MAT4161/MAT4181
Cálculo a uma Variável
P3 – 03 de julho de 2023

Nome Legível : Gabarito

Assinatura :

Matrícula : Turma :

Questão	Valor	Grau	Revisão
1^a	$1,5$		
2^a	$2,0$		
3^a	$1,5$		

P3 Maple (5,0)	P3 (5,0)	Total (10,0)	Revisão

Instruções Gerais:

- A duração da prova é de 1h50min.
- A tolerância de entrada é de 30min após o início da prova. Se um aluno terminar a prova em menos de 30min, deverá aguardar em sala antes de entregar a prova e sair de sala.
- A prova deve ser resolvida apenas nas folhas recebidas e nos espaços reservados para soluções. Não é permitido destacar folhas da prova.
- A prova é sem consulta a professores, fiscais ou a qualquer tipo de material. A interpretação dos enunciados faz parte da prova.
- O aluno só poderá realizar a prova e assinar a lista de presença na sua turma/sala.
- O aluno só poderá manter junto a si: lápis, borracha e caneta. Caso necessário, o fiscal poderá solicitar ajuda a outro aluno e apenas o fiscal repassará o material emprestado.
- O celular deverá ser desligado e lacrado dentro do saco plástico fornecido pelo fiscal.
- O aluno não poderá sair de sala enquanto estiver fazendo a prova.

Instruções Específicas:

- Todas as questões devem ser justificadas de forma clara, rigorosa e de preferência sucinta. Respostas sem justificativas não serão consideradas.
- A prova pode ser resolvida a lápis ou a caneta de tinta azul ou preta. Não é permitido o uso de caneta de tinta vermelha ou verde. Não é permitido o uso de corretivo líquido.
- Não é permitido o uso de calculadora ou qualquer dispositivo eletrônico.
- Esta prova possui 3 questões. Confira.

Questão 1. Para cada uma das funções abaixo, faça o que se pede:

(a) Determine a equação da reta tangente ao gráfico de f em $x = 2$, onde

$$f(x) = 2x\sqrt{x^2 - x}\,.$$

$$y = f'(2).(x-2) + f(2)$$

- $$f'(x) = 2\sqrt{x^2 - x} + \cancel{2}x \frac{1}{\cancel{2}\sqrt{x^2 - x}} \cdot (2x - 1)$$

$$\Rightarrow f'(2) = 2\sqrt{2} + 2 \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot 3 = 2\sqrt{2} + \frac{6}{\sqrt{2}} = 5\sqrt{2}$$

- $$f(2) = 4\sqrt{2}$$

Logo $$y = f'(2).(x-2) + f(2)$$

$$\Rightarrow y = 5\sqrt{2}(x-2) + 4\sqrt{2} \quad //$$

(b) Mostre que a função $g(x) = x\exp(x^2 + x)$ é inversível para todo $x \in \mathbb{R}$.

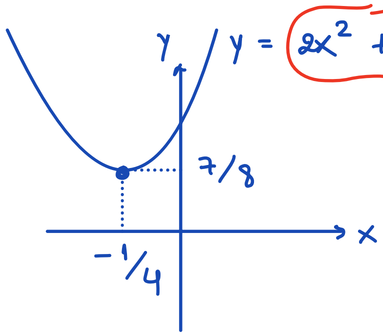
$$g'(x) = \exp(x^2 + x) + x.(2x+1)\exp(x^2+2)$$

$$= \underbrace{e^{x^2+x}}_{>0,\ \forall x \in \mathbb{R}}(1 + 2x^2 + x)$$

Estudo de sinal de $\underbrace{2x^2 + x + 1}_{f(x)}$:

$$f'(x) = 4x + 1 = 0 \iff x = -\frac{1}{4} = x_v$$

$$f(x_v) = 2.\frac{1}{16} - \frac{1}{4} + 1 = \frac{1}{8} - \frac{1}{4} + 1 = \frac{7}{8} = y_v$$



$y = 2x^2 + x + 1 > 0,\ \forall x \in \mathbb{R}$

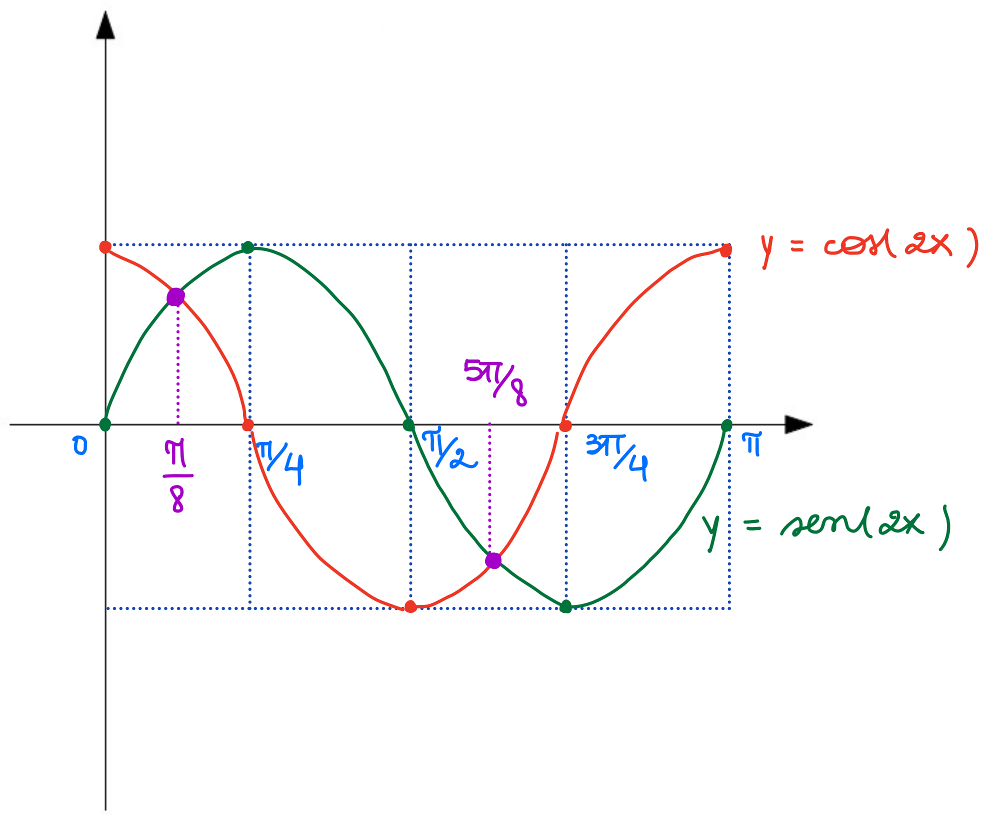
Logo como $g'(x)$ é o produto de duas funções estritamente positivas, então g é estritamente crescente, logo inversível.

Questão 2. Considere três funções, f, g, h, tais que:

- $\text{Dom}(f) = \text{Dom}(g) = \text{Dom}(h) = [0, \pi]$
- $f(x) = \cos(2x)$
- $g(x) = \text{sen}(2x)$
- $h(x) = \exp(2x)\cos(2x)$

(a) Esboce abaixo (ou seja, em um mesmo plano cartesiano) os gráficos das funções f e g em seu domínio.

Indique em seu desenho as abscissas (coordenadas x) dos pontos de interseção entre as duas curvas.



(b) Lembrando que $\mathrm{Dom}(h) = [0, \pi]$, determine as abscissas (coordenadas x) dos pontos de máximo e de mínimo local do gráfico de h.

Dica: Para classificar os candidatos como máximo ou mínimo local, utilize o item (a) para fazer o estudo de sinal de $h'(x)$.

$$h'(x) = 2e^{2x}\cos(2x) + e^{2x}(-\mathrm{sen}(2x)) \cdot 2$$

$$= 2e^{2x}(\cos(2x) - \mathrm{sen}(2x)) = 0$$

$$\iff \cos(2x) = \mathrm{sen}(2x)$$

$$\iff x = \underbrace{\frac{\pi}{8}, \frac{5\pi}{8}}_{} \quad \text{(pelo item (a))}$$

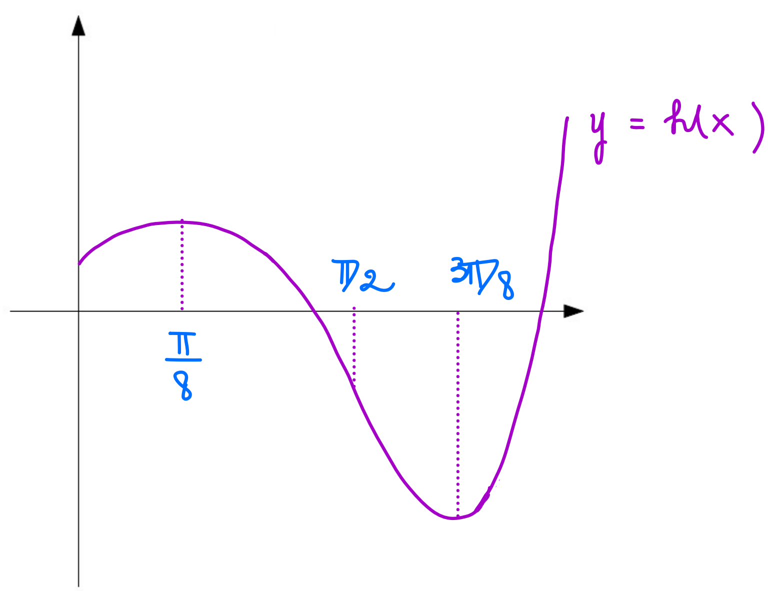
$\longrightarrow$ candidatos a extremo local

classificação:

	0 a $\pi/8$	$\pi/8$ a $5\pi/8$	$5\pi/8$ a π
$2e^{2x}$	+	+	+
$\cos(2x) - \mathrm{sen}(2x)$	+	−	+
$h'(x)$	+	−	+

Logo $x = \frac{\pi}{8}$ é máx. local e $x = \frac{5\pi}{8}$ é mín. local.

(c) Sabendo que o gráfico de h é côncavo para baixo no intervalo $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$, e côncavo para cima no intervalo $\left[\frac{\pi}{2}, \pi\right]$, utilize o resultado obtido no item (b) e esboce abaixo o gráfico de h.



Questão 3. Calcule:

(a) $\int x^2 \ln(3x)\, dx$

Partes : $u = \ln(3x) \Rightarrow du = \frac{3}{3x}\, dx \Rightarrow du = \frac{1}{x}\, dx$

$dv = x^2\, dx \Rightarrow v = \frac{x^3}{3}$

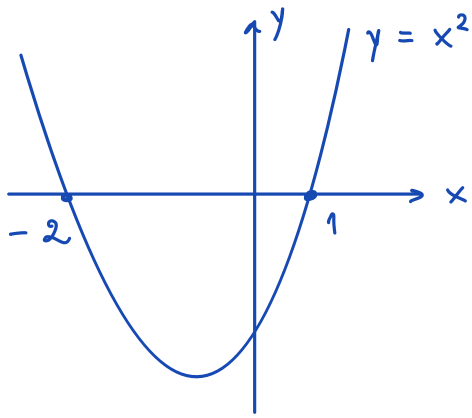
$$\therefore \int x^2 \cdot \ln(3x)\, dx = \frac{x^3}{3} \cdot \ln(3x) - \int \frac{x^3}{3} \cdot \frac{1}{x}\, dx$$

$$= \frac{x^3}{3} \cdot \ln(3x) - \frac{1}{3} \int x^2\, dx$$

$$= \frac{x^3}{3} \ln(3x) - \frac{1}{3} \cdot \frac{x^3}{3} + c \; //$$

(b) $\int_{-1}^{2} |x^2+x-2|\, dx$

$$x^2 + x - 2 = 0 \iff x = -2, 1$$



Logo

$$\int_{-1}^{2} |x^2+x-2|\, dx = \int_{-1}^{1} -(x^2+x-2)\, dx + \int_{1}^{2} x^2+x-2\, dx$$

$$= \left(-\frac{x^3}{3} - \frac{x^2}{2} + 2x\right)\Bigg|_{x=-1}^{1} + \left(\frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{2} - 2x\right)\Bigg|_{x=1}^{2}$$

$$= \left(-\frac{1}{3} - \cancel{\frac{1}{2}} + 2\right) - \left(\frac{1}{3} - \cancel{\frac{1}{2}} - 2\right) +$$

$$+ \left(\frac{8}{3} + 2 - 4\right) - \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{2} - 2\right)$$

$$= -\frac{2}{3} + 4 + \frac{7}{3} - \frac{1}{2} = \frac{31}{6}$$