6. Cónicas e Quádricas

cónica | curva que resulta da intersecção de um plano com um cone

eq geral $(x,y) \in \mathbb{R}^2$

$$\alpha x^2 + \beta y^2 + 2\gamma xy + \delta x + \eta y + \mu = 0$$

α, β, γ não simultaneamente nulos

$\alpha, \beta, \gamma, \delta, \eta, \mu \in \mathbb{R}$

$$\underbrace{\begin{bmatrix} x & y \end{bmatrix}}_{X^T} \underbrace{\begin{bmatrix} \alpha & \gamma \\ \gamma & \beta \end{bmatrix}}_{A} \underbrace{\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}}_{X} + \underbrace{\begin{bmatrix} \delta & \eta \end{bmatrix}}_{B} \underbrace{\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}}_{X} + \mu = 0$$

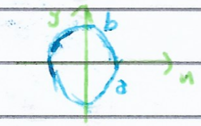
$$X^T A X + B X + \mu = 0$$

A simétrica 2×2 não nula

B matriz 1×2

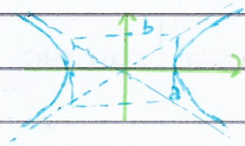
eq reduzidas

elipse | $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$, $a, b \in \mathbb{R}^+$

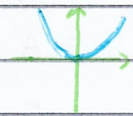


nota se $a = b$ temos circ de raio a

hipérbole | $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$, $a, b \in \mathbb{R}^+$



parábola | $y = ax^2$, $a \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$



redução da equação

① se A não for ortogonal

mudança de variável $X = P\hat{X}$, onde P é tal que

$P^T A P = D = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{bmatrix}$, sendo λ_1 e λ_2 valores próprios de A

$$\hat{X}^T \underbrace{P^T A P}_{D} \hat{X} + \underbrace{BP}_{\hat{B}} \hat{X} + \mu = 0$$

$$\lambda_1 \hat{x}^2 + \lambda_2 \hat{y}^2 + \hat{\delta}\hat{x} + \hat{\eta}\hat{y} + \mu = 0$$

② eliminação dos termos $\hat{B}\hat{X}$ ou μ

$$\begin{cases} \tilde{x} = \hat{x} + a \\ \tilde{y} = \hat{x} + b \end{cases}$$

notas • As m.v. são ambas opcionais e só feitas se necessárias.
• Na 1ª m.v. determinamos a equação do gráfico, faltando determinar o vértice através de uma rotação / translação do gráfico, feitas na 2ª m.v.
• Na 1ª mv se $\det(P) > 0$, esta mv corresponde a uma rotação dos eixos do referencial.

cónicas degeneradas

1. $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = -1$ → conjunto vazio
2. $\frac{x^2}{a^2} = -1$ → conjunto vazio
3. $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 0$ → um ponto (origem do referencial)
4. $\frac{x^2}{a^2} = 0$ → duas retas coincidentes (Oy, $x = 0$)
5. $\frac{x^2}{a^2} = 1$ → duas retas estritamente paralelas ($x = \pm a$)
6. $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 0$ → duas retas concorrentes ($y = \pm \frac{b}{a} x$)

quádrica — conjunto de pontos $X = (x, y, z)$ que satisfaz a equação:

$$X^T A X + B X + \mu = 0$$

A simetrica 3x3 não nula
B matriz 1 x 3

redução da equação — de forma análoga às cónicas
1. "rotação dos eixos" (diagonalização ortogonal de A)
2. "translação dos eixos"

eq reduzidas $a, b, c \in \mathbb{R}^+$

elipsóide: $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$, $a, b, c \in \mathbb{R}^+$

hiperbolóide
- de uma folha: $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1$
- de duas folhas: $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1$

cone: $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 0$, $a, b, c \in \mathbb{R}^+$
→ hiperbolóide degenerado

parabolóide	elíptico	$z = \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2}$
	hiperbólico	$z = \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2}$
cilindro	elíptico	$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$
	hiperbólico	$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$
	parabólico	$y = ax^2$

quádricas matriz A

$$X^T \begin{array}{c} x \\ y \\ z \end{array} \begin{bmatrix} a & d_2 & e_2 \\ d_1 & b & f_2 \\ e_1 & f_1 & c \end{bmatrix} X$$

$$ax^2 + by^2 + cz^2 + (d_1+d_2)\,xy$$
$$+ (e_1+e_2)\,xz$$
$$+ (f_1+f_2)\,yz$$