

# GUIÃO 1

FUNÇÕES REAIS DE VARIÁVEL REAL

LINGUAGEM DA MATEMÁTICA

REVISÕES SOBRE FUNÇÕES REAIS DE VARIÁVEL REAL

FUNÇÕES TRIGONOMÉTRICAS INVERSAS

TEOREMAS SOBRE FUNÇÕES CONTÍNUAS E DERIVÁVEIS

PAULA OLIVEIRA

2021/22

DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA - UNIVERSIDADE DE AVEIRO

# Conteúdo

<b>1 A linguagem da Matemática</b>	<b>1</b>
1.1 Definições e Teoremas . . . . .	1
1.2 Conceitos de Supremo e Ínfimo . . . . .	5
1.2.1 Axioma do Supremo . . . . .	6
1.3 Distância no Conjunto dos Números Reais . . . . .	6
1.3.1 Aproximação de Números Reais . . . . .	7
1.3.2 Vizinhança . . . . .	7
1.4 A reta “acabada” . . . . .	8
1.5 Topologia da reta $\mathbb{R}$ . . . . .	8
1.5.1 Conjunto aberto, conjunto fechado . . . . .	9
1.5.2 Ponto de acumulação e ponto isolado . . . . .	10
1.6 Soluções dos exercícios do capítulo . . . . .	12
<b>2 Funções reais de variável real: recordar</b>	<b>13</b>
2.1 Conceito de função . . . . .	13
2.2 Função composta . . . . .	14
2.3 Funções injetivas e funções sobrejetivas . . . . .	15
2.4 Funções monótonas . . . . .	16
2.5 A função inversa . . . . .	16
2.6 Funções pares e ímpares . . . . .	17
2.7 Função limitada . . . . .	18
2.8 As funções exponencial e logarítmica . . . . .	19
2.9 Limites de funções reais de variável real . . . . .	19
2.9.1 Definição sequencial de limite . . . . .	20
2.9.2 Limite usando vizinhanças . . . . .	21
2.9.3 Limites infinitos e limites “no infinito” . . . . .	22
2.9.4 Limites laterais . . . . .	23
2.9.5 Propriedades dos limites . . . . .	23
2.9.6 Teoremas sobre Limites . . . . .	25
2.10 Funções contínuas . . . . .	26
2.10.1 Propriedades das funções contínuas . . . . .	27

2.10.2	Assíntotas . . . . .	28
2.11	Funções deriváveis . . . . .	29
2.11.1	Derivada de uma função num ponto . . . . .	30
2.11.2	Reta tangente . . . . .	31
2.11.3	Noção de diferencial . . . . .	31
2.11.4	Derivadas laterais . . . . .	33
2.11.5	Continuidade e derivabilidade . . . . .	33
2.11.6	Função derivada . . . . .	33
2.11.7	Limites laterais da função derivada . . . . .	34
2.11.8	Regras de derivação . . . . .	34
2.11.9	Derivadas de ordem superior . . . . .	35
2.11.10	Derivada da função composta . . . . .	35
2.11.11	Derivada da função inversa . . . . .	36
2.12	Soluções dos exercícios do capítulo . . . . .	36
<b>3</b>	<b>As funções trigonométricas</b>	<b>39</b>
3.1	Funções trigonométricas diretas . . . . .	39
3.1.1	As funções secante, cossecante e cotangente . . . . .	40
3.2	Funções trigonométricas inversas . . . . .	42
3.2.1	Função arco seno . . . . .	42
3.2.2	Função arco cosseno . . . . .	43
3.2.3	Função arco tangente . . . . .	45
3.2.4	Função arco cotangente . . . . .	46
3.3	Exercícios . . . . .	47
3.4	Soluções dos exercícios do capítulo . . . . .	48
<b>4</b>	<b>Teoremas sobre funções contínuas e funções deriváveis</b>	<b>50</b>
4.1	Teoremas sobre funções contínuas . . . . .	50
4.1.1	Teorema de Bolzano . . . . .	50
4.1.2	Teorema de Weierstrass . . . . .	51
4.2	Teoremas sobre funções deriváveis . . . . .	54
4.2.1	O Teorema de Rolle . . . . .	54
4.2.2	O Teorema de Lagrange . . . . .	55
4.2.3	Máximos e mínimos locais . . . . .	58
4.2.4	Convexidade, concavidade e pontos de inflexão . . . . .	59
4.3	Teorema e regra de Cauchy . . . . .	62
4.4	Soluções dos exercícios do capítulo . . . . .	68

# Capítulo 1

## A linguagem da Matemática

Neste capítulo vamos fazer uma introdução à linguagem usada em Cálculo e recordar algumas propriedades da Lógica.

O intuito é ajudar o estudante a entender um texto matemático, a saber distinguir definições de teoremas e conseguir elaborar demonstrações simples.

---

A implicação material pode ser definida usando outros conetivos lógicos. Pela sua definição, a implicação material  $P \Rightarrow Q$  só é falsa quando  $P$  é Verdadeira e  $Q$  é Falsa, ou seja, quando  $\sim P$  é Falsa e  $Q$  é Falsa. Esta é exatamente a propriedade da disjunção de  $\sim P$  e  $Q$ , logo

$$P \Rightarrow Q \text{ é equivalente a } \sim P \vee Q.$$

Usando as leis de De Morgan pode-se verificar que

$$\sim(P \Rightarrow Q) \text{ é equivalente a } P \wedge \sim Q.$$

“Se  $m$  e  $n$  são pares então  $mn$  é par” é um teorema, contudo, a sua recíproca, “Se  $mn$  é par então  $m$  e  $n$  são pares”, não é um teorema.

(prova direta, indireta e redução ao absurdo, condição necessária, suficiente)

## 1.5 Topologia da reta $\mathbb{R}$

**Interior -**  $a \in A$  diz-se *ponto interior* do conjunto  $A \subseteq \mathbb{R}$ , se existe uma vizinhança  $\mathcal{V}(a)$  de  $a$ , contida em  $A$ ,  $\mathcal{V}(a) \subseteq A$ , isto é,  $a \in A$  é ponto interior a  $A$  se e só se

$$\exists \delta > 0 : \underbrace{]a - \delta, a + \delta[}_{\mathcal{V}_\delta(a)} \subseteq A.$$

O *interior* de  $A$  é o conjunto de todos os pontos interiores de  $A$  e denota-se por  $\text{Int}(A)$ .

**Exterior -**  $a \in \mathbb{R} \setminus A$  diz-se *ponto exterior* a  $A \subseteq \mathbb{R}$  se existe uma vizinhança  $\mathcal{V}(a)$  de  $a$  contida no complementar de  $A$ ,  $\mathcal{V}(a) \subseteq \mathbb{R} \setminus A$ , isto é,

$$\exists \delta > 0 : ]a - \delta, a + \delta[ \subseteq \mathbb{R} \setminus A.$$

$a \in \mathbb{R}$  é ponto exterior de  $A$  se e só se é ponto interior de  $\mathbb{R} \setminus A$ . (Porquê?)

O *exterior* de  $A$  é o conjunto de todos os pontos exteriores de  $A$  e denota-se por  $\text{Ext}(A)$ .

**Exemplo 1.12.** Seja  $A = [-1, 0[ \cup ]0, 1[ \cup [\pi, 5[$ .

**Fronteira** - Um ponto  $a \in \mathbb{R}$  diz-se *ponto fronteira* de  $A \subseteq \mathbb{R}$  se toda a vizinhança de  $a$  intersetá  $A$  e intersetá o complementar de  $A$  ( $\mathbb{R} \setminus A$ ), isto é,

$$\forall \delta > 0, ]a - \delta, a + \delta] \cap A \neq \emptyset \wedge ]a - \delta, a + \delta] \cap \mathbb{R} \setminus A \neq \emptyset.$$

$a \in \mathbb{R}$  é ponto fronteira de  $A$  se e só se é ponto fronteira de  $\mathbb{R} \setminus A$ . (Porquê?)

A *fronteira* de  $A$  é o conjunto de todos os pontos fronteira de  $A$  e denota-se por  $\text{Frt}(A)$ .

**Fecho (ou aderência)** - O conjunto formado pelos pontos fronteira e pelos pontos interiores de  $A \subseteq \mathbb{R}$  designa-se por *fecho ou aderência de  $A$*  e denota-se por  $\overline{A}$ ,  $\overline{A} = \text{Int}(A) \cup \text{Frt}(A)$ . Os pontos de  $\overline{A}$  designam-se por pontos aderentes ou pontos de aderência.

**Exercício 1.7** Seja  $A = ]-\infty, 1] \cup \{3\} \cup ]10, 35]$ . Determine:

- O interior de  $A$ ;
- O complementar de  $A$ ;
- O exterior de  $A$ ;
- A fronteira de  $A$ ;
- O fecho de  $A$ .

Fronteira de  $[0,1] \cap \mathbb{Q}$ ?

### 1.5.1 Conjunto aberto, conjunto fechado

**Aberto** - Um conjunto  $A \subseteq \mathbb{R}$  diz-se *aberto* em  $\mathbb{R}$  se  $A = \text{Int}(A)$ .

**Fechado** - Um conjunto  $A \subseteq \mathbb{R}$  diz-se *fechado* em  $\mathbb{R}$  se o seu complementar é aberto, isto é, se  $\mathbb{R} \setminus A = \text{Ext}(A)$ .

**Exemplo 1.14.** Seja  $A = [2, 8] \cup \{0, 1, 9\}$ .

### 1.5.2 Ponto de acumulação e ponto isolado

Seja  $A \subseteq \mathbb{R}$ . Um ponto  $a \in \mathbb{R}$  diz-se **ponto de acumulação** de  $A$  se toda a vizinhança de  $a$ ,  $\mathcal{V}(a)$ , interseca  $A \setminus \{a\}$ :

$$\forall \mathcal{V}(a), \mathcal{V}(a) \cap A \setminus \{a\} \neq \emptyset$$

Usando as vizinhanças centradas no ponto, podemos escrever a definição de ponto de acumulação na forma:

$$a \in \mathbb{R} \text{ é } \textit{ponto de acumulação} \text{ de } A \text{ se e só se } \forall \delta > 0, ]a - \delta, a + \delta] \cap A \setminus \{a\} \neq \emptyset.$$

Ao conjunto dos pontos de acumulação de  $A$  chama-se **derivado de  $A$**  e denota-se por  $A'$ .

Um ponto  $a \in A$  diz-se **ponto isolado de  $A$**  se existe uma vizinhança de  $a$ ,  $\mathcal{V}(a)$ , que interseca  $A$  apenas no ponto  $a$ :

$$\exists \mathcal{V}(a) : \mathcal{V}(a) \cap A = \{a\}.$$

**Exemplo 1.15.** Seja  $A = ]-\sqrt{7}, 3] \cup \{\pi\}$ .

$$A = \left\{ \frac{1}{m} : m \in \mathbb{N} \right\} \quad A' ?$$

# Capítulo 2

## Funções reais de variável real: recordar

### 2.1 Conceito de função

Sejam  $A$  e  $B$  conjuntos não vazios. Uma **função**  $f : A \rightarrow B$  é uma correspondência que a cada elemento  $x \in A$  associa um único elemento  $f(x) \in B$ . Isto escreve-se

$$\begin{array}{rccc} f : & A & \rightarrow & B \\ & x & \mapsto & f(x) \end{array} \quad \text{e, em notação lógica,} \quad \forall x \in A, \exists^1 y \in B : y = f(x)$$

O quantificador  $\exists^1$  significa “existe um e um só” ou “existe um único”.

Chama-se **domínio** de  $f$  ao conjunto  $A$ , **conjunto de chegada** ao conjunto  $B$  e **contradomínio** (ou *conjunto das imagens*) de  $f$  ao conjunto dado por

$$f(A) = \{f(x) : x \in A\} \subseteq B$$

O domínio de  $f$  denota-se por  $D_f$  e o seu contradomínio por  $CD_f = f(D_f)$ .

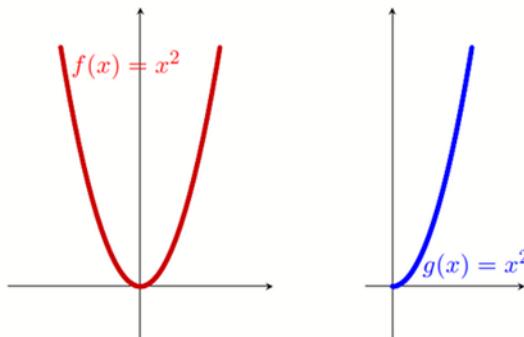


Figura 2.1: Gráfico das funções  $f(x) = x^2$  com domínio  $D_f = \mathbb{R}$  e  $g(x) = x^2$  com domínio  $D_g = \mathbb{R}_0^+$ .

## 2.2 Função composta

Dadas duas funções  $f : D_f \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  e  $g : D_g \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ , se o contradomínio de  $f$  for um subconjunto do domínio de  $g$  ( $CD_f \subseteq D_g$ ) pode definir-se a **função composta**  $g \circ f$ :

$$\begin{array}{rcl} g \circ f : & D_f & \rightarrow \mathbb{R} \\ & x & \mapsto g(f(x)) \end{array}$$

**Exemplo 2.4.** Considere-se a função definida pela expressão analítica

$$f(x) = \sqrt{\frac{4-x}{x^2-2x}}.$$

## 2.3 Funções injetivas e funções sobrejetivas

**Definição 2.1.** Uma função  $f : D_f \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  diz-se **injetiva** se

$$\forall x, x' \in D_f, x \neq x' \Rightarrow f(x) \neq f(x').$$

Pode provar-se a injetividade de uma função usando o facto de que a função  $f$  é injetiva se e só se

$$\forall x, x' \in D_f, f(x) = f(x') \Rightarrow x = x'.$$

**Definição 2.2.** Uma função  $f : D_f \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  diz-se **sobrejetiva** se

$$\forall y \in \mathbb{R}, \exists x \in D_f : f(x) = y.$$

Pode mostrar-se que uma função real  $f$  é sobrejetiva mostrando que o seu contradomínio é  $CD_f = \mathbb{R}$ .

Uma função  $f : D_f \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  diz-se **bijetiva** se é injetiva e sobrejetiva, ou seja,

$$\forall y \in \mathbb{R}, \exists^1 x \in D_f : y = f(x).$$

**Exercício 2.3** Considere a família de funções  $f_a : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  definidas por  $f_a(x) = a^x$  com  $a \in \mathbb{R}^+$ . Existe alguma função desta família que não seja injetiva?

## 2.5 A função inversa

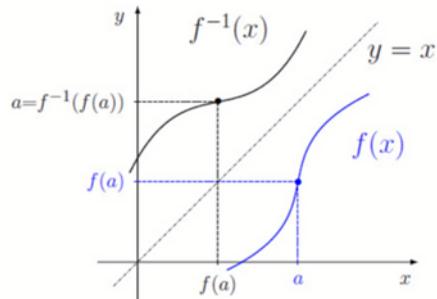
Seja  $f : D_f \rightarrow \mathbb{R}$  uma função **injetiva**. Então, a **cada**  $y \in CD_f$  está associado um **único**  $x \in D_f$  tal que  $y = f(x)$ . Por isso, conclui-se que existe uma função  $g : CD_f \rightarrow \mathbb{R}$  tal que  $y = f(x) \Rightarrow g(y) = x$ .

Denota-se por  $f^{-1}$  a função (dita **inversa** de  $f$ ) que satisfaz esta propriedade. Se existe, a inversa é **única**.

Uma função diz-se **invertível** se admite inversa.

$f$  é invertível (com inversa  $g$ ) se e só se existe  $g : CD_f \rightarrow \mathbb{R} : \forall x \in D_f, (g \circ f)(x) = x$ .

**Observação 2.1.** O gráfico de  $f^{-1}$  é obtido do gráfico de  $f$  por simetria em relação à reta  $y = x$ .



**Exercício 2.7** Determine as inversas (com domínios!) de  $f(x) = \frac{1}{1+x}$ , de  $g(x) = \sqrt{x}$  e de  $f \circ g$ .