MAT4161 – Cálculo a uma Variável
P2 – 09 de novembro de 2023

Nome Legível : ______________________________

Assinatura : ______________________________

Matrícula : ____________________ Turma : __________

Questão	Valor	Grau	Revisão
1^a	$1,5$		
2^a	$2,0$		

AG2 (1,0)	TG (2,0)	P2 Maple (3,5)	P2 (3,5)	Total (10,0)	Revisão

Instruções Gerais:

- A duração da prova é de 1h50min.
- A tolerância de entrada é de 30min após o início da prova. Se um aluno terminar a prova em menos de 30min, deverá aguardar em sala antes de entregar a prova e sair de sala.
- A prova deve ser resolvida apenas nas folhas recebidas e nos espaços reservados para soluções. Não é permitido destacar folhas da prova.
- A prova é sem consulta a professores, fiscais ou a qualquer tipo de material. A interpretação dos enunciados faz parte da prova.
- O aluno só poderá realizar a prova e assinar a lista de presença na sua turma/sala.
- O aluno só poderá manter junto a si: lápis, borracha e caneta. Caso necessário, o fiscal poderá solicitar ajuda a outro aluno e apenas o fiscal repassará o material emprestado.
- O celular deverá ser desligado e lacrado dentro do saco plástico fornecido pelo fiscal.
- O aluno não poderá sair de sala enquanto estiver fazendo a prova.

Instruções Específicas:

- Todas as questões devem ser justificadas de forma clara, rigorosa e de preferência sucinta. Respostas sem justificativas não serão consideradas.
- A prova pode ser resolvida a lápis ou a caneta de tinta azul ou preta. Não é permitido o uso de caneta de tinta vermelha ou verde. Não é permitido o uso de corretivo líquido.
- Não é permitido o uso de calculadora ou qualquer dispositivo eletrônico.
- Esta prova possui 2 questões. Confira.

Questão 1. Calcule:

(a) $\int x^2 \cos(\pi x)\, dx$

Solução: Utilizando a integração por partes

$$\begin{cases} u = x^2 \therefore du = 2x\, dx \\ dv = \cos(\pi x)\, dx \therefore v = \dfrac{\operatorname{sen}(\pi x)}{\pi} \end{cases}$$

obtemos

$$\int x^2 \cos(\pi x)\, dx = x^2 \left(\frac{\operatorname{sen}(\pi x)}{\pi}\right) - \int \frac{\operatorname{sen}(\pi x)}{\pi} 2x\, dx = \frac{x^2 \operatorname{sen}(\pi x)}{\pi} - \frac{2}{\pi} \int x \operatorname{sen}(\pi x)\, dx$$

e, fazendo a integração por partes

$$\begin{cases} u = x \therefore du = dx \\ dv = \operatorname{sen}(\pi x)\, dx \therefore v = -\dfrac{\cos(\pi x)}{\pi} \end{cases}$$

concluimos que

$$\begin{aligned} \int x^2 \cos(\pi x)\, dx &= \frac{x^2 \operatorname{sen}(\pi x)}{\pi} - \frac{2}{\pi}\left(x\left(-\frac{\cos(\pi x)}{\pi}\right) - \int -\frac{\cos(\pi x)}{\pi}\, dx\right) \\ &= \frac{x^2 \operatorname{sen}(\pi x)}{\pi} + \frac{2x\cos(\pi x)}{\pi^2} - \frac{2}{\pi^2}\int \cos(\pi x)\, dx \\ &= \frac{x^2 \operatorname{sen}(\pi x)}{\pi} + \frac{2x\cos(\pi x)}{\pi^2} - \frac{2}{\pi^2}\left(\frac{\operatorname{sen}(\pi x)}{\pi}\right) + c \\ &= \frac{x^2 \operatorname{sen}(\pi x)}{\pi} + \frac{2x\cos(\pi x)}{\pi^2} - \frac{2\operatorname{sen}(\pi x)}{\pi^3} + c \end{aligned}$$

(b) $\int x^5 \sqrt{x^2+1}\, dx$

Solução: Fazendo a substituição simples

$$u = x^2 + 1 \therefore x^2 = u - 1 \quad \text{e} \quad du = 2x\, dx$$

obtemos

$$\begin{aligned} \int x^5 \sqrt{x^2+1}\, dx &= \int x^2 x^2 \sqrt{x^2+1}\, x\, dx = \int (u-1)(u-1)\sqrt{u}\, \frac{1}{2}\, du \\ &= \frac{1}{2}\int (u^2 - 2u + 1)u^{\frac{1}{2}}\, du = \frac{1}{2}\int u^{\frac{5}{2}} - 2u^{\frac{3}{2}} + u^{\frac{1}{2}}\, du \\ &= \frac{1}{2}\left(\frac{u^{\frac{7}{2}}}{\frac{7}{2}} - 2\frac{u^{\frac{5}{2}}}{\frac{5}{2}} + \frac{u^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}}\right) + c = \frac{1}{2}\left(\frac{2}{7}u^{\frac{7}{2}} - \frac{4}{5}u^{\frac{5}{2}} + \frac{2}{3}u^{\frac{3}{2}}\right) + c \\ &= \frac{1}{7}(x^2+1)^{\frac{7}{2}} - \frac{2}{5}(x^2+1)^{\frac{5}{2}} + \frac{1}{3}(x^2+1)^{\frac{3}{2}} + c \end{aligned}$$

Questão 2. Seja f a função dada por

$$f(x) = \ln\left(\frac{2}{1+e^{2x}}\right)$$

(a) Calcule $f'(x)$ e mostre que f é inversível em $\mathbb{R}$.

Solução: Primeiramente, note que $\mathrm{Dom}(f) = \mathbb{R}$, já que $\dfrac{2}{1+e^{2x}} > 0$ para todo $x \in \mathbb{R}$ (pois $e^{2x} > 0$). Então, derivando a função f utilizando a regra da cadeia e a regra do quociente, obtemos

$$f'(x) = \frac{1}{\frac{2}{1+e^{2x}}}\left(\frac{(1+e^{2x})(0) - 2(2e^{2x})}{(1+e^{2x})^2}\right) = \frac{1+e^{2x}}{2} \cdot \frac{-4e^{2x}}{(1+e^{2x})^2} = \frac{-2e^{2x}}{1+e^{2x}}.$$

Como $e^{2x} > 0$ para todo $x \in \mathbb{R}$, temos que $f'(x) < 0$ para todo $x \in \mathbb{R}$, ou seja, f é decrescente em $\mathbb{R}$. Portanto, segue pelo Teorema da Função Inversa que f é inversível em $\mathbb{R}$.

(b) Determine uma expressão para f^{-1} (a função inversa de f).

Solução: Fazendo $x = f(y)$, obtemos

$$x = \ln\left(\frac{2}{1+e^{2y}}\right) \quad \therefore \quad e^x = \frac{2}{1+e^{2y}} \therefore 1+e^{2y} = \frac{2}{e^x} \therefore e^{2y} = \frac{2}{e^x} - 1 \therefore 2y = \ln\left(\frac{2}{e^x} - 1\right)$$
$$\therefore \quad y = \frac{1}{2}\ln\left(\frac{2}{e^x} - 1\right) \therefore f^{-1}(x) = \frac{1}{2}\ln(2e^{-x} - 1)$$

(c) Encontre a equação da reta tangente ao gráfico de f^{-1} em $x_0 = 0$.

Solução: Temos duas maneiras de resolver esse item:

- Maneira (1): Segue do item (b) que

$$f^{-1}(0) = \frac{1}{2}\ln(2e^0 - 1) = \frac{1}{2}\ln(2-1)\frac{1}{2}\ln(1) = 0.$$

  Além disso,

$$(f^{-1})'(x) = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2e^{-x} - 1}\right)(-2e^{-x}) = \frac{-e^{-x}}{2e^{-x} - 1} \therefore (f^{-1})'(0) = \frac{-e^0}{2e^0 - 1} = \frac{-1}{2-1} = -1.$$

  Logo, a equação da reta tangente ao gráfico de f^{-1} em $x = 0$ é dada por

$$y = (f^{-1})'(0)(x-0) + f^{-1}(0) \therefore y = (-1)(x-0) + (0) \therefore y = -x.$$

- Maneira (2): Fazendo $f^{-1}(0) = a$ temos que

$$f(a) = 0 \therefore \ln\left(\frac{2}{1+e^{2a}}\right) = 0 \therefore \frac{2}{1+e^{2a}} = 1 \therefore 1 + e^{2a} = 2 \therefore e^{2a} = 1 \therefore 2a = 0 \therefore a = 0.$$

  Então, segue do item (a) e do Teorema da Função Inversa que

$$(f^{-1})'(0) = \frac{1}{f'(f^{-1}(0))} = \frac{1}{f'(0)} = \frac{1}{\frac{-2e^0}{1+e^0}} = \frac{1}{\frac{-2}{1+1}} = \frac{1}{-1} = -1.$$

  Logo, a equação da reta tangente ao gráfico de f^{-1} em $x = 0$ é dada por

$$y = (f^{-1})'(0)(x-0) + f^{-1}(0) \therefore y = (1)(x-0) + (0) \therefore y = -x.$$