PUC RIO

MAT4161/MAT4181 – Cálculo a uma Variável
P1 Maple – 01 de abril de 2024
(Versão I)

Questão 1

Considere as equações das seguintes circunferências:

$$(x-1)^2 + y^2 = 2$$
$$(x-2)^2 + (y+1)^2 = 4$$

Determine a equação da **parábola** que passa pelo ponto $(3, -2)$ e também pelos dois pontos de interseção entre as circunferências.

```
> restart
```

Primeiramente vamos determinar as coordenadas dos pontos de interseção entre as cirncunferências:

```
> solve([(x-1)^2+y^2=2,(x-2)^2+(y+1)^2=4])
```

$$\{x=2, y=1\}, \{x=0, y=-1\} \quad (1)$$

Seja $y=f(x)$ a equação da parábola que deve ser determinada, onde f é uma função quadrática:

```
> f:=x->a*x^2+b*x+c
```

$$f := x \rightarrow a\,x^2 + b\,x + c \quad (2)$$

Os pontos $(2, 1)$, $(0, -1)$ e $(3, -2)$ pertencem à parábola, então suas coordenadas devem satisfazer a equação $y=f(x)$:

```
> solve([1=f(2),-1=f(0),-2=f(3)])
```

$$\left\{a = -\frac{4}{3}, b = \frac{11}{3}, c = -1\right\} \quad (3)$$

Logo, a equação pedida é $y = -\frac{4\,x^2}{3} + \frac{11\,x}{3} - 1$.

Questão 2

Considere a função f definida por

$$f(x) = \begin{cases} g(x), & x < 1 \\ \\ h(x), & x \geq 1 \end{cases}$$

onde g e h são funções **quadráticas**.

Sabendo que f é uma função **contínua** e **derivável**, escreva expressões para as funções g e h de forma que:

- a reta $y = -x + 2$ seja tangente ao gráfico de f em $x = -1$,
- a reta $y = 2x - 1$ seja tangente ao gráfico de f em $x = 2$.

```
> restart
> g:=x->a*x^2+b*x+c
```

$$g := x \rightarrow a\,x^2 + b\,x + c \qquad \textbf{(4)}$$

```
> h:=x->p*x^2+q*x+r
```

$$h := x \rightarrow p\,x^2 + q\,x + r \qquad \textbf{(5)}$$

Para determinar os seis coeficientes, vamos resolver um sistema com seis equações.

Condicões para que f seja contínua e diferenciável:

$g(1) = h(1)$

$g'(1) = h'(1)$

Condições para que a reta $y = -x + 2$ seja tangente ao gráfico de f em $x = -1$:

$g'(-1) = -1$

$g(-1) = -(-1) + 2 = 3$

Condições para que a reta $y = 2\,x - 1$ seja tangente ao gráfico de f em $x = 2$:

$h'(2) = 2$

$h(2) = 2\,.\,2 - 1 = 3$

```
> solve([g(1)=h(1),D(g)(1)=D(h)(1),D(g)(-1)=-1,g(-1)=3,D(h)(2)=2,h
  (2)=3])
```

$$\left\{a = \frac{1}{4},\, b = -\frac{1}{2},\, c = \frac{9}{4},\, p = 1,\, q = -2,\, r = 3\right\} \qquad \textbf{(6)}$$

Logo,

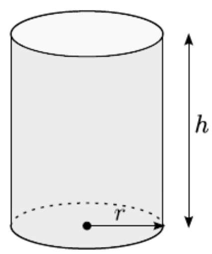
$$g(x) = \frac{x^2}{4} - \frac{x}{2} + \frac{9}{4}$$

$$h(x) = x^2 - 2x + 3$$

Questão 3

Deseja-se fabricar um recipiente no formato de cilindro circular reto, aberto do lado superior, com volume de 150 cm^3. Suponha que na fabricação da lateral e do fundo não há desperdícios de material.

Sejam r e h o raio da base e a altura do cilindro, respectivamente.



Seja A a função de r que fornece a **área** da superfície de todo o recipiente.

Sabendo que a área de um círculo de raio r é πr^2, e que o comprimento de uma circunferência de raio r é $2\pi r$, faça o que se pede.

(a) Determine o domínio e uma expressão para a função A.
Obs.: No Maple, π se escreve `Pi`.

A área da base é πr^2, e a área lateral é $2\pi r h$.

Para escrever h em termos de r:

$$\text{Volume} = \pi r^2 h = 150 \Rightarrow h = \frac{150}{\pi r^2}$$

Logo,

$$A(r) = \pi r^2 + 2\pi r\left(\frac{150}{\pi r^2}\right) = \pi r^2 + \frac{300}{r}$$

Para determinar o domínio, as únicas restrições impostas pelo problema são $r > 0$ e $h > 0$.

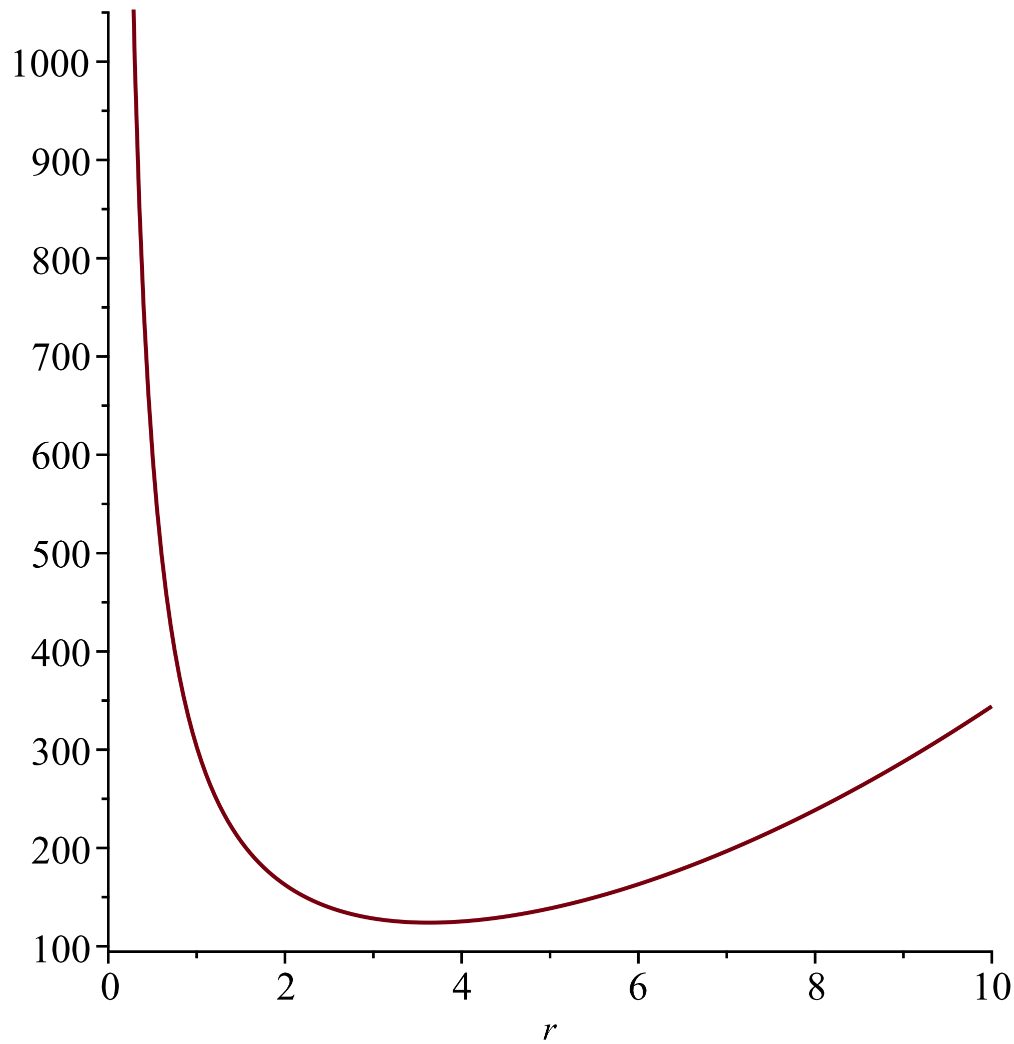
Como $h = \dfrac{150}{\pi r^2} > 0$ para todo r real, então $\mathrm{Dom}(A) = (0, +\infty)$.

(b) Determine o raio e a altura do recipiente correspondente à **menor** área. Não se esqueça de justificar sua resposta.

```
> restart
> A:=r->Pi*r^2+300/r
```

$$A := r \to \pi r^2 + \frac{300}{r} \tag{7}$$

```
> plot(A(r),r=0..10)
```



```
> s:=solve(D(A)(r)=0)
```

$$s := \frac{150^{1/3} \left(\pi^2\right)^{1/3}}{\pi}, -\frac{1}{2} \frac{150^{1/3} \left(\pi^2\right)^{1/3}}{\pi} + \frac{\frac{1}{2} \mathrm{I} \sqrt{3}\, 150^{1/3} \left(\pi^2\right)^{1/3}}{\pi}, -\frac{1}{2} \frac{150^{1/3} \left(\pi^2\right)^{1/3}}{\pi} - \frac{\frac{1}{2} \mathrm{I} \sqrt{3}\, 150^{1/3} \left(\pi^2\right)^{1/3}}{\pi} \tag{8}$$

```
> evalf(s[1])
```
$$3.627831678 \tag{9}$$

O solve forneceu apenas uma solução real (as duas outras são complexas) e, pelo plot acima, vemos que esta solução (que está entre 3 e 5) é de fato um mínimo local da função.

Logo,

```
> rmin:=s[1]
```
$$rmin := \frac{150^{1/3}\left(\pi^2\right)^{1/3}}{\pi} \tag{10}$$

```
> hmin:=150/(Pi*rmin^2)
```
$$hmin := \frac{\pi\, 150^{1/3}}{\left(\pi^2\right)^{2/3}} \tag{11}$$

```
> evalf(hmin)
```
$$3.627831677 \tag{12}$$

Ou seja, o cilindro de volume 150 cm^3 que possui a menor área é aquele de raio 3.627 cm e altura 3.627 cm.

Obs.: Caso o aluno tenha utilizado o fsolve (com ou sem intervalo de busca), a justificativa precisa ser mais elaborada.

```
> fsolve(D(A)(r)=0)
```
$$3.627831679 \tag{13}$$

Sabemos, pelo plot, que 3.627 é um valor de r que **minimiza** a função A. Entretanto, como garantir que este é o mínimo **global**? O gráfico da função foi esboçado apenas no intervalo $[0, 10]$, mas o domínio de A é $(0, +\infty)$. Além disso, o fato do fsolve ter nos dado apenas uma solução não quer dizer que não haja outras.

Vamos então determinar os intervalos de crescimento e de decrescimento de A:

```
> solve(D(A)(r)>0)
```
$$RealRange\left(Open\left(\frac{150^{1/3}\left(\pi^2\right)^{1/3}}{\pi}\right), \infty\right) \tag{14}$$

```
> solve(D(A)(r)<0)
```
$$RealRange(-\infty, Open(0)), RealRange\left(Open(0), Open\left(\frac{150^{1/3}\left(\pi^2\right)^{1/3}}{\pi}\right)\right) \tag{15}$$

Como $\mathrm{Dom}(A) = (0, +\infty)$, então

A é decrescente em $\left(0, \frac{150^{1/3}\left(\pi^2\right)^{1/3}}{\pi}\right]$ e é crescente em $\left[\frac{150^{1/3}\left(\pi^2\right)^{1/3}}{\pi}, +\infty\right)$.

Logo, de fato A possui mínimo global em $r = \dfrac{150^{1/3}\left(\pi^2\right)^{1/3}}{\pi}$.

Critério de correção:

Questão 1 (valor: 1,2)

0,4 pelos pontos de interseção entre as circunferências
0,4 pelo sistema de equações que deve ser sarisfeito
0,4 pela equação da parábola

Questão 2 (valor: 1,2)

0,3 por cada par de equações que devem ser satisfeitas (são 3 pares no total)
0,3 pelas expressões de g e h

Questão 3 (valor: 1,6)

Item (a)
0,2 por escrever h em termos de r
0,4 pela expressão $A(r)$
0,2 pelo domínio

Item (b)
0,3 pelo valor de r que minimiza a área
0,4 pela justificativa
0,1 pela altura h