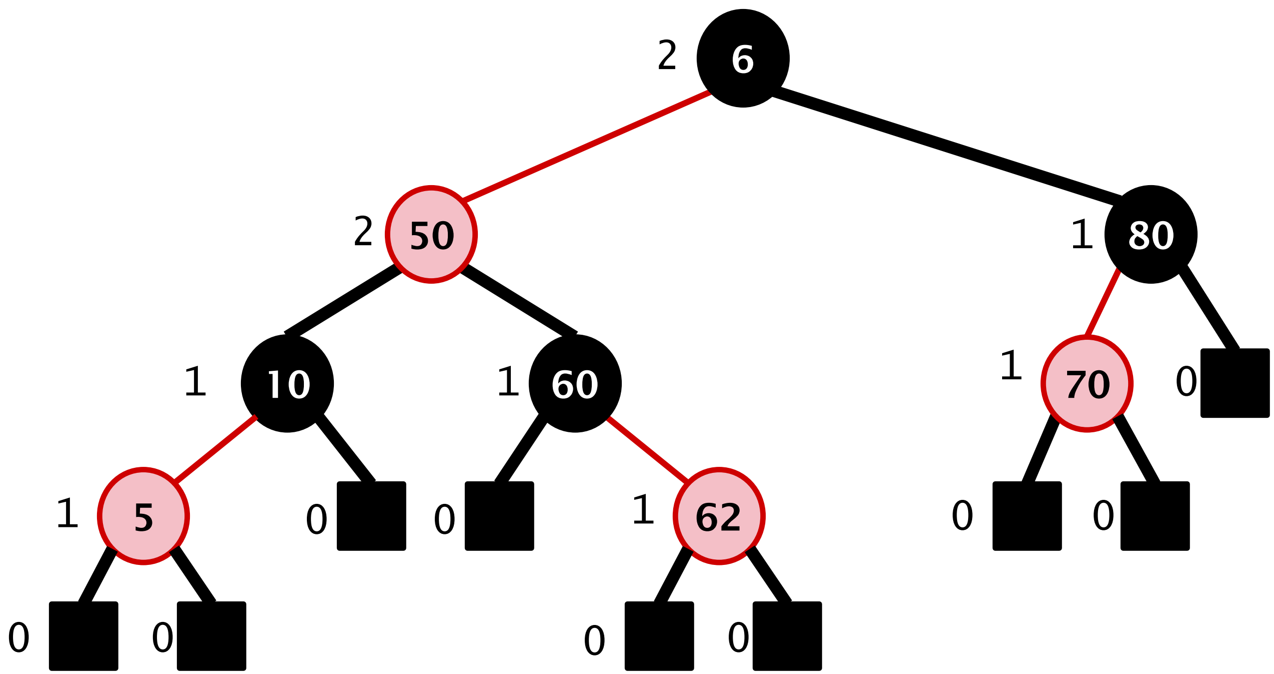
número de **arestas pretas** de qualquer caminho desde o nó até um nó externo



Árvore Red-Black - conceitos

Sejam P e Q dois caminhos da raiz até nós externos:

comprimento(P) $\leq$ 2$\times$comprimento(Q)



Árvore Red-Black - conceitos

r = *rank* da raiz (2)

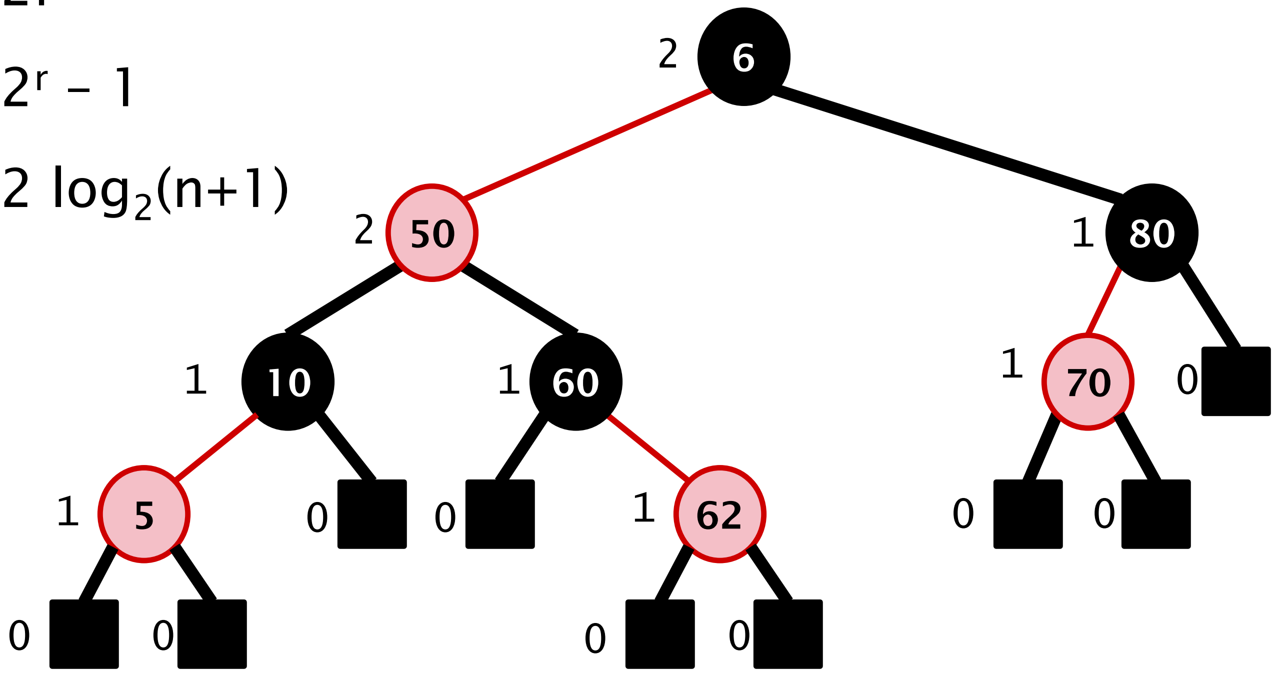
h = altura da árvore sem nós externos (3 = 2r-1)

n = número de nós (8)

$h \leq 2r$

$n \geq 2^r - 1$

$h \leq 2 \log_2(n+1)$



Árvore Red-Black - busca

igual à busca numa árvore binária de busca balanceada.

Árvore Red-Black - inserção

árvore vazia → novo nó **preto**

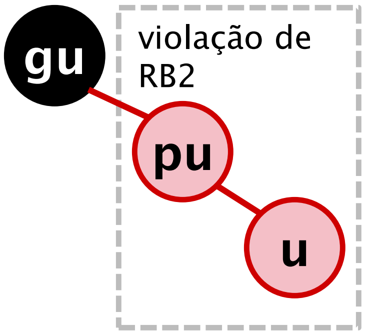
árvore não vazia → novo nó **vermelho**

se houver violação de RB2, a árvore está desequilibrada

u e **pu vermelhos → pu** não pode ser raiz (RB1)

gu existe e é preto (RB2)

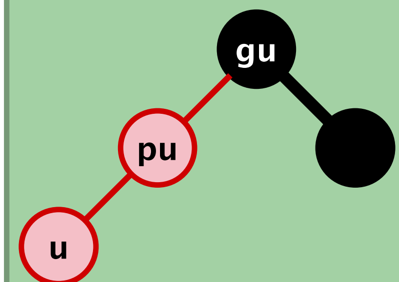
(u = novo nó; pu = pai de u; gu = avô de u)



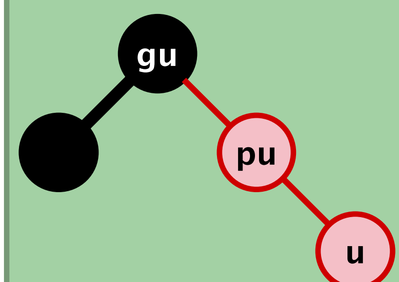
Tipos de desbalanceamento

notação XYc: pu é filho X {L,R} de gu
u é filho Y {L,R} de pu
outro filho de gu é de cor c {b,r}

LLb

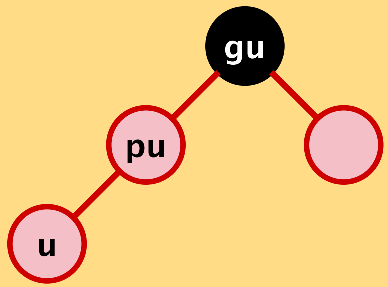


RRb

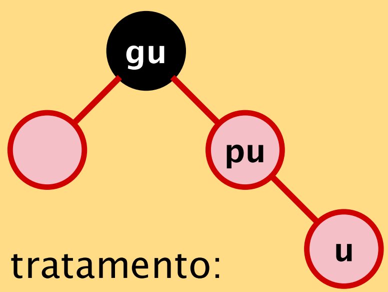


tratamento:
rotação

LLr

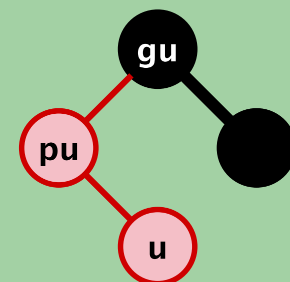


RRr

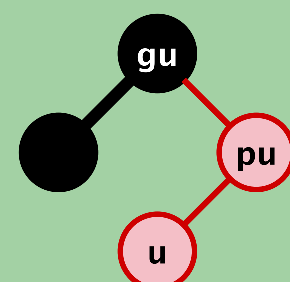


tratamento:
muda cor e
reclassifica com
u'=gu

LRb

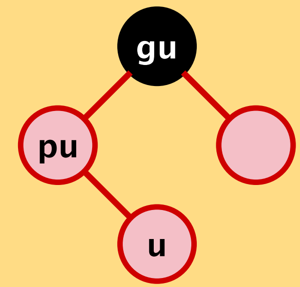


RLb

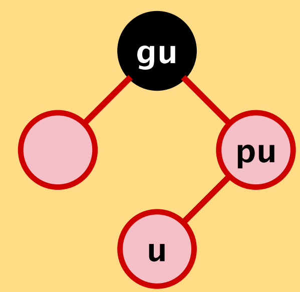


tratamento:
rotação

LRr

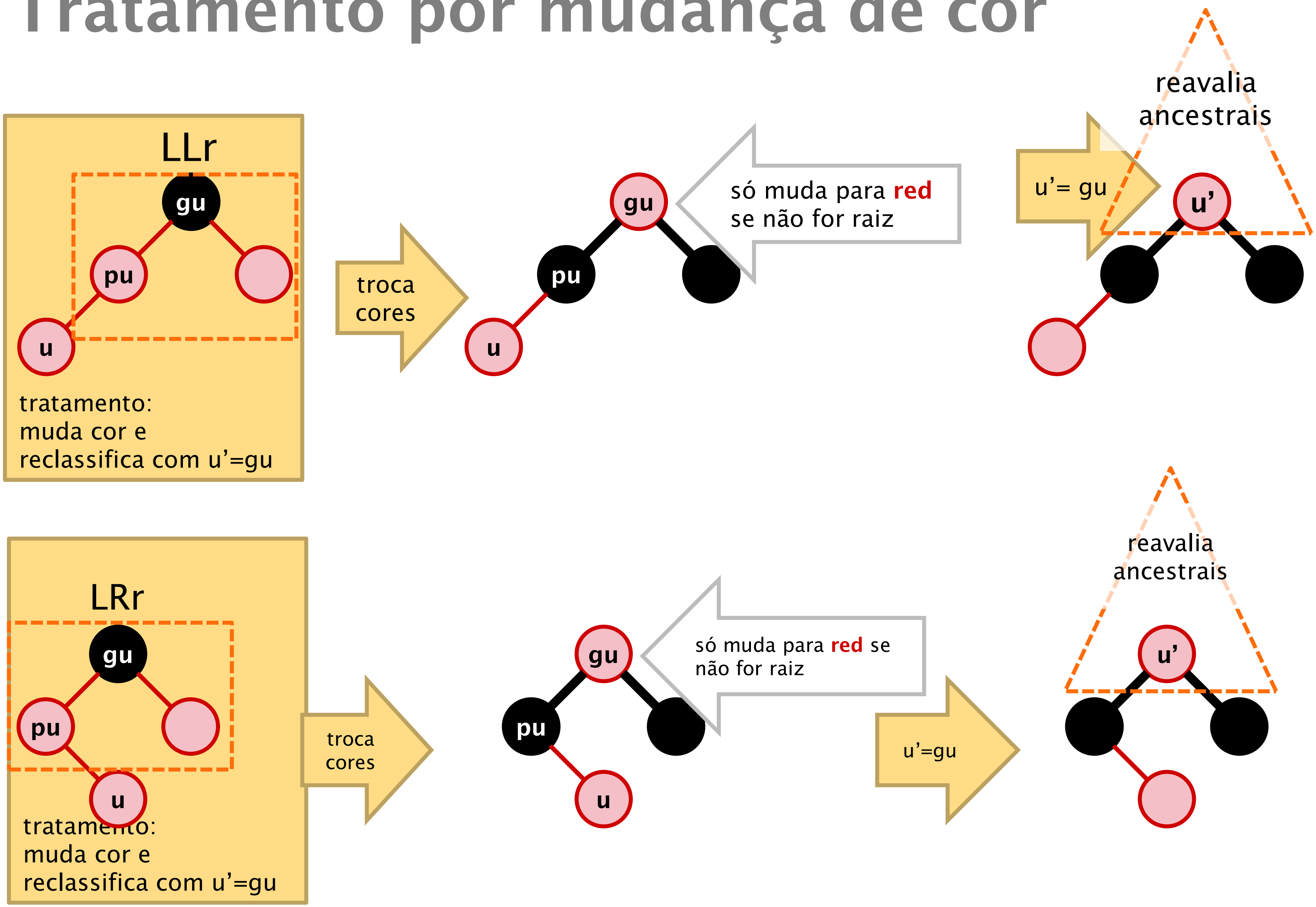


RLr

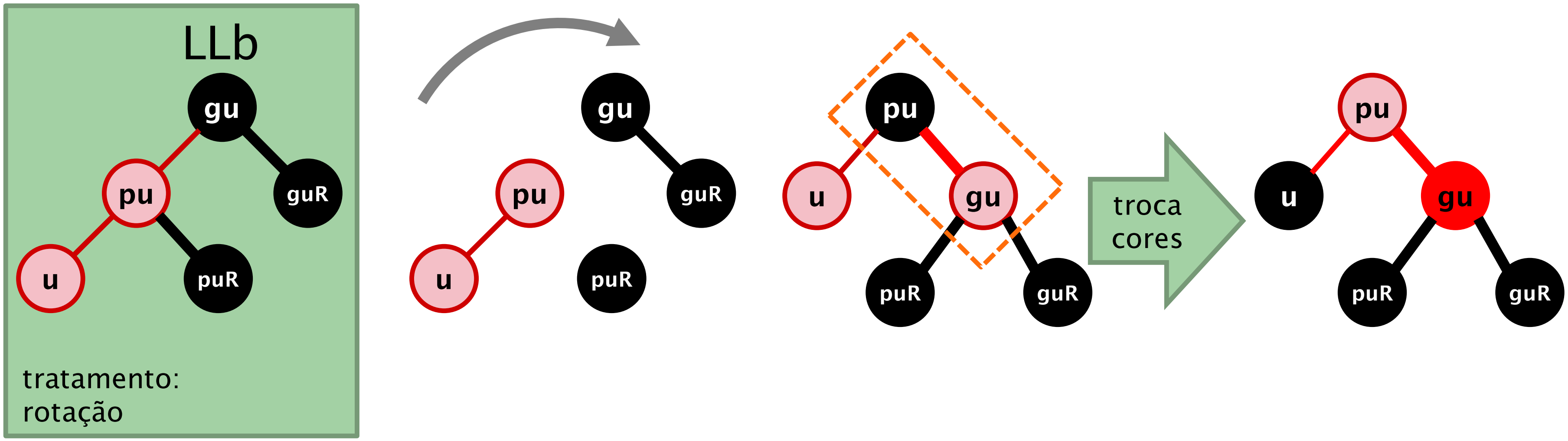


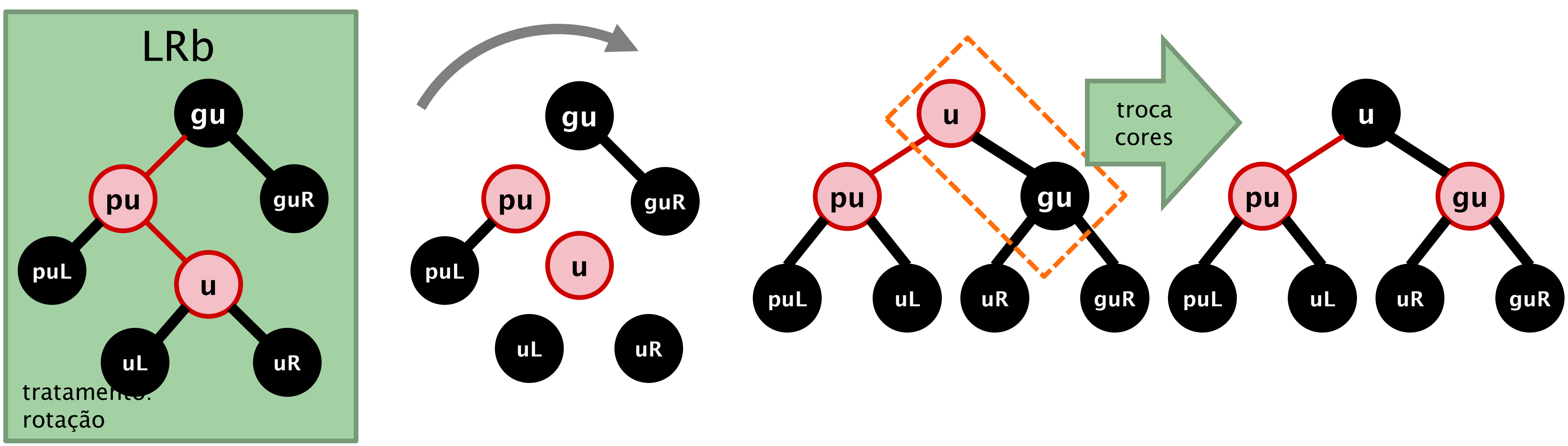
tratamento:
muda cor e
reclassifica com u'=gu

Tratamento por mudança de cor

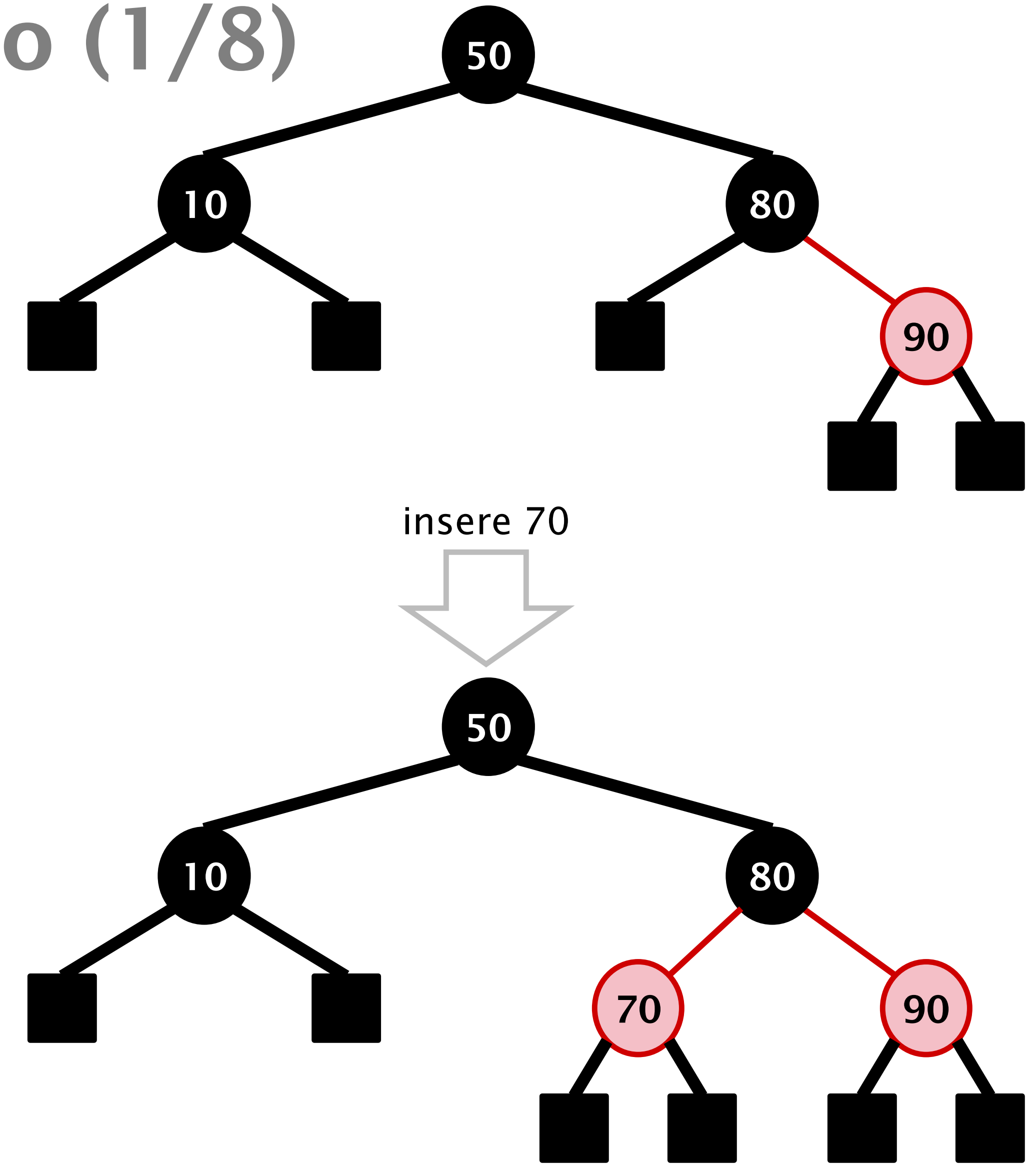


Tratamento por rotação

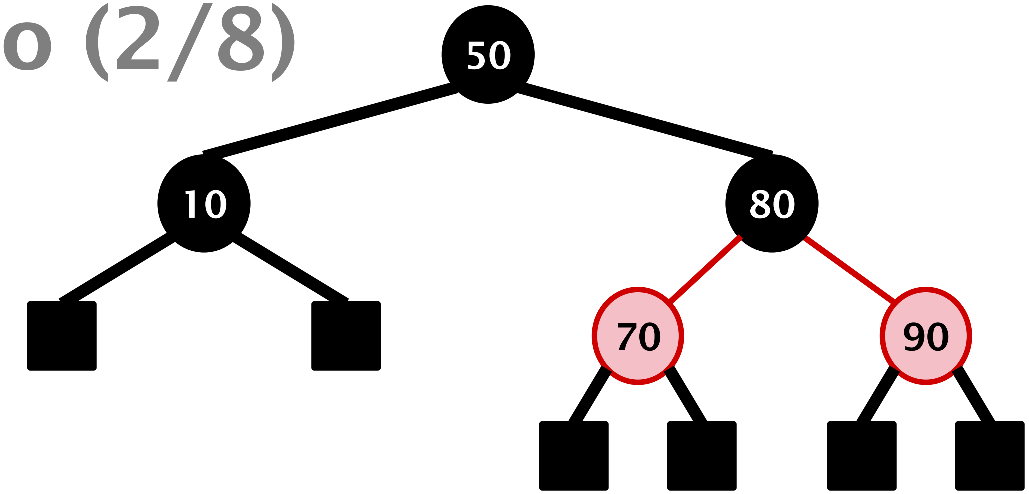




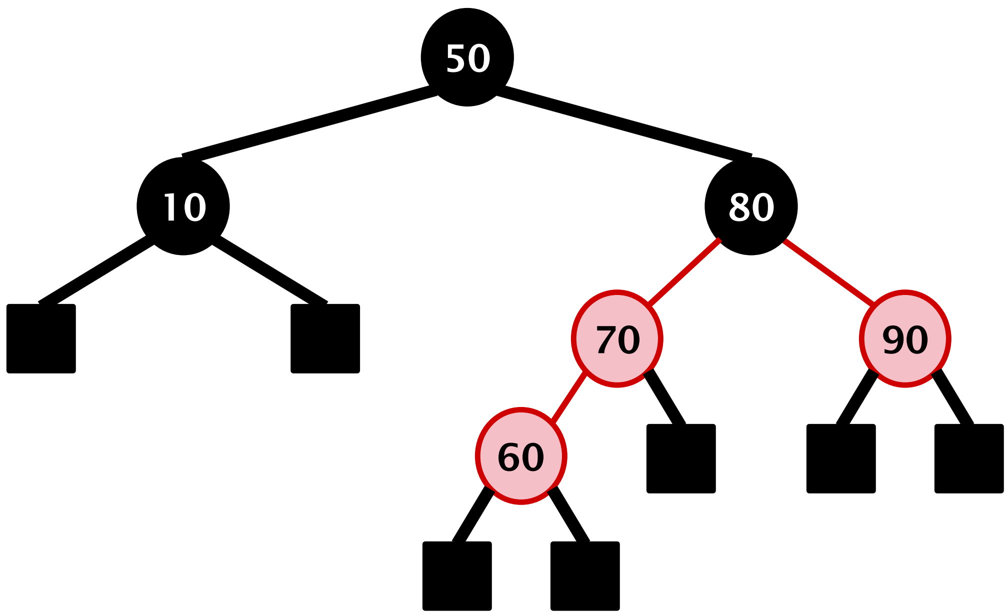
Exemplo (1/8)



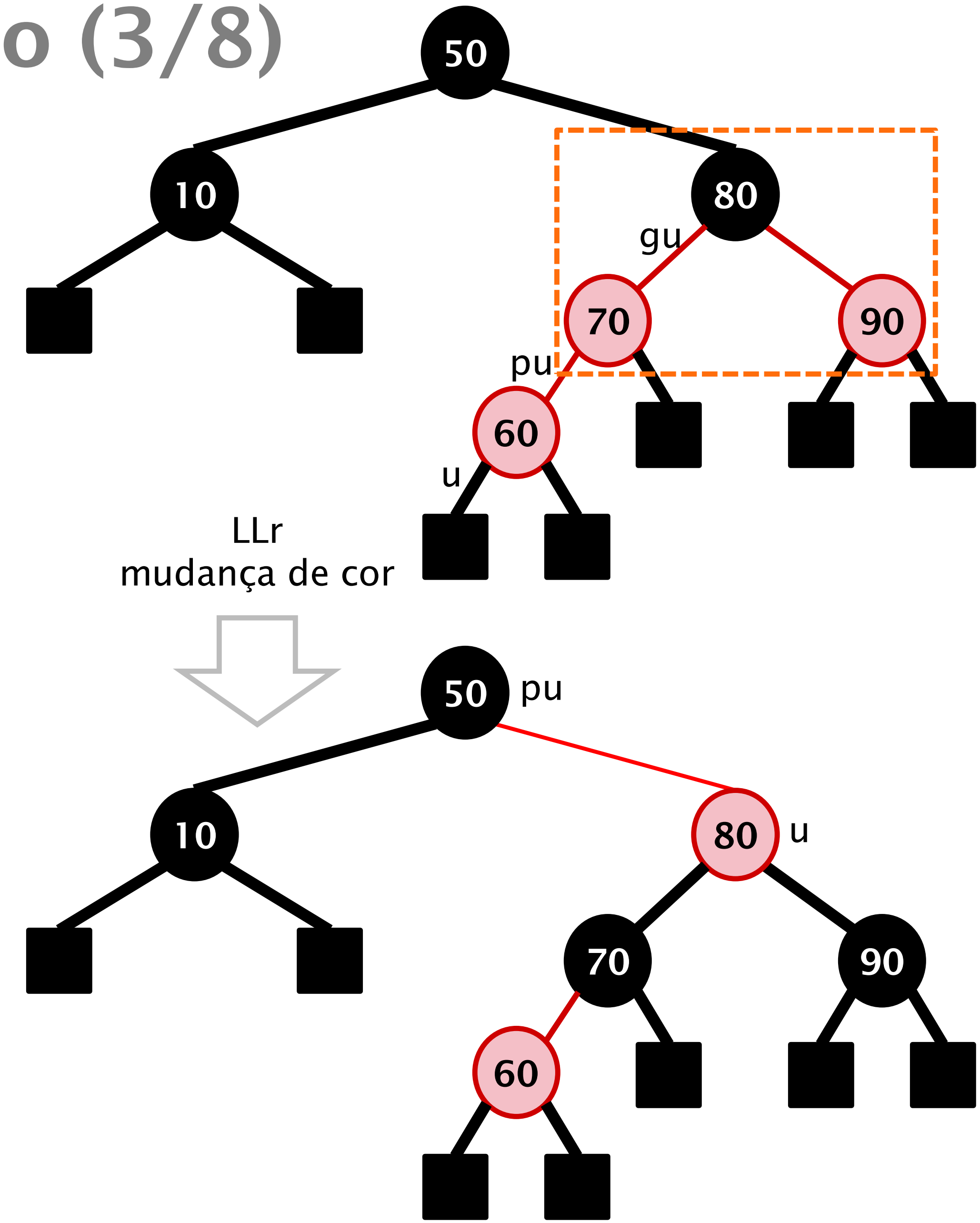
Exemplo (2/8)



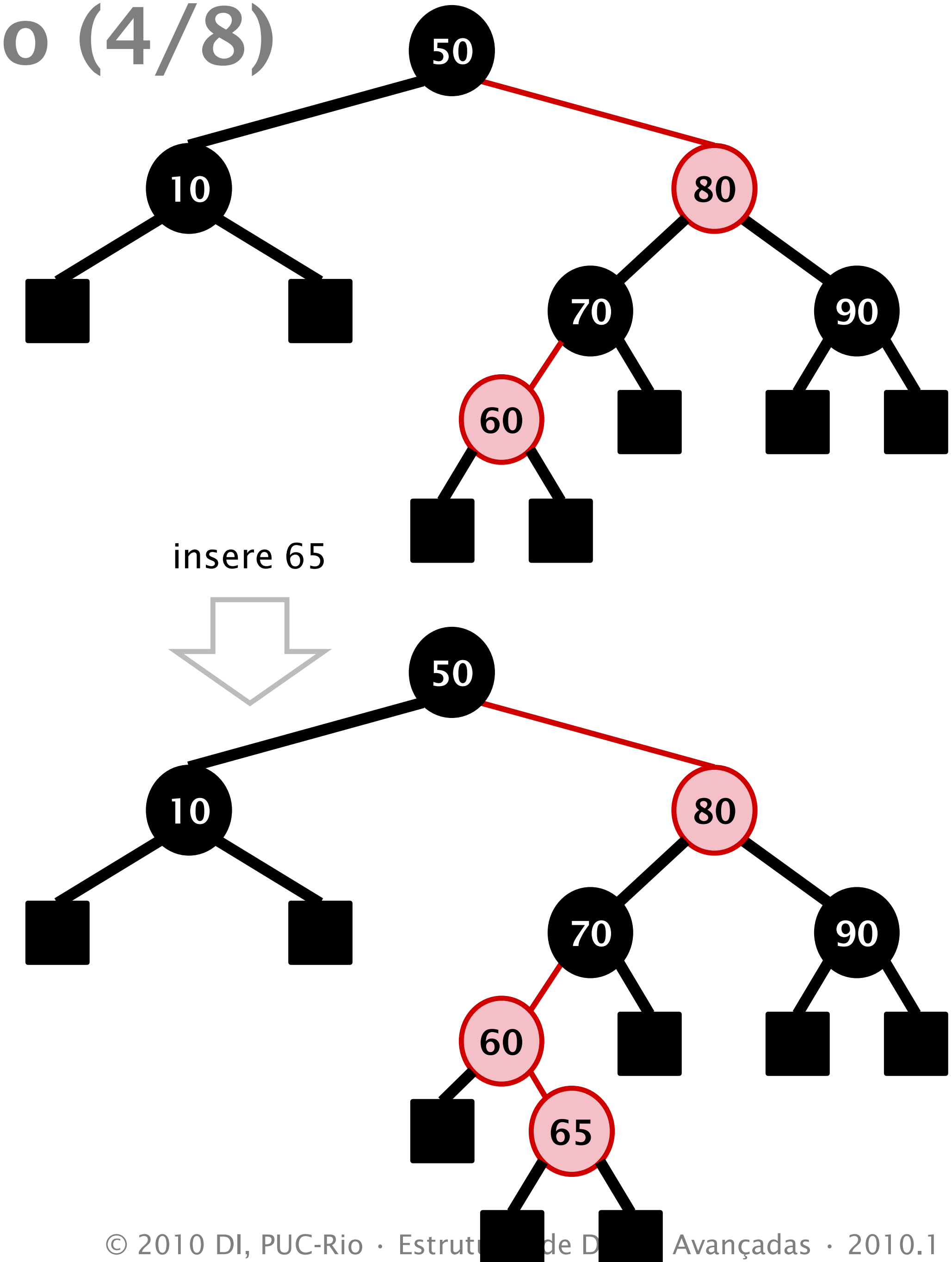
insere 60



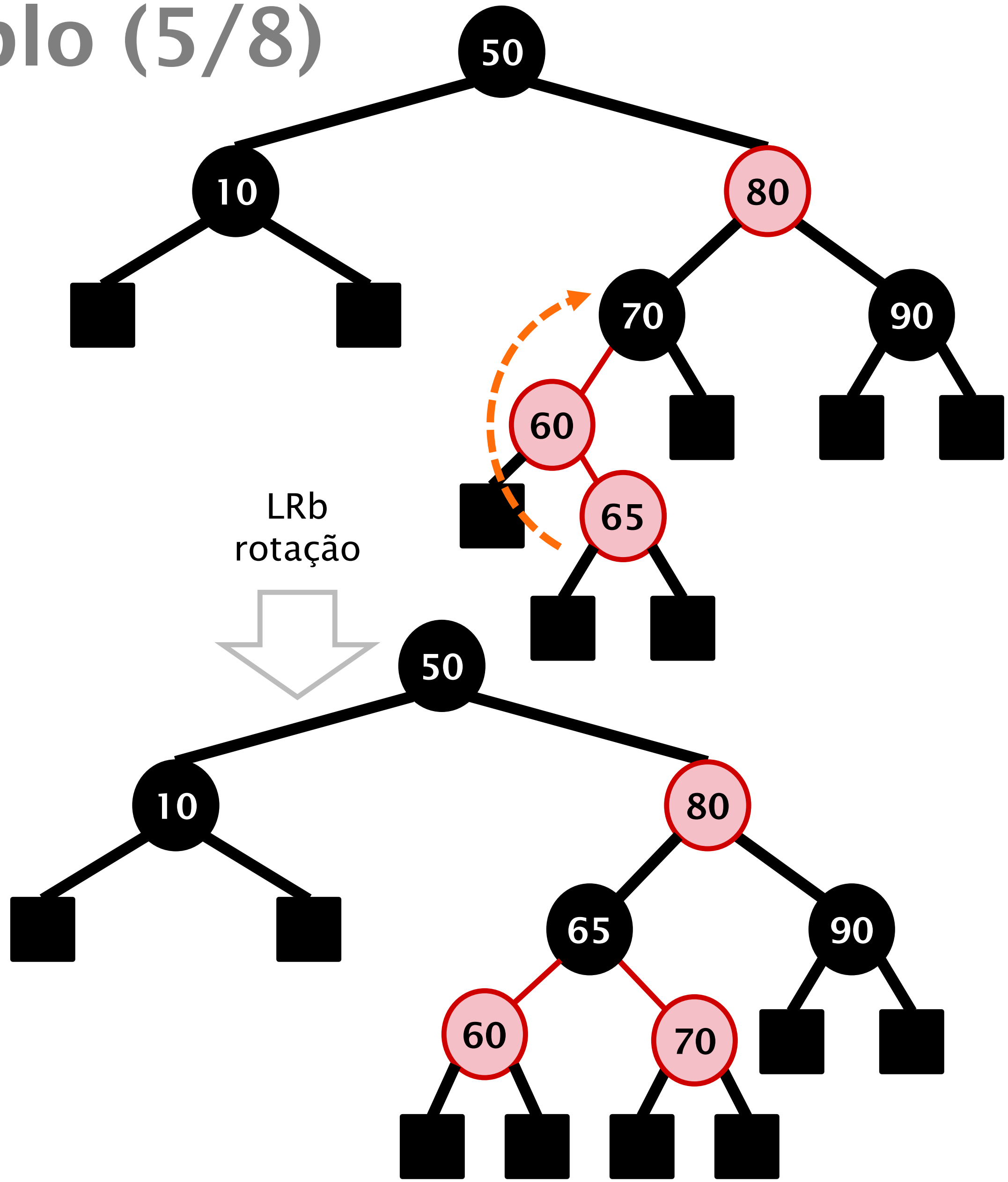
Exemplo (3/8)



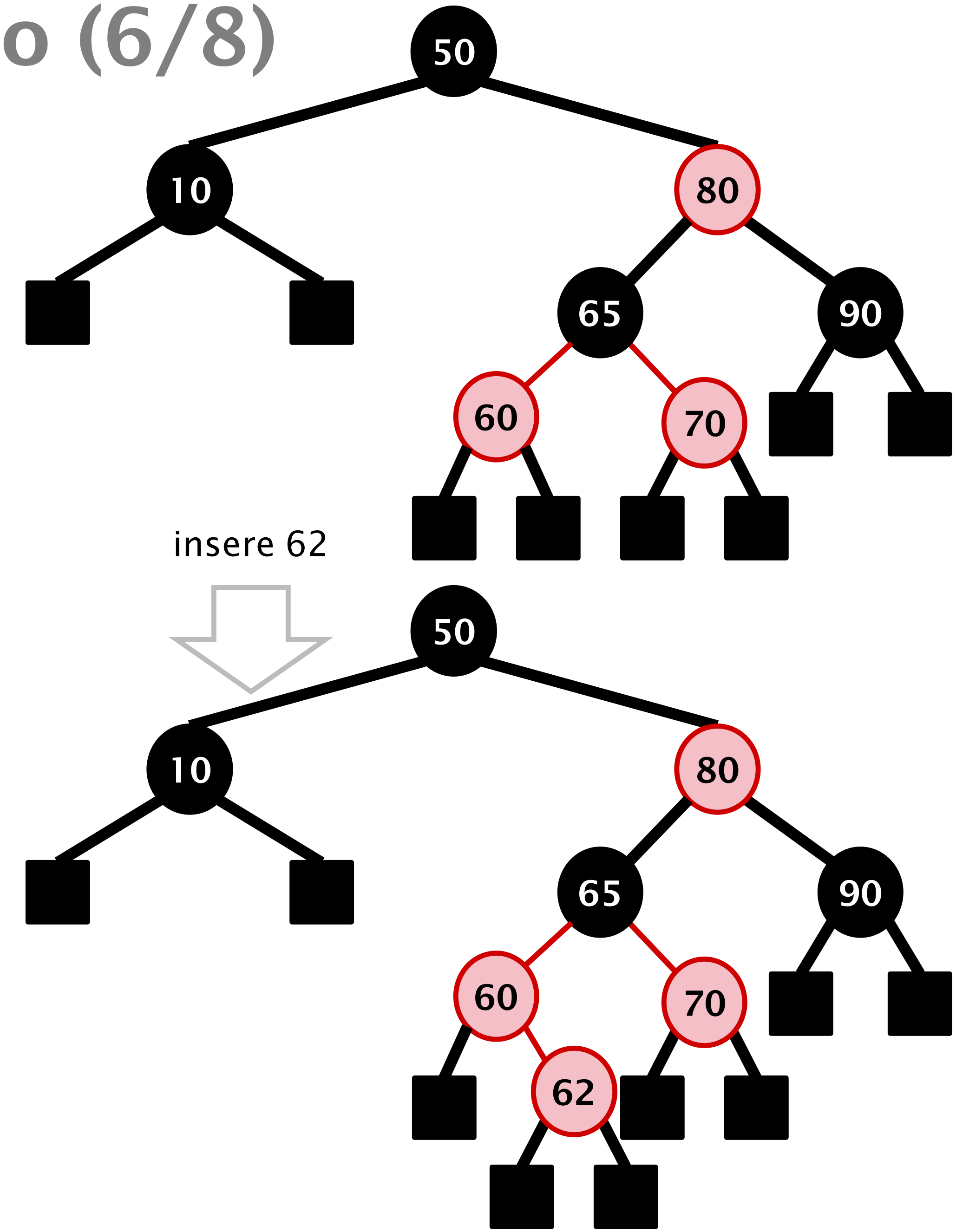
Exemplo (4/8)



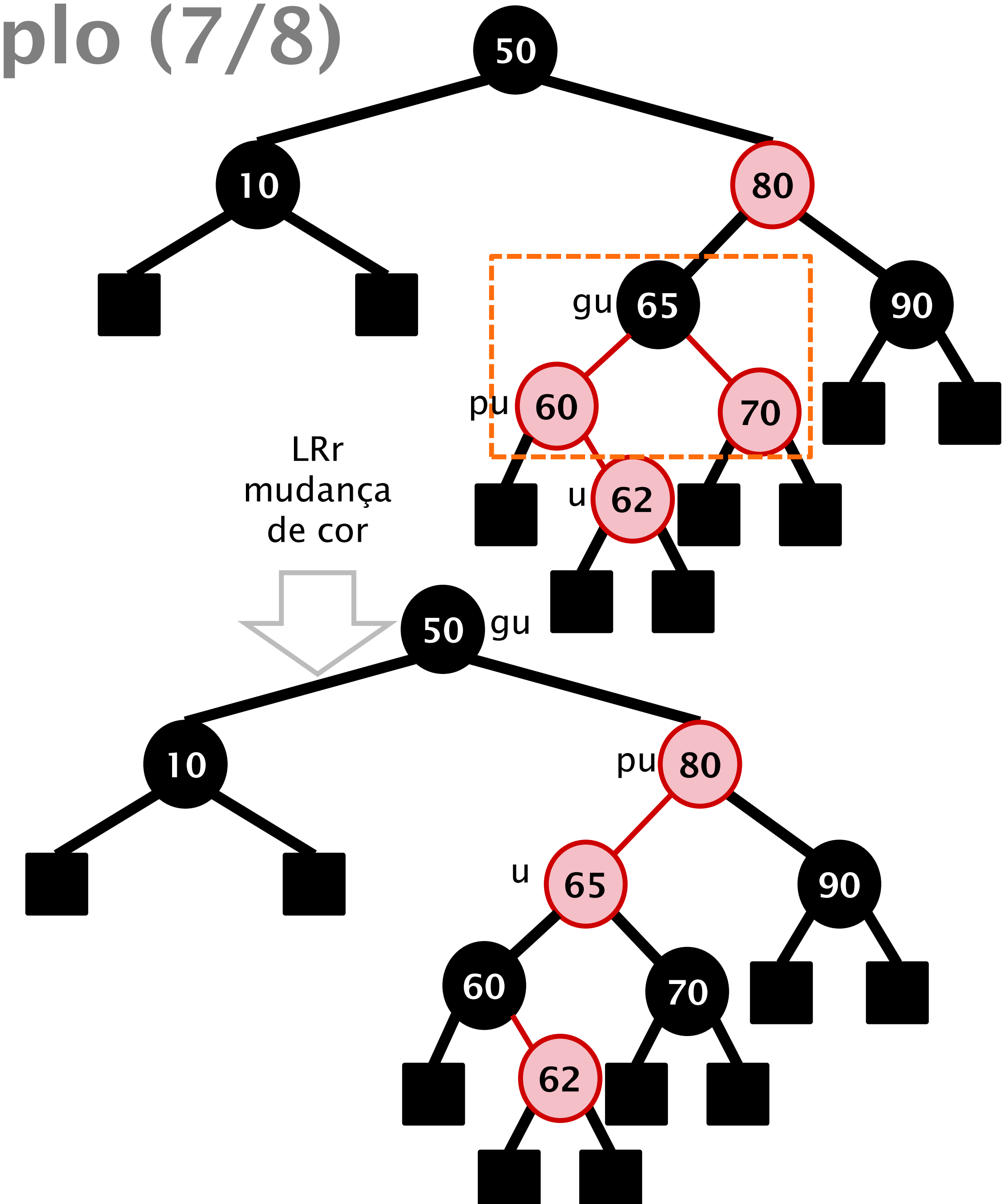
Exemplo (5/8)



Exemplo (6/8)

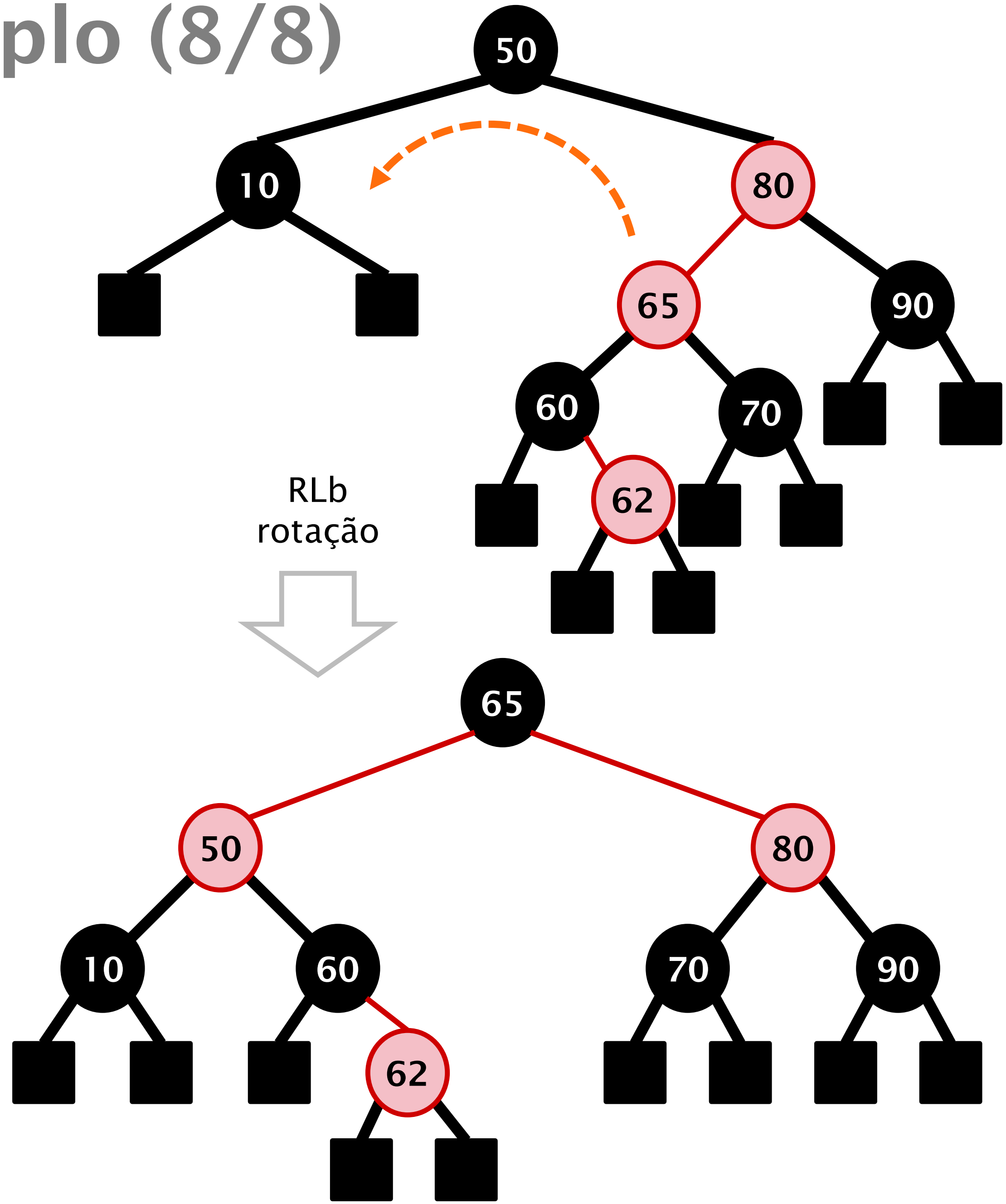


Exemplo (7/8)



50
10
80
gu
65
90
pu
60
70
LRr
mudança
de cor
u
62
50
gu
10
pu
80
u
65
90
60
70
62

Exemplo (8/8)

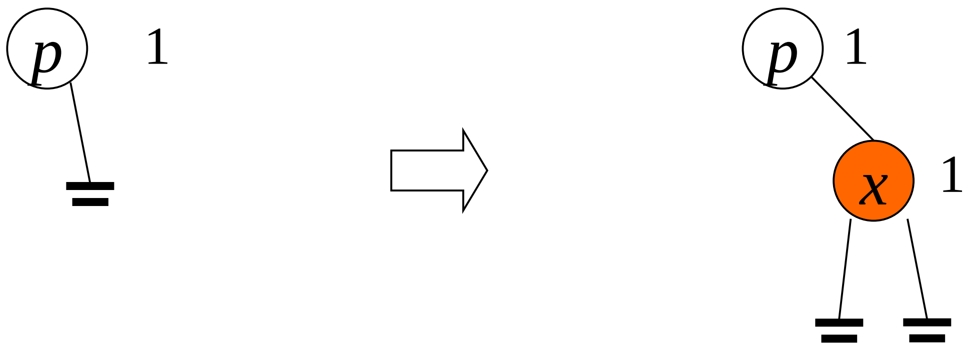


dúvidas?

http://gauss.ececs.uc.edu/Users/Franco/RedBlackTester/redblack.html

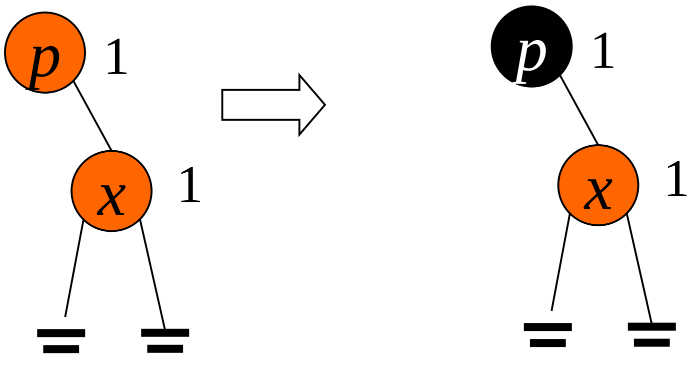
Inserção em Árvore Rubro-Negra

- Ao contrário da árvore AVL, agora temos agora vários critérios para ajustar simultaneamente
- Ao inserir um nó *x* numa posição vazia da árvore (isto é, no lugar de um nó nulo) este é pintado de vermelho. Isto garante a manutenção do critério (2), já que um nó vermelho não contribui para a altura negra



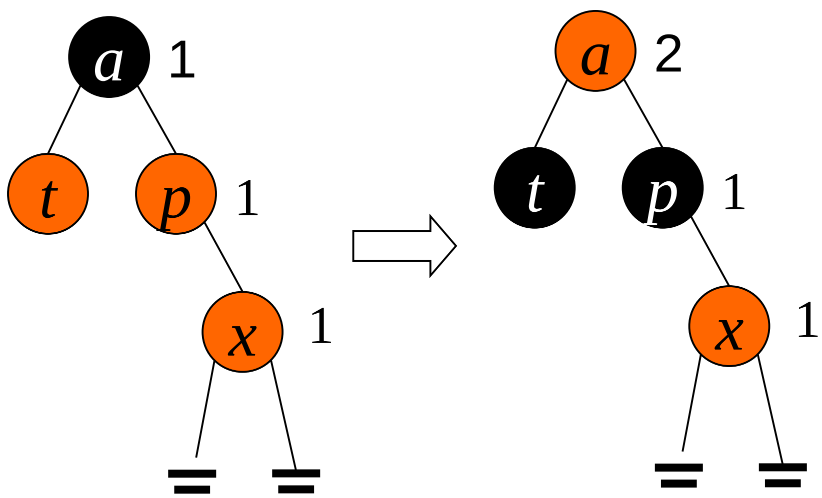
Inserção em Árvore Rubro-Negra

- [Caso 0] Se *x* não tem pai ou se *p*, o pai de *x*, é negro, nada mais precisa ser feito já que o critério (3) também foi mantido
- [Caso 1] Suponha agora que *p* é vermelho. Então, se *p* não tem pai, então *p* é a raiz da árvore e basta trocar a cor de *p* para negro



Inserção em Árvore Rubro-Negra

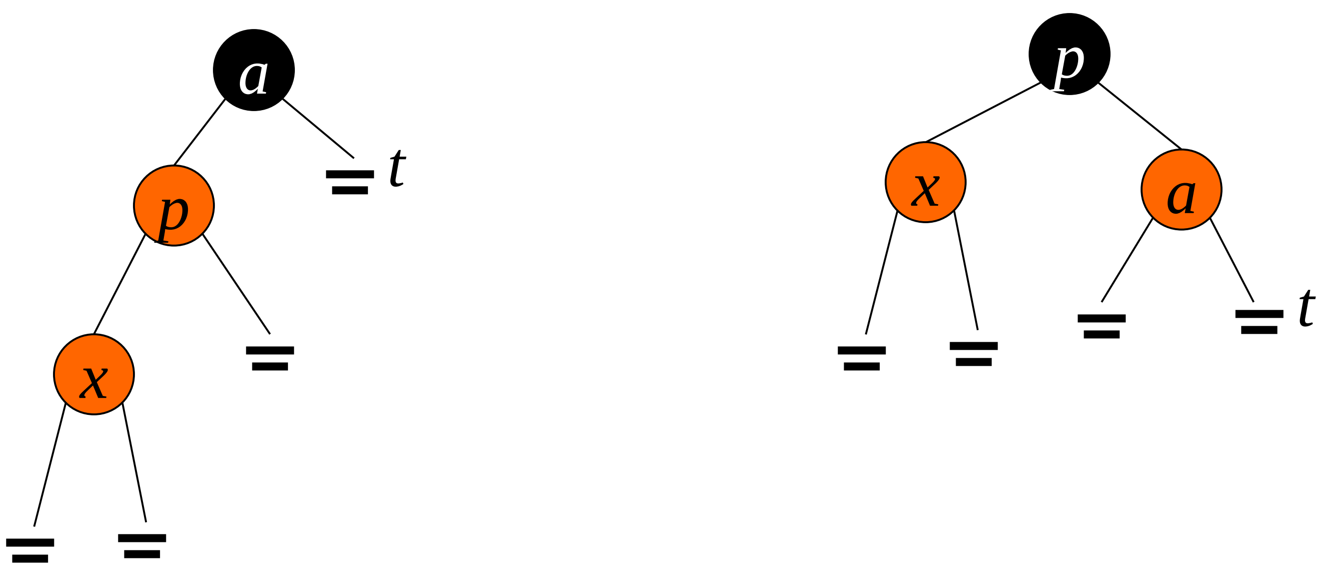
- [Caso 2] Suponha agora que *p* é vermelho e *a*, o pai de *p* (e avô de *x*) é preto. Se *t*, o irmão de *p* (tio de *x*) é vermelho, ainda é possível manter o critério (3) apenas fazendo a recoloração de *a*, *t* e *p*



Obs.: Se o pai de *a* é vermelho, o rebalanceamento tem que ser feito novamente

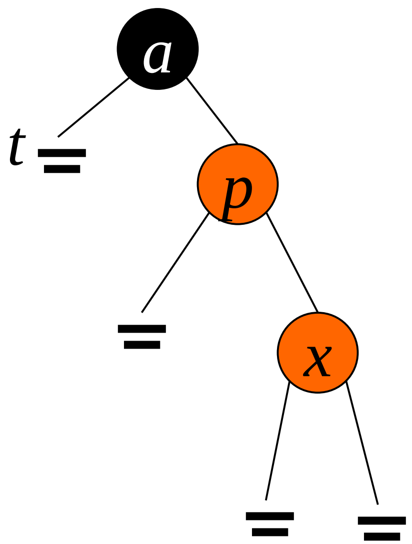
Inserção em Árvore Rubro-Negra

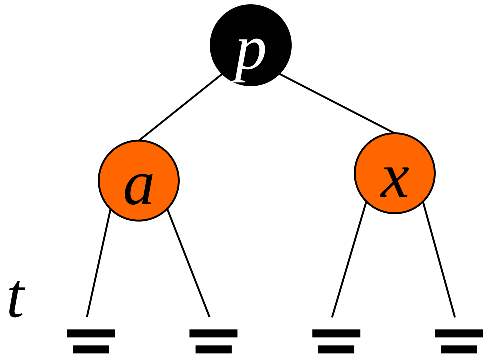
- [Caso 3] Finalmente, suponha que *p* é vermelho, seu pai *a* é preto e seu irmão *t* é preto. Neste caso, para manter o critério (3) é preciso fazer rotações envolvendo *a*, *t*, *p* e *x*. Há 4 subcasos que correspondem às 4 rotações possíveis:
  – [Caso 3a] Rotação Direita



Inserção em Árvore Rubro-Negra

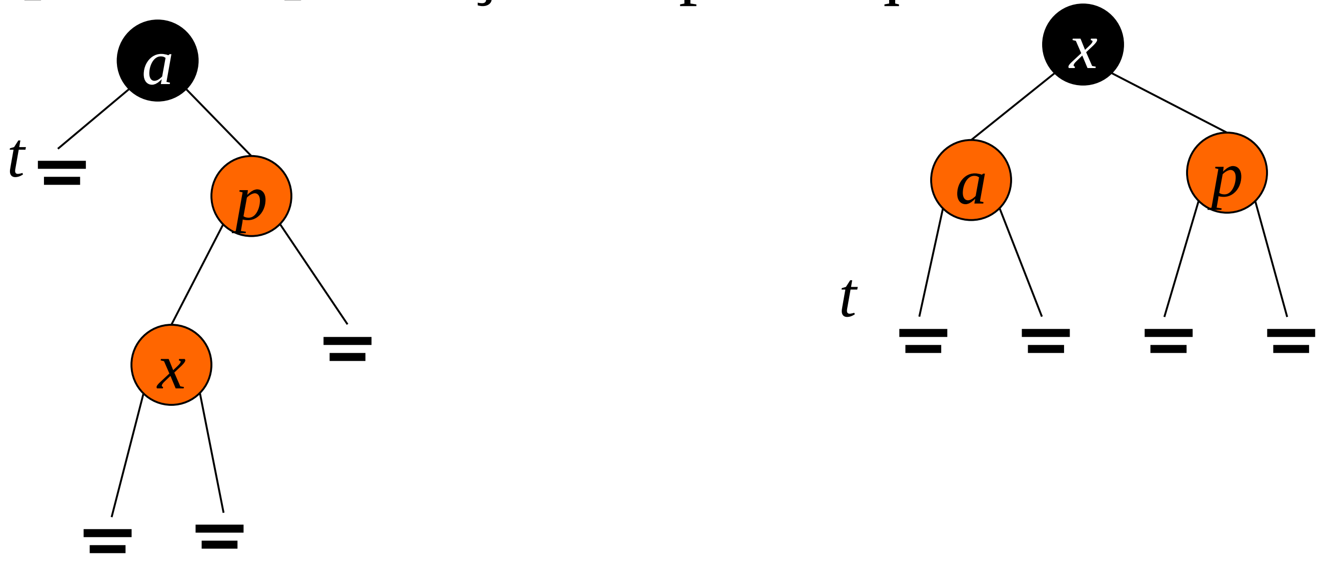
– [Caso 3b] Rotação Esquerda





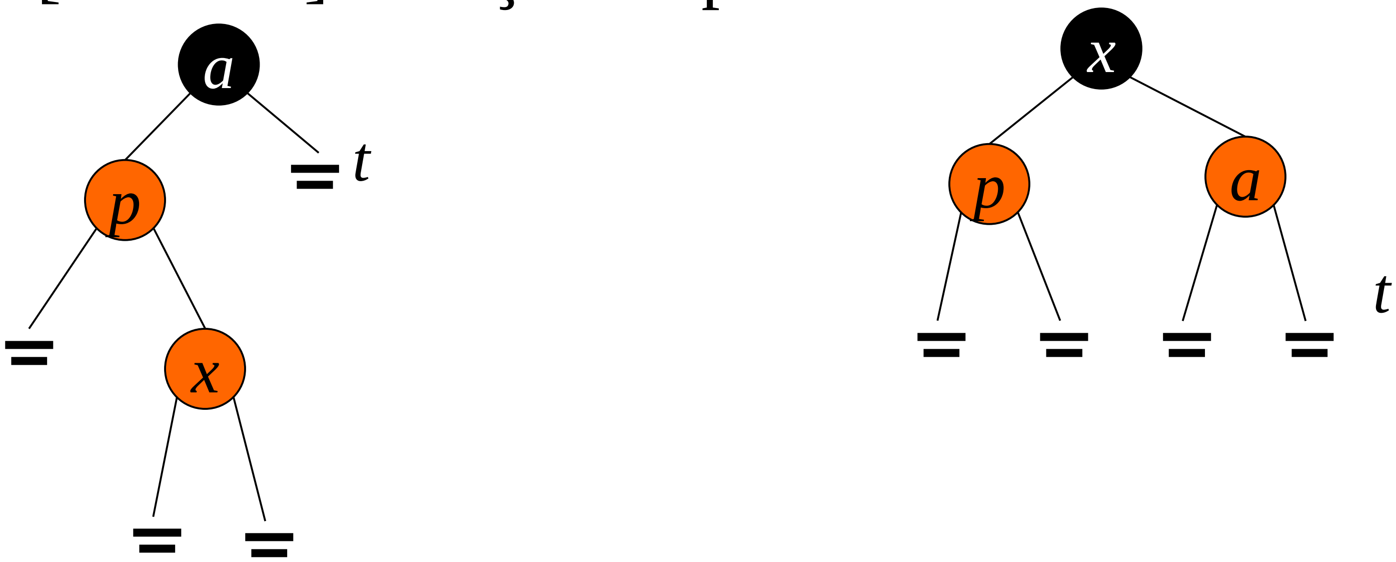
Inserção em Árvore Rubro-Negra

– [Caso 3c] Rotação Dupla Esquerda



Inserção em Árvore Rubro-Negra

– [Caso 3d] Rotação Dupla Direita



Complexidade da Inserção em Árvore Rubro-Negra

- *Rebalancear* tem custo $O(1)$
- *Rotação* têm custo $O(1)$
- *Inserir* tem custo $O(\log n)$