PUC RIO

MAT14161/MAT4181

Cálculo a uma Variável

P2 Maple – 18 de junho de 2024

(Versão I)

Questão 1.

Seja f a função dada por

$$f(x) = (-x^3 + x + 1)\sqrt{x^2 + x + 4}\,.$$

(a) Encontre três intervalos I_1, I_2 e I_3 tais que

- f é inversível para todo $x \in I_1$,
- f é inversível para todo $x \in I_2$,
- f é inversível para todo $x \in I_3$,
- $I_1 \cup I_2 \cup I_3 = \mathrm{Dom}(f)$.

```
> restart
> f:=x->(-x^3+x+1)*sqrt(x^2+x+4)
```

$$f := x \mapsto \left(-x^3 + x + 1\right) \cdot \sqrt{x^2 + x + 4} \qquad \textbf{(1)}$$

Primeiramente vamos determinar o domínio da função:

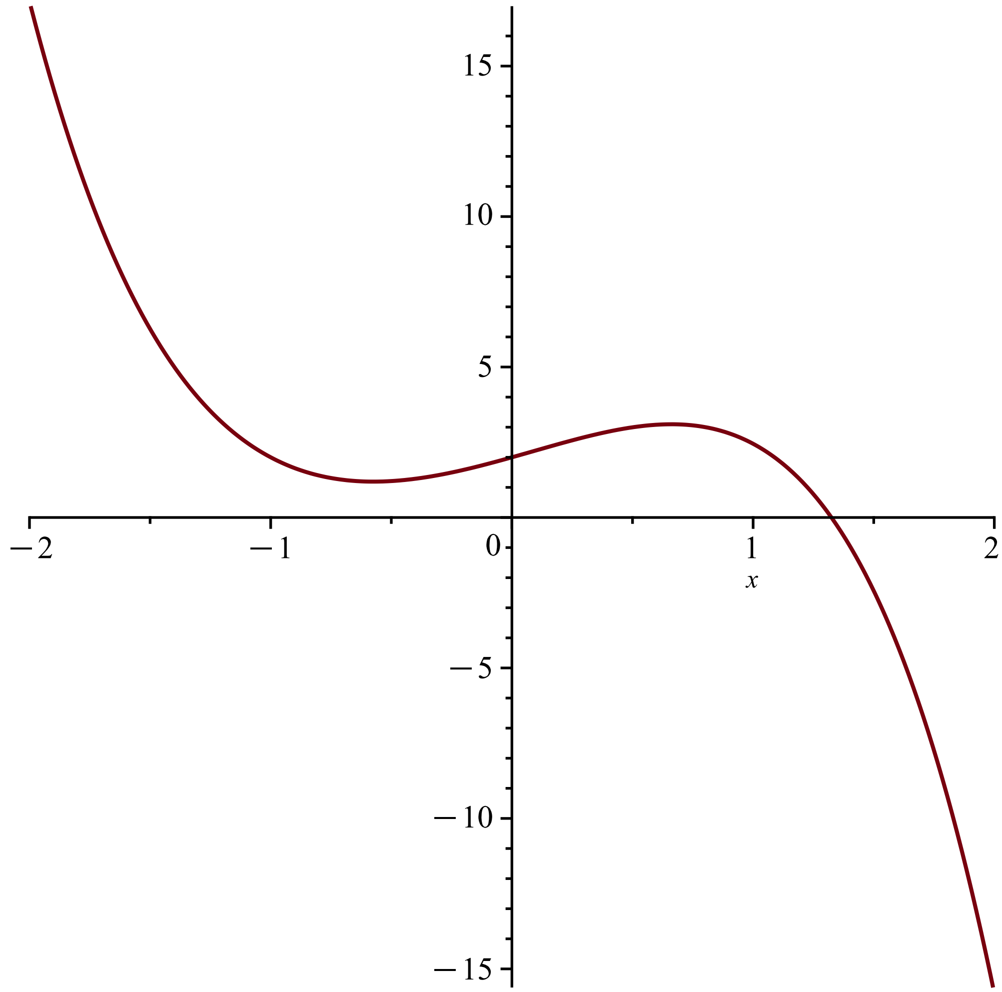
```
> solve(x^2+x+4>=0)
```

$$x \qquad \textbf{(2)}$$

Logo, não há restrições para o domínio. Ou seja, $Dom(f) = \mathbb{R}$.

Para determinar os três intervalos onde a função é inversível:

```
> plot(f(x),x=-2..2)
```




```
> solve(D(f)(x)=0)
```

$$RootOf(8\_Z^4+7\_Z^3+20\_Z^2-5\_Z-9, index=1), RootOf(8\_Z^4+7\_Z^3+20\_Z^2-5\_Z-9, index=2), RootOf(8\_Z^4+7\_Z^3+20\_Z^2-5\_Z-9, index=3), RootOf(8\_Z^4+7\_Z^3+20\_Z^2-5\_Z-9, index=4) \quad (3)$$

Utilizemos então o fsolve:

```
> a:=fsolve(D(f)(x)=0,x=-1..0)
```

$$a := -0.5738478764 \quad (4)$$

```
> b:=fsolve(D(f)(x)=0,x=0..1)
```

$$b := 0.6614449895 \quad (5)$$

Logo, f é inversível (estritamente crescente ou estritamente decrescente) nos seguintes intervalos:

$I_1 = (-\infty, -0.573]$
$I_2 = [-0.573, 0.661]$
$I_3 = [0.661, +\infty)$

(b) Determine o domínio e a imagem da função inversa de f tal que o gráfico de f^{-1} passa pelo ponto $(2, 0)$.

Se o ponto $(2, 0)$ pertence ao gráfico de f^{-1}, então o ponto $(0, 2)$ deve pertencer ao gráfico de f.
Ou seja, $x = 0$ deve pertencer ao domínio de f, portanto, $Dom(f) = I_2 = [-0.573, 0.661] = \operatorname{Im}(f^{-1})$.

Se $Dom(f) = I_2$, vemos pelo plot acima que $\operatorname{Im}(f) = [f(a), f(b)]$:

```
> f(a)
```

$$1.192042573 \tag{6}$$

```
> f(b)
```

$$3.098222297 \tag{7}$$

Logo, $\operatorname{Im}(f) = [1.192, 3.098] = Dom(f^{-1})$.

(c) Encontre a equação da reta tangente ao gráfico de f^{-1} em $x = 2$.

Equação da reta tangente:

$$y = (f^{-1})'(2) \cdot (x - 2) + f^{-1}(2)$$

No item anterior vimos que o ponto $(2, 0)$ pertence ao gráfico de f^{-1}, logo, $f^{-1}(2) = 0$.

Para determinar a derivada, vamos utilizar o Teorema da Função Inversa:

$$(f^{-1})'(2) = \frac{1}{f'(f^{-1}(2))} = \frac{1}{f'(0)}$$

```
> evalf(1/D(f)(0))
```

$$0.4444444444 \tag{8}$$

$$y = (f^{-1})'(2) \cdot (x - 2) + f^{-1}(2) \Rightarrow y = 0.444 \cdot (x - 2) + 0$$

Questão 2.

Considere a função f dada por

$$f(x) = \begin{cases} -2 + \arctan\left(\dfrac{1-x}{x^2-x}\right) & , \quad x \in (-\infty, 0) \cup (0, 1) \\ \ln\left(\dfrac{x.\exp(2x+3)}{x^3-1}\right) & , \quad x \in (1, +\infty) \end{cases}$$

(a) Determine as equações das assíntotas horizontais do gráfico de f, caso existam.

```
> restart
> f1:=x->-2+arctan((1-x)/(x^2-x))
```

$$f1 := x \mapsto -2 + \arctan\left(\frac{1-x}{x^2-x}\right) \tag{9}$$

```
> f2:=x->ln(x*exp(2*x+3)/(x^3-1))
```

$$f2 := x \mapsto \ln\left(\frac{x \cdot e^{2 \cdot x + 3}}{x^3 - 1}\right) \tag{10}$$

```
> limit(f1(x),x=-infinity)
```

$$-2 \tag{11}$$

```
> limit(f2(x),x=infinity)
```

$$\infty \tag{12}$$

Logo, a única assíntota horizontal do gráfico de f é $y = -2$.

(b) Determine as equações das assíntotas verticais do gráfico de f, caso existam.

Analisando o domínio, pode haver assíntotas verticais em $x = 0$ e $x = 1$:

```
> limit(f1(x),x=0)
```

$$\mathit{undefined} \tag{13}$$

```
> limit(f1(x),x=0,left)
```

$$-2 + \frac{\pi}{2} \tag{14}$$

```
> limit(f1(x),x=0,right)
```

$$-2 - \frac{\pi}{2} \tag{15}$$

Logo, não há assíntota vertical em $x = 0$.

```
> limit(f1(x),x=1,left)
```

$$-2-\frac{\pi}{4} \tag{16}$$

```
> limit(f2(x),x=1,right)
```

$$\infty \tag{17}$$

Logo, $x=1$ é uma assíntota vertical do gráfico de f.

(c) Determine os intervalos onde f é crescente.

```
> solve(D(f1)(x)>=0)
```

$$(-\infty, 0),\ (0, 1),\ (1, \infty) \tag{18}$$

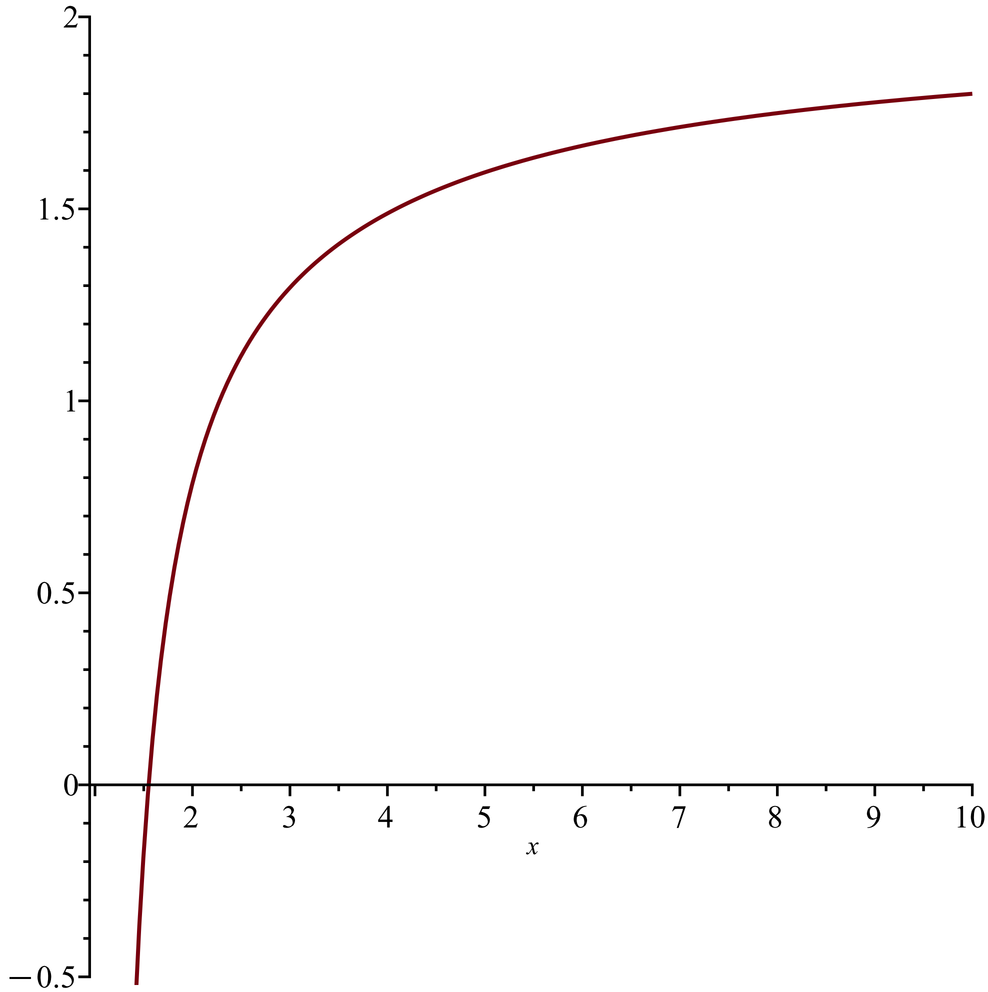
Como f_1 só está definida para $x \in (-\infty, 0) \cup (0, 1)$, então f_1 é crescente em $(-\infty, 0)$ e $(0, 1)$.

```
> solve(D(f2)(x)>=0)
```

$$\left(-\infty, \mathit{RootOf}\left(2\_Z^4-2\_Z^3-2\_Z-1, \mathit{index}=3\right)\right],\ (0, 1),\ \left[\mathit{RootOf}\left(2\_Z^4-2\_Z^3-2\_Z-1, \mathit{index}=1\right), \infty\right) \tag{19}$$

Como f_2 só está definida para $x \in (1, +\infty)$, então precisaremos determinar "$\mathit{RootOf}\left(2\_Z^4-2\_Z^3-2\_Z-1, \mathit{index}=1\right)$". Para isso, usaremos o fsolve:

```
> plot(D(f2)(x),x=1..10)
```




```
> fsolve(D(f2)(x)=0,x=1..2)
```

$$1.550279304 \tag{20}$$

Logo, f_2 é crescente em $[1.550, +\infty)$

Conclusão: f é crescente nos intervalos $(-\infty, 0)$, $(0, 1)$ e $[1.550, +\infty)$.

(d) Determine os intervalos onde o gráfico de f tem concavidade voltada para cima.

```
> solve((D@@2)(f1)(x)>=0)
```

$$(-\infty, 0) \tag{21}$$

Como f_1 só está definida para $x \in (-\infty, 0) \cup (0, 1)$, então o gráfico de f_1 é côncavo para cima em $(-\infty, 0)$.

```
> solve((D@@2)(f2)(x)>=0)
```

$$-\frac{\left(12\sqrt{2}+16\right)^{1/3}}{2}, \left[\frac{\left(-16+12\sqrt{2}\right)^{1/3}}{2}, 1\right), (1, \infty) \tag{22}$$

Como f_2 só está definida para $x \in (1, +\infty)$, então o gráfico de f_2 é côncavo para cima em $(1, +\infty)$.

Conclusão: O gráfico de f é côncavo para cima nos intervalos $(-\infty, 0)$ e $(1, +\infty)$.