



MAT4161/MAT4181
Cálculo a uma Variável
P2 – 01 de junho de 2023

Nome Legível : _____

Assinatura : _____

Matrícula : _____ Turma : _____

Questão	Valor	Grau	Revisão
1 ^a	2,0		
2 ^a	1,5		

AG2 (1,0)	TG (2,0)	P2 Maple (3,5)	P2 (3,5)	Total (10,0)	Revisão

Instruções Gerais:

- A duração da prova é de 1h50min.
- A tolerância de entrada é de 30min após o início da prova. Se um aluno terminar a prova em menos de 30min, deverá aguardar em sala antes de entregar a prova e sair de sala.
- A prova deve ser resolvida apenas nas folhas recebidas e nos espaços reservados para soluções. Não é permitido destacar folhas da prova.
- A prova é sem consulta a professores, fiscais ou a qualquer tipo de material. A interpretação dos enunciados faz parte da prova.
- O aluno só poderá realizar a prova e assinar a lista de presença na sua turma/sala.
- O aluno só poderá manter junto a si: lápis, borracha e caneta. Caso necessário, o fiscal poderá solicitar ajuda a outro aluno e apenas o fiscal repassará o material emprestado.
- O celular deverá ser desligado e lacrado dentro do saco plástico fornecido pelo fiscal.
- O aluno não poderá sair de sala enquanto estiver fazendo a prova.

Instruções Específicas:

- Todas as questões devem ser justificadas de forma clara, rigorosa e de preferência sucinta. Respostas sem justificativas não serão consideradas.
- A prova pode ser resolvida a lápis ou a caneta de tinta azul ou preta. Não é permitido o uso de caneta de tinta vermelha ou verde. Não é permitido o uso de corretivo líquido.
- Não é permitido o uso de calculadora ou qualquer dispositivo eletrônico.
- Esta prova possui 2 questões. Confira.

Questão 1. Seja f a função dada por

$$f(x) = x\sqrt{1-x^2}.$$

(a) Encontre três intervalos I_1 , I_2 e I_3 tais que

- f é inversível para todo $x \in I_1$
- f é inversível para todo $x \in I_2$
- f é inversível para todo $x \in I_3$
- $I_1 \cup I_2 \cup I_3 = \text{Dom}(f)$

Solução: Primeiramente, o domínio de f é dado por

$$1 - x^2 \geq 0 \therefore x \in [-1, 1].$$

Pelo Teorema da Função Inversa, basta encontrar os intervalos onde f é crescente e onde f é decrescente. Então,

$$f'(x) = \sqrt{1-x^2} + x \frac{1}{2\sqrt{1-x^2}}(-2x) = \sqrt{1-x^2} - \frac{x^2}{\sqrt{1-x^2}} = \frac{1-x^2-x^2}{\sqrt{1-x^2}} = \frac{1-2x^2}{\sqrt{1-x^2}}$$

e, como $\sqrt{1-x^2} > 0$ para todo $x \in (-1, 1)$, temos que

- $f'(x) > 0 \therefore 1-2x^2 > 0 \therefore x \in \left(-\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$; e
- $f'(x) < 0 \therefore 1-2x^2 < 0 \therefore x \in \left[-1, -\frac{\sqrt{2}}{2}\right) \cup \left(\frac{\sqrt{2}}{2}, 1\right]$.

ou seja, f é crescente em $\left[-\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right]$ e f é decrescente em $\left[-1, -\frac{\sqrt{2}}{2}\right]$ e em $\left[\frac{\sqrt{2}}{2}, 1\right]$. Portanto,

$$I_1 = \left[-1, -\frac{\sqrt{2}}{2}\right], \quad I_2 = \left[-\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right] \quad \text{e} \quad I_3 = \left[\frac{\sqrt{2}}{2}, 1\right].$$

(b) Determine o domínio e a imagem de f^{-1} (a função inversa de f) tal que o gráfico de f^{-1} passa pelo ponto $(0, 0)$.

Solução: Como $0 \in \text{Im}(f^{-1}) = \text{Dom}(f)$, segue do item (a) que

$$\text{Im}(f^{-1}) = \text{Dom}(f) = \left[-\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right].$$

Além disso, como f é crescente nesse intervalo, temos que

$$\text{Dom}(f^{-1}) = \text{Im}(f) = \left[f\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right), f\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)\right] = \left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right],$$

já que

$$f\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = -\frac{\sqrt{2}}{2} \sqrt{1 - \left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2} = -\frac{\sqrt{2}}{2} \sqrt{1 - \frac{1}{2}} = -\frac{\sqrt{2}}{2} \sqrt{\frac{1}{2}} = -\frac{\sqrt{2}}{2} \frac{1}{\sqrt{2}} = -\frac{1}{2}$$

e

$$f\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2} \sqrt{1 - \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2} = \frac{\sqrt{2}}{2} \sqrt{1 - \frac{1}{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2} \sqrt{\frac{1}{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2} \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{1}{2}.$$

(c) Determine a equação da reta tangente ao gráfico de f^{-1} em $x = 0$.

Solução: Sabendo que $f^{-1}(0) = 0$ e, pelo Teorema da Função Inversa,

$$(f^{-1})'(0) = \frac{1}{f'(f^{-1}(0))} = \frac{1}{f'(0)} = \frac{1}{\frac{1-2(0)^2}{\sqrt{1-(0)^2}}} = \frac{1}{1} = 1$$

temos que a equação da reta tangente ao gráfico de f^{-1} em $x = 0$ é dada por

$$y = (f^{-1})'(0)(x - 0) + f^{-1}(0) \therefore y = (1)(x - 0) + (0) \therefore y = x.$$

Questão 2. Calcule:

(a) $f'\left(\frac{1}{2}\right)$, onde $f(x) = \frac{x \ln(2x)}{x^2 + 1}$.

Solução: Note que

$$f'(x) = \frac{(x^2 + 1)(\ln(2x) + x \frac{1}{2x}(2)) - x \ln(2x)(2x)}{(x^2 + 1)^2} = \frac{(x^2 + 1)(\ln(2x) + 1) - 2x^2 \ln(2x)}{(x^2 + 1)^2}$$

Então,

$$f'\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{\left(\frac{1}{4} + 1\right)(\ln(1) + 1) - 2\frac{1}{4}\ln(1)}{\left(\frac{1}{4} + 1\right)^2} = \frac{\left(\frac{1}{4} + 1\right)}{\left(\frac{1}{4} + 1\right)^2} = \frac{1}{\left(\frac{5}{4}\right)} = \frac{4}{5}$$

(b) $\int \frac{x^3}{\sqrt{4 - x^2}} dx$

Solução: Fazendo a substituição simples

$$u = 4 - x^2 \therefore x^2 = 4 - u \quad \text{e} \quad du = -2x dx$$

obtemos

$$\begin{aligned} \int \frac{x^3}{\sqrt{4 - x^2}} dx &= \int \frac{x^2}{\sqrt{4 - x^2}} x dx = \int \frac{4 - u}{\sqrt{u}} \left(-\frac{1}{2}\right) du = \frac{1}{2} \int (u - 4) u^{-\frac{1}{2}} du \\ &= \frac{1}{2} \int u^{\frac{1}{2}} - 4u^{-\frac{1}{2}} du = \frac{1}{2} \left(\frac{u^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} - 4 \frac{u^{\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}} \right) + c = \frac{1}{2} \left(\frac{2}{3} u^{\frac{3}{2}} - 8u^{\frac{1}{2}} \right) + c \\ &= \frac{1}{3} (4 - x^2)^{\frac{3}{2}} - 4(4 - x^2)^{\frac{1}{2}} + c \end{aligned}$$

$$(c) \int_0^1 x^2 e^{-x} dx$$

Solução: Para calcular essa integral, iremos primeiro achar uma primitiva da função $x^2 e^{-x}$. Utilizando a integração por partes

$$\begin{cases} u = x^2 \Leftrightarrow du = 2x dx \\ dv = e^{-x} dx \Leftrightarrow v = -e^{-x} \end{cases}$$

obtemos

$$\int x^2 e^{-x} dx = x^2(-e^{-x}) - \int -e^{-x} 2x dx = -x^2 e^{-x} + 2 \int x e^{-x} dx$$

e, fazendo a integração por partes

$$\begin{cases} u = x \Leftrightarrow du = dx \\ dv = e^{-x} dx \Leftrightarrow v = -e^{-x} \end{cases}$$

concluimos que

$$\begin{aligned} \int x^2 e^{-x} dx &= -x^2 e^{-x} + 2 \left(x(-e^{-x}) - \int -e^{-x} dx \right) = -x^2 e^{-x} - 2x e^{-x} + 2 \int e^{-x} dx \\ &= -x^2 e^{-x} - 2x e^{-x} - 2e^{-x} + c = -e^{-x}(x^2 + 2x + 2) + c \end{aligned}$$

Logo,

$$\int_0^1 x^2 e^{-x} dx = \left(-e^{-x}(x^2 + 2x + 2) \right) \Big|_0^1 = \left(-e^{-1}((1)^2 + 2(1) + 2) \right) - \left(-e^0(2) \right) = -5e^{-1} + 2.$$