MAT4161/MAT4181 – Cálculo a uma Variável
P3 – 01 de julho de 2024

Nome Legível : ______________________________

Assinatura : ______________________________

Matrícula : ______________________ Turma : __________

Questão	Valor	Grau	Revisão
1^a	$3,0$		
2^a	$2,0$		

P3 Maple (5,0)	P3 (5,0)	Total (10,0)	Revisão

Instruções Gerais:

- A duração da prova é de 1h50min.
- A tolerância de entrada é de 30min após o início da prova. Se um aluno terminar a prova em menos de 30min, deverá aguardar em sala antes de entregar a prova e sair de sala.
- A prova deve ser resolvida apenas nas folhas recebidas e nos espaços reservados para soluções. Não é permitido destacar folhas da prova.
- A prova é sem consulta a professores, fiscais ou a qualquer tipo de material. A interpretação dos enunciados faz parte da prova.
- O aluno só poderá realizar a prova e assinar a lista de presença na sua turma/sala.
- O aluno só poderá manter junto a si: lápis, borracha e caneta. Caso necessário, o fiscal poderá solicitar ajuda a outro aluno e apenas o fiscal repassará o material emprestado.
- O celular deverá ser desligado e lacrado dentro do saco plástico fornecido pelo fiscal.
- O aluno não poderá sair de sala enquanto estiver fazendo a prova.

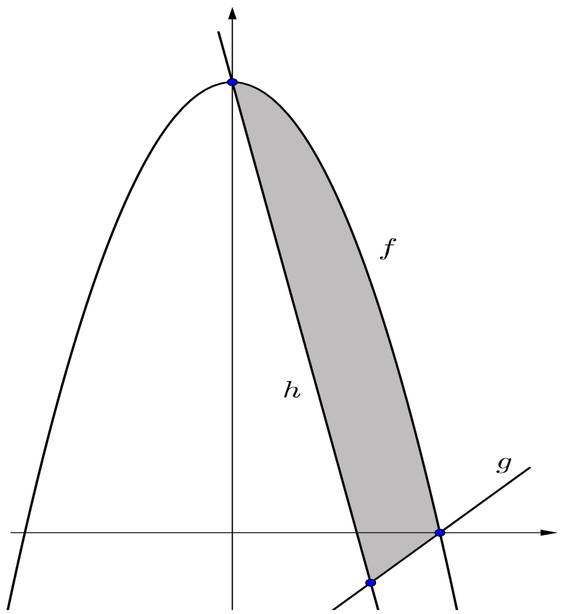
Instruções Específicas:

- Todas as questões devem ser justificadas de forma clara, rigorosa e de preferência sucinta. Respostas sem justificativas não serão consideradas.
- A prova pode ser resolvida a lápis ou a caneta de tinta azul ou preta. Não é permitido o uso de caneta de tinta vermelha ou verde. Não é permitido o uso de corretivo líquido.
- Não é permitido o uso de calculadora ou qualquer dispositivo eletrônico.
- Esta prova possui 2 questões. Confira.

Questão 1. Sejam $a_0, a_1, a_2, m_1, n_1, m_2, n_2 \in \mathbb{R}$ constantes e considere f, g e h funções dadas por

$$f(x) = a_2x^2 + a_1x + a_0, \qquad g(x) = m_1x + n_1 \qquad \text{e} \qquad h(x) = m_2x + n_2.$$

Seja $\mathcal{R}$ a região plana dada pelo esboço abaixo:



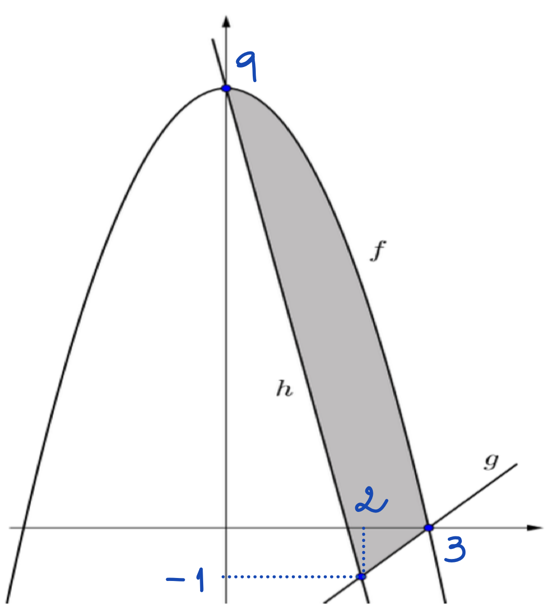
Sabendo que

- o gráfico de f possui vértice $(0, 9)$ e passa pelo ponto $(3, 0)$;
- 3 é a única raiz da função g;
- a interseção entre os gráficos de g e h se dá no ponto $(2, -1)$;
- uma das interseções entre os gráficos de f e h se dá no eixo y;

faça o que se pede.

(a) Determine os valores das constantes $a_0, a_1, a_2, m_1, n_1, m_2, n_2$.

Pelas informações do enunciado:



O gráfico de f é uma parábola de vértice $(0,9)$, cuja equação é:

$$y = \underbrace{a(x-0)^2 + 9}_{f(x)}$$

Substituindo o ponto $(3,0)$:

$$0 = a \cdot 3^2 + 9 \Rightarrow a = -1.$$

Logo, $f(x) = -1 . x^2 + 9 \Rightarrow a_2 = 1, \; a_1 = 0, \; a_2 = 9$

O gráfico de g é uma reta de equação $y = m x + n$, que passa pelos pontos $(3,0)$ e $(2,-1)$. Assim, o seguinte sistema deve ser satisfeito:

$$\begin{cases} 0 = 3m_1 + n_1 & (\mathrm{I}) \\ -1 = 2m_1 + n_1 & (\mathrm{II}) \end{cases}$$

$$(\mathrm{I}) - (\mathrm{II}) : \quad 1 = m_1$$

$$\therefore \; (\mathrm{I}) : \quad 0 = 3 + n_1 \Rightarrow n_1 = -3$$

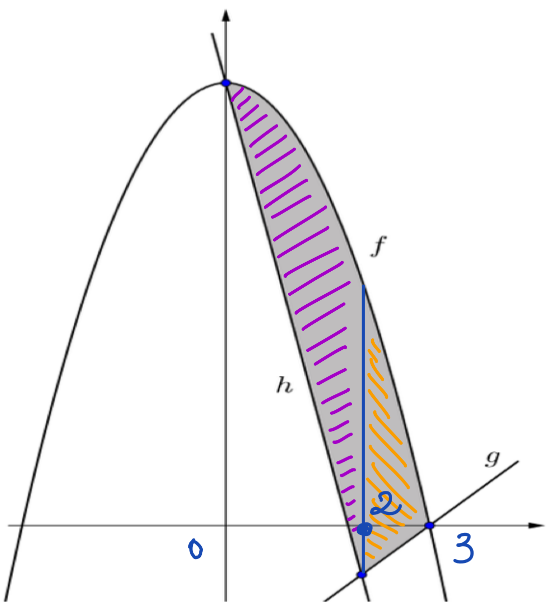
O gráfico de h é uma reta de equação $y = m_2 x + n_2$, que passa pelos pontos $(2,-1)$ e $(0,9)$. Assim, o seguinte sistema deve ser satisfeito:

$$\begin{cases} -1 = 2m_2 + n_2 \\ 9 = 0 + n_2 \Rightarrow n_2 = 9 \end{cases}$$

$$\therefore \; -1 = 2m_2 + 9 \Rightarrow 2m_2 = -10 \Rightarrow m_2 = -5$$

(b) Escreva a área da região $\mathcal{R}$ através de uma soma de duas integrais na variável x.

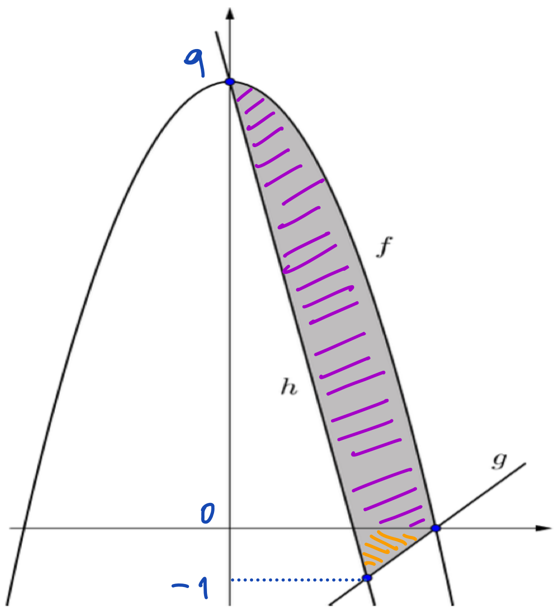
Atenção: Neste item não é necessário calcular a integral.



$$A(R) = \int_0^2 f(x) - h(x)\, dx + \int_2^3 f(x) - g(x)\, dx$$

(c) Escreva a área da região $\mathcal{R}$ através de uma soma de duas integrais na variável y.

Atenção: Neste item não é necessário calcular as integrais.



Reescrevendo as equações das curvas como gráficos de função de y:

- $y = -x^2 + 9 \Rightarrow x^2 = 9 - y \Rightarrow x = \pm\sqrt{9-y}$

ramo direito da parábola

- $y = x - 3 \Rightarrow x = y + 3$

- $y = -5x + 9 \Rightarrow 5x = 9 - y \Rightarrow x = \dfrac{9-y}{5}$

Logo

$$A(R) = \int_{-1}^{0} (y+3) - \left(\frac{9-y}{5}\right) dy + \int_{0}^{9} \sqrt{9-y} - \left(\frac{9-y}{5}\right) dy$$

(d) Calcule a área da região $\mathcal{R}$ utilizando o método que preferir.

$$A(R) = \int_0^2 f(x) - h(x)\,dx + \int_2^3 f(x) - g(x)\,dx$$

$$= \int_0^2 -x^2 + 9 + 5x - 9\,dx + \int_2^3 -x^2 + 9 - x + 3\,dx$$

$$= \int_0^2 -x^2 + 5x\,dx + \int_2^3 -x^2 - x + 12\,dx$$

$$= \left(-\frac{x^3}{3} + \frac{5x^2}{2}\right)\Bigg|_0^2 + \left(-\frac{x^3}{3} - \frac{x^2}{2} + 12x\right)\Bigg|_2^3$$

$$= \frac{22}{3} + \frac{19}{6}$$

$$= \frac{21}{2} \;//$$

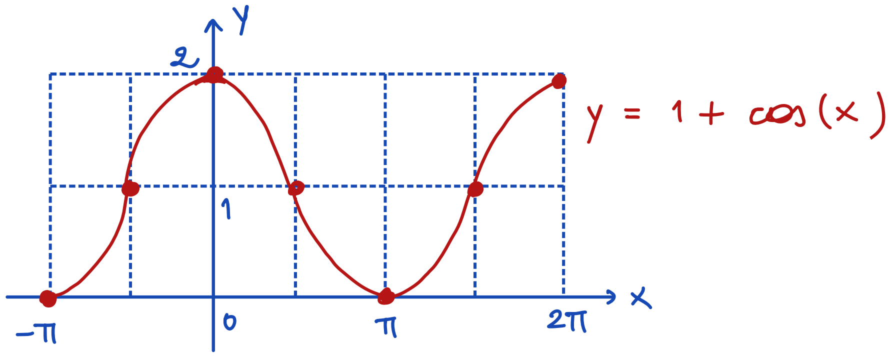
Questão 2. Seja $f : [-\pi, 2\pi] \to \mathbb{R}$ a função definida por

$$f(x) = x + \operatorname{sen}(x)$$

Determine, caso existam:

(a) os intervalos de crescimento de f.

$f'(x) = 1 + \cos(x)$



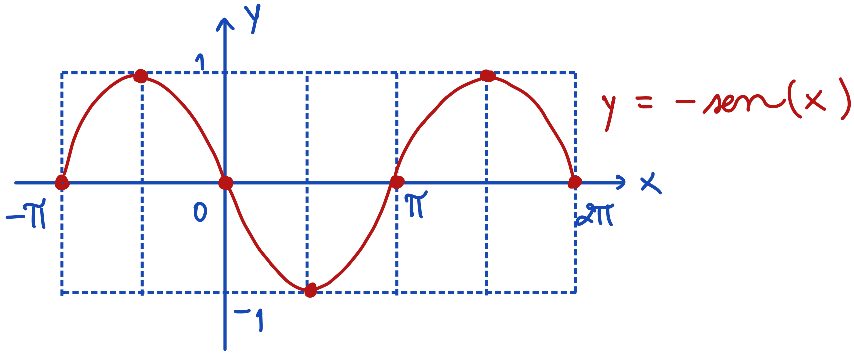
Pelo esboço acima, vemos que $f'(x) = 1 + \cos(x)$ é sempre positiva. Logo o intervalo de crescimento de f é $[-\pi, 2\pi]$.

(b) os valores de x para os quais f possui mínimo local.

Como f é crescente em todo o seu domínio, então temos mínimo local apenas no extremo inicial do domínio, ou seja, em $x = -\pi$.

(c) os intervalos onde o gráfico de f é côncavo para cima.

$f''(x) = -sen(x)$



O gráfico de f é côncavo para cima quando $f''(x)$ é positiva. Pelo gráfico acima, temos então que os intervalos de concavidade para cima são $[-\pi, 0]$ e $[\pi, 2\pi]$.

(d) os valores de x para os quais f possui ponto de inflexão.

Há pontos de inflexão quando a concavidade muda. Logo os valores são $x = 0$ e π.