Texto Complementar 5

Funções Reais

As funções são ferramentas matemáticas fundamentais que nos permitem modelar e compreender diversos fenômenos do nosso cotidiano. Vamos começar com uma definição formal e, em seguida, explorar diferentes maneiras de visualizar e entender as funções.

Definição

Uma função $f : D \to E$ é uma relação entre dois conjuntos D e E, onde cada elemento x do conjunto D está associado a um único elemento y do conjunto E.

Chamamos o conjunto D de **domíno de** f (e denotamos $Dom(f)$) e E de **contradomínio de** f.

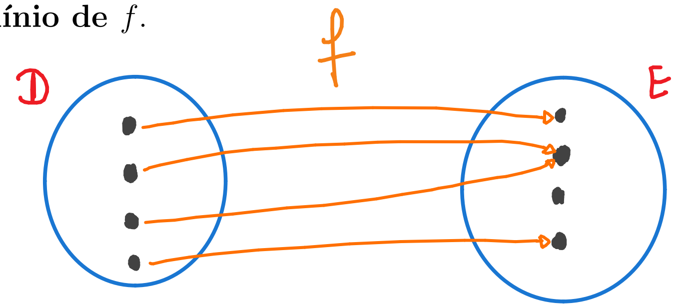


Imagem de um elemento: Se $x \in Dom(f)$, então o elemento $y = f(x)$ do contradomínio é chamado imagem de x por f. Em outras palavras, a imagem de um elemento do domínio é o valor que a função assume quando aplicada a esse elemento.

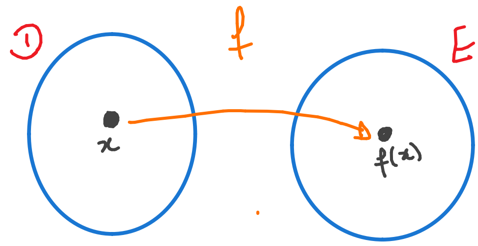
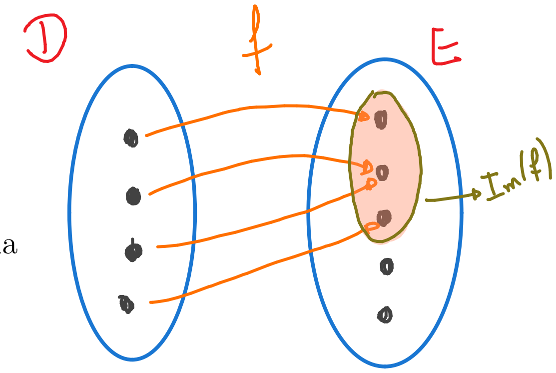


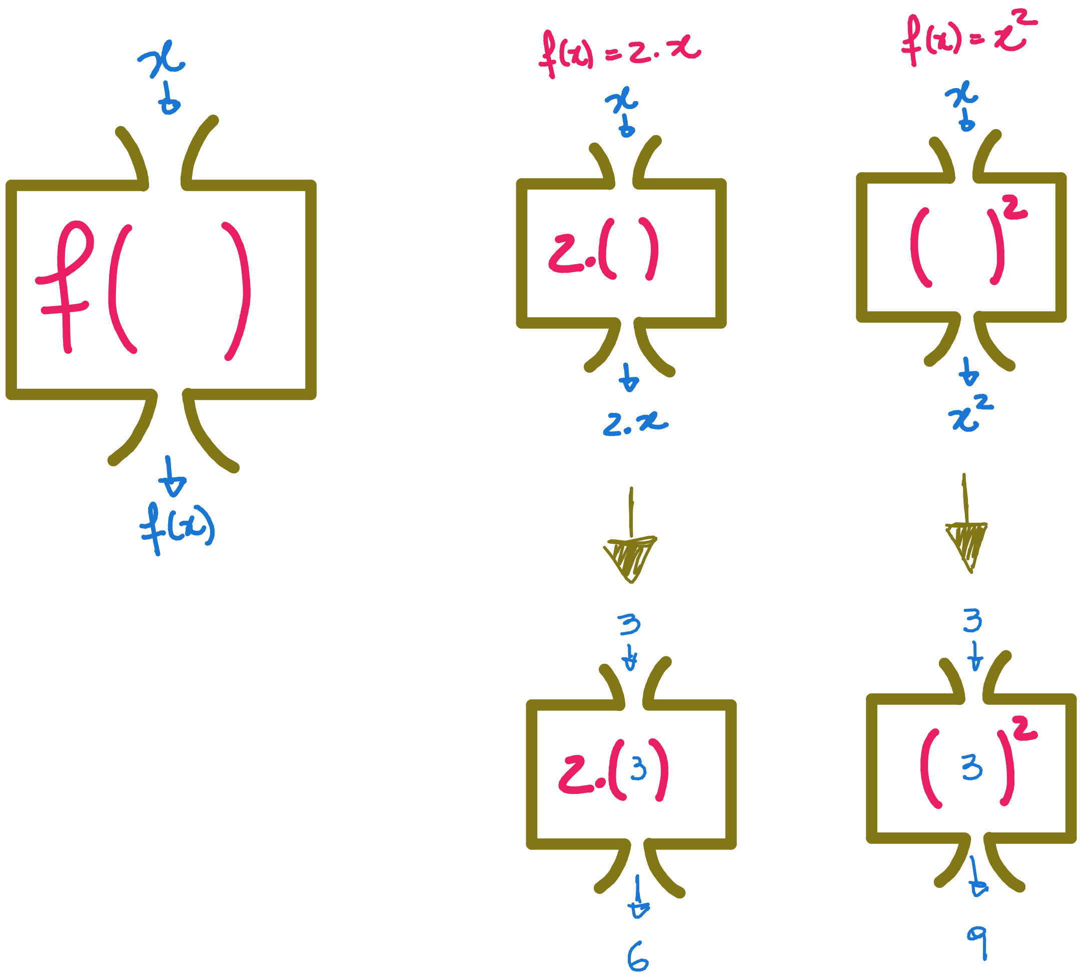
Imagem da função f: O subconjunto do contradomínio E que contém todos os elementos que são imagens de elementos do domínio é chamado de imagem de f e é denotado por $Im(f)$. Ou seja, a imagem da função é o conjunto de todos os valores que a função pode assumir quando aplicada aos elementos do seu domínio.



Funções como Máquinas

Outra forma de visualizar as funções é imaginá-las como máquinas de transformação. Você insere um valor x (do domínio) na máquina e ela retorna um valor y (da imagem) correspondente.

Exemplo: Considere a função linear $f(x) = 2x$, podemos imaginar essa função como uma máquina que duplica o valor de entrada:



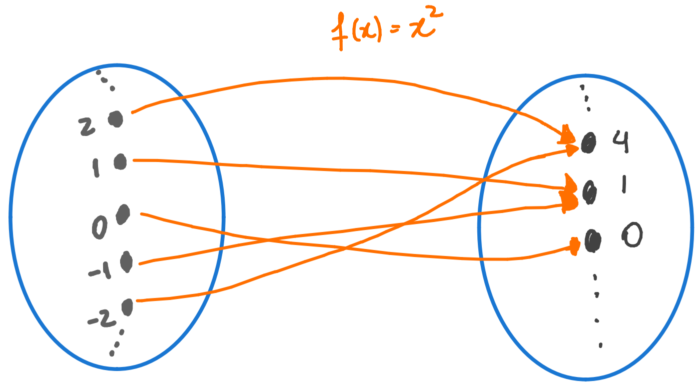
Mais sobre Domínio e Imagem

À rigor, para se definir função precisamos apresentar o domínio, o contra-domínio e a regra que relaciona ambos os conjuntos, mas muitas vezes nos é apresentada apenas a regra e assuminos que o domínio dessa função é o conjunto de todos os valores possíveis para a entrada x. Em outras palavras, é o conjunto de valores para os quais a função está definida.

Vamos considerar alguns exemplos:

1. Função afim: $f(x) = 2x + 1$
   - Domínio: $\mathbb{R}$ (todos os números reais)
   - Imagem: $\mathbb{R}$ (todos os números reais)
2. Função quadrática: $g(x) = x^2$
   - Domínio: $\mathbb{R}$
   - Imagem: $[0, +\infty)$
3. Função módulo: $h(x) = |x|$
   - Domínio: $\mathbb{R}$
   - Imagem: $[0, +\infty)$
4. Função semi-círculo: $i(x) = \sqrt{1 - x^2}$
   - Domínio: $[-1, 1]$
   - Imagem: $[0, 1]$
5. Função semi-círculo: $j(x) = \sqrt{4 - (x - 2)^2}$
   - Domínio: $[0, 4]$
   - Imagem: $[0, 2]$

É importante ressaltar que, embora cada elemento do domínio tenha apenas uma imagem correspondente, um elemento do contradomínio pode ser a imagem de mais de um elemento do domínio, como acontece na função $g(x) = x^2$.
Neste caso, cada número real x (domínio) está associado a um único número real $y = x^2$ (imagem). No entanto, observe que tanto $x = 2$ quanto $x = -2$ têm a mesma imagem $y = 4$.

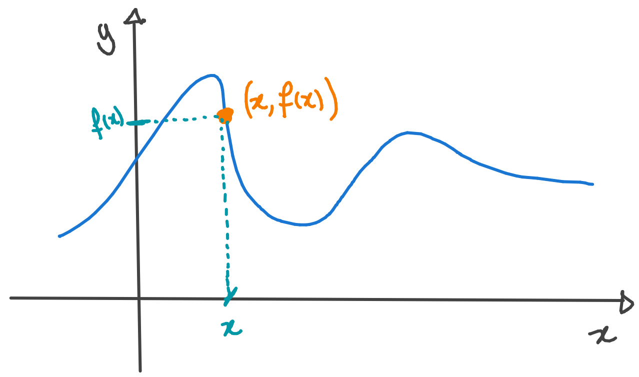


Gráficos de Funções

Os gráficos são representações visuais das funções em um plano cartesiano. Eles nos permitem observar o comportamento da função e obter informações importantes, como o domínio, a imagem e a relação entre as variáveis x e y.
Se f for uma função com domínio D, então seu gráfico será o conjunto de pares ordenados

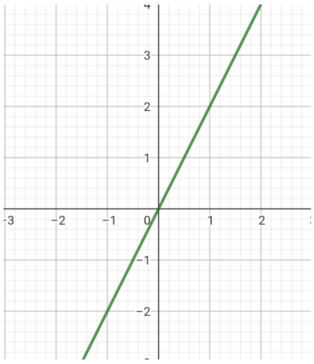
$$\{(x, f(x)) | x \in D\}.$$

Em outras palavras, o gráfico de f consiste de todos os pontos (x, y) no plano cartesiano tais que $y = f(x)$ e x está no domínio de f.
Podemos ler o valor $f(x)$ como a altura do ponto no gráfico acima de x.



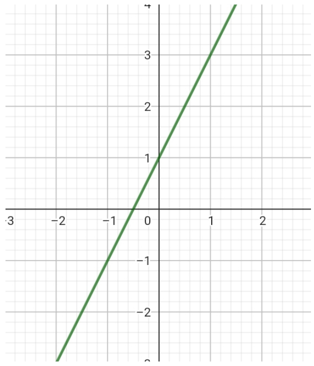
Vamos analisar alguns exemplos de gráficos:

1. Função linear: $f(x) = 2x$



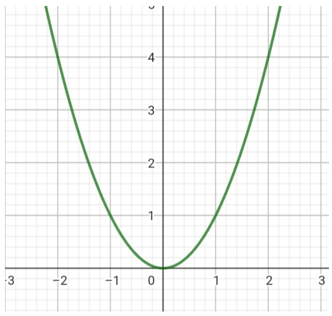
   - O domínio e a imagem são $\mathbb{R}$

2. Função afim: $g(x) = 2x + 1$



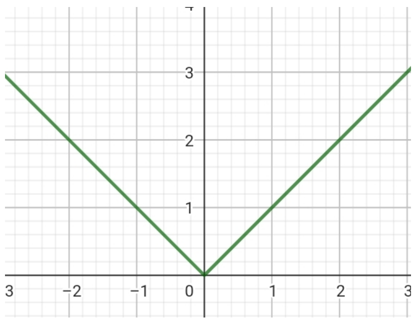
   - O domínio e a imagem são $\mathbb{R}$

3. Função quadrática: $h(x) = x^2$



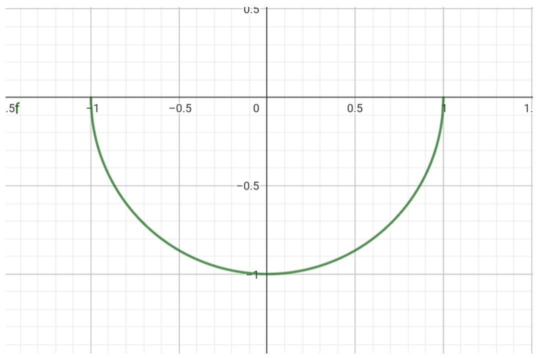
   - O domínio é $\mathbb{R}$ e a imagem é $[0, +\infty)$.

4. Função módulo: $i(x) = |x|$



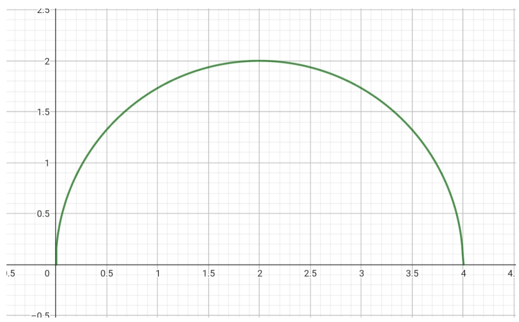
   - O domínio é $\mathbb{R}$ e a imagem é $[0, +\infty)$.

5. Função semi-círculo: $j(x) = -\sqrt{1 - x^2}$



   - O domínio é $[-1, 1]$ e a imagem é $[0, 1]$.

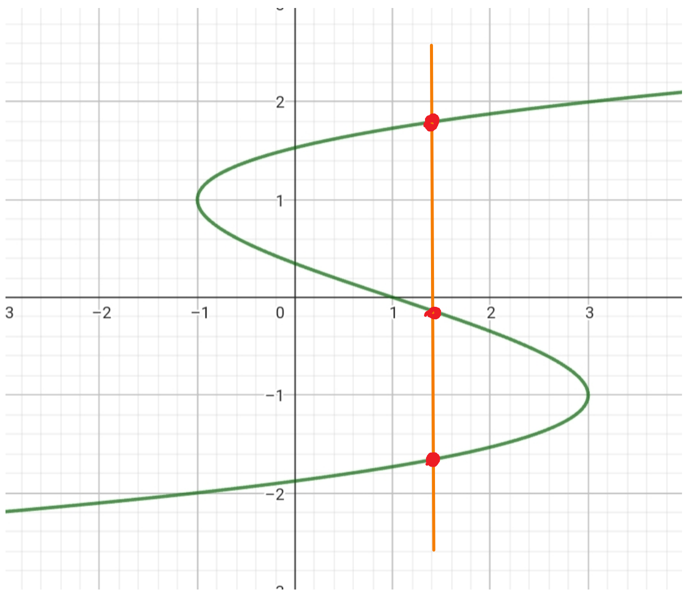
6. Função semi-círculo: $k(x) = \sqrt{4 - (x - 2)^2}$



   - O domínio é $[0, 4]$ e a imagem é $[0, 2]$.

Outro conceito importante relacionado aos gráficos de funções é o **teste da reta vertical**. Esse teste nos permite verificar se uma dada curva no plano xy é ou não o gráfico de uma função. Se cada reta vertical $x = a$ cruzar a curva somente uma vez em (a, b), então exatamente um valor é associado a a $(f(a) = b)$. Mas se a reta $x = a$ interceptar a curva em dois pontos, em (a, b) e em (a, c), nesse caso, a curva não pode representar uma função, pois uma função não pode associar dois valores diferentes de a.

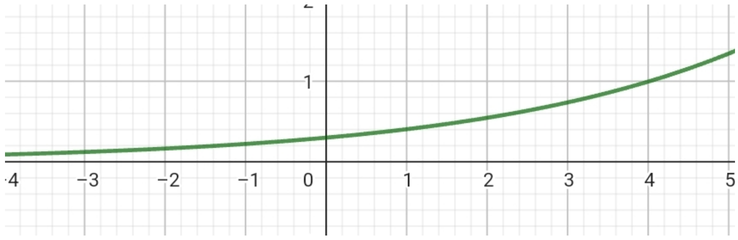
Veja os exemplos abaixo:



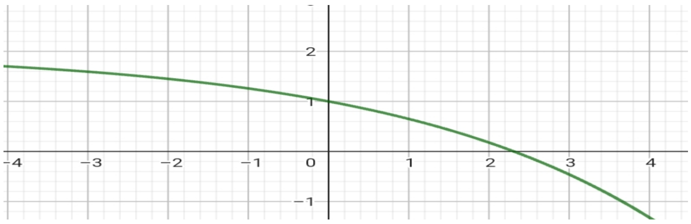
não é função

Funções Crescentes e Decrescentes

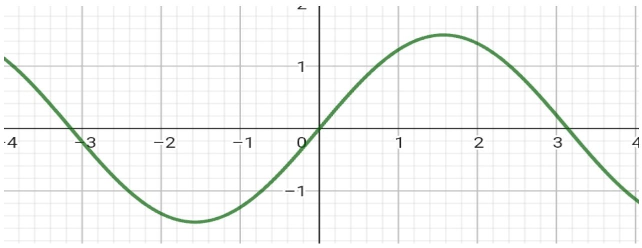
Uma função f é dita crescente em um intervalo I se, para quaisquer dois valores x_1 e x_2 em I, com $x_1 < x_2$, tivermos $f(x_1) \leq f(x_2)$. Em outras palavras, à medida que o valor de x aumenta, o valor de $f(x)$ também aumenta ou permanece constante.



Por outro lado, uma função f é dita decrescente em um intervalo I se, para quaisquer dois valores x_1 e x_2 em I, com $x_1 < x_2$, tivermos $f(x_1) \geq f(x_2)$. Nesse caso, à medida que o valor de x aumenta, o valor de $f(x)$ diminui ou permanece constante.



É possível que uma função seja crescente em alguns intervalos e decrescente em outros.



A partir do gráfico de uma função, podemos identificar os intervalos em que a função é crescente ou decrescente. Se, ao percorrermos o gráfico da esquerda para a direita, a curva "sobe", então a função é crescente naquele intervalo. Se a curva "desce", a função é decrescente no intervalo.