MAT4161/MAT4181 – Cálculo a uma Variável

P1 – 25 de abril de 2024

Nome Legível : gabarito

Assinatura : ________________

Matrícula : ________________ Turma : ________

Questão	Valor	Grau	Revisão
1^a	$2,0$		
2^a	$2,0$		

AG1 (2,0)	P1 Maple (4,0)	P1 (4,0)	Total (10,0)	Revisão

Instruções Gerais:

- A duração da prova é de 1h50min.
- A tolerância de entrada é de 30min após o início da prova. Se um aluno terminar a prova em menos de 30min, deverá aguardar em sala antes de entregar a prova e sair de sala.
- A prova deve ser resolvida apenas nas folhas recebidas e nos espaços reservados para soluções. Não é permitido destacar folhas da prova.
- A prova é sem consulta a professores, fiscais ou a qualquer tipo de material. A interpretação dos enunciados faz parte da prova.
- O aluno só poderá realizar a prova e assinar a lista de presença na sua turma/sala.
- O aluno só poderá manter junto a si: lápis, borracha e caneta. Caso necessário, o fiscal poderá solicitar ajuda a outro aluno e apenas o fiscal repassará o material emprestado.
- O celular deverá ser desligado e lacrado dentro do saco plástico fornecido pelo fiscal.
- O aluno não poderá sair de sala enquanto estiver fazendo a prova.

Instruções Específicas:

- Todas as questões devem ser justificadas de forma clara, rigorosa e de preferência sucinta. Respostas sem justificativas não serão consideradas.
- A prova pode ser resolvida a lápis ou a caneta de tinta azul ou preta. Não é permitido o uso de caneta de tinta vermelha ou verde. Não é permitido o uso de corretivo líquido.
- Não é permitido o uso de calculadora ou qualquer dispositivo eletrônico.
- Esta prova possui 2 questões. Confira.

Questão 1. Seja $f : [-\pi, 2\pi] \to \mathbb{R}$ a função definida por

$$f(x) = x - \cos(x).$$

Determine, caso existam:

(a) Os intervalos de crescimento de f.

$f'(x) = 1 - (-sen(x)) = 1 + sen(x)$

Como $Im(sen(x)) = [-1, 1]$, então $f'(x) \geqslant 0$, $\forall x \in [-\pi, 2\pi]$.

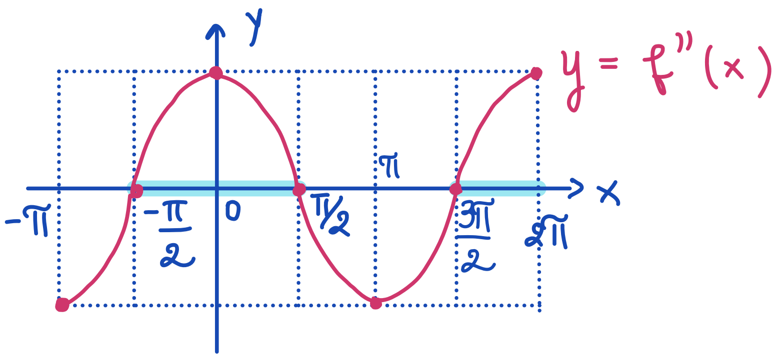
Logo f é crescente em todo o seu domínio, $[-\pi, 2\pi]$.

(b) Os valores de x para os quais f possui mínimo local.

Como a função é crescente em todo o seu domínio, então possui mínimo local no extremo inicial do domínio, $x = -\pi$.

(c) Os intervalos onde o gráfico de f é côncavo para cima.

$f''(x) = \cos(x)$



O gráfico de f é côncavo para cima quando f'' é positiva: $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$, $\left[\frac{3\pi}{2}, 2\pi\right]$.

(d) Utilizando os resultados obtidos nos itens anteriores, esboce o gráfico de f **em seu domínio**. Esboce também as retas tangentes ao gráfico de f que sejam horizontais.

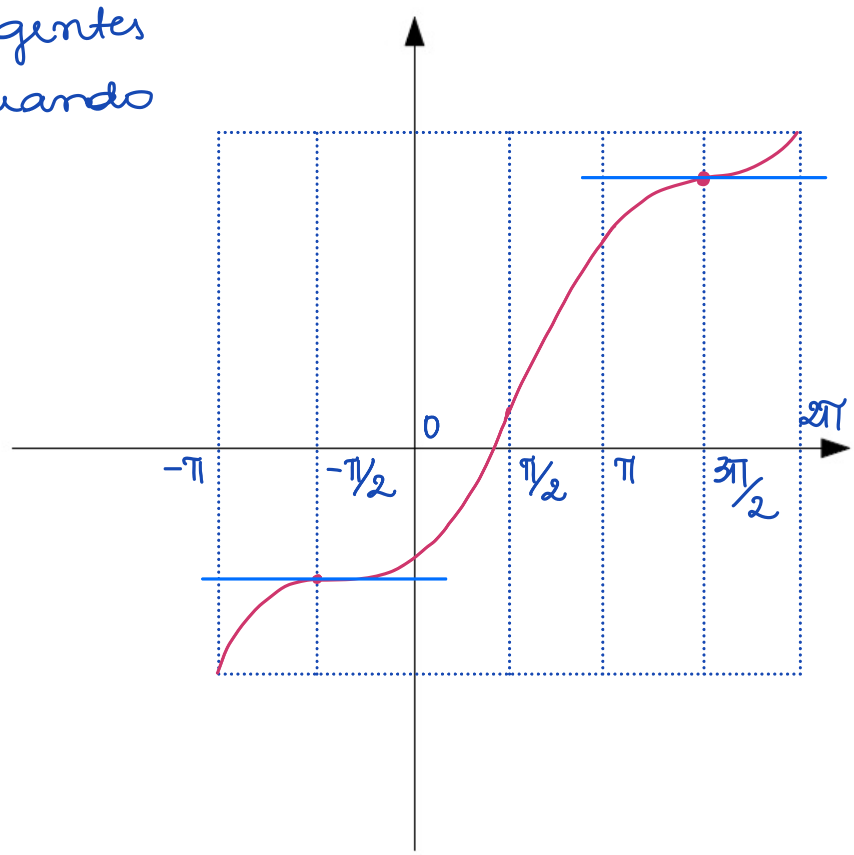
Obs.: Retas tangentes horizontais quando

$f'(x) = 0$

$\iff \operatorname{sen}(x) = -1$

$\iff x = -\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}$

(considerando $x \in [-\pi, 2\pi]$).



Questão 2. Considere a região plana

$$\mathcal{R} = \left\{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid y \geq -1\,,\ y \geq (x-1)^2 - 2\,,\ y \leq -\frac{x}{2} \right\}.$$

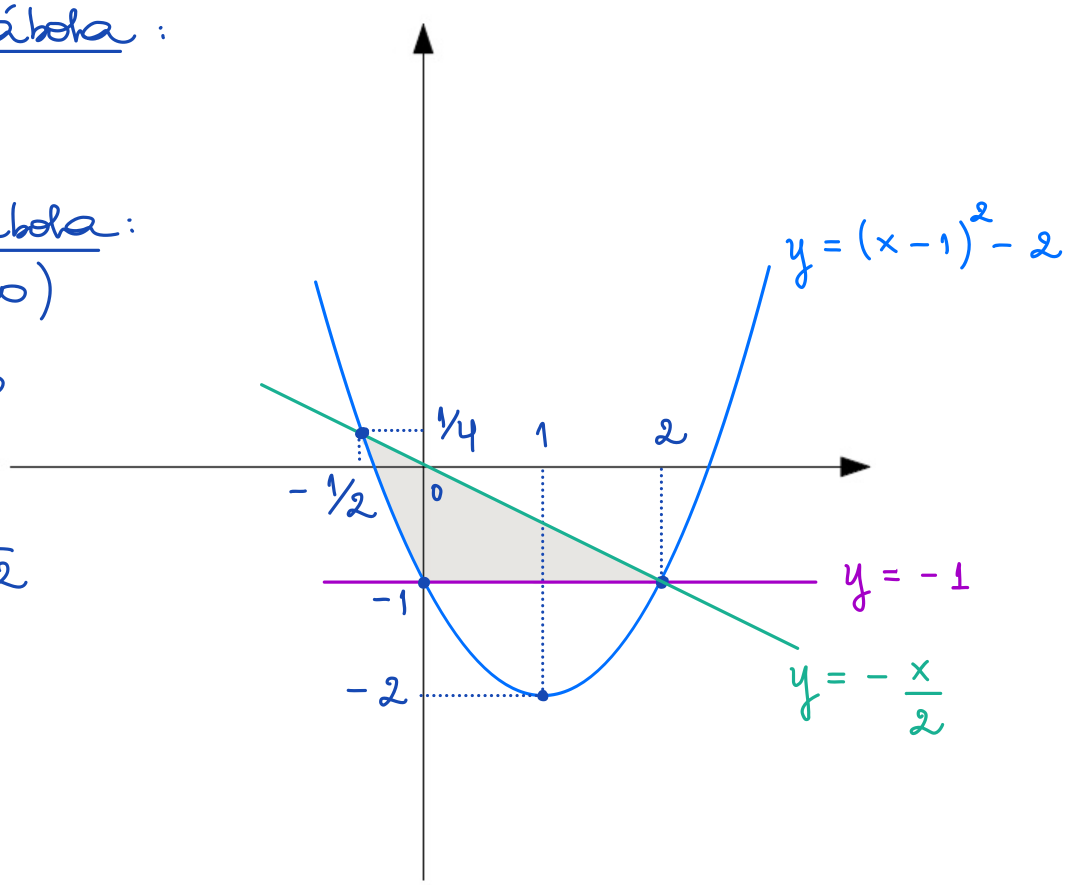
(a) Esboce a região $\mathcal{R}$. Indique em seu desenho as coordenadas x e y de todos os pontos de interseção entre as curvas de fronteira.

Vértice da parábola:

$(1, -2)$

Raízes da parábola:
(não obrigatório)

$$(x-1)^2 - 2 = 0$$
$$\iff (x-1)^2 = 2$$
$$\iff x - 1 = \pm\sqrt{2}$$
$$\iff x = 1 \pm \sqrt{2}$$



Interseções:

1) $(x-1)^2 - 2 = -1$

$$\iff (x-1)^2 = 1$$
$$\iff x - 1 = \pm 1$$
$$\iff x = 0\,,\ 2$$

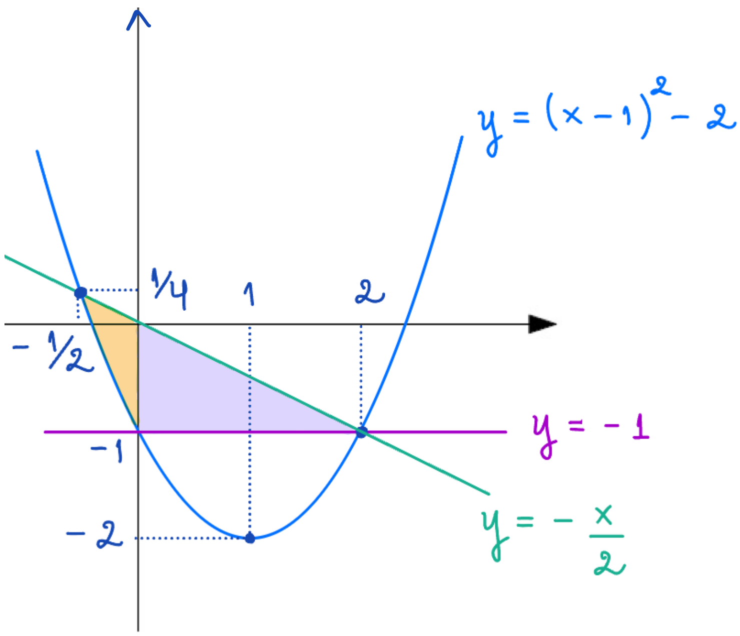
2) $-\frac{x}{2} = -1$

$$\iff x = 2$$

3) $(x-1)^2 - 2 = -\frac{x}{2}$

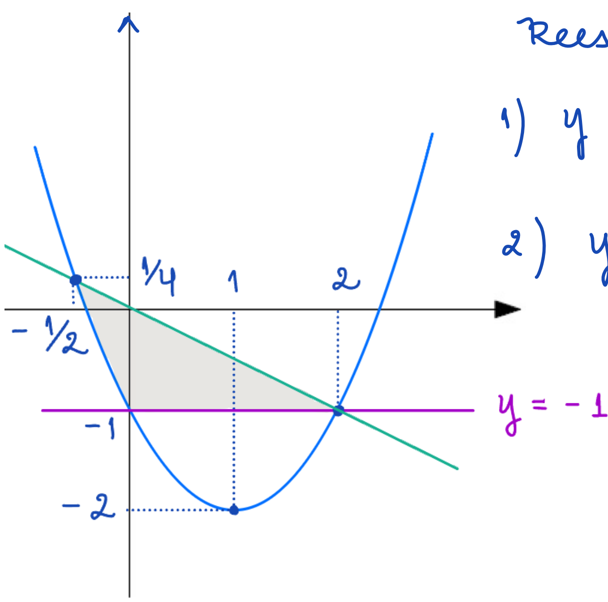
$$\iff x^2 - 2x + 1 - 2 = -\frac{x}{2}$$
$$\iff x^2 - \frac{3x}{2} - 1 = 0$$
$$\iff x = \frac{3/2 \pm \sqrt{9/4 - 4.1.(-1)}}{2}$$
$$\iff x = \frac{\frac{3}{2} \pm \frac{5}{2}}{2} = 2\,,\ -\frac{1}{2}$$

(b) Escreva a área de $\mathcal{R}$ utilizando uma soma de duas integrais na variável x.
Obs.: Neste item não é necessário calcular a área.



$$A(R) = \int_{-1/2}^{0} -\frac{x}{2} - (x-1)^2 + 2 \, dx + \int_{0}^{2} -\frac{x}{2} + 1 \, dx \quad //$$

(c) Escreva a área de $\mathcal{R}$ utilizando uma única integral na variável y.
Obs.: Neste item não é necessário calcular a área.



Reescrevendo as equações:

1) $y = -\frac{x}{2} \iff x = -2y$

2) $y = (x-1)^2 - 2 \iff (x-1)^2 = y+2$

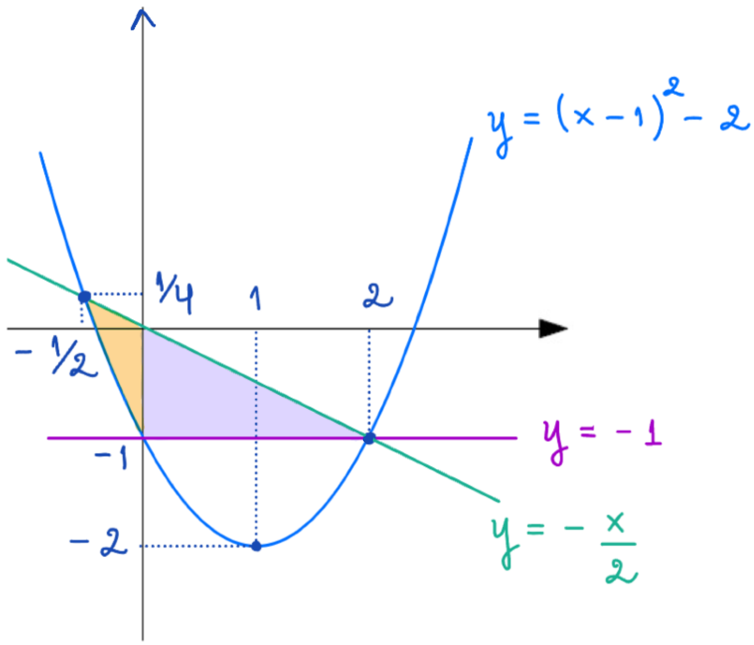
$\iff x - 1 = \pm\sqrt{y+2}$

$\iff x = 1 \pm \sqrt{y+2}$

(ramo direito: +
ramo esquerdo: −)

$$A(R) = \int_{-1}^{1/4} -2y - \left(1 - \sqrt{y+2}\right) dy$$

(d) Calcule a área de $\mathcal{R}$ utilizando o método que preferir.



$$A(R) = \underbrace{\int_{-1/2}^{0} -\frac{x}{2} - (x-1)^2 + 2 \, dx}_{=} + \underbrace{\int_{0}^{2} -\frac{x}{2} + 1 \, dx}_{\text{área triângulo roxo}}$$

$$\int_{-1/2}^{0} -\frac{x}{2} - x^2 + 2x - 1 + 2 \, dx$$

$$= \frac{2 \cdot 1}{2} = 1$$

$$= \int_{-1/2}^{0} -x^2 + \frac{3x}{2} + 1 \, dx$$

Logo

$$A(R) = \frac{13}{48} + 1 = \frac{61}{48}$$

$$= \left(-\frac{x^3}{3} + \frac{3x^2}{4} + x \right) \Bigg|_{-1/2}^{0}$$

$$= 0 - \left(\frac{1}{24} + \frac{3}{16} - \frac{1}{2} \right) = -\left(\frac{2}{48} + \frac{9}{48} - \frac{24}{48} \right) = \frac{13}{48}$$