INF 1010
Estruturas de Dados Avançadas

Complexidade de Algoritmos

Introdução

- Exemplos:
  - Ordenar *n* números
  - Multiplicar duas matrizes quadradas $n \times n$ (cada uma com n^2 elementos)

Complexidade de algoritmos

- Complexidade Espacial:
  - Quantidade de recursos utilizados
    para resolver o problema (ex: memória)

- Complexidade Temporal:
  - Quantidade de tempo de execução utilizado, ou
    número de instruções necessárias
    para resolver determinado problema

- Medida de complexidade
  - Parâmetro: tamanho do problema - n

- complexidade de programação e manutenção!

Complexidade de algoritmos

espacial	temporal

• recursos (memória) necessários	• tempo de execução utilizado
	• número de instruções necessárias
	• perspectivas:
	  • pior caso
	  • caso médio
	  • melhor caso

complexidade espacial

```
float sum (float list[],
           int n);
  float tsum = 0;int i;
  for (i=0; i<n; i++)
    tsum += list[i];
  return tsum;
}
```

```
float rsum (float list[],
           int n);
  if (n) return
     list[n-1]  +
     rsum (list, n-1);
}
```

complexidade de tempo

- quanto tempo demanda a execução de um programa/função/trecho?
  - contagem de tempo
  - análise assintótica

parênteses: medindo tempo

- `time`: chamada pela linha de comando
  - man time
- `time`: biblioteca C
  - `man 3 time`
- `clock`: biblioteca C
  - `man 3 time`

medidas de tempo

- que tempo queremos medir?
  - tempo de CPU
  - tempo decorrido
  - ...
- atenção
  - nunca colocar chamadas a `printf` dentro do trecho a medir
  - algumas operações são rápidas demais para medir
    - podemos usar um loop com milhares de repetições

análise de desempenho

- mas muitas vezes não queremos apenas medir mas entender o comportamento
  - previsão de comportamento em outras situações
  - comportamento com o crescimento do tamanho dos dados de entrada

contando operações p/ determinar custo

```
for (i=0; i<n; i++)
    tsum += list[i];
-------------------------------------
for (i=0; i<n; i++) {
   c[i] = 0;
   for (j=0; j<n; j++)
       c[i]+= a[i,j]*b[j];
}
```

fundamentos

- complexidade computacional
  - Termo criado por Hartmanis e Stearns (1965)
  - Relação entre o tamanho do problema e o tempo e espaço necessários para resolvê-lo
  - Fundamental para projetar e analisar algoritmos

análise assintótica – tendência com n grande

- Considere o número de operações de cada um dos dois algoritmos que resolvem o mesmo problema:
  - Algoritmo 1: $f_1(n) = 2n^2 + 5n$ operações
  - Algoritmo 2: $f_2(n) = 50n + 4000$ operações
- Dependendo do valor de n, o Alg. 1 pode requerer mais ou menos operações que o Alg. 2

$n = 10$
$f_1(10) = 2(10)^2 + 5*10 = 250$
$f_2(10) = 50*10 + 4000 = 4500$

$n = 100$
$f_1(100) = 2(100)^2 + 5*100 = 20500$
$f_2(100) = 50*100 + 4000 = 9000$

Comportamento assintótico

- Comportamento assintótico:
  - Quando n tem valor muito grande ($n \to \infty$)

- não é a ÚNICA coisa que importa!

Comportamento assintótico

- Comportamento assintótico:
    - Quando n tem valor muito grande ($n \to \infty$)
    - Termos inferiores e constantes multiplicativas contribuem pouco na comparação e podem ser descartados

Comportamento assintótico

- Comportamento assintótico:
  - Quando n tem valor muito grande (**$n \to \infty$**)
  - Termos inferiores e constantes multiplicativas contribuem pouco na comparação e podem ser descartados

- Exemplo:
  - Algoritmo 1: $f_1(n) = 2n^2 + 5n$ operações
  - Algoritmo 2: $f_2(n) = 500n + 4000$ operações
  - $f_1(n)$ cresce com **n^2**
  - $f_2(n)$ cresce com **n**
  - crescimento quadrático é pior que crescimento linear
  - Algoritmo 2 é melhor do que o Algoritmo 1

- mas observe o que acontece para n = 10, 20, 30

A notação O

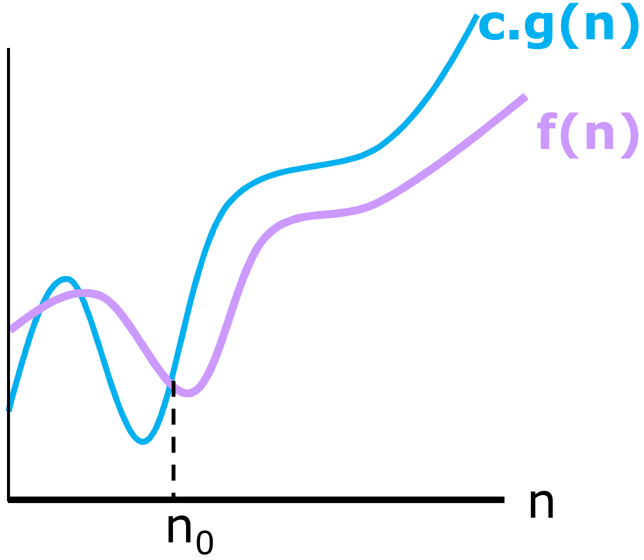
Definição: Sejam f e g duas funções de domínio X.

Dizemos que a função f é *O(g(n))* sse

$(\exists c \in \Re^{+})(\exists\ n_0 \in X)(\forall\ n \geq n_0)(|f(n)| \leq c.|g(n)|)$

A notação **O** nos dá um **limite superior** assintótico

$f(n) = O(g(n))$



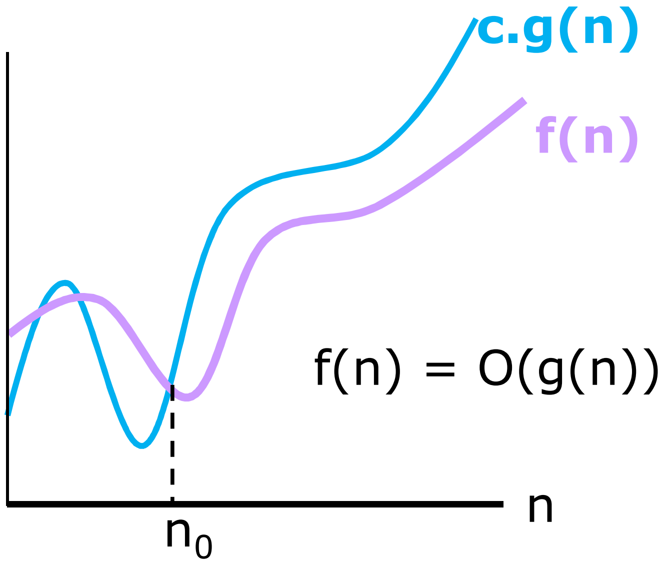
A notação O

Definição: Sejam f e g duas funções de domínio X.

Dizemos que a função f é *O(g(n))* sse

$(\exists c \in \Re^{+})(\exists\ n_0 \in X)(\forall\ n \geq n_0)(|f(n)| \leq c.|g(n)|)$

A notação **O** nos dá um **limite superior** assintótico



$3n + 2 = O(n)$, pois
$3n + 2 \leq 4n$ para todo $n \geq 2$

$1000n^2 + 100n - 6 = O(n^2)$, pois
$1000n^2 + 100n - 6 \leq 1001n^2$ para $n \geq 100$

$f(n) = a_m n^m + \ldots + a_1 n + a_0 \Rightarrow f(n) = O(n^m)$

Busca sequencial

```
int BuscaSequencial(char vet[], int tam, char dado)
{
    int i;
    for (i=0; i<tam; i++){
        if ( vet[i] == dado )
            return(i);
    }
    return(0);
}
```

Busca sequencial
Análise do pior caso (O)

- Quando acontece o pior caso?
  - Quando o dado procurado está na **última** posição do vetor ou **o dado não está no vetor**
  - Dado um vetor de tamanho n temos que $f(n) = n$
- Complexidade no pior caso: $O(n)$

Busca binária (vetor ordenado)

```
int BuscaBinaria( char vet[], char dado, int inic, int fim)
{
    int meio = (inic + fim)/2;
    if ( vet[meio] == dado )
        return (meio);
    if ( inic >= fim )
        return (-1);
    if ( dado < vet[meio] )
        return BuscaBinaria (vet, dado, inic, meio-1);
    else
        return BuscaBinaria (vet, dado, meio+1, fim);
}
```

Busca binária

1	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**
0	1	2	3	4	5	6

O dado a ser procurado é o '7'.

inic = 0
fim = 6
meio = (0 + 6) / 2 = 3

			meio			
1	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**
0	1	2	3	4	5	6

BuscaBinaria (vet, dado, meio+1, fim);

inic = 4
fim = 6
meio = (4 + 6) / 2 = 5

	meio	
5	**6**	**7**
4	5	6

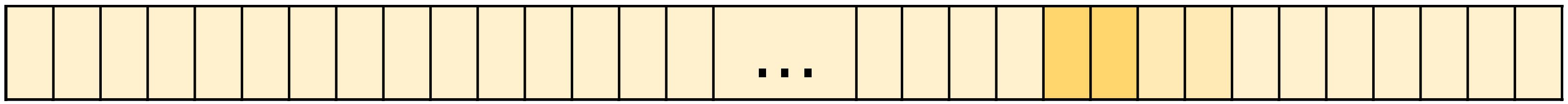
BuscaBinaria (vet, dado, meio+1, fim);

inic = 6
fim = 6
meio = (6 + 6) / 2 = 6

meio
7
6

Busca binária
Análise do pior caso (O)

O pior caso acontece quando o elemento procurado não está no vetor



n elementos

1° iteração: n elementos

2° iteração: n/2 elementos

3° iteração: n/4 elementos

4° iteração: n/8 elementos

5° iteração: n/16 elementos

K-ésima iteração: $n/(2^{k-1})$ elementos

Busca binária
Análise do pior caso (O)

As chamadas param quando:

- a posição do elemento é encontrada ou
- quando não há mais elementos a serem procurados, isto é, quando o tamanho do vetor é menor o igual a 1

Busca binária
Análise do pior caso (O)

As chamadas param quando:

- a posição do elemento é encontrada ou
- quando não há mais elementos a serem procurados, isto é, quando o tamanho do vetor é menor o igual a 1

Para qual valor de k, o tamanho do vetor é menor ou igual a 1?

Busca binária
Análise do pior caso (O)

As chamadas param quando:

- a posição do elemento é encontrada ou
- quando não há mais elementos a serem procurados, isto é, quando o tamanho do vetor é menor o igual a 1

Para qual valor de k, o tamanho do vetor é menor ou igual a 1?

$$\frac{n}{2^{k-1}} = 1 \quad \Rightarrow n = 2^{k-1} \quad \Rightarrow \log_2 n = \log_2 2^{k-1} \quad \Rightarrow \log_2 n = (k-1)\log_2 2 \quad \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \log_2 n = k - 1 \quad \Rightarrow k = 1 + \log_2 n$$

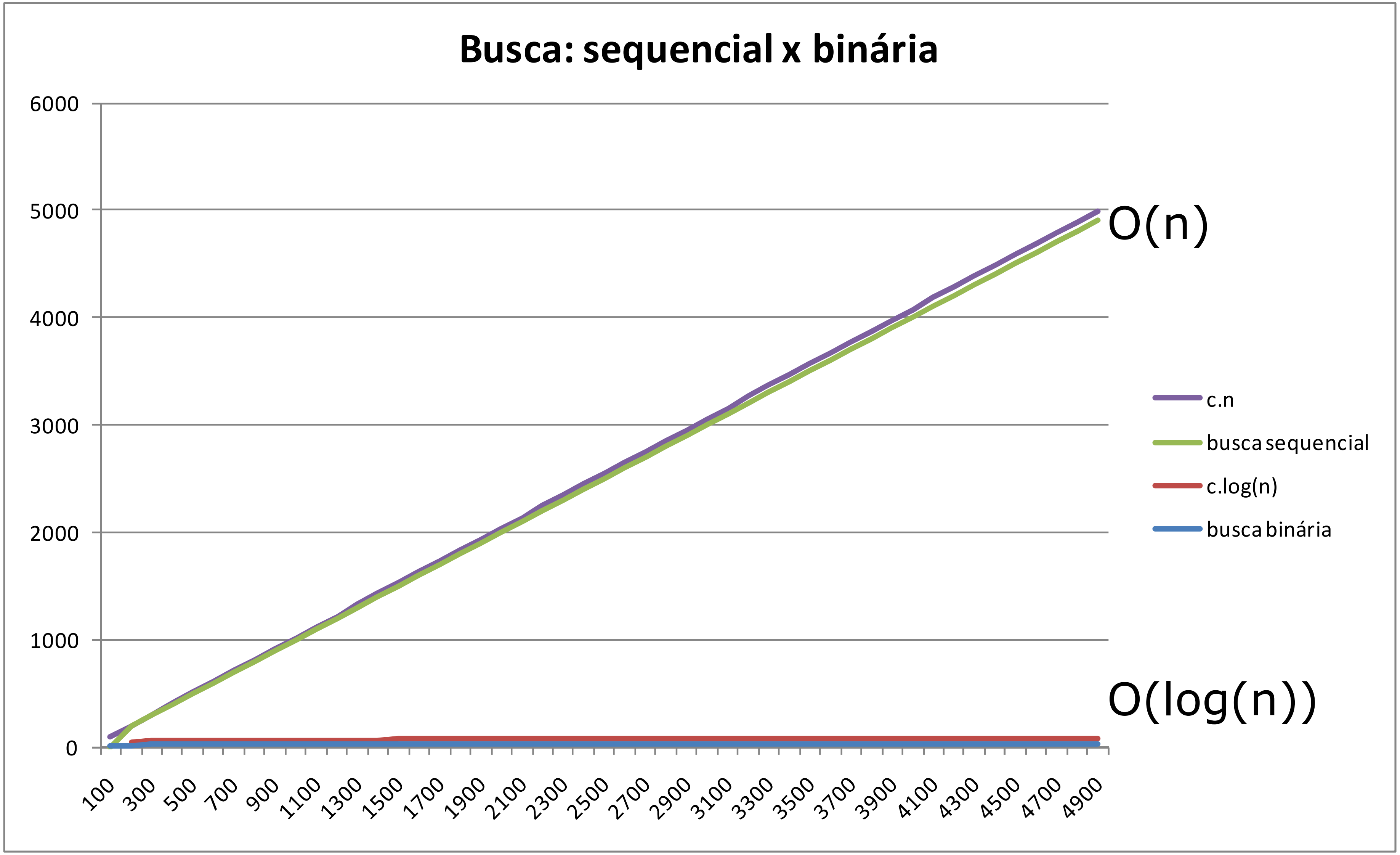
O algoritmo para quando $k > 1 + \log_2 n$

Busca binária
Análise de pior caso (O)

Pior caso: $1 + \log_2 n$ passos

Mas, $1 + \log_2 n < c(\log_2 n)$, para algum $c > 0$.

Complexidade no algoritmo no pior caso: $O(\log_2 n)$


Busca: sequencial x binária
6000
5000
4000
3000
2000
1000
0
100
300
500
700
900
1100
1300
1500
1700
1900
2100
2300
2500
2700
2900
3100
3300
3500
3700
3900
4100
4300
4500
4700
4900
O(n)
O(log(n))
c.n
busca sequencial
c.log(n)
busca binária

Notação	Complexidade	Característica	Exemplo
$O(1)$	constante	independe do tamanho n da entrada	determinar se um número é par ou ímpar; usar uma tabela de dispersão (hash) de tamanho fixo
$O(\log n)$	logarítmica	o problema é dividido em problemas menores	**busca binária**
$O(n)$	linear	realiza uma operação para cada elemento de entrada	**busca sequencial**; soma de elementos de um vetor
$O(n \log n)$	log-linear	O problema é dividido em problemas menores e depois junta as soluções	heapsort, quicksort, **merge sort**
$O(n^2)$	quadrática	itens processados aos pares (geralmente loop aninhado)	bubble sort (pior caso); quick sort (pior caso); **selection sort**; insertion sort
$O(n^3)$	cúbica		multiplicação de matrizes n x n; todas as triplas de n elementos
$O(n^c)$, $c>1$	polinomial		caixeiro viajante por programação dinâmica
$O(c^n)$	exponencial	força bruta	todos subconjuntos de n elementos
$O(n!)$	fatorial	força bruta: testa todas as permutações possíveis	caixeiro viajante por força bruta

$$O(1) < O(\log n) < O(n) < O(n \log n) < O(n^2) < O(n^3) < O(c^n) < O(n!)$$

Soma de vetores – Passos de execução

comando	**passo**	**frequência**	**subtotal**
`float soma(float v[], int n)`	0	0	0
`{`	0	0	0
`   int i;`	0	0	0
`   float somatemp = 0;`	1	0	1
`   for (i=0; i < n; i++)`	1	n+1	n+1
`      somatemp += vet[i];`	1	n	n
`   return somatemp;`	1	1	1
`}`	0	0	0
Total			**2n+3**

O(n)

Soma de matrizes – Passos de execução

comando	passo	frequência	subtotal
`float soma(int a[][N], ...,` `int rows, int cols)`	0	0	0
`{`	0	0	0
`int i, j;`	0	0	0
`for (i=0; i < rows; i++)`	1	rows+1	rows+1
`for (j=0; j < cols; j++)`	1	rows × (cols+1)	rows × (cols+1)
`c[i][j] = a[i][j]+b[i][j];`	1	rows × cols	rows × cols
`}`	0	0	0
Total			**2rows × cols + 2rows + 1**

$O(n^2)$

Multiplicação de matrizes – complexidade

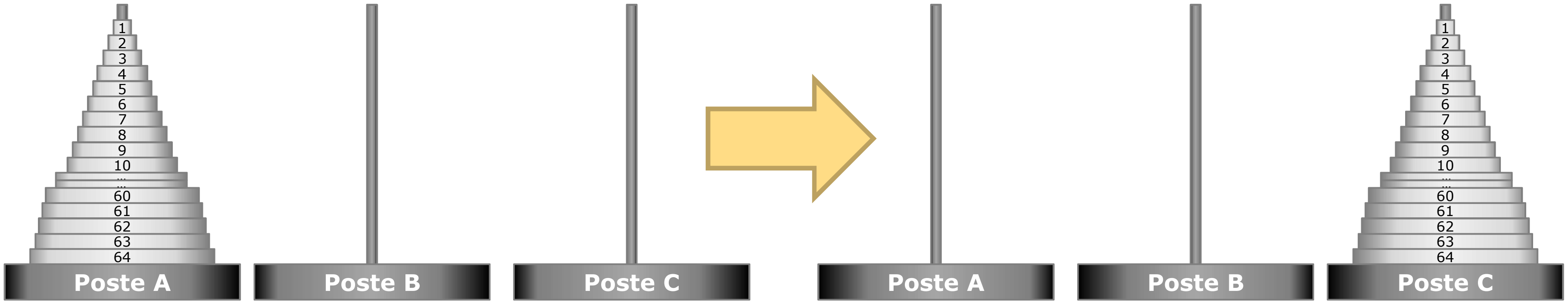
comando	**complexidade assintótica**
`float multi(double *a, double *b, double *c, int n)`	0
`{`	0
`  int i, j, k;`	0
`  for (i=0; i < n; i++)`	n
`    for (j=0; j < n; j++)`	n x n
`    {`	0
`      c[i][j] = 0`	n x n
`      for (k=0; k < n; k++)`	n x n x n
`        c[i][j] += a[i][k] * b[k][j];`	n x n x n
`    }`	0
`}`	0
`Total`	

$O(n^3)$

Exemplo: Torres de Hanói

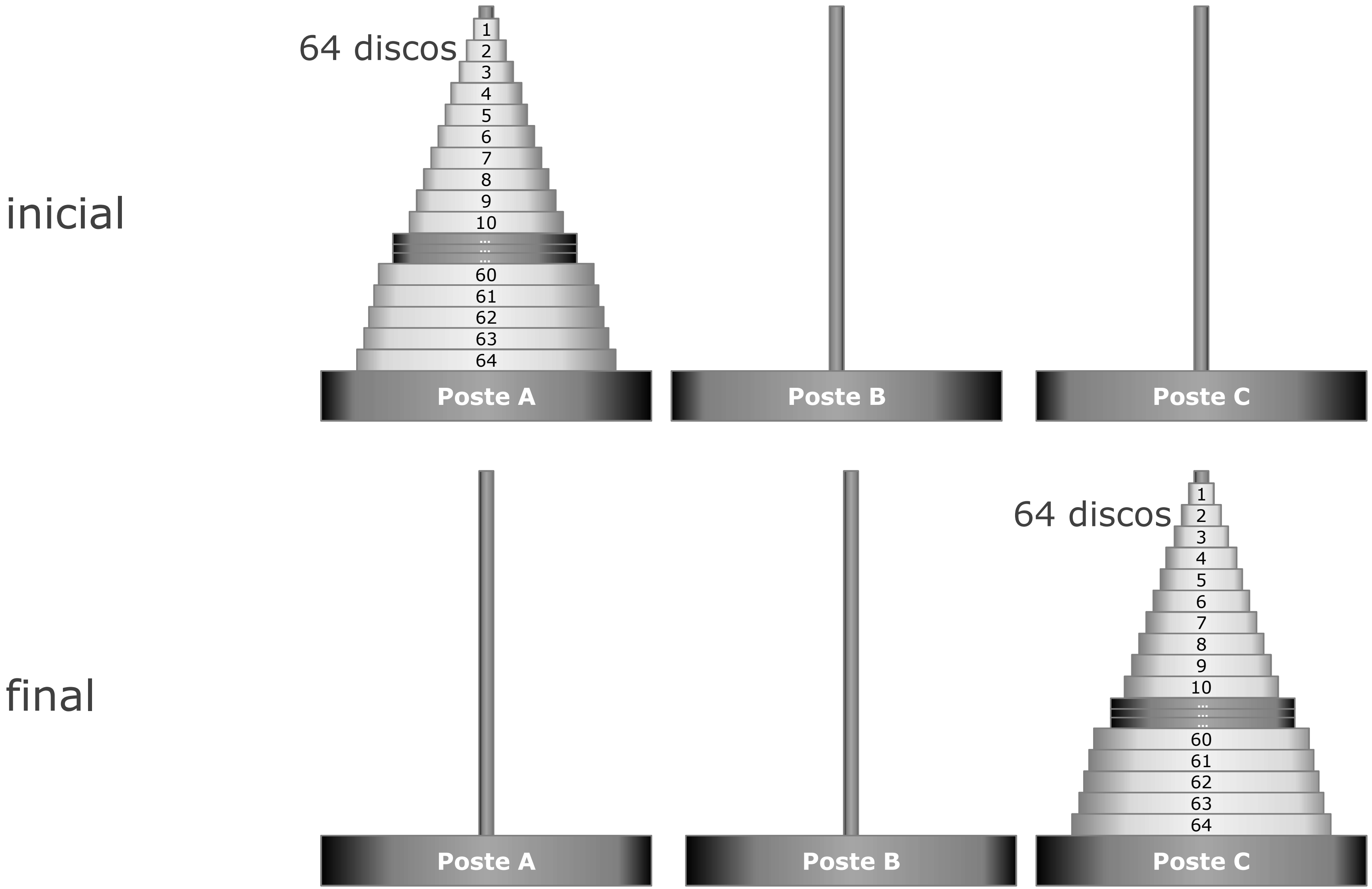
Diz a lenda que um monge muito preocupado com o fim do Universo perguntou ao seu mestre quando isto iria ocorrer.

O mestre, vendo a aflição do discípulo, pediu a ele que olhasse para os três postes do monastério e observasse os 64 discos de tamanhos diferentes empilhados no primeiro deles. Disse que se o discípulo quisesse saber o tempo que levaria para o Universo acabar, bastava que ele calculasse o tempo que levaria para ele mover todos os discos do Poste A para o Poste C seguindo uma regra simples: ele nunca poderia colocar um disco maior sobre um menor e os discos teriam que repousar sempre num dos postes.



Em quanto tempo você estima que o mestre disse que o Universo vai acabar?

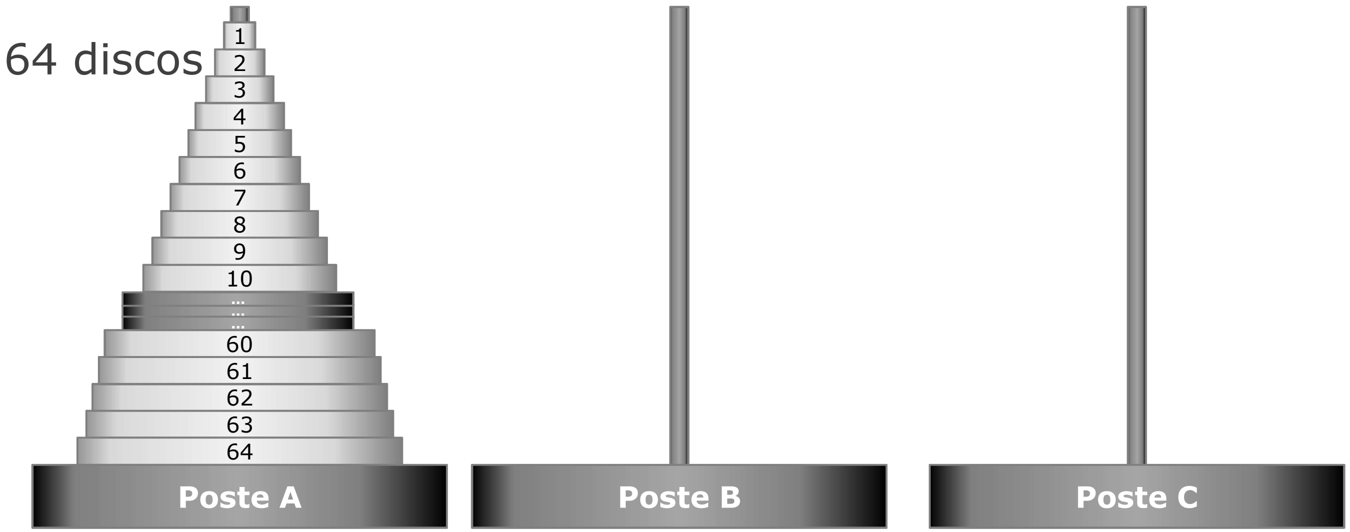
Torres de Hanói



Torres de Hanói – Algoritmo recursivo

Suponha que haja uma solução para mover n-1 discos.

A partir dela, crie uma solução para n discos.



Torres de Hanói – Algoritmo recursivo

Passo 1

Mova n-1 discos do poste A para o poste B

(hipótese da recursão)

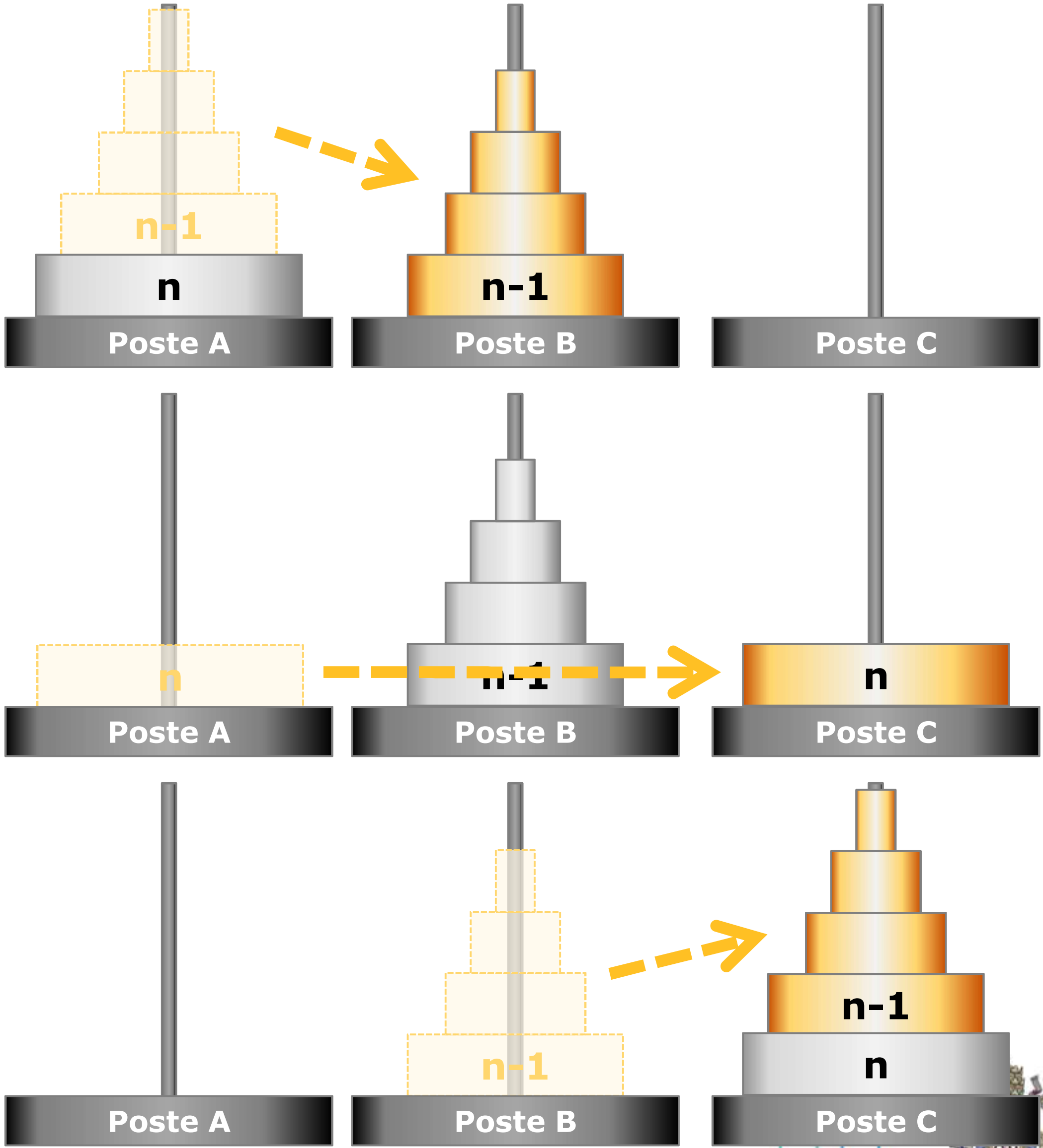
Passo 2

Mova o n-ésimo disco de A para C

Passo 3

Mova n-1 discos de B para C

(hipótese da recursão)

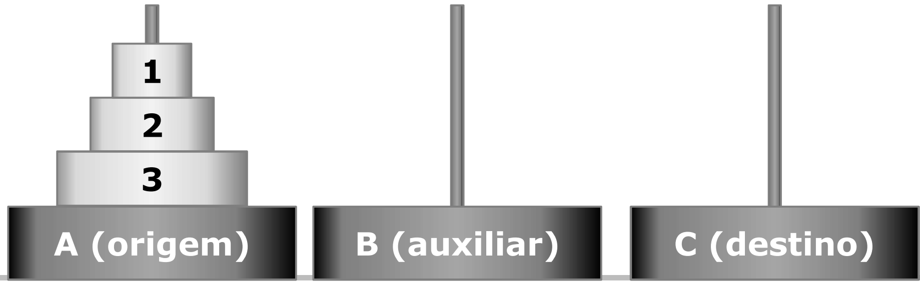


Torres de Hanoi – Implementação

```c
#include <stdio.h>

void torres(int n, char origem, char destino, char auxiliar)
{
  if (n == 1) {
    printf("Mova o Disco 1 do Poste %c para o Poste %c\n", origem, destino);
    return;
  }
  else {
    torres(n-1, origem, auxiliar, destino);
    printf("Mova o Disco %d do Poste %c para o Poste %c\n", n, origem, destino);
    torres(n-1, auxiliar, destino, origem);
  }
}

int main( void )
{
  torres(3, 'A', 'C', 'B');
  return 0;
}
```



Execução para 3 discos:

Mova o disco 1 do Poste A para o Poste C

Mova o disco 2 do Poste A para o Poste B

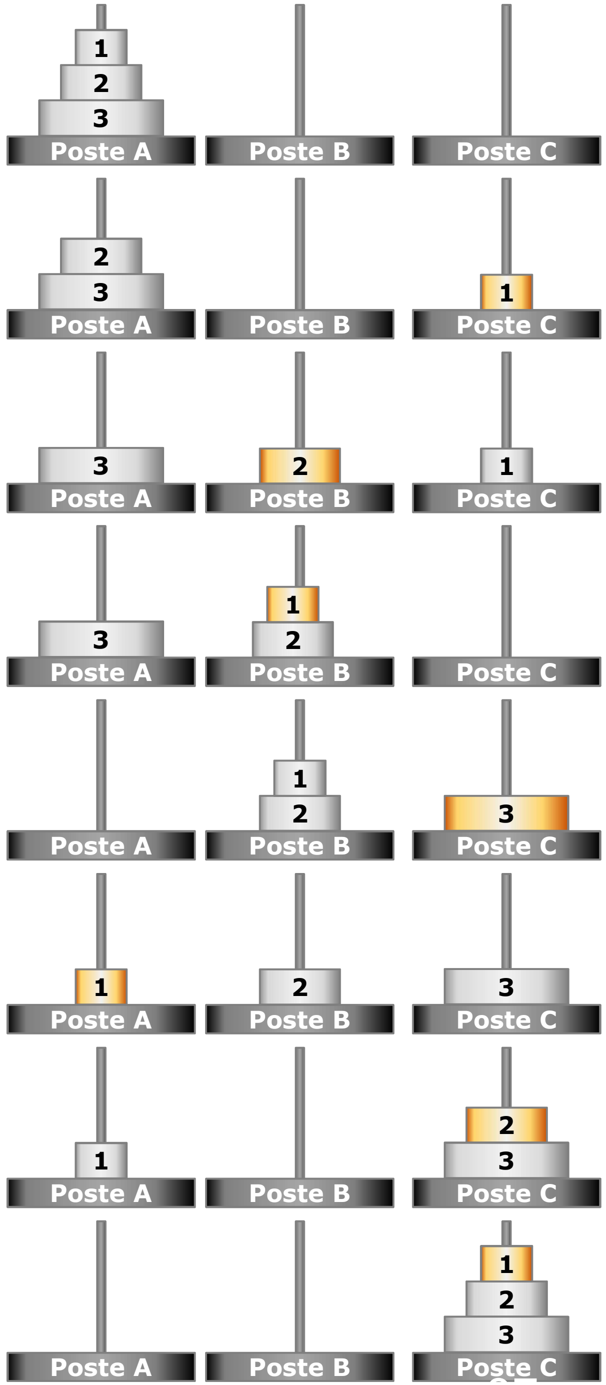
Mova o disco 1 do Poste C para o Poste B

Mova o disco 3 do Poste A para o Poste C

Mova o disco 1 do Poste B para o Poste A

Mova o disco 2 do Poste B para o Poste C

Mova o disco 1 do Poste A para o Poste C



Torres de Hanoi – Análise da complexidade

Seja t_n o tempo necessário para mover n discos

$t_n = 1 + 2t_{n-1}$ (a constante 1 pode ser ignorada)

$t_n \approx 2t_{n-1} = \underbrace{2(2(2(2(2\ldots(2t_1}_{n-1})))))$

$t_n \approx \mathbf{2^{n-1}} t_1$ (exponencial)

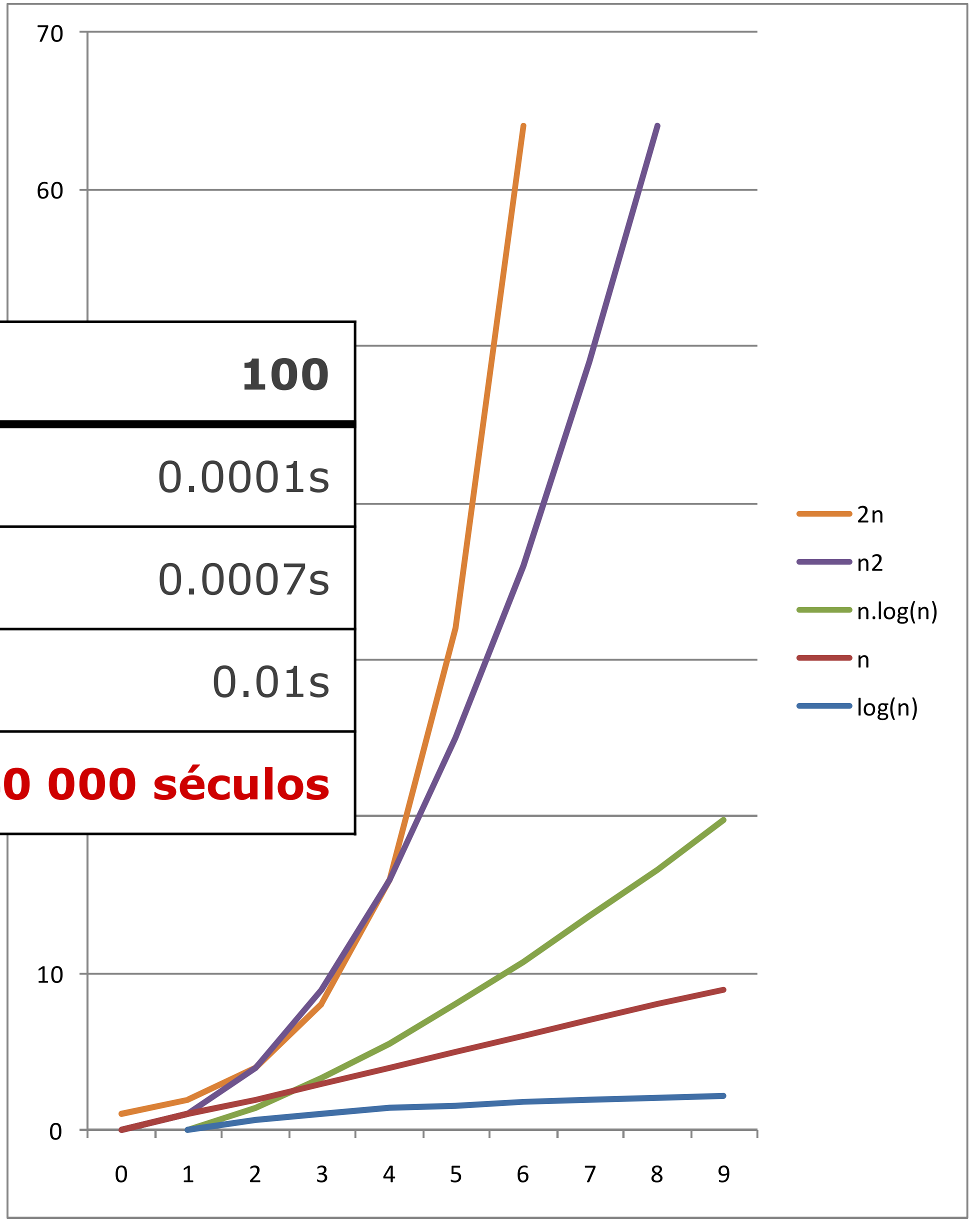
Para 64 discos: $t_{64} \approx 2^{63} t_1 = 9.2 \times 10^{18} t_1$

Supondo que o tempo para mover um disco seja t_1 = 1 s, o monge levaria **292.277.265 milênios** para terminar a tarefa!

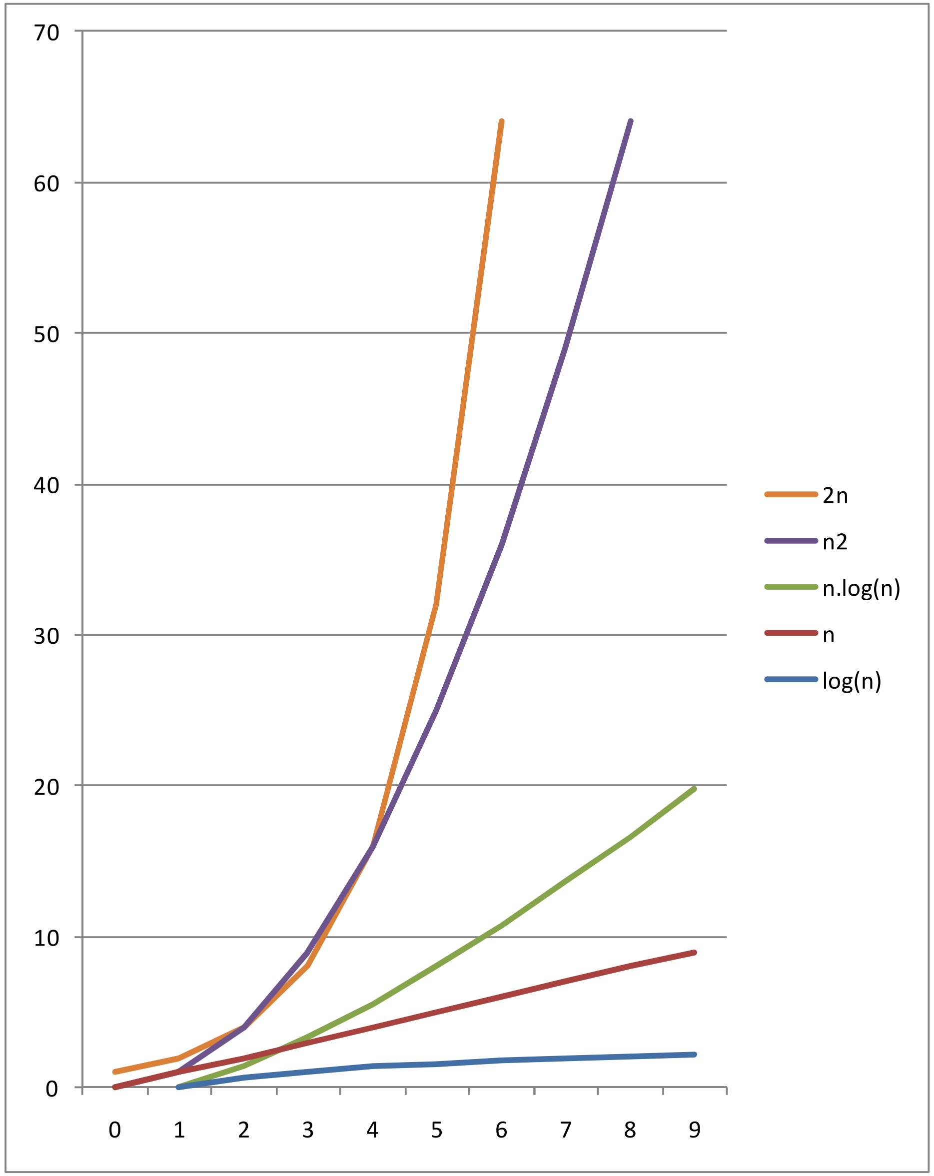
n	2^{n-1}
1	1
2	2
3	4
4	8
5	16
6	32
7	64
8	128
9	256
10	512
11	1024
12	2048
13	4096

Importância da complexidade de um algoritmo

	10	20	100
n	0.00001s	0.00002s	0.0001s
n log(n)	0.00003s	0.00009s	0.0007s
n^2	0.0001s	0.0004s	0.01s
2^n	**intratáveis!**		**40 000 séculos**



Complexidade temporal



log(n)	n	n.log(n)	n^2	2^n
0	1	0	1	2
0,69	2	1,39	4	4
1,10	3	3,30	9	8
1,39	4	5,55	16	16
1,61	5	8,05	25	32
1,79	6	10,75	36	64
1,95	7	13,62	49	128
2,08	8	16,64	64	256
2,20	9	19,78	81	512
2,30	10	23,03	100	1024
2,40	11	26,38	121	2048
2,48	12	29,82	144	4096
2,56	13	33,34	169	8192
2,64	14	36,95	196	16384
2,71	15	40,62	225	32768
2,77	16	44,36	256	65536
2,83	17	48,16	289	131072
2,89	18	52,03	324	262144
2,94	19	55,94	361	524288
3,00	20	59,91	400	1048576
3,04	21	63,93	441	2097152
3,09	22	68,00	484	4194304
3,14	23	72,12	529	8388608
3,18	24	76,27	576	16777216
3,22	25	80,47	625	33554432
3,26	26	84,71	676	67108864
3,30	27	88,99	729	1,34E+08
3,33	28	93,30	784	2,68E+08
3,37	29	97,65	841	5,37E+08
3,40	30	102,04	900	1,07E+09
3,43	31	106,45	961	2,15E+09
3,47	32	110,90	1024	4,29E+09
3,50	33	115,38	1089	8,59E+09
3,53	34	119,90	1156	1,72E+10
3,56	35	124,44	1225	3,44E+10
3,58	36	129,01	1296	6,87E+10
3,61	37	133,60	1369	1,37E+11
3,64	38	138,23	1444	2,75E+11
3,66	39	142,88	1521	5,5E+11
3,69	40	147,56	1600	1,1E+12
3,71	41	152,26	1681	2,2E+12
3,74	42	156,98	1764	4,4E+12
3,76	43	161,73	1849	8,8E+12
3,78	44	166,50	1936	1,76E+13
3,81	45	171,30	2025	3,52E+13
3,83	46	176,12	2116	7,04E+13
3,85	47	180,96	2209	1,41E+14
3,87	48	185,82	2304	2,81E+14
3,89	49	190,70	2401	5,63E+14
3,91	50	195,60	2500	1,13E+15

Problema do caixeiro viajante – força bruta

Modelo: matriz de cidades (NXN)

NXN	1	2	3	4	5
1	0	2	4	6	2
2	4	0	4	2	6
3	1	3	0	5	5
4	3	1	5	0	3
5	3	1	3	5	0

Problema: minimizar o custo ao se percorrer todas as cidades.
Deseja-se calcular a menor distância ou o menor tempo decorrido, visitando todas as cidades .

Algoritmo:
Percorrer todos os nós (todas as possibilidades) e somar a distância percorrida ou o tempo do percurso.
Escolha uma cidade para iniciar a visita: 5 possibilidades
Escolha um percurso da cidade onde está até a próxima: 4 possibilidades (não inclui as cidades já visitadas).
Faça isso para todas as colunas restantes da matriz, ou seja, na próxima fase serão 3 possibilidades, depois 2 depois 1, fim do algoritmo. Escolha como solução a de menor custo.
Avaliar todas as possibilidades = 5x4x3x2x1 = 5!
Heurística: Algoritmo guloso (em cada viagem escolhe a de menor custo).