MAT4161 - Cálculo a uma Variável -- 2023.2

Gabarito P1 Maple - Versão II

Questão 1

Seja $k \in \mathbb{R}$ uma constante. Considere a função quadrática

$$f(x) = -3k\,x^2 + (6k-3)x - 12k\,.$$

(a) Encontre dois valores de k para os quais o gráfico da função f intersecta o eixo x uma única vez.

Obs.: Neste item, os valores devem ser exatos, não aproximados.

```
> f:=x->-3*k*x^2+(-3+6*k)*x-12*k
```

$$f := x \mapsto -3\,k\,x^2 + (-3+6\,k)\,x - 12\,k \tag{1}$$

```
> a:=-3*k; b:=-3+6*k; c:=-12*k
```

$$a := -3\,k$$
$$b := -3+6\,k$$
$$c := -12\,k \tag{2}$$

```
> b^2-4*a*c
```

$$-144\,k^2 + (-3+6\,k)^2 \tag{3}$$

```
> solve(b^2-4*a*c=0)
```

$$-\frac{1}{2}, \frac{1}{6} \tag{4}$$

Logo, os valores pedidos são $k = -\frac{1}{2}$, $k = \frac{1}{6}$.

(b) Encontre um valor de k para o qual a reta tangente ao gráfico de f em $x_0 = 6$ é paralela à reta de equação $y = 3x + 5$.

Obs.: Neste item, o valor deve ser exato, não aproximado.

```
> D(f)(6)
```

$$-30\,k - 3 \tag{5}$$

```
> solve(D(f)(6)=3)
```

$$-\frac{1}{5} \tag{6}$$

Logo, o valor pedido é $k = -\frac{1}{5}$.

(c) Encontre um valor de k para o qual $y = 2x - 7$ é a equação da reta tangente ao gráfico de f em algum x_0.

Obs.: Neste item, o valor pode ser exato ou aproximado. Caso opte pelo valor aproximado, este deve ser dado com três casas decimais corretas.

A equação da reta tangente ao gráfico de f em $x = x_0$ é
$y = f\,'(x_0).(x - x_0) + f(x_0) = f\,'(x_0).x - f\,'(x_0).x_0 + f(x_0)$.

Para que esta equação seja igual a $y = 2x - 7$, devem valer as seguintes igualdades:

$f\,'(x_0) = 2$
$-f\,'(x_0).x_0 + f(x_0) = -7$

Substituindo a primeira equação na segunda, reescrevemos o sistema da seguinte forma:

$f\,'(x_0) = 2$
$-2.x_0 + f(x_0) = -7 \Rightarrow f(x_0) = 2.x_0 - 7$

Resolvendo o sistema com o Maple:

```
> solve([D(f)(x0)=2,f(x0)=2*x0-7])
```

$$\left\{k = \frac{RootOf(3\_Z^2 - 4\_Z - 25)}{6},\ x0 = -\frac{3\,RootOf(3\_Z^2 - 4\_Z - 25)}{5} + \frac{9}{5}\right\} \quad \textbf{(7)}$$

Para obter um valor aproximado para k, podemos usar o comando *fsolve*:

```
> fsolve([D(f)(x0)=2,f(x0)=2*x0-7])
```

$$\{k = 0.6048996899,\ x0 = -0.3776388835\} \quad \textbf{(8)}$$

E então a solução seria --- com 3 casas decimais corretas --- $k = 0.604$.

Para obter soluções exatas, há dois caminhos a seguir.

Primeiro modo:

```
> s:=solve(3*x^2-4*x-25=0)
```

$$s := \frac{2}{3} + \frac{\sqrt{79}}{3},\ \frac{2}{3} - \frac{\sqrt{79}}{3} \quad \textbf{(9)}$$

```
> k1:=s[1]/6
```

$$k1 := \frac{1}{9} + \frac{\sqrt{79}}{18} \quad \textbf{(10)}$$

```
> k2:=s[2]/6
```

$$k2 := \frac{1}{9} - \frac{\sqrt{79}}{18} \quad \textbf{(11)}$$

Estes seriam os dois valores exatos de k que satisfazem as condições do enunciado.

Segundo modo (usando comando em geral não visto em sala de aula):

```
> allvalues(solve([D(f)(x0)=2,f(x0)=2*x0-7]))
```

$$\left\{k=\frac{1}{9}+\frac{\sqrt{79}}{18}, x0=\frac{7}{5}-\frac{\sqrt{79}}{5}\right\}, \left\{k=\frac{1}{9}-\frac{\sqrt{79}}{18}, x0=\frac{7}{5}+\frac{\sqrt{79}}{5}\right\} \quad \textbf{(12)}$$

Questão 2

Considere $f : [-1, 3] \to \mathbb{R}$ a função dada por

$$f(x) = 3x^3 - 4x + 8\,.$$

(a) Determine as coordenadas do ponto do gráfico de f que está mais próximo do ponto $P = (2, -2)$. Justifique sua resposta.

Obs.: Atenção ao domínio da função!

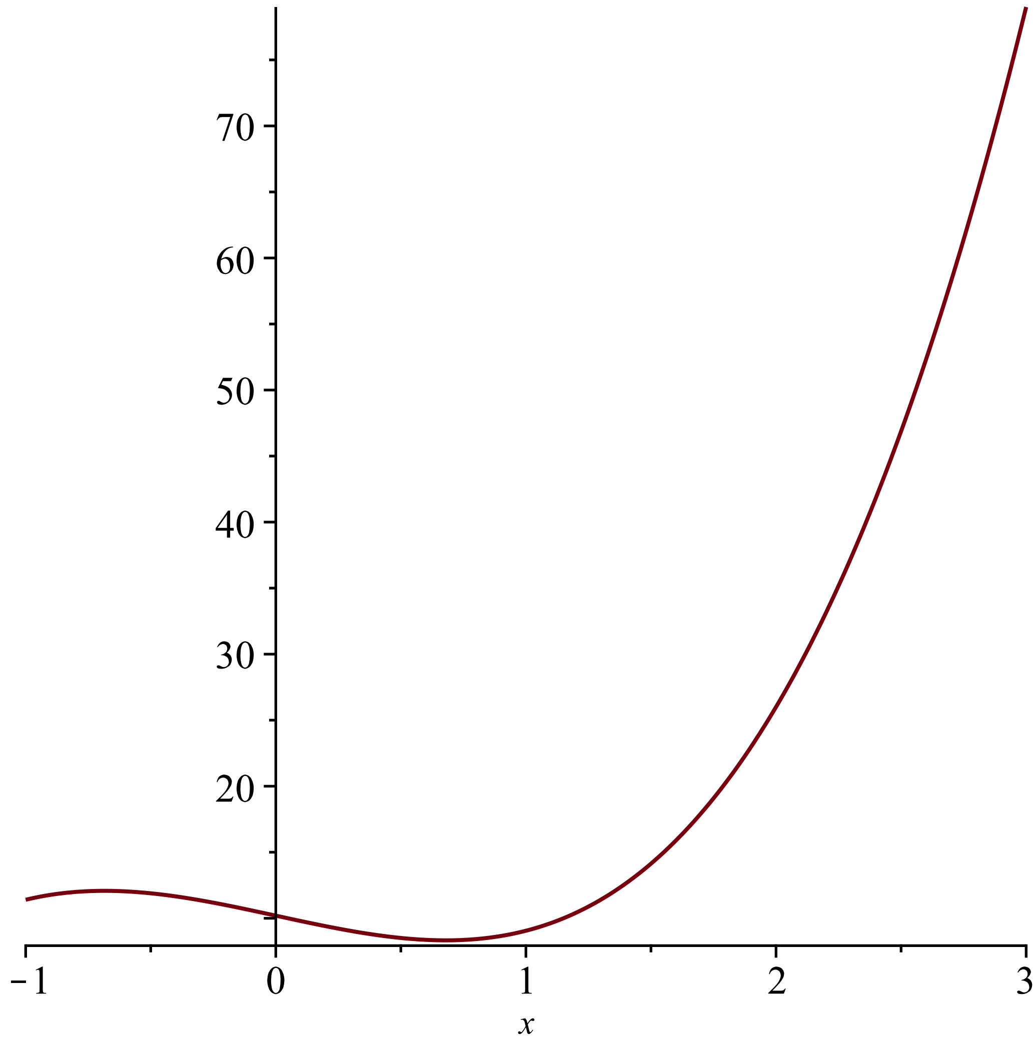
```
> restart
> f:=x->3*x^3-4*x+8
```

$$f := x \mapsto 3\,x^3 - 4\,x + 8 \quad \textbf{(13)}$$

```
> d:=x->sqrt((x-2)^2+(f(x)-(-2))^2)
```

$$d := x \mapsto \sqrt{(x-2)^2 + (f(x)+2)^2} \quad \textbf{(14)}$$

```
> plot(d(x),x=-1..3)
```




```
> solve(D(d)(x)=0)
```

$$\mathit{RootOf}\left(27\_Z^5-48\_Z^3+90\_Z^2+17\_Z-42, index=1\right), \mathit{RootOf}\left(27\_Z^5-48\_Z^3+90\_Z^2+17\_Z-42, index=2\right), \mathit{RootOf}\left(27\_Z^5-48\_Z^3+90\_Z^2+17\_Z-42, index=3\right), \mathit{RootOf}\left(27\_Z^5-48\_Z^3+90\_Z^2+17\_Z-42, index=4\right), \mathit{RootOf}\left(27\_Z^5-48\_Z^3+90\_Z^2+17\_Z-42, index=5\right) \quad \textbf{(15)}$$

Como estamos procurando uma solução específica (pelo plot acima, o valor de x que minimiza a distância está no intervalo $[0, 1]$) e o solve acima não forneceu facilmente as soluções exatas, vamos usar o comando fsolve:

```
> xmin:=fsolve(D(d)(x)=0,x=0..1)
```

$$xmin := 0.6799126152 \quad \textbf{(16)}$$

```
> f(xmin)
```

$$6.223281925 \quad \textbf{(17)}$$

Logo, o ponto do gráfico de f que está mais próximo do ponto $P=(2,-2)$ possui coordenadas $(0.679, 6.223)$.

(b) Determine a coordenadas do ponto do gráfico de f que está <u>mais distante</u> do ponto $P = (2, -2)$. Justifique sua resposta.

Obs.: Atenção ao domínio da função!

Pelo plot acima, vemos que o maior valor para a distância ocorre quando $x = 3$.

```
> xmax:=3
```

$$xmax := 3 \tag{18}$$

```
> f(xmax)
```

$$77 \tag{19}$$

Logo, o ponto do gráfico de f que está mais distante do ponto $P = (2, -2)$ possui coordenadas $(3, 77)$.