

Porque vale a pena aprender a primitivar por partes.... Se calcular esta primitiva com recurso a alguns CAS pode obter este resultado...

$$\int x(2x+5)^{10} dx = \frac{256}{3} x^{12} + \frac{25600}{11} x^{11} + 28800 x^{10} + \frac{640000}{3} x^9 + 1050000 x^8 + 3600000 x^7 + 8750000 x^6 + 15000000 x^5 + 17578125 x^4 + \frac{39062500}{3} x^3 + \frac{9765625}{2} x^2 + c.$$

## 5.6 Primitivação por Substituição: mudança de variável

O processo de mudança de variável é conhecido do Ensino Secundário. Por exemplo, para resolver a equação  $e^{2x} - 2e^x + 1 = 0$  podemos recorrer à mudança de variável  $e^x = y$  e resolver a equação  $y^2 - 2y + 1 = 0$ . A solução desta equação é  $y = 1$  e regressando à variável  $x$ , temos  $e^x = 1$ , ou seja,  $x = 0$ .

Este processo é também utilizado para calcular algumas primitivas que não são “tão” imediatas.

Seja  $f : I \rightarrow \mathbb{R}$  uma função primitivável, onde  $I$  designa um intervalo de números reais. Dizer que  $f$  é primitivável significa que existe uma função  $F : I \rightarrow \mathbb{R}$  tal que  $F' = f$ .

Seja agora  $h : J \rightarrow \mathbb{R}$  uma função derivável e invertível no intervalo não degenerado  $J$  tal que  $h(J) = I$ . Recorrendo à derivada da função composta, podemos dizer que

$$(F \circ h)'(t) = F'(h(t)) \cdot h'(t). \quad (5.2)$$

Como  $F' = f$ , podemos reescrever a igualdade (5.2) da seguinte forma

$$(F \circ h)'(t) = f(h(t)) \cdot h'(t),$$

o que traduz o facto de que  $F \circ h$  é uma primitiva de  $(f \circ h) \cdot h'$ .

Para obter a expressão da função  $F$ , e sendo  $h$  invertível, basta fazer a composta  $F \circ h \circ h^{-1}$ .

Na prática procede-se da seguinte forma. Seja  $\int f(x) dx$  a família de primitivas a determinar. Faz-se a substituição de  $x$  por uma função  $h(t)$  onde  $f$  e  $h$  estão nas condições acima referidas. Determina-se de seguida a família de primitivas de

$$\int \underbrace{f(h(t))}_{x} \cdot \underbrace{h'(t)}_{dx} dt = \int g(t) dt = G(t) + C, \quad C \in \mathbb{R},$$

em que  $G'(t) = g(t) = f(h(t)) \cdot h'(t)$ . A função  $G$  é uma primitiva de  $(f \circ h) \cdot h'$ , ou seja,  $G = F \circ h$ . Para determinar a função  $F$  faz-se a composta de  $G$  com a função  $h^{-1}$ ,  $F = G \circ h^{-1}$ :

$$\int f(x) dx = G\left(\underbrace{h^{-1}(x)}_t\right) + C, \quad C \in \mathbb{R}. \quad (\text{Regresso à variável inicial})$$

**Exemplo 5.4.** Como calcular  $\int \frac{x}{1+\sqrt{x}} dx$ , com  $x \in \mathbb{R}_0^+$ ?

A função  $f$  é definida por  $f(x) = \frac{x}{1+\sqrt{x}}$  com  $x \in I = [0, +\infty[ = \mathbb{R}_0^+$ .

Consideremos, a mudança de variável definida por

$$x = h(t) = t^2 \quad \text{com } t \in J = [0, +\infty[$$

e observemos que  $h$  é uma função derivável, invertível e que

$$h^{-1}(x) = \sqrt{x} \quad \text{com } x \in I = [0, +\infty[.$$

### Exercício 5.7

Calcule, fazendo um

$$\begin{aligned}
 1. \int \frac{\sqrt{x}}{1+\sqrt[3]{x}} dx; &= \left\{ \begin{array}{l} \frac{u^{1/2}}{1+u^{1/3}} du = \\ u = t^6 \quad (t>0) \end{array} \right. \\
 &\quad \left. \begin{array}{l} \frac{t^{6/2}}{1+t^{6/3}} \cdot 6t^5 dt = \\ du = 6t^5 dt \end{array} \right. \\
 &= 6 \int \frac{t^3}{1+t^2} \cdot t^5 dt = 6 \int \frac{t^8}{t^2+1} dt = \\
 &\quad \begin{array}{l} \cancel{t^8 - t^6} \quad \cancel{t^6 - t^4 + t^2 - 1} \\ \cancel{-t^6} \end{array} \quad = 6 \int \left( t^6 - t^4 + t^2 - 1 + \frac{1}{t^2+1} \right) dt \\
 &\quad \begin{array}{l} + t^6 + t^4 \\ \cancel{- t^4} \end{array} \quad = 6 \frac{t^7}{7} - 6 \frac{t^5}{5} + 2t^3 - 6t + \text{constant} \\
 &\quad \quad \quad + C, C \in \mathbb{R}. \\
 &\quad t = u^{1/6} \\
 &\quad \frac{t^2+1}{1} \quad \frac{6}{7} u^{7/6} - \frac{6}{5} u^{5/6} + 2u^{1/2} - 6u^{1/6} + \\
 &\quad \quad \quad \text{constant}(u^{1/6}) + C, \\
 &\quad \quad \quad C \in \mathbb{R}.
 \end{aligned}$$

Como  $h'(t) = 2t$  e  $f(h(t)) = \frac{t^2}{1+t}$  vamos determinar a família de primitivas

$$\int \frac{t^2}{1+t} \cdot 2t \, dt = 2 \int \frac{t^3}{t+1} \, dt.$$

Como  $\frac{t^3}{t+1} = t^2 - t + 1 - \frac{1}{t+1}$  (porquê?), a determinação das primitivas torna-se muito fácil:

$$\begin{aligned} 2 \int \frac{t^3}{t+1} \, dt &= 2 \int \left( t^2 - t + 1 - \frac{1}{t+1} \right) \, dt \\ &= 2 \left( \frac{t^3}{3} - \frac{t^2}{2} + t - \ln|1+t| \right) + C, \quad C \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

Voltando à variável inicial, como  $t = \sqrt{x}$ , temos:

$$\int \frac{x}{1+\sqrt{x}} \, dx = \frac{2}{3} \sqrt{x^3} - x + 2\sqrt{x} - 2\ln|1+\sqrt{x}| + C, \quad C \in \mathbb{R}.$$

### Exercício 5.7

Calcule, fazendo uma mudança de variável adequada, as seguintes famílias de primitivas:

1.  $\int \frac{\sqrt{x}}{1+\sqrt[3]{x}} \, dx;$
2.  $\int \frac{e^{3x}}{e^{2x}+1} \, dx;$
3.  $\int \frac{\ln^4 x}{x(\ln^2 x + 1)} \, dx;$
4.  $\int \sin \sqrt{x} \, dx;$
  
5.  $\int x\sqrt{2x+3} \, dx;$
6.  $\int \frac{\ln(2x)}{x\ln(4x)} \, dx;$
7.  $\int \sqrt{\frac{1-\sqrt{x}}{x}} \, dx.$

Pode recorrer ao <http://m.wolframalpha.com/> ou ao Geogebra para calcular estes integrais e confirmar os seus resultados.

#### 5.6.1 Substituição por Funções Trigonométricas

Duas relações trigonométricas,

$$\sin^2 x + \cos^2 x = 1 \quad \text{e} \quad 1 + \tan^2 x = \sec^2 x,$$

são fundamentais para primitivar funções que envolvam os radicais

$$\sqrt{a^2 + x^2}, \quad \sqrt{a^2 - x^2} \quad \text{e} \quad \sqrt{x^2 - a^2}, \quad \text{com } a > 0.$$

1. No caso do radical  $\sqrt{a^2 + x^2}$ , pode utilizar-se a mudança de variável  $x = h(t) = a \tan t$  com  $t \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$ .

$$\sqrt{a^2 + x^2} = a\sqrt{1 + \tan^2 t} = a\sqrt{\sec^2 t} = a \sec t \quad (a > 0 \text{ e como } t \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[, \sec t > 0)$$

Neste caso,  $h^{-1}(x) = \arctan\left(\frac{x}{a}\right)$ , com  $x \in \mathbb{R}$ .

2. No caso do radical  $\sqrt{a^2 - x^2}$ , pode utilizar-se a mudança de variável  $x = h(t) = a \sin t$  com  $t \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$  (ou  $x = a \cos t$  com  $t \in [0, \pi]$ ).

$$\sqrt{a^2 - x^2} = a\sqrt{1 - \sin^2 t} = a\sqrt{\cos^2 t} = a \cos t \quad (a > 0 \text{ e como } t \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[, \cos t \geq 0)$$

Neste caso,  $h^{-1}(x) = \arcsen\left(\frac{x}{a}\right)$ , com  $x \in ]-a, a[$ .

$$2. \int \frac{e^{3x}}{e^{2x} + 1} dx; = \int \frac{(e^u)^3}{(e^u)^2 + 1} du =$$

$$t = e^u \quad (t > 0) \quad = \int \frac{t^3}{t^2 + 1} \cdot \frac{1}{t} dt =$$

$$u = \ln t$$

$$du = \frac{1}{t} dt \quad = \int \frac{(t^2 + 1) - 1}{t^2 + 1} dt =$$

$$= \int \left(1 - \frac{1}{t^2 + 1}\right) dt = t - \arctan(t) + C$$

$$= e^u - \arctan(e^u) + C, C \in \mathbb{R}$$

$$3. \int \frac{\ln^4 x}{x(\ln^2 x + 1)} dx;$$

$$\underbrace{t = \ln u}_{u = e^t}, \quad (u > 0), \quad du = e^t dt$$

||

$$\int \frac{t^4}{e^t(t^2 + 1)} \cdot e^t dt = \int \frac{t^4}{t^2 + 1} dt =$$

$$= \int t^4 - 1 + \frac{1}{t^2 + 1} dt =$$

$$\begin{aligned} & t^4 \quad | \quad t^2 + 1 \\ & -t^4 - t^2 \quad t^2 - 1 \\ & \hline -t^2 \end{aligned}$$

$$= \frac{t^5}{5} - t + \arctan(t) + C$$

$$= \frac{(\ln(u))^5}{5} - \ln(u) + \arctan(\ln(u)) + C, C \in \mathbb{R}.$$

$$4. \int \sin \sqrt{x} dx; \quad u = t^2 \quad (u > 0) \\ // \quad t^2 \quad du = 2t dt \quad t \geq 0$$

$$\begin{aligned} \int \sin(t) \cdot 2t dt &= 2 \int \underbrace{\sin(t)}_{M} \cdot \underbrace{t dt}_{J} = \\ &= 2 \left[ \underbrace{-\cos(t)}_{M'} \cdot t - \int \underbrace{-\cos(t)}_{M} \cdot 1 dt \right] = \\ &= -2t \cos(t) + 2 \sin(t) + C \\ &= -2\sqrt{e} \cos(\sqrt{e}) + 2 \sin(\sqrt{e}) + C, C \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

$\boxed{\int M'v = Mv - \int Mv'}$

3. No caso do radical  $\sqrt{x^2 - a^2}$ , com  $a > 0$ , pode utilizar-se a mudança de variável  $x = h(t) = a \sec t$ .

- No intervalo  $]a, +\infty[$ , teremos  $t \in ]0, \frac{\pi}{2}[$  e

$$\sqrt{x^2 - a^2} = a\sqrt{\sec^2 t - 1} = a\sqrt{\tan^2 t} = a \tan t (> 0)$$

- No intervalo  $]-\infty, a[$  teremos  $t \in ]\frac{\pi}{2}, \pi[$  e

$$\sqrt{x^2 - a^2} = a\sqrt{\sec^2 t - 1} = a\sqrt{\tan^2 t} = -a \tan t$$

Neste caso,  $h^{-1}(x) = \arccos\left(\frac{a}{x}\right)$ , com  $x \in ]a, +\infty[$  ou  $x \in ]-\infty, a[$ , consoante o intervalo considerado.

**Exemplo 5.5.** Como calcular  $\int \sqrt{9 - x^2} dx$ , com  $x \in ]-3, 3[$ ?

$$\int \sqrt{9 - x^2} dx = 3 \int \sqrt{1 - \left(\frac{x}{3}\right)^2} dx$$

Fazendo

$$\frac{x}{3} = \sin t, \quad t \in \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[ \quad \text{temos } \cos t = \frac{\sqrt{9 - x^2}}{3}$$

e

$$t = \arcsen \frac{x}{3} \quad \text{e} \quad dx = 3 \cos t dt.$$

Assim,

$$3 \int \sqrt{1 - (\sin t)^2} 3 \cos t dt = 9 \int \cos^2 t dt = \frac{9}{2} \int (1 + \cos(2t)) dt = \frac{9}{2}t + \frac{9}{4} \sin(2t) + C, \quad \text{com } C \in \mathbb{R}.$$

Voltando à variável inicial:

$$\int \sqrt{9 - x^2} dx = \frac{9}{2} \arcsen \frac{x}{3} + \frac{x\sqrt{9 - x^2}}{2} + C, \quad \text{com } C \in \mathbb{R}.$$

Note que  $\sin(2t) = 2 \sin t \cos t$  e  $\cos^2 t = \frac{1 + \cos(2t)}{2}$ .

No exemplo anterior considerou-se a função

$$h(t) = 3 \sin t, \quad \text{com } t \in \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[,$$

invertível e derivável:

$$h^{-1}(x) = \arcsen \frac{x}{3}, \quad \text{com } x \in ]-3, 3[ \quad \text{e} \quad h'(t) = 3 \cos t.$$

Sendo  $g(t) = f(h(t)) \cdot h'(t) = 9 \cos^2 t$ , uma sua primitiva é

$$G(t) = \frac{9}{2}t + \frac{9}{4} \sin(2t) = \frac{9}{2}t + \frac{9}{2} \sin t \cos t.$$

Fazendo a composta,  $F = G \circ h^{-1}$ , obtém-se uma primitiva de  $f$ :

$$F(x) = (G \circ h^{-1})(x) = \frac{9}{2} \arcsen \frac{x}{3} + \frac{x\sqrt{9 - x^2}}{2}.$$

E se o factor a primitivar for  $\sqrt{ax^2 + bx + c}$ ?

Podemos sempre fazer a decomposição

$$ax^2 + bx + c = a \left[ \left( x + \frac{b}{2a} \right)^2 + \left( \frac{c}{a} - \frac{b^2}{4a^2} \right) \right], \quad a \neq 0$$

e usa-se uma das substituições acima referidas com as devidas adapatações. Veja-se o exemplo seguinte.

**Exemplo 5.5.** Como calcular  $\int \sqrt{9 - x^2} dx$ , com  $x \in ]-3, 3[$ ?

$$\begin{aligned} u &= 3 \sin t, t \in \left] \frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2} \right[ \\ du &= 3 \cos t dt \end{aligned}$$

$$\int \sqrt{9 - (3 \sin t)^2} \cdot 3 \cos t dt$$

$$= \int \sqrt{9(1 - \sin^2 t)} \cdot 3 \cos t dt$$

$$= \int 3 \sqrt{1 - \sin^2 t} \cdot 3 \cos t dt = 9 \int \cos t \cdot \cos t dt$$

$$= 9 \int \cos^2 t dt = 9 \int \frac{1 + \cos(2t)}{2} dt =$$

$$= \frac{9}{2} \left( t + \frac{\sin(2t)}{2} \right) + C$$

$$= \frac{9}{2} t + \frac{9}{2} \sin t \cos t + C$$

$$= \frac{9}{2} \arcsin \frac{u}{3} + \frac{9}{2} \times \frac{u}{3} \times \sqrt{1 - \left(\frac{u}{3}\right)^2} + C, \quad C \in \mathbb{R}.$$

$$\begin{cases} u = 3 \sin t \\ \frac{u}{3} = \sin t \\ t = \arcsin \left( \frac{u}{3} \right) \end{cases}$$

$$\cos t = \sqrt{1 - \sin^2 t}$$

**Exemplo 5.6.**

$$\int \frac{1}{\sqrt{2x^2 + 8x - 24}} dx = ?$$

$$2x^2 + 8x - 24 = 2(x^2 + 4x - 12) = 2((x+2)^2 - 16)$$

Fazendo a mudança de variável

$$x+2 = 4 \sec t \Leftrightarrow x = 4 \sec t - 2 = h(t), t \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right[$$

podemos resolver o problema. Como  $h'(t) = 4 \sec t \tan t$ , determinamos a família de primitivas

$$\int \frac{1}{4\sqrt{2} \tan t} 4 \sec t \tan t dt = \int \frac{1}{\sqrt{2}} \sec t dt = \frac{1}{\sqrt{2}} \ln |\sec t + \tan t| + C, \text{ com } C \in \mathbb{R}.$$

Regressando à variável inicial, temos  $h^{-1}(x) = \arccos \frac{4}{x+2}$  e recorrendo às fórmulas trigonométricas  $\sec x = \frac{1}{\cos x}$  e  $1 + \tan^2 x = \sec^2 x$  obtemos:

$$\int \frac{1}{\sqrt{2x^2 + 8x - 24}} dx = \frac{1}{\sqrt{2}} \ln \left| \frac{1}{4} \left( x + 2 + \sqrt{x^2 + 4x - 12} \right) \right| + C, \text{ com } C \in \mathbb{R}$$

**Exercício 5.8** Calcule:

$$1. \int \frac{e^x}{\sqrt{4 - e^{2x}}} dx; \quad 2. \int \frac{1}{\sqrt{9x^2 + 6x + 2}} dx; \quad 3. \int \frac{1}{x(3 + \ln x)^3} dx;$$

$$4. \int \frac{1}{\sqrt{8 + 2x - x^2}} dx; \quad 5. \int \frac{\sin^3 x}{\sqrt{\cos x}} dx; \quad 6. \int \frac{1}{x^2 \sqrt{5 - x^2}} dx;$$

$$7. \int \frac{1}{x \sqrt{x^2 + 2}} dx; \quad 8. \int \sqrt{4 + 5x^2} dx; \quad 9. \int x^2 \sqrt{1 - x} dx.$$

~~1~~  
~~q~~  $\int \frac{1}{\sqrt{2x+5}} dx + K$

## 5.7 Primitivas de Funções Racionais

Uma função racional é o quociente de dois polinómios,  $p$  e  $q$ , sendo  $q(x)$  não nulo,

$$f(x) = \frac{p(x)}{q(x)}.$$

Se  $\text{grau}(p) \geq \text{grau}(q)$  então devemos fazer a divisão dos polinómios e obtemos  $p(x) = s(x)q(x) + r(x)$ , em que  $\text{grau}(r) < \text{grau}(q)$ . Portanto, nesse caso,

$$\int f(x) dx = \int s(x) dx + \int \frac{r(x)}{q(x)} dx$$

**Exemplo 5.7.** Sejam  $p$  e  $q$  os polinómios definidos por  $p(x) = x^4 + 2x + 1$  e  $q(x) = x^3 - x^2 - 2x$ . Para determinar  $\int \frac{p(x)}{q(x)} dx$  efetuamos a divisão dos polinómios já que  $\text{grau}(p) \geq \text{grau}(q)$ . Como  $p(x) = (x+1)q(x) + 3x^2 + 4x + 1$  vem,

$$\frac{p(x)}{q(x)} = (x+1) + \frac{3x^2 + 4x + 1}{x^3 - x^2 - 2x}.$$

**Exemplo 5.6.**

$$\int \frac{1}{\sqrt{2x^2 + 8x - 24}} dx = ? \quad =$$

$$2u^2 + 8u - 24 = 2(u^2 + 4u - 12)$$

$$= 2((u+2)^2 - 16)$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}} \int \frac{1}{\sqrt{u^2 + 4u - 12}}$$

$$\Delta = 4^2 - 4 \times (-12) >$$

$$du = \frac{1}{\sqrt{2}} \int \frac{1}{\sqrt{(u+2)^2 - 16}} du$$

$$u+2 = 4 \sec t, \quad du = 4 \tan \sec dt$$

$$= \frac{\sqrt{2}}{2} \int \frac{1}{\sqrt{\cancel{16 \sec^2 t - 16}}} \cdot \cancel{4 \tan \sec dt}$$

$$\frac{\sin u}{\cos^2 u}$$

$$= \frac{\sqrt{2}}{2} \int \frac{1}{\sqrt{\sec^2 t - 1}} \cdot \tan \sec dt = \frac{\sqrt{2}}{2} \int \tan^2 t dt \quad (t \in ]0, \frac{\pi}{2}[)$$

$$(p \in \mathbb{R}, t \in ]0, \frac{\pi}{2}[)$$

$$= \frac{\sqrt{2}}{2} \left\{ \frac{1}{\tan t} \cdot \cancel{\tan t} \cdot \sec dt = - \sec dt$$

$$= \frac{\sqrt{2}}{2} \ln |\sec t + \tan t| + C =$$

$$\varphi + 2 = 4 \operatorname{sect}$$

$$\operatorname{sect} = \frac{\varphi + 2}{4}$$

$$= \frac{\sqrt{2}}{2} P_M \left| \frac{\varphi + 2}{4} + \sqrt{\left( \frac{\varphi + 2}{4} \right)^2 - 1} + C \right|$$

$C \in \mathbb{R}$

$$\begin{aligned} \operatorname{tg}^2 t &= \sec^2 t - 1 \quad \xrightarrow{1^\circ Q} \\ \operatorname{tg} t &= \sqrt{\sec^2 t - 1} \\ &= \sqrt{\left( \frac{\varphi + 2}{4} \right)^2 - 1} \end{aligned}$$

$$1. \int \frac{e^x}{\sqrt{4 - e^{2x}}} dx;$$

$$e^{\varphi} = 2 \sin t, \quad t \in [0, \frac{\pi}{2}]$$

$$f(\varphi) = g(t)$$

$$f'(u) du = g'(t) dt$$

$$\underbrace{e^{\varphi} du}_{\text{---}} = \underbrace{2 \cos t dt}_{\text{---}}$$

$$(\varphi = f^{-1}(g(t))$$

$$\frac{d\varphi}{dt} = (f^{-1})'(g(t)) g'(t)$$

$$= \frac{1}{f'(u)} g'(t)$$

$$f'(u) du = g'(t) dt$$

$$= \int \frac{1}{\sqrt{4 - (e^{\varphi})^2}} \cdot e^{\varphi} du$$

$$= \int \frac{1}{\sqrt{4 - 4 \sin^2 t}} \cdot 2 \cos t dt$$

$$\cancel{\int \frac{1}{2} \times \frac{1}{\sqrt{1 - \sin^2 t}} \cdot 2 \cos t dt =}$$

$$= \int \frac{\cos t}{\cos t} dt = \int 1 dt = t + C$$
$$= \arcsin\left(\frac{e^t}{2}\right) + C, C \in \mathbb{R}.$$

$$e^t = 2 \sin t \quad \sin t = \frac{e^t}{2}$$
$$t = \arcsin\left(\frac{e^t}{2}\right)$$

Então,

$$\int \frac{p(x)}{q(x)} dx = \int \left( (x+1) + \frac{3x^2+4x+1}{x^3-x^2-2x} \right) dx$$

Para integrar a segunda parcela decomponemos o denominador em elementos simples, de 1º e/ou 2º grau:

$$q(x) = x(x^2 - x - 2) = x(x+1)(x-2)$$

e podemos reescrever a fração como segue:

$$\frac{3x^2+4x+1}{x^3-x^2-2x} = \frac{3x^2+4x+1}{x(x+1)(x-2)}.$$

Esta fração pode ser decomposta numa soma de “frações simples”:

$$\frac{3x^2+4x+1}{x(x+1)(x-2)} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x+1} + \frac{C}{x-2}$$

onde  $A$ ,  $B$  e  $C$  são constantes a determinar. Se reduzirmos as frações simples ao mesmo denominador obtemos a igualdade seguinte:

$$\frac{3x^2+4x+1}{x(x+1)(x-2)} = \frac{A(x+1)(x-2) + Bx(x-2) + Cx(x+1)}{x(x+1)(x-2)}.$$

Como os denominadores são iguais, para que as frações sejam iguais devemos igualar os numeradores:

$$3x^2 + 4x + 1 = A(x+1)(x-2) + Bx(x-2) + Cx(x+1).$$

Pela igualdade de polinómios deduz-se que:

$$(A+B+C)x^2 + (-A-2B+C)x - 2A = 3x^2 + 4x + 1, \text{ ou seja,}$$

$$\begin{cases} A+B+C=3 \\ -A-2B+C=4 \\ -2A=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} A=-\frac{1}{2} \\ B=0 \\ C=\frac{7}{2} \end{cases}$$

Um outro processo para determinar  $A$ ,  $B$  e  $C$  consiste em utilizar o seguinte resultado:

$$\text{Dois polinómios são iguais se } \forall x_0 \in \mathbb{R}, p(x_0) = q(x_0).$$

Então, em particular,

$$A(x+1)(x-2) + Bx(x-2) + Cx(x+1) = 3x^2 + 4x + 1, \text{ para } x = 0, x = 2 \text{ e } x = -1.$$

$$\text{Se } x = 0, \text{ resulta } -2A = 1 \Leftrightarrow A = -\frac{1}{2}$$

$$\text{Se } x = -1, \text{ resulta } 3B = 0 \Leftrightarrow B = 0 \quad \text{Parece mais simples !!!}$$

$$\text{Se } x = 2, \text{ resulta } 6C = 21 \Leftrightarrow C = \frac{7}{2}$$

Determinados os coeficientes (por um processo ou por outro):

$$\begin{aligned} \int \frac{x^4+2x+1}{x^3-x^2-2x} dx &= \int \left[ x+1 - \frac{1}{2x} + \frac{21}{6(x-2)} \right] dx \\ &= \frac{x^2}{2} + x - \frac{1}{2} \ln|x| + \frac{21}{6} \ln|x-2| + C, \quad C \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

Este processo pode ser utilizado em qualquer fração de polinómios, tendo em conta os resultados seguintes.



**Teorema 5.5.** Todo o polinómio de coeficientes reais pode ser decomposto num produto de fatores do primeiro e/ou segundo grau (em que cada um dos fatores terá uma multiplicidade maior ou igual a 1).

Um polinómio de grau  $n$  admite sempre  $n$  raízes complexas<sup>2</sup>, não necessariamente distintas, ou seja, podem ser simples ou múltiplas. Para além disso, se admitir a raiz  $a + bi$  (com  $b \neq 0$ ) também admite a raiz  $a - bi$ .

O problema reduz-se assim a primitivar fatores do tipo:

$$\frac{A}{(x - \alpha)^r} \text{ e } \frac{Bx + C}{(x^2 + bx + c)^s}$$

Observe-se que se  $r \neq 1$  (Caso em que o polinómio do denominador tem raízes reais múltiplas),

$$\int \frac{A}{(x - \alpha)^r} dx = \frac{A}{(1 - r)(x - \alpha)^{r-1}} + C, C \in \mathbb{R}$$

e se  $r = 1$

$$\int \frac{A}{(x - \alpha)^r} dx = \int \frac{A}{x - \alpha} dx = A \ln |x - \alpha| + C, C \in \mathbb{R}$$

**Exemplo 5.8.** Como calcular  $\int \frac{x^2 + 1}{(x - 1)^3} dx?$

$$\frac{x^2 + 1}{(x - 1)^3} = \frac{A}{x - 1} + \frac{B}{(x - 1)^2} + \frac{C}{(x - 1)^3}$$

$$x^2 + 1 = Ax^2 + (-2A + B)x + A - B + C.$$

Donde:  $A = 1$ ,  $B = 2$  e  $C = 2$ .

$$\begin{aligned} \int \frac{x^2 + 1}{(x - 1)^3} dx &= \int \frac{1}{x - 1} dx + 2 \int \frac{1}{(x - 1)^2} dx + 2 \int \frac{1}{(x - 1)^3} dx \\ &= \ln |x - 1| - \frac{2}{x - 1} - \frac{1}{(x - 1)^2} + C, \quad C \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

Se os fatores são de 2º grau, as coisas complicam-se... Caso em que o polinómio do denominador tem raízes complexas.

**Exemplo 5.9.** Como calcular  $\int \frac{x^2 + x + 1}{(2x + 1)(x^2 + 1)} dx?$

$$\frac{x^2 + x + 1}{(2x + 1)(x^2 + 1)} = \frac{A}{2x + 1} + \frac{Bx + C}{x^2 + 1}$$

Donde:  $A = \frac{3}{5}$ ,  $B = \frac{1}{5}$  e  $C = \frac{2}{5}$ .

$$\begin{aligned} \int \frac{x^2 + x + 1}{(2x + 1)(x^2 + 1)} dx &= \frac{3}{5} \int \frac{1}{2x + 1} dx + \int \frac{\frac{1}{5}x + \frac{2}{5}}{x^2 + 1} dx \\ &= \frac{3}{10} \ln |2x + 1| + \frac{1}{5} \int \frac{x}{x^2 + 1} dx + \frac{2}{5} \int \frac{1}{x^2 + 1} dx \\ &= \frac{3}{10} \ln |2x + 1| + \frac{1}{10} \ln(x^2 + 1) + \frac{2}{5} \arctan x + C, \quad C \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

---

<sup>2</sup>Observemos que uma raiz real é complexa com parte imaginária nula.



Atendendo ao Teorema 5.5, podemos afirmar que qualquer polinómio  $q(x)$ , admite a seguinte fatorização em polinómios irredutíveis:

$$q(x) = \alpha(x - a_1)^{r_1} \dots (x - a_n)^{r_n} (x^2 + b_1x + c_1)^{s_1} \dots (x^2 + b_mx + c_m)^{s_m},$$

com  $b_j^2 - 4c_j < 0, j = 1 \dots, m$  e

$$(r_1 + \dots + r_n) + 2(s_1 + \dots + s_m) = \text{grau}(q).$$

Então,

$$\begin{aligned} \frac{r(x)}{q(x)} &= \frac{1}{\alpha} \sum_{i=1}^n \left( \frac{A_{i1}}{(x - a_i)} + \dots + \frac{A_{ir_i}}{(x - a_i)^{r_i}} \right) + \\ &+ \frac{1}{\alpha} \sum_{j=1}^m \left( \frac{B_{j1}x + C_{j1}}{(x^2 + b_jx + c_j)} + \dots + \frac{B_{js_j}x + C_{js_j}}{(x^2 + b_jx + c_j)^{s_j}} \right), \end{aligned}$$

onde  $A_{i1}, \dots, A_{ir_i} (i = 1 \dots, n)$  e  $B_{j1}, C_{j1}, \dots, B_{js_j}, C_{js_j} (j = 1 \dots, m) \in \mathbb{R}$ .

**Exemplo 5.10.** Para determinar o integral  $\int \frac{x}{x^2 + 2x + 15} dx$  podemos escrever

$$\frac{x}{x^2 + 2x + 15} = \frac{x + 1 - 1}{x^2 + 2x + 15}$$

atendendo a que  $(x^2 + 2x + 15)' = 2x + 2 = 2(x + 1)$ . Assim,

$$\int \frac{x}{x^2 + 2x + 15} dx = \frac{1}{2} \int \frac{2(x + 1)}{x^2 + 2x + 15} dx - \int \frac{1}{x^2 + 2x + 15} dx$$

O primeiro integral é agora imediato; para calcular o segundo, observemos que

$$x^2 + 2x + 15 = (x + 1)^2 + 14 = 14 \left( \left( \frac{x + 1}{\sqrt{14}} \right)^2 + 1 \right)$$

e portanto

$$\int \frac{x}{x^2 + 2x + 15} dx = \frac{1}{2} \int \frac{2(x + 1)}{x^2 + 2x + 15} dx - \frac{1}{14} \int \frac{1}{\left( \frac{x+1}{\sqrt{14}} \right)^2 + 1} dx.$$

Integrando vem:

$$\int \frac{x}{x^2 + 2x + 15} dx = \frac{1}{2} \ln(x^2 + 2x + 5) - \frac{\sqrt{14}}{14} \arctan \frac{x + 1}{\sqrt{14}} + C, C \in \mathbb{R}$$

**Exemplo 5.11.** A primitiva da função  $\frac{1}{(1+x^2)^2}$ , ou das suas variantes  $\frac{1}{(a^2+x^2)^2}$ , aparece frequentemente na decomposição em elementos simples, por isso é importante que se perceba a sua determinação.

Como calcular

$$\int \frac{1}{(1+x^2)^2} dx?$$

Fazendo a substituição  $x = g(t) = \operatorname{tg} t$ , porque  $1 + \operatorname{tg}^2 t = \sec^2 t$  temos que

$$\frac{1}{(1+x^2)^2} = \frac{1}{(1+\operatorname{tg}^2 t)^2} = \frac{1}{\sec^4 t}$$



Derivando  $\operatorname{tg} t$ , obtém-se  $\sec^2 t$ , assim, a função a primitivar é

$$\int \frac{1}{\sec^4 t} \sec^2 t dt = \int \frac{1}{\sec^2 t} dt = \int \cos^2 t dt$$

Como  $\cos^2 t = \frac{1 + \cos(2t)}{2}$ , vem

$$\int \cos^2 t dt = \frac{1}{2} \int (\cos(2t) + 1) dt = \frac{1}{2} \left( t + \frac{1}{2} \sin(2t) \right) + C, \quad C \in \mathbb{R}$$

Como  $\sin(2t) = 2 \sin t \cos t$

$$\int \frac{1}{\sec^2 t} dt = \frac{1}{2} \sin t \cos t + \frac{1}{2} t + C, \quad C \in \mathbb{R}$$

Como  $\operatorname{tg} t = x$ , resulta que  $\sec^2 t = x^2 + 1$  e vem

$$\cos^2 t = \frac{1}{x^2 + 1} \quad \text{e} \quad \sin^2 t = 1 - \cos^2 t = \frac{x^2}{x^2 + 1}.$$

Regressando à variável inicial  $x$  temos:

$$\int \frac{1}{(1+x^2)^2} dx = \frac{x}{2(x^2+1)} + \frac{1}{2} \arctan x + C, \quad C \in \mathbb{R}$$

**Exemplo 5.12.** Vamos determinar o integral indefinido  $\int \frac{x-1}{(x^2+2x+3)^2} dx$ .

Atendendo a que  $(x^2+2x+3)' = 2x+2$  e que  $x-1 = x+1-2$ , podemos reescrever o integral da seguinte forma:

$$\int \frac{x-1}{(x^2+2x+3)^2} dx = \frac{1}{2} \int \left( \frac{2x+2}{(x^2+2x+3)^2} - \frac{4}{(x^2+2x+3)^2} \right) dx$$

ou seja,

$$\int \frac{x-1}{(x^2+2x+3)^2} dx = \frac{1}{2} \int \frac{2x+2}{(x^2+2x+3)^2} dx - \int \frac{2}{(x^2+2x+3)^2} dx.$$

O primeiro integral é imediato,

$$\frac{1}{2} \int \frac{2x+2}{(x^2+2x+3)^2} dx = -\frac{1}{2(x^2+2x+3)} + C_1, \quad C_1 \in \mathbb{R}.$$

Quanto ao segundo integral, vamos recorrer ao exemplo 5.11. Começamos por transformar a função integranda:

$$\frac{2}{(x^2+2x+3)^2} = \frac{2}{4 \left( \left( \frac{x+1}{\sqrt{2}} \right)^2 + 1 \right)^2} = \frac{1}{2} \frac{1}{\left( \left( \frac{x+1}{\sqrt{2}} \right)^2 + 1 \right)^2}.$$

Faz-se agora a substituição

$$\frac{x+1}{\sqrt{2}} = \operatorname{tg} t \Leftrightarrow x = \sqrt{2} \operatorname{tg} t - 1$$

no integral  $\int \frac{2}{(x^2+2x+3)^2} dx$  e o integral a determinar será

$$\frac{1}{2} \int \frac{1}{(\operatorname{tg}^2 t + 1)^2} \sqrt{2} \sec^2 t dt = \frac{\sqrt{2}}{2} \int \cos^2 t dt = \frac{\sqrt{2}}{4} (t + \sin(2t)) + C_2 = \frac{\sqrt{2}}{4} (t + 2 \sin(t) \cos(t)) + C_2, \quad C_2 \in \mathbb{R}.$$

Regressando à variável inicial,

$$\int \frac{2}{(x^2+2x+3)^2} dx = \frac{\sqrt{2}}{4} \left( \arctan \left( \frac{x+1}{\sqrt{2}} \right) + \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2+(x+1)^2}} \cdot \frac{x+1}{\sqrt{2+(x+1)^2}} \right) + C_2, \quad C_2 \in \mathbb{R},$$



ou escrito de forma simplificada,

$$\int \frac{2}{(x^2 + 2x + 3)^2} dx = \frac{\sqrt{2}}{4} \left( \arctan \left( \frac{x+1}{\sqrt{2}} \right) + \frac{\sqrt{2}(x+1)}{2+(x+1)^2} \right) + C_2, \quad C_2 \in \mathbb{R}.$$

Finalmente,

$$\int \frac{x-1}{(x^2 + 2x + 3)^2} dx = -\frac{1}{2(x^2 + 2x + 3)} - \frac{\sqrt{2}}{4} \left( \arctan \left( \frac{x+1}{\sqrt{2}} \right) + \frac{\sqrt{2}(x+1)}{2+(x+1)^2} \right) + C, \quad C \in \mathbb{R}.$$

**Exercício 5.9** Calcule:

1.  $\int \frac{1}{(x-2)^3} dx;$
2.  $\int \frac{x^2 + 2}{(x+1)^3(x-2)} dx;$
3.  $\int \frac{3x^2 + 2x - 3}{x^3 + 2x^2 + x} dx;$
4.  $\int \frac{x^4 - 3}{x^3 + 2x^2 + x} dx;$
5.  $\int \frac{5x^3 - 3x^2 + 7x - 3}{(x^2 + 1)^2} dx.$



## Soluções dos exercícios

### Exercício 5.1

Função	Primitiva	Domínio
$f(x) = 2e^{2x}$	$F(x) = e^{2x}$	$x \in \mathbb{R}$
$f(x) = \operatorname{tg} x$	$F(x) = -\ln(\cos x)$	$x \in ]0, \frac{\pi}{2}[$
$f(x) = x^5$	$F(x) = \frac{x^6}{6}$	$x \in \mathbb{R}$
$f(x) = \sqrt[3]{x}$	$F(x) = \frac{3}{4} \sqrt[3]{x^4}$	$x \in \mathbb{R}$
$f(x) = \sqrt{7}$	$F(x) = \sqrt{7}x$	$x \in \mathbb{R}$

### Exercício 5.2

$$\begin{array}{ll} 1. x^4 - \frac{5}{2}x^2 + 9x + C & 2. \frac{5}{4}x^4 + 2 \operatorname{sen} x + C \\ 5. \frac{x^3}{3} - 2x - \frac{1}{x} + C & 6. -\sqrt{3} \operatorname{cos} x + \frac{1}{2} \ln|x| + C \\ 7. \frac{2}{5} \sqrt{x^5} + x + C & 8. \frac{1}{\cos u} + C, \text{ com } C \in \mathbb{R}. \end{array}$$

### Exercício 5.3

$$\begin{array}{lll} 1. \frac{(g(x))^{n+1}}{n+1} + C & 2. \operatorname{sen}(g(x)) + C & 3. -\cos(g(x)) + C \\ 4. \operatorname{tg}(g(x)) + C & 5. -\operatorname{cotg}(g(x)) + C & 6. \operatorname{arcsen}(g(x)) + C \\ 7. e^{g(x)} + C & 8. \frac{a^{g(x)}}{\ln a} + C & 9. \ln|g(x)| + C \\ 10. \operatorname{arctan}((g(x))) + C & 11. -\ln|\cos(g(x))| + C & 12. \frac{n}{n+1} \sqrt[n+1]{g(x)^{n+1}} + C \end{array}, \text{ com } C \in \mathbb{R}$$

### Exercício 5.5

$$\begin{array}{ll} 1. \frac{\sqrt{7}}{7} \operatorname{arctan}\left(\frac{x}{\sqrt{7}}\right) + C; & 5. \frac{1}{2} \operatorname{arctan}(e^{2x}) + C; \\ 2. \operatorname{arcsen}\left(\frac{x}{\sqrt{8}}\right) + C; & 6. -\ln|\cos x| + C; \\ 3. -2\sqrt{1-x} + C; & 7. -\operatorname{sen}\left(\frac{1}{x}\right) + C; \\ 4. -\frac{1}{6}e^{3\cos^2 x} + C; & 8. \frac{1}{2}e^{x^2+4x+3} + C. \end{array}$$

### Exercício 5.6

$$\begin{array}{ll} 1. x \operatorname{arctan} x - \frac{1}{2} \ln(1+x^2) + C; & 2. \frac{1}{2} (\operatorname{tg} x \sec x + \ln|\sec x + \operatorname{tg} x|) + C; \\ 3. \frac{2}{45} \cos(2x) \operatorname{sen}(7x) - \frac{7}{45} \operatorname{sen}(2x) \cos(7x) + C; & 4. -\frac{3}{16} \operatorname{sen}(5x) \operatorname{sen}(3x) - \frac{5}{16} \cos(5x) \cos(3x) + C; \\ 5. \frac{x^2}{2} \operatorname{arctan} x - \frac{1}{2}x + \frac{1}{2} \operatorname{arctan} x + C; & 6. \frac{x3^x}{\ln 3} - \frac{3^x}{\ln^2 3} + C; \\ 7. \frac{1}{2} \operatorname{arctan} x - \frac{1}{2} \frac{x}{1+x^2} + C (\text{Sugestão: } \frac{x^2}{(1+x^2)^2} = \frac{x}{(1+x^2)^2} x); & 8. \frac{1}{2}(x \operatorname{cos}(\ln x) + x \operatorname{sen}(\ln x)) + C; \\ 9. x \frac{(2x+5)^{11}}{22} - \frac{(2x+5)^{12}}{528} + C; & \text{com } C \in \mathbb{R} \end{array}$$

### Exercício 5.7

1.  $\frac{6}{7}\sqrt[6]{x^7} - \frac{6}{5}\sqrt[6]{x^5} + 2\sqrt[6]{x^3} - 6\sqrt[6]{x} + 6\arctan\sqrt[6]{x} + C;$
2.  $e^x - \arctan(e^x) + C;$
3.  $\frac{\ln^3 x}{3} - \ln x + \arctan(\ln x) + C;$
4.  $2\sin\sqrt{x} - 2\sqrt{x}\cos\sqrt{x} + C;$
5.  $\frac{\sqrt{(2x+3)^5}}{10} - \frac{\sqrt{(2x+3)^3}}{2} + C;$
6.  $\ln(4x) - \ln 2 \ln|\ln(4x)| + C;$
7.  $-\frac{4\sqrt{(1-\sqrt{x})^3}}{3} + C,$   
com  $C \in \mathbb{R}.$

### Exercício 5.8

1.  $\arcsen\left(\frac{e^x}{2}\right) + C;$
2.  $\frac{2}{9}\sqrt{9x^2 + 6x + 2} - \frac{13}{9}\ln(\sqrt{9x^2 + 6x + 2} - 3x - 1) + C;$
3.  $-\frac{1}{2(3 + \ln x)^2} + C;$
4.  $\arcsen\left(\frac{x-1}{3}\right) + C;$
5.  $-2\sqrt{\cos x} + \frac{2}{5}\sqrt{\cos^5 x} + C;$
6.  $-\frac{\sqrt{5-x^2}}{5x} + C;$
7.  $-\frac{\sqrt{2}}{4}\ln(\sqrt{2} + \sqrt{2+x^2}) + \frac{\sqrt{2}}{4}\ln(-\sqrt{2} + \sqrt{2+x^2}) + C;$
8.  $\frac{1}{2}x\sqrt{4+5x^2} - 2\frac{\ln(-x\sqrt{5} + \sqrt{4+5x^2})}{\sqrt{5}} + C;$
9.  $\sqrt{1-x}\left(\frac{4(1-x)^2}{5} - \frac{2(1-x)^3}{7} - \frac{2(1-x)}{3}\right) + C,$   
com  $C \in \mathbb{R},$

### Exercício 5.9

1.  $-\frac{1}{2(x-2)^2} + C,$  com  $C \in \mathbb{R};$
2.  $\frac{1}{18}\left(\frac{3-6x}{(x+1)^2} + 4\ln(x-2) - 4\ln(x+1)\right) + C,$  com  $C \in \mathbb{R};$
3.  $-\frac{2}{x+1} - 3\ln x + 6\ln(x+1) + C,$  com  $C \in \mathbb{R};$
4.  $\frac{x^2}{2} - 2x - \frac{2}{x+1} - 3\ln x + 6\ln(x+1) + C,$  com  $C \in \mathbb{R};$
5.  $-\frac{1}{x^2+1} + \frac{5}{2}\ln(x^2+1) - 3\arctan x + C,$  com  $C \in \mathbb{R}.$

