PUC RIO

MAT4161/MAT4181 – Cálculo a uma Variável
P2 – 03 de junho de 2024

Nome Legível : Gabarito

Assinatura : ____________________

Matrícula : ____________________ Turma : ________

Questão	Valor	Grau	Revisão
1^a	$1,8$		
2^a	$1,7$		

AG2 (1,0)	TG (2,0)	P2 Maple (3,5)	P2 (3,5)	Total (10,0)	Revisão

Instruções Gerais:

- A duração da prova é de 1h50min.
- A tolerância de entrada é de 30min após o início da prova. Se um aluno terminar a prova em menos de 30min, deverá aguardar em sala antes de entregar a prova e sair de sala.
- A prova deve ser resolvida apenas nas folhas recebidas e nos espaços reservados para soluções. Não é permitido destacar folhas da prova.
- A prova é sem consulta a professores, fiscais ou a qualquer tipo de material. A interpretação dos enunciados faz parte da prova.
- O aluno só poderá realizar a prova e assinar a lista de presença na sua turma/sala.
- O aluno só poderá manter junto a si: lápis, borracha e caneta. Caso necessário, o fiscal poderá solicitar ajuda a outro aluno e apenas o fiscal repassará o material emprestado.
- O celular deverá ser desligado e lacrado dentro do saco plástico fornecido pelo fiscal.
- O aluno não poderá sair de sala enquanto estiver fazendo a prova.

Instruções Específicas:

- Todas as questões devem ser justificadas de forma clara, rigorosa e de preferência sucinta. Respostas sem justificativas não serão consideradas.
- A prova pode ser resolvida a lápis ou a caneta de tinta azul ou preta. Não é permitido o uso de caneta de tinta vermelha ou verde. Não é permitido o uso de corretivo líquido.
- Não é permitido o uso de calculadora ou qualquer dispositivo eletrônico.
- Esta prova possui 2 questões. Confira.

Questão 1. Calcule:

(a) $f'(x)$, onde $f(x) = \dfrac{\overbrace{\text{sen}(\pi x)}^{g(x)}}{\underbrace{xe^{2x}+1}_{h(x)}}$.

$$f'(x) = \frac{(xe^{2x}+1)\overbrace{(\cos(\pi x)\cdot\pi)}^{g'(x)} - (\text{sen}(\pi x))\overbrace{((1)e^{2x} + xe^{2x}\cdot 2}^{h'(x)}}{(xe^{2x}+1)^2}$$

$$g(x) = \text{sen}(\pi x) \therefore g'(x) = \cos(\pi x)\cdot\pi$$

$$h(x) = xe^{2x}+1 \therefore h'(x) = (1)e^{2x} + x(e^{2x}\cdot 2) + 0$$

(b) $\int_0^1 \frac{x^2}{x^3+1}\,dx$

$$\int \frac{\overbrace{x^2\,dx}^{\frac{du}{3}}}{\underbrace{x^3+1}_{u}} \overset{*}{=} \int \frac{1}{u}\cdot\frac{du}{3} = \frac{1}{3}\ln(|u|)+C = \frac{1}{3}\ln(|x^3+1|)+C^{*}$$

(*) Substituição Simples: $\begin{cases} u = x^3+1 \\ du = 3x^2\,dx \therefore \frac{du}{3} = x^2\,dx \end{cases}$

$$\int_0^1 \frac{x^2}{x^3+1}\,dx \overset{**}{=} \left(\frac{1}{3}\ln(|x^3+1|)\right)\Big]_0^1$$

$$= \frac{1}{3}\ln(|\underbrace{(1)^3+1}_{=2}|) - \frac{1}{3}\ln(|\underbrace{(0)^3+1}_{=1}|)$$

$$= \frac{1}{3}\ln(2) - \frac{1}{3}\underbrace{\ln(1)}_{=0}$$

$$= \frac{1}{3}\ln(2)$$

(c) $\int \sqrt{x} \ln(3x)\, dx$

$$\boxed{uv - \int v\, du}$$

Partes: $u = \ln(3x) \quad du = \frac{1}{3x} \cdot 3dx \therefore du = \frac{1}{x} dx$

$$\int 1 dv = \int \sqrt{x}\, dx \therefore v = \int x^{\frac{1}{2}} dx = \frac{2}{3} x^{\frac{3}{2}}$$

$$\int \sqrt{x} \ln(3x)\, dx = \frac{2}{3} x^{\frac{3}{2}} \ln(3x) - \int \frac{2}{3} x^{\frac{3}{2}} \cdot \frac{1}{x} dx$$

$$= \frac{2}{3} x^{\frac{3}{2}} \ln(3x) - \frac{2}{3} \int x^{\frac{1}{2}} dx$$

$$= \frac{2}{3} x^{\frac{3}{2}} \ln(3x) - \frac{2}{3} \cdot \frac{2}{3} x^{\frac{3}{2}} + C$$

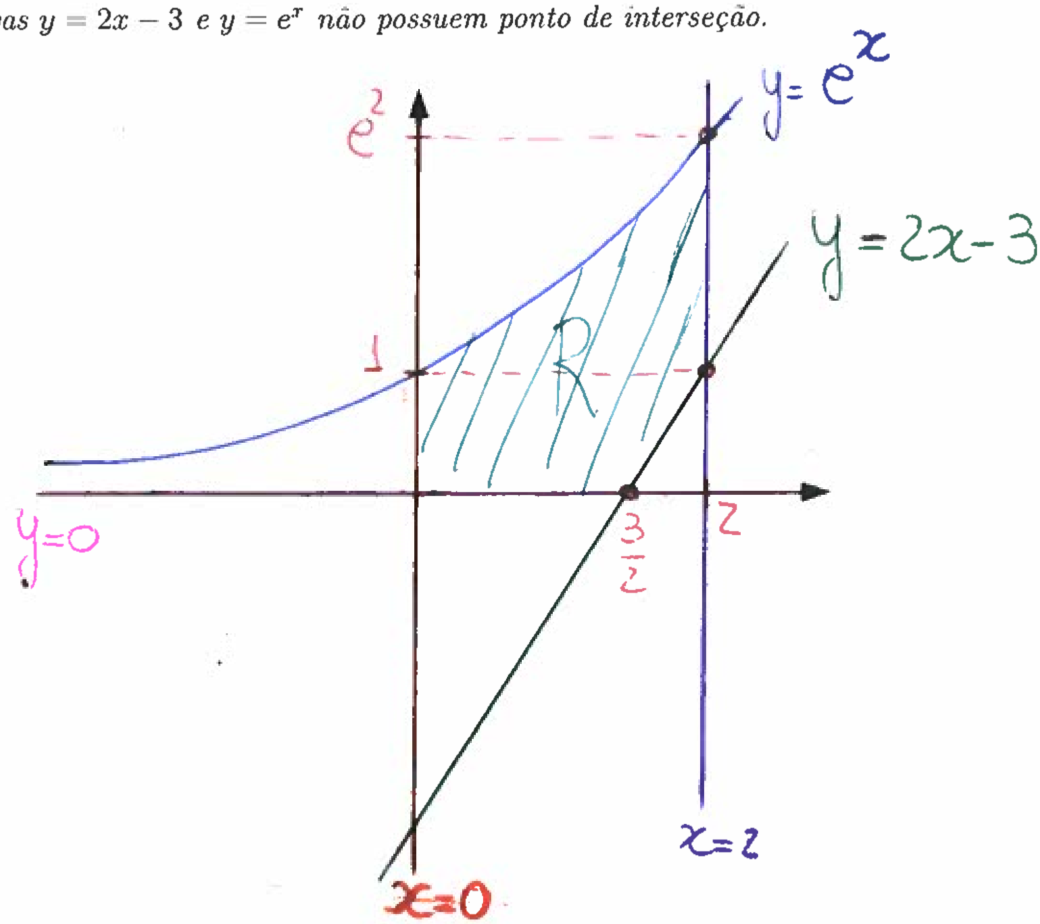
$$= \frac{2}{3} x^{\frac{3}{2}} \ln(3x) - \frac{4}{9} x^{\frac{3}{2}} + C$$

Questão 2. Seja $\mathcal{R}$ a região dada por

$$\mathcal{R} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 \leq y \leq e^x, \;\; y \geq 2x - 3, \;\; 0 \leq x \leq 2\}$$

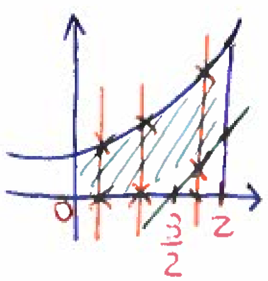
(a) Esboce a região $\mathcal{R}$.

Dica: As curvas $y = 2x - 3$ e $y = e^x$ não possuem ponto de interseção.



(b) Escreva a área da região $\mathcal{R}$ através de uma soma de duas integrais na variável x.

Atenção: Neste item não é necessário calcular as integrais.



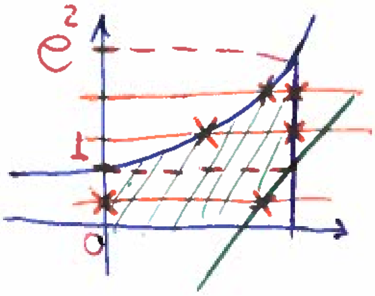
$$\text{Área}(R) = \int_0^{\frac{3}{2}} e^x - 0\,dx + \int_{\frac{3}{2}}^{2} e^x - (2x-3)\,dx$$

(c) Escreva a área da região $\mathcal{R}$ através de uma soma de duas integrais na variável y.

Atenção: Neste item não é necessário calcular as integrais.

$$y = e^x \therefore \ln(y) = \ln(e^x) \therefore \boxed{x = \ln(y)}$$

$$y = 2x - 3 \therefore y + 3 = 2x \therefore \boxed{x = \frac{y+3}{2}}$$



$$\text{Área}(R) = \int_0^1 \frac{y+3}{2} - 0\, dy + \int_1^{e^2} 2 - \ln(y)\, dy$$

b

(d) Calcule a área da região $\mathcal{R}$ utilizando o método que preferir.

$$\text{Área}(R) = \int_0^{\frac{3}{2}} e^x dx + \int_{\frac{3}{2}}^{2} e^x - 2x + 3\, dx$$

$$= \left(e^x\right)\Big]_0^{\frac{3}{2}} + \left(e^x - x^2 + 3x\right)\Big]_{\frac{3}{2}}^{2}$$

$$= \left(e^{\frac{3}{2}} - e^0\right) + \left(e^2 - 2^2 + 3(2)\right) - \left(e^{\frac{3}{2}} - \left(\frac{3}{2}\right)^2 + 3\left(\frac{3}{2}\right)\right)$$

$$= e^{\frac{3}{2}} - 1 + e^2 - 4 + 6 - e^{\frac{3}{2}} + \frac{9}{4} - \frac{9}{2}$$

$$= e^2 + 1 - \frac{9}{4} = e^2 - \frac{5}{4}$$

c

$$\text{Área}(R) = \int_0^1 \frac{y}{2} + \frac{3}{2}\, dy + \int_1^{e^2} 2 - \ln(y)\, dy$$

$$= \left(\frac{y^2}{4} + \frac{3}{2}y\right)\Big]_0^1 + \left(2y - \left(y\ln(y) - y\right)\right)\Big]_1^{e^2}$$

$$= \left(\frac{1^2}{4} + \frac{3}{2}(1)\right) - (0) + \left(2e^2 - \left(e^2 \underbrace{\ln(e^2)}_{=2} - e^2\right)\right) - \left(2 - \left(\underbrace{\ln(1)}_{=0} - 1 \right.\right.$$

$$= \frac{1}{4} + \frac{3}{2} + 2e^2 - 2e^2 + e^2 - 2 - 1$$

$$= e^2 - 3 + \frac{7}{4} = e^2 - \frac{5}{4}$$