Conjunto Gerado Exemplos | Capítulo 4

Álgebra Linear e Geometria Analítica

Se S é um subconjunto de um espaço vetorial V, definimos o conjunto gerado por S, denotado por <S>, como o conjunto de todas as combinações lineares de elementos de S.

Exemplos de conjuntos gerados

1. O conjunto gerado pelo vetor v=(1,2) de R^2 é a reta que passa pela origem de R^2 e possui a direção do vetor v=(1,2), pois

$$\begin{aligned} \langle(1,2)\rangle &= \{ t(1,2): t \in R \} \\ &= \{(x,y) \in R^2: x=1t,\ y=2t,\ t \in R \} \\ &= \{(x,y) \in R^2: x/1=y/2 \} \\ &= \{(x,y) \in R^2: y=2x \} \end{aligned}$$

2. O conjunto gerado pelos vetores de R^2, u=(1,0) e v=(0,1) é todo o espaço R^2, pois

$$\begin{aligned} \langle\{u,v\}\rangle &= \{w = x\,u + y\,v\ R^2: x,y \in R \} \\ &= \{w = x\,(1,0) + y\,(0,1): x,y \in R \} \\ &= \{w = (x,0) + (0,y): x,y \in R \} \\ &= \{w = (x,y): x,y \in R \} = R^2 \end{aligned}$$

3. O conjunto gerado pelo vetor v=(1,2,3) de R^3 é a reta que passa pela origem de R^3 e possui a direção do vetor v=(1,2,3), pois

$$\begin{aligned} \langle(1,2,3)\rangle &= \{ t(1,2,3): t \in R \} \\ &= \{ (1t,2t,3t): t \in R \} \\ &= \{(x,y,z): x=1t,\ y=2t,\ z=3t,\ t \in R \} \\ &= \{(x,y,z) \in R^3: x/1=y/2=z/3 \} \end{aligned}$$

4. O conjunto gerado pelos vetores u=(1,0,0) e v=(0,1,0) de R^3 é o plano z=0 em R^3, pois

$$\begin{aligned} \langle\{u,v\}\rangle &= \{w = x\,u + y\,v \in R^3: x,y \in R \} \\ &= \{w = x\,(1,0,0) + y\,(0,1,0): x,y \in R \} \\ &= \{w = (x,0,0) + (0,y,0): x,y \in R \} \\ &= \{w = (x,y,0): x,y \in R \} \\ &= \{w = (x,y,z) \in R^3: z=0 \} \end{aligned}$$

5. O conjunto gerado pelos vetores u=(1,0,0), v=(0,1,0) e w=(0,0,1) de R^3 é todo o espaço R^3, pois

$$\begin{aligned} \langle\{u,v,w\}\rangle &= \{x\,u + y\,v + z\,w \in R^3: x,y,z \in R \} \\ &= \{x\,(1,0,0) + y\,(0,1,0) + z(0,0,1): x,y,z \in R \} \\ &= \{(x,0,0) + (0,y,0) + (0,0,z): x,y,z \in R \} \\ &= \{(x,y,z): x,y,z \in R \} = R^3 \end{aligned}$$

Nas situações acima, os conjuntos gerados sempre apresentaram subespaços como resultados.