

## Lista de Exercícios 4

### Polinômios e Esboço de Gráficos

1. Considere as funções dadas abaixo. Para cada uma delas, determine, se houver:

- Os intervalos nos quais a função é crescente;
- Os intervalos nos quais a função é decrescente;
- Os intervalos nos quais a função é côncava para cima;
- Os intervalos nos quais a função é côncava para baixo;
- Os valores de  $x$  nos quais a função tem extremos locais ou globais;
- Os pontos de inflexão;
- Os limites infinitos.

Depois, esboce o gráfico da função em um sistema de eixos cartesianos, com cuidado, para mostrar o comportamento da função. Desenhe também as retas tangentes nos pontos de inflexão.

(a) $f(x) = 10 + 6x^2 + x^3$	(i) $f(x) = x^4 - 12x$
(b) $f(x) = x^3 - 12x$	(j) $f(x) = -\frac{1}{4}x^4 + \frac{4}{3}x^3 - 2x^2 + 5$
(c) $f(x) = x^3 + x^2 - 5x + 3$	(k) $f(x) = (x - 2)(x^2 - 3x + 1)$
(d) $f(x) = 3x^4 - 4x^3$	(l) $f(x) = \frac{1}{5}x^5 - \frac{3}{4}x^4 + \frac{1}{3}x^3 + \pi$
(e) $f(x) = x^4 - 2x^2$	(m) $f(x) = (x^3 - x^2)\sqrt{x}$

2. Dê exemplos de polinômios satisfazendo os pedidos de cada item. Tente encontrar vários exemplos para cada item variando os gráficos das funções polinomiais.

- (a) grau 3, 3 raízes distintas;
- (b) grau 3, 2 raízes distintas;
- (c) grau 3, apenas 1 raiz;
- (d) grau 4, 4 raízes distintas;
- (e) grau 4, 3 raízes distintas;
- (f) grau 4, 2 raízes distintas;
- (g) grau 4, apenas 1 raiz;
- (h) grau 4, nenhuma raiz.

3. Considere a função polinomial  $f$  dada por  $f(x) = x(x - 1)((x - 5)^2 + 1)$ . Encontre uma reta que seja tangente ao gráfico de  $f$  em dois pontos distintos.
4. Os gráficos das funções polinomiais  $f(x) = x^3 + x^2 - 5x + 5$  e  $g(x) = x^2 - 2x + 3$  têm ponto de tangência? Quais?

5. Encontre valores de  $k$  tais que os gráficos das funções  $f(x) = x^3 + x^2 - 5x + k$  e  $g(x) = x(x-1)((x-5)^2 + 1)$  tenham ponto de tangência.

6. Considere  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  a função dada por  $f(x) = x(x-1)((x-5)^2 + 1)$ . Encontre uma função que seja tangente ao gráfico de  $f$  apenas nos pontos  $x_0 = 1$  e  $x_1 = 5$ .

7. Desenhe no Maple a função  $f$  e as retas tangentes em seus pontos de inflexão no mesmo sistema de coordenadas, onde

$$f(x) = \frac{x^5}{20} - \frac{11}{12}x^4 + \frac{35}{6}x^3 - \frac{25}{2}x^2 + 10.$$

8. Seja  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  a função dada por  $f(x) = x(x-1)(x-2)(x-3)$ . Encontre retas que tenham:

- (a) nenhuma interseção com o gráfico de  $f$ ;
- (b) exatamente 1 interseção com o gráfico de  $f$ ;
- (c) exatamente 2 interseções com o gráfico de  $f$ ;
- (d) exatamente 3 interseções com o gráfico de  $f$ ;
- (e) exatamente 4 interseções com o gráfico de  $f$ .

9. Encontre uma função polinomial tal que nenhuma reta horizontal tenha mais que três interseções com seu gráfico, mas que existam retas com 7 interseções com o gráfico.

10. Diga se as funções abaixo são polinômios. Derive aquelas que você souber derivar.

(a)  $f(x) = x^3 + 3x^2 + 7$

(b)  $f(x) = (x^2 + 3x)(x^3 + 7)$

(c)  $f(x) = \pi x^2 + \sqrt{7}$

(d)  $f(x) = x^\pi + x^7$

(e)  $f(x) = \frac{x^3\sqrt{x}}{x^\pi}$

(f)  $f(x) = 2x\sqrt{5x^3} - \frac{1-2x^2}{x}$

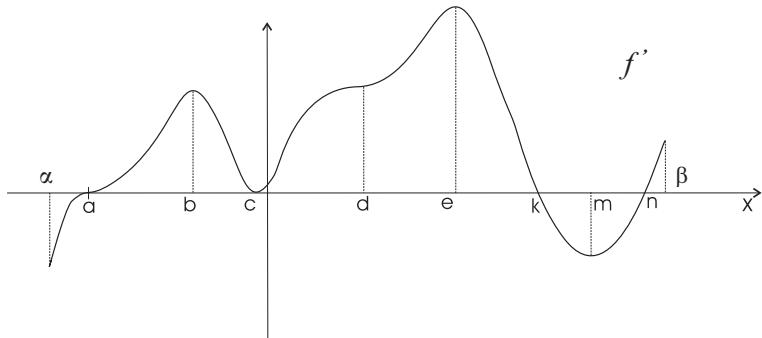
(g)  $f(x) = \frac{1}{x+1}$

(h)  $f(x) = \frac{(x-1)(x-2)(x-3)(x-7)}{x^2}$

(i)  $f(x) = \sqrt{9-x^2}$

(j)  $f(x) = \sqrt{x^4+x^2}$

11. Seja  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  a função dada por  $f(x) = 13 - x^2$ . Considere um retângulo com um vértice na origem, um vértice sobre o eixo  $y$  positivo, um vértice sobre o eixo  $x$  positivo, digamos em  $(x, 0)$ , e o quarto vértice sobre o gráfico da função  $f$ . Seja  $A$  a função que fornece a área do retângulo em termos de  $x$ . Dê o domínio da função  $A$ . Qual é o retângulo com a maior área possível?
12. Considere  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  a função dada por  $f(x) = x^3 + 4$ . Utilizando a definição de derivada:
- Calcule o coeficiente angular da reta tangente ao gráfico de  $f$  em  $x = 0$ ;
  - Calcule  $f'(1)$ ;
  - Calcule  $f'(a)$ .
  - Qual é a expressão da função derivada de  $f$ ?
13. Decida se as proposições são verdadeiras ou falsas. Justifique.
- Se  $f''(a) = 0$ , então  $(a, f(a))$  é ponto de inflexão de  $f$ .
  - Se  $f''(a) > 0$ , então  $f'(a) > 0$ .
  - Seja  $f(x) = \begin{cases} x^3, & x < 1 \\ x^3 + 1, & x \geq 1 \end{cases}$ . Então  $f'(1) = 3$ , pois  $f'(x) = 3x^2$ .
14. Seja  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  a função dada por  $f(x) = \frac{x^5}{10} - x^4 + 3x^3$ .
- O gráfico de  $f$  tem inflexão em  $x = 0$ ?
  - O gráfico de  $f$  tem inflexão em  $x = 3$ ?
15. Seja  $f : [\alpha, \beta] \rightarrow \mathbb{R}$  uma função derivável. Na figura abaixo é dado o gráfico da derivada de  $f$ .



- Determine os valores de  $x$  para os quais a função  $f$  tem mínimo local.
- Determine os valores de  $x$  para os quais a função  $f$  tem máximo local.
- Determine os valores de  $x$  para os quais a função  $f$  tem pontos de inflexão.