UNIVERSIDADE FEDERAL DO VALE DO SÃO FRANSCISCO

BACHARELADO EM ENGENHARIA ELÉTRICA

JOHN WESLLEY PASSOS CARVALHO

PEDRO AUGUSTO SOUZA SILVA

TRABALHO DE CÁLCULO 1: Soma de Riemann e Derivadas no Infinito

JUAZEIRO-BAHIA

2025

JOHN WESLLEY PASSOS CARVALHO

PEDRO AUGUSTO SOUZA SILVA

TRABALHO DE CÁLCULO 1: Soma de Riemann e Derivadas no Infinito

trabalho apresentado a universidade federal do vale do são Franscisco-UNIVASF, campus juazeiro, com o intuito de desenvolver o conhecimento nas áreas de cálculo e programação.

Curso: engenharia elétrica

Orientador: Carlos Antônio

JUAZEIRO-BAHIA

2025

Resumo:

Este trabalho tem como objetivo, demonstrar as capacidades dos alunos do curso de engenharia elétrica, em aplicar a lógica matemática desenvolvida no curso de cálculo 1, em uma linguagem de programação, além de demonstrar o potencial de adaptação dos estudantes as novas necessidades do mercado.

O trabalho também, tem como foco mostrar o entendimento e as aplicações dos métodos da soma de Riemann e da diferença finitas, aprendidas no decorrer do semestre.

Sumário

1.Metodos de Diferenças finitas

O método de diferenças finitas é um método matemático, aplicado para a resolução de derivadas, sendo derivadas a taxa de mudança de uma variável dependente em relação a variável independente.

Exemplo de derivada:

A derivada de f(x)=x^2 é

f´(x)=2x

Já o método de diferenças finitas (MDF) é usado como citado anteriormente, para resolver derivadas, principalmente quando não é possível ou prático encontra soluções exatas de uma equação. Nesse método o domínio do problema contínuo é substituído por uma série de pontos discretos, ou nós, nos quais são calculadas as incógnitas do problema. Essa substituição do contínuo pelo discreto denomina-se discretização. Sendo um adendo a ser acrescentado que nem sempre irá se obter uma aproximação perfeita da derivada real devido a erros inerente ao método de aproximação, sendo principalmente, a escolha do método e o tamanho do (h) influenciam diretamente a qualidade de aproximação.

1.1. Discretização da Equação:

Uma vez efetuada a discretização do domínio do problema discretiza-se a equação diferencial aplicando-se o MDF para a determinação das incógnitas. As derivadas, que aparecem na equação original, são substituídas (ou aproximadas) por fórmulas discretas de diferenças. A aplicação dessas fórmulas aos pontos do domínio discretizado gera um sistema, de equações algébricas, cuja solução fornece os valores das incógnitas do problema nesses pontos discretos.

Ou seja, de forma mais objetivas utilizamos como base o modelo de Taylor que permite expandir uma função em torno de um ponto:

$$f(x+h) = f(x) + hf'(x) + 2h2f''(x) + 6h3f'''(x) + \cdots$$

$$\boldsymbol{f'(x) = f(x+h) - f(x)/h}$$

A aproximação definida acima é denominada diferença progressiva porque utiliza um ponto a frente de “x”, o ponto “x+h”. Alternativamente, podemos deduzir a aproximação com **diferença progressiva** utilizando a série de Taylor. Chegando na seguinte conclusão:

$$\boldsymbol{f'(x) = f(x) - f(x-h)/h}$$

Onde encontramos a expressão acima conhecida como aproximação com **diferença regressiva.** A aproximação da derivada da segunda ordem pode ser obtida somando as series de Taylor anteriores. Onde podemos encontrar a serie de aproximação da **diferença central.**

$$\boldsymbol{f'(x) = f(x+h) - f(x-h)/2h}$$

usando o teorema de Taylor mais uma vez encontramos a derivada de segunda ordem onde temos:

$$f''(x) = f(x+h) - 2f(x) + f(x-h)/2h$$

1.2. Exemplos:

1.2.1- Para função: $f(x) = x\text{^}2$

$$f'(x) = 2x$$

quando $f(x) = 3$ e $h = 2$

sendo:

Diferença Progressiva:

$$\boldsymbol{f}`(\boldsymbol{x}) = \frac{\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}+\boldsymbol{h}) - \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})}{\boldsymbol{h}} =$$

$$\frac{f(5) - f(3)}{2} =$$

$$\frac{25 - 9}{2}$$

$$= \frac{16}{2} = 8$$

Diferença Regressiva:

$$\boldsymbol{f}'(\boldsymbol{x}) = \frac{\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}) - \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{h})}{\boldsymbol{h}} =$$

$$\frac{f(3) - f(1)}{2} =$$

$$\frac{9 - 1}{2} =$$

$$\frac{8}{2} = 4$$

Diferença Central:

$$\boldsymbol{f}'(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}+\boldsymbol{h}) - \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{h})/2\boldsymbol{h} =$$

$$\frac{f(5) - f(1)}{2.2} =$$

$$\frac{25 - 1}{4} =$$

$$\frac{24}{4} = 6$$

Diferença de segunda ordem:

$$f''(x) = \frac{f(x+h) - 2f(x) + f(x-h)}{2h} =$$

$$\frac{25 - 2.9 + 1}{2.2} =$$

$$\frac{25 - 18 + 1}{4} =$$

$$\frac{8}{4} = 2$$

Diferença Exata:

$$f'(x) = 2x$$

quando $x = 3$

$$f`(x) = 2.3 = 6$$

Ou seja, diferença central acerta.

1.2.2 Para função: $f(x) = sen(x), com\ x = \frac{\pi}{4} \approx 0{,}785$ e $h = 2$

$$f`(x) = cos(x)$$

sendo:

Diferença Progressiva:

$$\frac{f`(x) = f(x+h) - f(x) =}{h}$$

$$= \frac{f(0.785 + 2) - f(0.785)}{2}$$

$$\frac{= 0{,}349 - 0{,}707}{2}$$

$$\frac{= -0{,}358}{2}$$

$$= -0{,}179$$

Diferença Regressiva:

$$\boldsymbol{f'(x)} = \frac{\boldsymbol{f(x) - f(x-h)}}{\boldsymbol{h}} =$$

$$\frac{= f(0{,}785) - f(0{,}785 - 2)}{2}$$

$$\frac{= 0{,}707 - (-0{,}937)}{2}$$

$$\frac{= 1{,}644}{2}$$

$$= 0{,}822$$

Diferença Central:

$$\frac{\boldsymbol{f'(x) = f(x+h) - f(x-h)}}{\boldsymbol{2.h}} =$$

$$\frac{= f(0{,}785 + 2) - f(0{,}785 - 2)}{2.2}$$

$$\frac{= 0{,}349 - (-0{,}937)}{2.2}$$

$$\frac{= 0{,}349 + 0{,}937}{4}$$

$$= 0{,}3215$$

Diferença de segunda ordem:

$$\boldsymbol{f''(x)} = \frac{\boldsymbol{f(x+h) - 2f(x) + f(x-h)}}{\boldsymbol{2h}} =$$

$$\frac{= f(0{,}785 + 2) - 2f(0{,}785) + f(0{,}785 - 2)}{2.2}$$

$$\frac{= 0{,}349 - 1{,}414 + (-0{,}937)}{4}$$

$$\frac{= -2{,}002}{4}$$

$$= -0{,}5005$$

Diferença Exata:

$$f`(x) = cos(x)$$

$$\cos(0{,}785) \cong 0{,}707$$

1.2.3. Para função: $f(x) = \ ln(x), com\ x = 4\ e\ h = 2$

$$f'(x) = \frac{1}{x} = \frac{1}{4} = 0{,}25$$

Diferença Progressiva:

$$\frac{\boldsymbol{f`(x) = f(x+h) - f(x)\ =}}{\boldsymbol{h}}$$

$$\frac{= f(4+2) - f(4)}{2}$$

$$\frac{= 1{,}791 - 1{,}386}{2}$$

$$= \frac{0{,}405}{2}$$

$$= 0{,}2025$$

Diferença Regressiva:

$$f'(x) = \frac{f(x) - f(x-h)}{h} =$$

$$\frac{= f(4) - f(4-2)}{2}$$

$$\frac{= 1{,}386 - 0{,}693}{2}$$

$$\frac{= 0{,}693}{2}$$

$$= 0{,}3465$$

Diferença Central:

$$\frac{f'(x) = f(x+h) - f(x-h)}{2h} =$$

$$= \frac{f(4+2) - f(4-2)}{2.2}$$

$$\frac{= 1{,}791 - 0{,}693}{4}$$

$$\frac{= 1{,}098}{4}$$

$$= 0{,}2745$$

Diferença de segunda ordem:

$$f''(x) = \frac{f(x+h) - 2f(x) + f(x-h)}{2h} =$$

$$\frac{= f(4+2) - 2f(4) + f(4-2)}{2.2}$$

$$\frac{= 1{,}791 - 2.1{,}386 + 0{,}693}{4}$$

$$\frac{= -0{,}288}{4}$$

$$= -0{,}072$$

Diferença Exata:

$$f'(x) = \frac{1}{x} = \frac{1}{4} = 0{,}25$$

2.Soma de Riemann

É um método matemático desenvolvido pelo matemático alemão Bernhard Riemann, sendo mais usada para o cálculo de aproximações de áreas da função, linhas. Comprimentos ou outras aproximações possíveis.

A soma de Riemann é caracterizada, pela aproximaçãoa área sob uma curva real f(x) em um intervalo "(a,b)", através da divisão desse intervalo em pequenos pedaços e somando a área desses retângulos que representam a função, ou a linha ou comprimento, que representam dentro desses subintervalos.

2.1 Passo a Passo

Para o primeiro passo devemos considerar um intervalo "(a,b)", sobre o qual desejamos calcular a área sob a curva da função f(x), então dividimos esse intervalo por n subintervalos:

$$\Delta x = \frac{b-a}{n}$$

Os pontos que dividem os intervalos são:

$$\boldsymbol{x0 = a, x1 = a + \Delta x, x2 = a + 2\Delta x, \ldots., xn = b}$$

Para o segundo passo escolhemos pontos dentro do subintervalo, em cada subintervalo$(xi - 1, xi)$, escolhemos um ponto $xi\,*$, e calculamos a altura do retângulo como:

$$\boldsymbol{f(xi\,*)}$$

sendo o produto f(xi*).ΔX representa a área do retângulo nesse subintervalo.

Por fim somamos todas essas áreas para encontrar a aproximação da área total sob a curva.

$$\boldsymbol{S} = \sum_{\boldsymbol{i}=\mathbf{1}}^{\boldsymbol{n}} \boldsymbol{f}(\boldsymbol{xi}\,*).\Delta\boldsymbol{x}$$

sendo os tipos de soma de Riemann:

A esquerda: $\boldsymbol{xi-1}$, ela é usada quando você usa o início do intervalo, podendo subestimar a área se f(x) for crescente

A direita: $\boldsymbol{xi}$, usa o fim do intervalo. Pode superestimar se f(x) for crescente

Do ponto médio: $\frac{\boldsymbol{xi-1+xi}}{\boldsymbol{n}}$,costuma dar a melhor aproximação com menos retângulos

Aleatório ou geral: qualquer ponto dentro de $(\boldsymbol{xi-1}, \boldsymbol{xi})$, usada para estudo teórico ou análise de erro.

Sendo que a integral definida é o **limite** da soma de Riemann conforme aumentamos infinitamente o número de retângulos

2.2. Exemplos:

2.2.1. sendo: f(x)=x^2, no intervalo (0,2), para n=4 com soma a esquerda

$$\Delta x = \frac{2-0}{4} = 0{,}25$$

Os pontos são:

$$X0 = 0, x1 = 0{,}5, x2 = 1, x3 = 1{,}5, x4 = 2$$

Avaliando a função nos pontos a esquerda:

$$f(x0) = 0\text{^}2 = 0$$

$$f(x1) = 0{,}5\hat{}2 = 0{,}25$$

$$f(x2) = 1\hat{}2 = 1$$

$$f(x3) = 1{,}5\hat{}2 = 2{,}25$$

Soma de Riemann

$$s = \Delta x.\,(f(x0) + f(x1) + f(x2) + f(x3)$$

$$= 0{,}5(0 + 0{,}25 + 1 + 2{,}25)$$

$$= 0{,}5.3{,}5$$

$$= 1{,}75$$

A área exata seria:

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} f(xi\,*).\,\Delta x$$

$$\int_0^2 x^{2dx} = \left(\frac{x\hat{}3}{3}\right)\begin{matrix}2\\0\end{matrix}$$

$$= \frac{8}{3} \cong 2{,}67$$

2.2.2 sendo $f(x) = \sqrt{x}$, com soma a direita intervalos de $[1;4]$ e $n = 3$

$$\Delta x = \frac{4-1}{3} = 1$$

Pontos a direita $x1 = 2, x2 = 3, x3 = 4$

Soma de Riemann

$$s = f(2).1 + f(3).1 + f(4).1$$

$$= \sqrt{\mathbf{2}} + \sqrt{\mathbf{3}} + \sqrt{\mathbf{4}}$$
$$\approx \mathbf{1{,}414} + \mathbf{1{,}732} + \mathbf{2}$$
$$= \mathbf{5{,}146}$$

2.2.3 sendo soma a esquerda com $\boldsymbol{f(x) = 2x + 1}$**,** com intervalo **[1,5]** e $\boldsymbol{n = 4}$

$$\Delta \boldsymbol{x} = \frac{\mathbf{5 - 1}}{\mathbf{4}} = \mathbf{1}$$

pontos $\boldsymbol{x0 = 1, x1 = 2, x2 = 3, x3 = 4}$

soma de Riemann

$$\boldsymbol{s = f(1) + f(2) + f(3) + f(4)}$$

$$= (\mathbf{2.1 + 1}) + (\mathbf{2.2 + 1}) + (\mathbf{2.3 + 1}) + (\mathbf{2.4 + 1})$$

$$= \mathbf{3 + 5 + 7 + 9}$$

$$= \mathbf{24.1}$$

$$= \mathbf{24}$$

Referencias do trabalho ao todo:

1.Professor, GustavoViegas, INTEGRAIS - Somas de Riemann,https://youtu.be/RQMOFBwJ1Lw?si=a4TKR5AKZkNg1gNF

2. WIKIPÉDIA. *Soma de Riemann*. Disponível em: https://pt.wikipedia.org/wiki/Soma_de_Riemann. Acesso em: 18 jul. 2025

3.
UNIVERSO DA MATEMÁTICA. *Soma de Riemann (o que é, como fazer e exemplos)*. YouTube, 14 jul. 2021. Disponível em: https://youtu.be/RQMOFBwJ1Lw. Acesso em: 18 jul. 2025.

4.
PROF. GUSTAVO REIS. *SOMA DE RIEMANN - Aula Completa*. YouTube, 18 abr. 2020. Disponível em: https://youtu.be/CWWbjoOjYOg. Acesso em: 18 jul. 2025.

5.
MATEMÁTICA EM EXERCÍCIOS. *Soma de Riemann - Aula completa com teoria e exercícios*. YouTube, 22 fev. 2021. Disponível em: https://youtu.be/4lBDeJ9Poz8. Acesso em: 18 jul. 2025.

6.

CÁLCULO NÚMERICO (COM APLICAÇÕES), 2ª edição, editora HARBRA, Barroso L. C., Barroso M. M. A., Filho F. F. C., Carvalho M. L. B., Maia M. L.

7.

UM CURSO DE CÁLCULO : Volume 1 / Hamilton Luiz Guidorizzi ; [revisores técnicos Vera Lucia Antonio Azevedo, Ariovaldo José de Almeida] – 6. ed. – [Reimpr.] – Rio de Janeiro : LTC, 2023. : il. ; 24cm.