2 Determinantes

- Definição do determinante de uma raiz quadrada

notações | det (A)
det A , caso não haja perigo de leitura errada
|A|

matriz 2x2

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \qquad \det(A) = a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12}$$

propriedades

(1) $\det(I_2) = 1$

(2) $\det \begin{bmatrix} a_{12} & a_{11} \\ a_{22} & a_{21} \end{bmatrix} = -\det \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}$ $\quad C_1 \leftrightarrow C_2$

(3) $\forall \alpha \in \mathbb{R}: \det \begin{bmatrix} \alpha a_{11} & a_{12} \\ \alpha a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} = \alpha \det \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}$

(4) $\det \begin{bmatrix} c_{11}+d_{11} & a_{12} \\ c_{21}+d_{21} & a_{22} \end{bmatrix} = \det \begin{bmatrix} c_{11} & a_{12} \\ c_{21} & a_{22} \end{bmatrix} + \det \begin{bmatrix} d_{11} & a_{12} \\ d_{21} & a_{22} \end{bmatrix}$

Propriedades genéricas
$\forall \alpha \in \mathbb{R}$
$i, j \in \{1, \dots, n\}$
$i \neq j$
aplicam-se às linhas tmb

(1) $\det(I_n) = 1$

(2) $\det[C_1 \dots C_i \dots C_j \dots C_n] = -\det[C_1 \dots C_j \dots C_i \dots C_n]$ $\quad C_i \leftrightarrow C_j$

(3) $\det[C_1 \dots \alpha C_i \dots C_n] = \alpha \det[C_1 \dots C_i \dots C_n]$

(4) $\det[C_1 \dots C_i + C_i' \dots C_n] = \det[C_1 \dots C_i \dots C_n] + \det[C_1 \dots C_i' \dots C_n]$

regra de Sarrus 3x3

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$$
$$\begin{matrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{matrix}$$

$$\det(A) = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{21}a_{32}a_{13} + a_{31}a_{12}a_{23} - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{23}a_{32}a_{11} - a_{33}a_{12}a_{21}$$

menor e cofator

$A = [a_{ij}]$ $n \times n$

M_{ij} a matriz $(n-1)\times(n-1)$ que se obtém de A por eliminação da sua linha i e coluna j.

$$A = \begin{bmatrix} \cancel{a_{11}} & a_{12} & a_{13} \\ \cancel{a_{21}} & \cancel{a_{22}} & \cancel{a_{23}} \\ \cancel{a_{31}} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} \qquad M_{21} = \begin{bmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$$

menor de $a_{ij} \rightarrow \det(M_{ij})$

cofator (ou complemento algébrico) de $a_{ij} \rightarrow (-1)^{i+j} \det(M_{ij}) = A_{ij}$

teorema de La Place

o determinante de uma matriz A $n\times n$, é igual à soma algébrica dos produtos dos elementos de uma linha (ou coluna) pelos respetivos cofatores

$$A = [a_{ij}] = \begin{array}{c} \begin{bmatrix} & a_{1j} & \\ & a_{2j} & \\ a_{i1}\, a_{i2} \cdots & \vdots & a_{in} \\ & a_{nj} & \end{bmatrix} \leftarrow \text{linha } i \\ \downarrow \\ \text{coluna } j \end{array}$$

$\det(A) = a_{i1}A_{i1} + a_{i2}A_{i2} + \dots + a_{in}A_{in}$, $i = 1, \dots, n$

↳ desenvolvimento do $\det(A)$ segundo a linha i

$\det(A) = a_{1j}A_{1j} + a_{2j}A_{2j} + \dots + a_{nj}A_{nj}$, $j = 1, \dots, n$

↳ desenvolvimento do $\det(A)$ segundo a coluna j

corolário do Teorema de La Place

o $\det(A)$, sendo A uma matriz triangular é o produto das entradas da diagonal principal

propriedades dos determinantes

(1) $\det(A) = \det(A^T)$

(2) se A tem uma linha nula / duas linhas iguais, então $\det(A) = 0$

(3) se B resulta de A por uma troca de linhas
$\det(B) = -\det(A)$

(4) se B resulta de A por multiplicação de uma linha de A por um escalar α, então $\det(B) = \alpha \det(A)$

(5) se B resulta de A substituindo a linha i pela sua soma com um múltiplo da linha j, então $\det(B) = \det(A)$

(6) todas as propriedades (2 a 5) são válidas trocando linha por coluna

(7) $\det(AB) = \det(A)\det(B)$

(8) $\det(cA) = c^n \det(A)$
$c \in \mathbb{R}$, $A_{n \times n}$

nota $\det(A+B) \neq \det(A) + \det(B)$

determinante e inversa de uma matriz

(1) A é invertível $\Leftrightarrow \det(A) \neq 0$

(2) Caso A seja invertível, $\det(A^{-1}) = \dfrac{1}{\det(A)}$

corolário | $A, n \times n$
O sistema homogêneo $AX = 0$ tem uma solução não trivial sse $\det(A) = 0$.

adjunta e inversa de uma matriz

$$\mathrm{adj}(A),\ n\times n = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & \cdots & A_{1n} \\ A_{21} & A_{22} & \cdots & A_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ A_{n1} & A_{n2} & \cdots & A_{nn} \end{bmatrix}^T$$

, onde A_{ij} é o cofator de a_{ij}

$$A\,\mathrm{adj}(A) = \mathrm{adj}(A) \cdot A = \det(A) I_n$$

teorema | se A é invertível, então $A^{-1} = \dfrac{1}{\det(A)} \mathrm{adj}(A)$

regra de Cramer

$AX = B$ com A, $n \times n$, invertível → sistema de Cramer

regra de Cramer seja $X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$ e $B = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix}$

$$x_i = \frac{\det(A_i)}{\det(A)}$$ onde A_i resulta da substituição da coluna i de A pela coluna B

exemplo

$$x_1 = \frac{\begin{vmatrix} b_1 & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ b_2 & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & & & \vdots \\ b_n & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}}{\det(A)} \qquad x_2 = \frac{\begin{vmatrix} a_{11} & b_1 & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & b_2 & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & & & & \vdots \\ a_{n1} & b_n & a_{n3} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}}{\det(A)}$$