3.1 Funções Reais de Várias Variáveis Reais: Limites, Continuidade, Derivação parcial e Diferenciabilidade

(baseado em slides de edições anteriores de Cálculo II)

Universidade de Aveiro, 2023/2024

Cálculo II – C

Resumo dos Conteúdos

Distância

Consideramos em $\mathbb{R}^n = \{(x_1, x_2, \ldots, x_n) \colon x_i \in \mathbb{R}, i = 1, 2, \ldots, n\}$ a distância euclidiana (usual):

$$d(X, Y) = ||\overrightarrow{XY}|| = \sqrt{(x_1 - y_1)^2 + (x_2 - y_2)^2 + \ldots + (x_n - y_n)^2}$$

para $X = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ e $Y = (y_1, y_2, \ldots, y_n)$.

Exemplos

1. Em $\mathbb{R}$, $d(x, y) = \sqrt{(x - y)^2} = |x - y|$. Logo, a distância entre x e y corresponde ao comprimento do segmento de reta que une x a y.

2. Em $\mathbb{R}^2$, sendo $X = (x_1, x_2)$ e $Y = (y_1, y_2)$, $d(X, Y) = \sqrt{(x_1 - y_1)^2 + (x_2 - y_2)^2}$. Logo, pelo Teorema de Pitágoras, a distância entre X e Y corresponde ao comprimento do segmento de reta (em $\mathbb{R}^2$) que une X a Y.

Bola aberta e bola fechada

Notação:

Usualmente, iremos denotar os pontos de $\mathbb{R}^n$ por letras maiúsculas, os subconjuntos de $\mathbb{R}^n$ por letras caligráficas e os números reais por letras minúsculas.

Definições:

Sejam $P \in \mathbb{R}^n$ e $r \in \mathbb{R}^+$.

- Ao conjunto
$$B_r(P) = \{X \in \mathbb{R}^n \colon d(X, P) < r\},$$
chamamos bola aberta de centro P e raio r.
- Ao conjunto
$$\overline{B}_r(P) = \{X \in \mathbb{R}^n \colon d(X, P) \leq r\},$$
chamamos bola fechada de centro P e raio r.

Exemplos

- Se $n = 1$, a bola aberta de centro $p \in \mathbb{R}$ e raio $r > 0$ são todos os pontos do intervalo aberto $]p - r, p + r[$.
- Se $n = 2$, a bola aberta de centro $P = (p_1, p_2) \in \mathbb{R}^2$ e raio $r > 0$ são todos os pontos do círculo de centro P e raio r sem incluir a circunferência pois, sendo $X = (x_1, x_2)$,

$$d(X, P) < r \Leftrightarrow (x_1 - p_1)^2 + (x_2 - p_2)^2 < r^2.$$

- Se $n = 3$, a bola aberta de centro $P = (p_1, p_2, p_3) \in \mathbb{R}^3$ e raio $r > 0$ é a esfera de centro P e raio r sem incluir a superfície esférica.

Ponto interior e ponto fronteiro

Definições:

Sejam $\mathcal{D} \subseteq \mathbb{R}^n$ e $P \in \mathbb{R}^n$.

1. $P \in \mathcal{D}$ é um ponto interior de $\mathcal{D}$ se

$$\exists r > 0 \quad B_r(P) \subset \mathcal{D}.$$

Ao conjunto de todos os pontos interiores a $\mathcal{D}$ chamamos de interior de $\mathcal{D}$ e denotamos esse conjunto por $\text{int}(\mathcal{D})$.

2. $P \in \mathbb{R}^n$ é um ponto fronteiro de $\mathcal{D}$ se

$$\forall r > 0 \quad B_r(P) \cap \mathcal{D} \neq \emptyset \quad \wedge \quad B_r(P) \cap (\mathbb{R}^n \setminus \mathcal{D}) \neq \emptyset.$$

Ao conjunto de todos os pontos fronteiros de $\mathcal{D}$ chamamos de fronteira de $\mathcal{D}$ e denotamos esse conjunto por $\text{fr}(\mathcal{D})$.

Conjunto aberto/ fechado/ limitado

Observações:

1. $P \in \text{int}(\mathcal{D}) \Rightarrow P \in \mathcal{D}$
2. Pode ocorrer que $P \in \text{fr}(\mathcal{D})$ e $P \notin \mathcal{D}$.

Definições: Seja $\mathcal{D} \subseteq \mathbb{R}^n$.

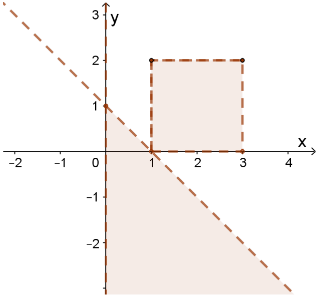
1. $\mathcal{D}$ é aberto se $\mathcal{D} = \text{int}(\mathcal{D})$.
2. $\mathcal{D}$ é fechado se $\text{fr}(\mathcal{D}) \subseteq \mathcal{D}$.
3. $\mathcal{D}$ é limitado se existir uma bola fechada que contém o conjunto $\mathcal{D}$ (isto é, $\exists r \in \mathbb{R}^+, \ \exists C \in \mathbb{R}^n : \mathcal{D} \subseteq \overline{B}_r(C)$).

Exemplo:

$\mathcal{D} = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \colon (x > 0 \wedge x + y < 1) \vee (1 < x < 3 \wedge 0 < y < 2)\}$

- $fr(\mathcal{D}) = \mathcal{F}_1 \cup \mathcal{F}_2 \cup \mathcal{F}_3$ onde
  $\mathcal{F}_1 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \colon (x = 0 \wedge y \leq 1) \vee (x > 0 \wedge x + y = 1)\}$
  $\mathcal{F}_2 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \colon (x = 1 \vee x = 3) \wedge 0 \leq y \leq 2\}$
  $\mathcal{F}_3 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \colon (y = 0 \vee y = 2) \wedge 1 \leq x \leq 3\}$.
  $fr(\mathcal{D}) \not\subseteq \mathcal{D}$, logo $\mathcal{D}$ não é fechado.
- $\mathcal{D}$ não é limitado.
- $\text{int}(\mathcal{D}) = \mathcal{D}$, logo $\mathcal{D}$ é aberto.

Ilustração:



Ponto de acumulação e ponto isolado

Definições:

Seja $\mathcal{D} \subseteq \mathbb{R}^n$.

1. $P \in \mathbb{R}^n$ é um ponto de acumulação de $\mathcal{D}$ se qualquer bola aberta centrada em P contém pontos de $\mathcal{D}$ distintos de P, isto é, se

$$\forall r > 0 \ B_r(P) \cap (\mathcal{D} \setminus \{P\}) \neq \emptyset.$$

2. $P \in \mathcal{D}$ é um ponto isolado de $\mathcal{D}$ se não é ponto de acumulação de $\mathcal{D}$.

Observações:

1. Um ponto de acumulação de $\mathcal{D}$ não pertence necessariamente a $\mathcal{D}$.
2. Um ponto isolado de $\mathcal{D}$ pertence sempre ao conjunto $\mathcal{D}$.

Ponto de acumulação e ponto isolado

Exercício: Mostre que todo o ponto interior de $\mathcal{D}$ é um ponto de acumulação de $\mathcal{D}$.

Exemplo:

Considere o seguinte subconjunto de $\mathbb{R}^2$:

$$\mathcal{L} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \backslash \{(0,0)\} \colon x^2 + y^2 \leq 1 \vee (y = 0 \wedge -2 \leq x \leq -1)\} \cup \{(2,0)\}.$$

$(0,0)$ e $(-2,0)$ são pontos de acumulação de $\mathcal{L}$, indique outros!

$(2,0)$ é um ponto isolado de $\mathcal{L}$, existem outros?

ilustração gráfica

Este conjunto é limitado e não é aberto, justifique.

Será fechado?

Definição:

Uma função real de n variáveis reais de domínio $\mathcal{D}$ é uma aplicação

$$\begin{array}{rcl} f\colon \mathcal{D} \subseteq \mathbb{R}^n & \to & \mathbb{R} \\ (x_1, x_2, \ldots, x_n) & \mapsto & z = f(x_1, x_2, \ldots, x_n) \end{array}$$

que associa de forma única a cada elemento de $\mathcal{D}$ um número real.

Definição: Seja $f\colon \mathcal{D} \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$. Ao conjunto

$$CD_f = \{f(x_1, x_2, \ldots, x_n) \in \mathbb{R} \colon (x_1, x_2, \ldots, x_n) \in \mathcal{D}\}$$

chamamos o contradomínio de f.

Definição: Seja $f\colon \mathcal{D} \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$. Ao conjunto

$$\mathcal{G}_f = \{(x_1, \ldots, x_n, z) \in \mathbb{R}^{n+1} \colon z = f(x_1, \ldots, x_n), \ \text{com } (x_1, \ldots, x_n) \in \mathcal{D}\}$$

chamamos o gráfico de f.

Exemplos

1. Seja $f(x,y) = \frac{1}{x^2+y^2}$. O domínio de f é

$$D_f = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \neq 0\} = \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}.$$

O contradomínio de f é $CD_f = \mathbb{R}^+$

2. Seja $f(x,y,z) = \frac{1}{z^3}$. O domínio de f é

$$D_f = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : z \neq 0\}$$

(todo o espaço $\mathbb{R}^3$ excepto o plano $y0x$).

O contradomínio de f é $CD_f = \mathbb{R} \setminus \{0\}$.

Exemplos

- $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ tal que $f(x,y) = 2x - y$. ▸ esboço gráfico
  $D_f = \mathbb{R}^2$ e $CD_f = \mathbb{R}$; O gráfico de f é o plano de equação $z = 2x - y$.
- $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ tal que $f(x,y) = x^2 + y^2$. ▸ esboço gráfico
  $D_f = \mathbb{R}^2$ e $CD_f = \mathbb{R}_0^+$; O gráfico de f,
  $\mathcal{G}_f = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \colon z = x^2 + y^2\}$, é um parabolóide circular.
- $g\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ tal que $g(x,y) = 4 - y^2$. ▸ esboço gráfico
  $D_g = \mathbb{R}^2$ e $CD_g =]-\infty, 4]$;
  $\mathcal{G}_g = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \colon z = 4 - y^2\}$ (cilindro parabólico).
- $h\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ tal que $h(x,y) = x^2 - y^2$. ▸ esboço gráfico
  $D_h = \mathbb{R}^2$ e $CD_h = \mathbb{R}$;
  $\mathcal{G}_h = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \colon z = x^2 - y^2\}$ (parabolóide hiperbólico).
- $s\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ tal que $s(x,y) = \sin(x^2 + y^2)$.
  $D_s = \mathbb{R}^2$ e $CD_s = [-1, 1]$;
  $\mathcal{G}_s = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \colon z = \sin(x^2 + y^2)\}$. ▸ esboço gráfico

Curvas de Nível/ Superfícies de Nível

Definições:

Seja $f\colon D_f \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ e $k \in CD_f$. Ao conjunto

$$\mathcal{N}_k = \{(x_1, x_2, \ldots, x_n) \in D_f \colon f(x_1, x_2, \ldots, x_n) = k\}$$

chamamos conjunto de nível k de f.

Observações:

Para $n = 2$, o conjunto $\mathcal{N}_k$ passa a denotar-se por $\mathcal{C}_k$ e a designar-se por curva de nível k de f. Geometricamente, obtêm-se as curvas de nível k intersectando o $\mathcal{G}_f$ com o plano horizontal de cota k.
Para $n = 3$, o conjunto $\mathcal{N}_k$ passa a denotar-se por $\mathcal{S}_k$ e a designar-se por superfície de nível k de f.

Nota: Iremos considerar, quase exclusivamente, funções com duas ou três variáveis.

Exemplos

1. $g\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ tal que $g(x,y) = 4 - y^2$.
   $CD_g =]-\infty, 4]$. Para $k \leq 4$, a curva de nível k de g é
   $$\mathcal{C}_k = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \colon k = 4 - y^2\}\,.$$
   Se $k = 4$, $\mathcal{C}_k$ é a reta de equação $y = 0$; para $k < 4$, $\mathcal{C}_k$ é a união das retas de equações $y = \sqrt{4-k}$ e $y = -\sqrt{4-k}$. ▸ applet
2. $h\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ tal que $h(x,y) = x^2 - y^2$. $CD_h = \mathbb{R}$.
   $$\mathcal{C}_k = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \colon k = x^2 - y^2\}, \text{com } k \in \mathbb{R}$$ ▸ applet
   Para $k \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, a curva de nível k é a hipérbole de equação $x^2 - y^2 = k$. Para $k = 0$, $\mathcal{C}_k$ é a reunião das retas de equações $y = x$ e $y = -x$.
3. $f\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ tal que $f(x,y,z) = 2x - 5y + 3z$. Para cada $k \in \mathbb{R}$, a superfície de nível k de f é o plano ortogonal ao vetor $(2,-5,3)$ que passa no ponto $(0, 0, \frac{k}{3})$.

Limite de uma sucessão de pontos em $\mathbb{R}^p$

Definições:

- Uma sucessão $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de pontos em $\mathbb{R}^p$ é uma aplicação de $\mathbb{N}$ em $\mathbb{R}^p$, que a cada n faz corresponder $X_n = (x_{n1}, x_{n2}, \ldots, x_{np})$.
- Seja $L \in \mathbb{R}^p$. Dizemos que a sucessão $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge para L se, para todo o $r > 0$, existe $m \in \mathbb{N}$ tal que $X_n \in B_r(L)$, para todo o $n \geq m$. Escreve-se $\lim\limits_{n\to+\infty} X_n = L$.

Prova-se que:

- L é único, quando existe.
- $\lim\limits_{n\to+\infty} (x_{n1}, x_{n2}, \ldots, x_{np}) = (\ell_1, \ell_2, \ldots, \ell_p)$ sse $\lim\limits_{n\to+\infty} x_{ni} = \ell_i$, para todo o $i = 1, 2, \ldots, p$.

Exemplos de sucessões vetoriais convergentes/ não convergentes

- A sucessão de $\mathbb{R}^2$ tal que $X_n = \left(\frac{1}{n}, 2\right)$ converge para $L = (0, 2)$.
- A sucessão de $\mathbb{R}^2$ tal que $X_n = \left(3 + (\frac{1}{2})^n, n\sin(\frac{1}{n})\right)$ converge para $L = (3, 1)$.
- A sucessão de $\mathbb{R}^3$ tal que $X_n = \left((-1)^n, (\frac{1}{2})^n, \frac{1}{n}\right)$ não é convergente.

Conceito de Limite

Definição:

Seja $f : \mathcal{D} \subseteq \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}$, A um ponto de acumulação de $\mathcal{D}$ e $\ell \in \mathbb{R}$. Dizemos que o limite de f quando X tende para A é ℓ se, para qualquer sucessão $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de pontos em $\mathcal{D} \setminus \{A\}$ convergente para A, a correspondente sucessão das imagens $(f(X_n))_{n\in\mathbb{N}}$ converge para ℓ.
Nesse caso, escreve-se

$$\lim_{X\to A} f(X) = \ell.$$

Observação:

Prova-se que o limite, quando existe, é único.

Exemplo:

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2y}{x^2+y^2} = 0$$

porque dada uma qualquer sucessão (x_n, y_n) de pontos de $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ tal que

$$\lim_{n\to+\infty}(x_n, y_n) = (0,0),$$

se tem que

$$\lim_{n\to+\infty} f(x_n, y_n) = \lim_{n\to+\infty} \frac{x_n^2 y_n}{x_n^2+y_n^2} = \lim_{n\to+\infty} y_n \frac{x_n^2}{x_n^2+y_n^2} = 0,$$

uma vez que, para todo o $n \in \mathbb{N}$,

$$\lim_{n\to+\infty} y_n = 0 \quad \text{e} \quad \left|\frac{x_n^2}{x_n^2+y_n^2}\right| \leq 1$$

(o produto de um infinitésimo por uma função limitada é um infinitésimo).

Propriedades algébricas dos limites

Proposição:

Sejam $f, g\colon \mathcal{D} \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ e A um ponto de acumulação de $\mathcal{D}$. Se

$$\lim_{X \to A} f(X) = \ell_1 \quad \text{e} \quad \lim_{X \to A} g(X) = \ell_2,$$

então

1. $\displaystyle\lim_{X \to A} (f+g)(X) = \ell_1 + \ell_2$;
2. $\displaystyle\lim_{X \to A} (\lambda f)(X) = \lambda \ell_1$, onde $\lambda \in \mathbb{R}$;
3. $\displaystyle\lim_{X \to A} (fg)(X) = \ell_1 \ell_2$;
4. $\displaystyle\lim_{X \to A} \left(\frac{f}{g}\right)(X) = \frac{\ell_1}{\ell_2}$, se $\ell_2 \neq 0$.

Limite de funções

Seja $f : D_f \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ uma função.

Observação:

- Para $n = 1$, isto é, para funções reais de uma única variável real (f.r.v.r.), só há duas formas de nos aproximarmos de um ponto $a \in \mathbb{R}$ para calcular $\lim_{x \to a} f(x)$: "à esquerda" e "à direita" do ponto a, o que corresponde a calcular os limites laterais

$$\lim_{x \to a^-} f(x) \quad \text{e} \quad \lim_{x \to a^+} f(x).$$

- Para $n = 2$ há uma infinidade de formas de nos aproximarmos de um ponto $(a_1, a_2) \in \mathbb{R}^2$. Observação análoga quando $n \geq 3$. É por este motivo que o cálculo de limites de funções com mais do que uma varável é mais complicado do que o cálculo de limites de f.r.v.r.

Limite segundo um conjunto

Definição:

Seja $f: \mathcal{D} \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ e $\mathcal{R}$ um subconjunto de $\mathcal{D}$ para o qual A é ponto de acumulação. Chama-se limite de f quando X tende para A, segundo o conjunto $\mathcal{R}$, ao limite quando X tende para A da restrição de f a $\mathcal{R}$, *i.e.*,

$$\lim_{\substack{X \to A \\ X \in \mathcal{R}}} f(X) = \lim_{X \to A} f_{|\mathcal{R}}(X)$$

Exemplo:

Sendo $\mathcal{R} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \colon x = 0\} \setminus \{(0, 0)\}$,

$$\lim_{\substack{(x,y) \to (0,0) \\ (x,y) \in \mathcal{R}}} \frac{y^2}{x^2 + y^2} = \lim_{y \to 0} \frac{y^2}{y^2} = 1\,.$$

Nota: Do limite calculado <u>não</u> se pode concluir que $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{y^2}{x^2 + y^2}$ existe!

Averiguação da não existência de limite, usando limites segundo conjuntos:

Proposição:

- Se existe algum $\mathcal{R} \subset \mathcal{D}$, nas condições da definição, tal que $\displaystyle\lim_{\substack{X \to A \\ X \in \mathcal{R}}} f(X)$ não existe, então não existe $\displaystyle\lim_{X \to A} f(X)$.
- Se existem $\mathcal{R}_1, \mathcal{R}_2 \subset \mathcal{D}$, nas condições da definição, tais que $\displaystyle\lim_{\substack{X \to A \\ X \in \mathcal{R}_1}} f(X) \neq \lim_{\substack{X \to A \\ X \in \mathcal{R}_2}} f(X)$, então não existe $\displaystyle\lim_{X \to A} f(X)$.

Exemplos:

1. Vamos estudar o limite $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)}\left(x+\operatorname{sen}\frac{1}{y}\right)$.
   Observe-se que $D_f=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : y\neq 0\}$ e que $(0,0)$ é ponto de acumulação do domínio da função. Seja $\mathcal{R}=\{(x,y)\in D_f : x=0\}$.
   Uma vez que $\displaystyle\lim_{\substack{(x,y)\to(0,0)\\(x,y)\in\mathcal{R}}}\left(x+\operatorname{sen}\frac{1}{y}\right)=\lim_{y\to 0}\operatorname{sen}\frac{1}{y}$ não existe,
   então o limite dado também não existe.
2. Existe $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{y^2}{x^2+y^2}$? Observe-se que $D_f=\mathbb{R}^2\setminus\{(0,0)\}$.
   Sejam
   $\mathcal{R}_1=\{(x,y)\in D_f : y=0\}$ e $\mathcal{R}_2=\{(x,y)\in D_f : x=0\}$.
   Uma vez que
   $$\lim_{\substack{(x,y)\to(0,0)\\(x,y)\in\mathcal{R}_1}}\frac{y^2}{x^2+y^2}=0\quad\neq\quad\lim_{\substack{(x,y)\to(0,0)\\(x,y)\in\mathcal{R}_2}}\frac{y^2}{x^2+y^2}=1,$$
   então o limite dado não existe.

Exercício:

Mostre que

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{xy}{x^2+y^2}$$

não existe, verificando que os limites segundo os conjuntos

$$\mathcal{R}_m = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\} \colon y = mx\},$$

onde $m \in \mathbb{R}$, existem, mas variam com m.

Nota: Os limites segundo retas (ou semirretas) são usualmente designados por limites direcionais.

Exercícios

1. Mostre que não existe $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{xy^3}{x^2+y^6}$.

2. Averigue da existência de $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{xy^2}{2x^2+y^4}$.

Averiguação da existência de limite usando limites segundo conjuntos

Proposição:

Sejam $f: \mathcal{D} \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, $\mathcal{R}_1, \mathcal{R}_2, \dots \mathcal{R}_k$, com $k \in \mathbb{N}$, subconjuntos de $\mathcal{D}$ tais que A é um seu ponto de acumulação e $\mathcal{D} = \mathcal{R}_1 \cup \mathcal{R}_2 \cup \cdots \cup \mathcal{R}_k$.
Se $\displaystyle\lim_{\substack{X \to A \\ X \in \mathcal{R}_i}} f(X) = \ell$, para todo o $i = 1, 2, \dots, k$, então $\displaystyle\lim_{X \to A} f(X) = \ell$.

Nota:

Os subconjuntos $\mathcal{R}_i$ são em número finito. Esta proposição, na prática, é de difícil utilização genérica. Aplica-se com êxito em algumas situações, como a seguinte.

Exercício: Sendo $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, tal que $f(x,y) = \begin{cases} -5x^2y + 1 & \text{se } y < 0 \\ 1 + x^2 + y^2 & \text{se } y \geq 0 \end{cases}$

calcule $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$.

Duas proposições — cálculo de alguns limites

Proposição: [Produto de um infinitésimo por uma função limitada]

Sejam $f, g\colon \mathcal{D} \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ e A um ponto de acumulação de $\mathcal{D}$.
Se $\lim\limits_{X\to A} f(X) = 0$ e se g é uma função limitada em $\mathcal{D} \cap B_r(A)$, para algum $r > 0$, então $\lim\limits_{X\to A} f(X)g(X) = 0$.

Proposição: [Mudança de variável]

Sejam $f, u\colon \mathcal{D} \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ e g uma função real de variável real tal que $f(X) = g(u(X))$. Se

$$\lim_{X\to A} u(X) = c \quad \text{e} \quad \lim_{z\to c} g(z) = \ell,$$

e g é contínua ou não está definida em c, então

$$\lim_{X\to A} f(X) = \lim_{z\to c} g(z) = \ell.$$

Exercícios:

Usando as proposições do slide anterior (escolhendo a que se adequa), calcule os seguintes limites:

1. $$\lim_{(x,y)\to(1,1)} \frac{e^{x-y}-1}{y-x}$$

2. $$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^3-4xy^2}{x^2+y^2}$$

Continuidade

Definição:

Sejam $f\colon \mathcal{D} \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ e $P \in \mathcal{D}$. Se P é um ponto de acumulação de $\mathcal{D}$, f diz-se contínua em P se $\lim\limits_{X \to P} f(X) = f(P)$.

Caso P seja ponto isolado de $\mathcal{D}$, consideramos que f é contínua em P.

Ao conjunto de pontos onde f é contínua chamamos domínio de continuidade de f.

Proposição:

Se $f, g\colon \mathcal{D} \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ são funções contínuas em $P \in \mathcal{D}$ e $\alpha\colon I \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, tal que $f(\mathcal{D}) \subseteq I$, é contínua em $f(P)$, então

1. $f + g$, fg e λf, $\lambda \in \mathbb{R}$, são contínuas em P.
2. $\frac{f}{g}$ é contínua em P, desde que $g(P) \neq 0$.
3. $\alpha \circ f$ é contínua em P.

Exercícios

1. Determine o domínio de continuidade da função f definida por $f(x,y) = \frac{3xy-5x^3}{y^3-xy}$.

2. Mostre que $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definida por

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{xy}{x^2+y^2} & \text{se } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{se } (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

é descontínua em $(0,0)$.

3. Mostre que $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definida por

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{2xy-2y}{(x-1)^2+y^2} & \text{se } (x,y) \neq (1,0) \\ 0 & \text{se } (x,y) = (1,0) \end{cases}$$

não é contínua em $(1,0)$.

Derivada parcial em ordem a x

Sejam $f : \mathcal{D} \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ e $(a, b) \in int(\mathcal{D})$. Fixando $y = b$, fica definida a função real de variável real x, g_b, definida por

$$\begin{array}{rccl} g_b : & \{x \in \mathbb{R} \colon (x, b) \in \mathcal{D}\} & \to & \mathbb{R} \\ & x & \mapsto & g_b(x) = f(x, b). \end{array}$$

À derivada de g_b em $x = a$, caso exista, chama-se derivada parcial de f em ordem a x em (a, b) e denota-se por $\frac{\partial f}{\partial x}(a, b)$. Logo

$$\frac{\partial f}{\partial x}(a, b) = \lim_{h \to 0} \frac{f(a + h, b) - f(a, b)}{h}$$

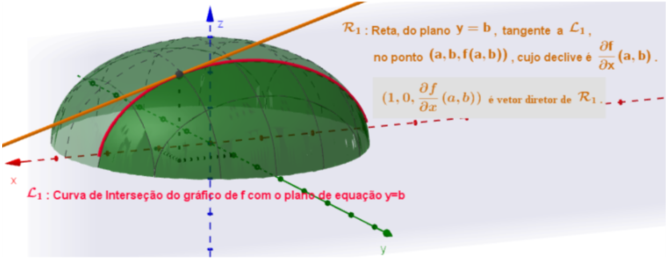
caso este limite exista e seja um número real[a].

Notação alternativa: $f'_x(a, b)$.

[a] Podem considera-se derivadas iguais a $+\infty$ (ou $-\infty$) mas, neste contexto, não irão ser relevantes

Considerações geométricas sobre o conceito de derivada parcial em ordem a x

1. A derivada parcial de f em ordem a x no ponto (a, b) é o declive da reta $\mathcal{R}_1$ tangente à curva de interseção do gráfico de f com o plano vertical $y = b$, no ponto $(a, b, f(a, b))$.
   Ilustração gráfica:



applet

outra applet

2. A reta $\mathcal{R}_1$ tem equações cartesianas:

$$\begin{cases} y = b \\ z = f(a, b) + \frac{\partial f}{\partial x}(a, b)(x - a) \end{cases}$$

3. $(1, 0, \frac{\partial f}{\partial x}(a, b))$ é vetor diretor de $\mathcal{R}_1$.

Derivada parcial em ordem a y

Seja $f : \mathcal{D} \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ e $(a, b) \in \text{int}(\mathcal{D})$. Fixando $x = a$, fica definida a função real de variável real y, g_a, definida por

$$\begin{array}{rrcl} g_a : & \{y \in \mathbb{R} \colon (a, y) \in \mathcal{D}\} & \to & \mathbb{R} \\ & y & \mapsto & g_a(y) = f(a, y). \end{array}$$

À derivada de g_a em $y = b$, caso exista, chama-se derivada parcial de f em ordem a y em (a, b) e denota-se por $\frac{\partial f}{\partial y}(a, b)$. Logo

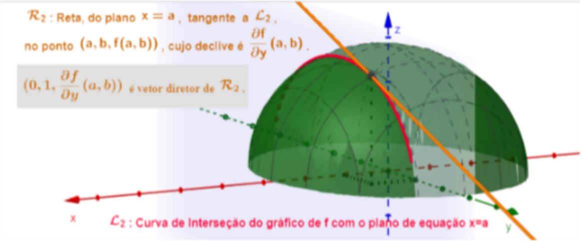
$$\frac{\partial f}{\partial y}(a, b) = \lim_{h \to 0} \frac{f(a, b + h) - f(a, b)}{h}$$

caso este limite exista e seja um número real.

Notação alternativa: $f'_y(a, b)$.

Considerações geométricas sobre o conceito de derivada parcial em ordem a y

1. A derivada parcial de f em ordem a y no ponto (a, b) é o declive da reta $\mathcal{R}_2$ tangente à curva de interseção do gráfico de f com o plano vertical $x = a$, no ponto $(a, b, f(a, b))$.
   Ilustração gráfica:



applet

outra applet

2. A reta $\mathcal{R}_2$ tem equações cartesianas:
$$\begin{cases} x = a \\ z = f(a, b) + \frac{\partial f}{\partial y}(a, b)(y - b) \end{cases}$$
3. $(0, 1, \frac{\partial f}{\partial y}(a, b))$ é vetor diretor dessa reta.

Derivação parcial: exemplos

Na prática, para determinar a derivada parcial de $f : \mathcal{D} \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ em ordem a uma das suas variáveis, determina-se a derivada de f como se ela dependesse apenas dessa variável (usando as regras de derivação, se possível), considerando a outra variável como constante.

Exemplos:

1. Seja $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ tal que $f(x, y) = x^2 + xy + \ln(1 + y^2)$. Para todo o $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, existem as derivadas parciais de f em ordem a x e a y:
$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = 2x + y \quad \text{e} \quad \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = x + \frac{2y}{1 + y^2}\,.$$
2. Seja $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ tal que $f(x, y) = e^{-x^2+y^2} + x - 3y$.
$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = -2xe^{-x^2+y^2} + 1 \quad \text{e} \quad \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = 2ye^{-x^2+y^2} - 3.$$
Em particular, $\frac{\partial f}{\partial x}(0, 1) = 1 \quad$ e $\quad \frac{\partial f}{\partial y}(0, 1) = 2e - 3.$

Derivação parcial: exemplo

De modo semelhante se definem as derivadas parciais de uma função com n variáveis reais:

$$\begin{array}{rrcl} f: & \mathcal{D} \subseteq \mathbb{R}^n & \to & \mathbb{R} \\ & (x_1, x_2, \ldots, x_n) & \mapsto & f(x_1, x_2, \ldots, x_n). \end{array}$$

Exemplo:

Seja $f : \mathcal{D} \subseteq \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ tal que $f(x, y, z) = \cos(xy^2) + \ln(zy^3)$.

Para todo o $(x, y, z) \in \mathcal{D}$, tem-se que:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y, z) = -y^2 \sin(xy^2)$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x, y, z) = -2xy \sin(xy^2) + \frac{3}{y}$$

$$\frac{\partial f}{\partial z}(x, y, z) = \frac{1}{z}.$$

Derivação parcial: exercícios

Em alguns casos, temos de usar a definição para determinar as derivadas parciais. Tal como nas funções de uma variável, deve usar-se as definições para determinar as derivadas parciais num ponto P, se na vizinhança do ponto P a função não está definida por uma expressão analítica única.

Exercícios:

1. Seja $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ tal que $f(x,y) = \begin{cases} \frac{xy}{x^2+y^2} & \text{se } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{se } (x,y) = (0,0). \end{cases}$

   Mostre que $\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = 0 = \frac{\partial f}{\partial y}(0,0)$.

2. Seja $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ tal que

$$f(x,y) = \begin{cases} xy & \text{se } x \neq y \\ x^3 & \text{se } x = y. \end{cases}$$

   Mostre que $\frac{\partial f}{\partial x}(1,1) = 1$, $\frac{\partial f}{\partial y}(3,4) = 3$ e que $\frac{\partial f}{\partial y}(2,2)$ não existe.

Derivadas parciais de ordem superior

Definições e notação:

Seja $f\colon \mathcal{D} \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ uma função com derivadas parciais em ordem a x e a y, em algum conjunto de pontos no interior de $\mathcal{D}$. As funções

$$\frac{\partial f}{\partial x} \text{ e } \frac{\partial f}{\partial y}$$

com domínio nos conjuntos de pontos onde cada uma existe, terão, ou não, derivadas em ordem a x e a y nesse conjunto. As derivadas parciais de ordem 2 de f são as funções (definidas nos pontos onde existem):

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right), \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right),$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right), \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right).$$

Derivadas parciais de ordem superior

Observações:

1. A $\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$ e $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}$ chamamos derivadas parciais mistas.
2. No caso geral, as derivadas parciais mistas são distintas, isto é, pode ocorrer:
$$\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x, y) \neq \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x, y).$$
3. De modo análogo, se definem as derivadas parciais de 3ª ordem, etc.

Exemplo

Exemplo:

Seja f a função real de domínio $\mathbb{R}^2$ tal que $f(x,y) = x^3y + 5xy + \sin(y^2)$. Verifique que, para todo o $(x,y) \in \mathbb{R}^2$:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = 3x^2y + 5y \qquad \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = x^3 + 5x + 2y\cos(y^2)$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y) = 6xy \qquad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y) = 2\cos(y^2) - 4y^2\sin(y^2)$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x,y) = 3x^2 + 5 \qquad \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x,y) = 3x^2 + 5$$

Nota: Neste exemplo,

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x,y) = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x,y).$$

Contudo, esta igualdade nem sempre se verifica. Veja-se, por exemplo o exemplo da página seguinte.

Exemplo

Exemplo:

Seja $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ tal que

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{xy(x^2-y^2)}{x^2+y^2} & \text{se } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{se } (x,y) = (0,0). \end{cases}$$

Prova-se que

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(0,0) = -1 \neq \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(0,0) = 1$$

(bastante trabalhoso, pois é necessário usar a definição de derivada).

Teorema de Schwarz

Nota: O seguinte teorema garante que, em determinadas condições, as derivadas parciais mistas de uma dada função $f : \mathcal{D} \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ são iguais.

Teorema de Schwarz: Sejam $f : \mathcal{D} \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ e $P = (a, b) \in \mathrm{int}(\mathcal{D})$.

Se existem $\frac{\partial f}{\partial x}$, $\frac{\partial f}{\partial y}$ e $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}$ numa bola aberta centrada em P e se $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}$ é contínua em P, então existe $\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(P)$ e

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(P) = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(P).$$

Função de classe C^k; Corolário do Teorema de Schwarz

Definição:

Sejam $f : \mathcal{D} \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, com $\mathcal{D}$ aberto, e $k \in \mathbb{N}_0$. Dizemos que f é de classe C^k em $\mathcal{D}$ se f possuir todas derivadas parciais até à ordem k contínuas em todo o ponto de $\mathcal{D}$.

Notação: $f \in C^k(\mathcal{D})$.

Corolário do Teorema de Schwarz:

Se $f \in C^2(\mathcal{D})$, então

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(a, b) = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(a, b),$$

para todo o $(a, b) \in \mathcal{D}$.

Nota: De modo análogo se pode enunciar o Corolário do Teorema de Schwarz para funções com $n \geq 3$ variáveis reais.

Derivadas Direcionais

As derivadas parciais de $f : \mathcal{D} \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ são casos particulares de derivadas chamadas **derivadas direcionais** (segundo os vetores $U = (1, 0)$ ou $U = (0, 1)$, consoante o caso).

Definição:

Sejam $f : \mathcal{D} \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, $P \in int(\mathcal{D})$ e U um vetor unitário de $\mathbb{R}^n$. A derivada direcional de f segundo U no ponto P é o seguinte limite, caso exista e seja finito,

$$D_U f(P) = \lim_{h \to 0} \frac{f(P + hU) - f(P)}{h}.$$

Interpretação geométrica (caso n=2):

applet

$D_U f(P)$, com $P = (a, b)$, dá informação sobre a variação da cota dos pontos no gráfico de f, ao passar por $(a, b, f(a, b))$, quando é colocado um ponto X no domínio da função a deslocar-se na direção e sentido de U.

Exemplo de função com todas as derivadas direcionais num ponto e descontínua nesse ponto

Exemplo:

Seja $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ tal que $f(x,y) = \begin{cases} \frac{xy^2}{x^2+y^4} & \text{se } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{se } (x,y) = (0,0). \end{cases}$

Observe-se que f não é contínua no ponto $(0,0)$, pois não existe limite de f nesse ponto.

Se $U = (u_1, u_2)$, com $\|U\| = 1$, então

$$D_U f(0,0) = \lim_{h\to 0} \frac{f(hU) - f(0,0)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{\frac{h^3 u_1 u_2^2}{h^2 u_1^2 + h^4 u_2^4}}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{u_1 u_2^2}{u_1^2 + h^2 u_2^4}.$$

Logo

$$D_U f(0,0) = \begin{cases} \frac{u_2^2}{u_1} & \text{se } u_1 \neq 0 \\ 0 & \text{se } u_1 = 0\ . \end{cases}$$

Diferenciabilidade: O que será para uma função com mais do que uma variável?

Como se pode constatar com o exemplo do slide anterior, a existência das derivadas parciais (ou mesmo de todas as derivadas direcionais) de f num ponto P, não garante a continuidade de f em P. Recorde que para $n = 1$, a existência de derivada finita (diferenciabilidade) num ponto é garantia da continuidade nesse ponto.

Em $\mathbb{R}^n$, para $n \geq 2$, qual será a noção de função diferenciável num ponto?

Vamos responder a essa questão para $n = 2$, recordando o caso $n = 1$. Para dimensões superiores é só fazer a adaptação devida.

Caso $n = 1$: diferenciabilidade/reta tangente

Seja $f : \mathcal{D} \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ diferenciável em $a \in \operatorname{int}(\mathcal{D})$, *i.e.*, existe e é finito o seguinte limite:

$$f'(a) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(a+\Delta x) - f(a)}{\Delta x}.$$

Logo, tomando $\epsilon(\Delta x) = -f'(a) + \dfrac{f(a+\Delta x) - f(a)}{\Delta x}$, obtemos

$$f(a+\Delta x) = f(a) + \Delta x\, f'(a) + \Delta x\, \epsilon(\Delta x), \text{ com } \lim_{\Delta x \to 0} \epsilon(\Delta x) = 0\,.$$

Deste modo, na vizinhança de a, f fica "bem aproximada" pela reta tangente ao gráfico de f no ponto $(a, f(a))$, a que corresponde a chamada linearização de f em torno de a:

$$L(x) = f(a) + f'(a)(x-a)$$

Caso n=2: diferenciabilidade/plano tangente (I)

Sejam $f : \mathcal{D} \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ e $P = (a, b) \in \text{int}(\mathcal{D})$. Considere que existem $\frac{\partial f}{\partial x}(P)$ e $\frac{\partial f}{\partial y}(P)$. Recorde-se que

$$U_1 = (1, 0, \frac{\partial f}{\partial x}(P)) \quad \text{e} \quad U_2 = (0, 1, \frac{\partial f}{\partial y}(P))$$

são vetores tangentes às curvas de interseção do gráfico de f com $y = b$ e $x = a$, no ponto P, respetivamente.

Os vetores U_1 e U_2 são não colineares e, portanto, existe o plano, $\mathcal{T}$, que passa em $(a, b, f(a, b))$ e contém U_1 e U_2. Atendendo a que o vetor $N = (-\frac{\partial f}{\partial x}(a, b), -\frac{\partial f}{\partial y}(a, b), 1)$ é ortogonal a ambos,

$$z = f(a, b) + \frac{\partial f}{\partial x}(a, b)(x - a) + \frac{\partial f}{\partial y}(a, b)(y - b)$$

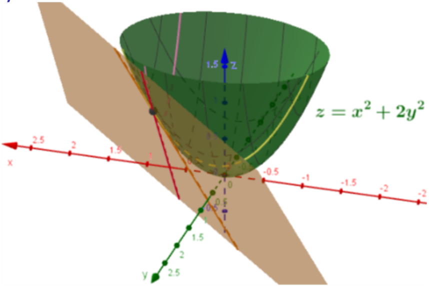
é uma equação cartesiana do plano $\mathcal{T}$.

Caso n=2: diferenciabilidade/plano tangente (II)

Nas funções diferenciáveis (ver definição no slide seguinte) f fica "bem aproximada" em redor de (a, b) pelos valores assumidos no plano $\mathcal{T}$, ou seja, pela sua linearização em torno de (a, b):

$$L(x, y) = f(a, b) + \frac{\partial f}{\partial x}(a, b)(x - a) + \frac{\partial f}{\partial y}(a, b)(y - b)\,.$$

Ilustração Gráfica: (plano tangente)



applet

Função Diferenciável (caso $n = 2$)

Definição:

Sejam $f : \mathcal{D} \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ e $P = (a, b) \in \text{int}(\mathcal{D})$ tais que existem $\frac{\partial f}{\partial x}(P)$ e $\frac{\partial f}{\partial y}(P)$. Sejam Δx e Δy, reais, tais que $(a + \Delta x, b + \Delta y) \in B_r(P) \subset \mathcal{D}$, para algum $r > 0$.
Se existem funções $\epsilon_1(\Delta x, \Delta y)$ e $\epsilon_2(\Delta x, \Delta y)$, com $\lim\limits_{(\Delta x,\Delta y)\to(0,0)} \epsilon_1(\Delta x, \Delta y) = \lim\limits_{(\Delta x,\Delta y)\to(0,0)} \epsilon_2(\Delta x, \Delta y) = 0$, tais que

$$f(a + \Delta x, b + \Delta y) = f(a, b) + \frac{\partial f}{\partial x}(a, b)\Delta x + \frac{\partial f}{\partial y}(a, b)\Delta y + \epsilon_1 \Delta x + \epsilon_2 \Delta y,$$

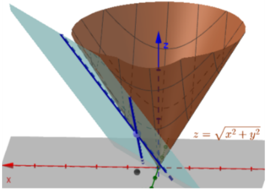
para quaisquer Δx e Δy nas condições referidas, então
f diz-se diferenciável em (a, b).

Dois exemplos (abordagem gráfica) [1]:

1. Seja $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ tal que

$$f(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2}.$$

A função f não é diferenciável em $(0, 0)$, mas é diferenciável em qualquer outro ponto.

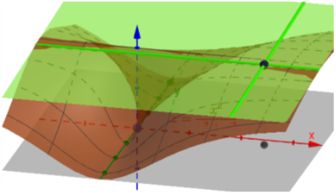


applet

2. Seja $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ tal que

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{x^2}{x^2+y^2} & \text{se } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{se } (x, y) = (0, 0). \end{cases}$$

A função f não é diferenciável em $(0, 0)$, mas é diferenciável em qualquer outro ponto.



[1] Ver à frente, as justificações das afirmações.

Condições suficientes de diferenciabilidade

Teorema:

Sejam $f : \mathcal{D} \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ e $P \in \text{ int } (\mathcal{D})$. Se existem $\frac{\partial f}{\partial x}$ e $\frac{\partial f}{\partial y}$ numa bola aberta centrada em P e se pelo menos uma dessas derivadas é contínua em P, então f é diferenciável em P.

Corolário:

Sejam $f : \mathcal{D} \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ e $P \in \text{ int } (\mathcal{D})$. Se f é de classe C^1 numa bola aberta centrada em P, então f é diferenciável em qualquer ponto dessa bola.

Exercício:

Seja $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ tal que $f(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2}$. Use o Teorema anterior (ou o Corolário), para concluir que f é diferenciável em (a, b), se $(a, b) \neq (0, 0)$.

Condição necessária de diferenciabilidade

Teorema:

Se $f : \mathcal{D} \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ é diferenciável em $P \in \text{ int } (\mathcal{D})$, então f é contínua em P.

Nota:

O Teorema anterior tem a seguinte formulação equivalente:
Se $f : \mathcal{D} \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ não é contínua em $P \in \text{ int } (\mathcal{D})$, então f não é diferenciável em P.

Exercício:

Seja $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ tal que $f(x, y) = \begin{cases} \frac{x^2}{x^2+y^2} & \text{se } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{se } (x, y) = (0, 0). \end{cases}$

Use o Teorema anterior, para concluir que f não é diferenciável em $(0, 0)$.

Plano Tangente e Vetor Normal ao Gráfico de uma Função

Definições: Seja $f : \mathcal{D} \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ diferenciável em $(a, b) \in \operatorname{int}(\mathcal{D})$.

O plano de equação

$$z = f(a, b) + \frac{\partial f}{\partial x}(a, b)(x - a) + \frac{\partial f}{\partial y}(a, b)(y - b)$$

é o plano tangente ao gráfico[a] de f no ponto $(a, b, f(a, b))$. (ver slide 49)

Dizemos que o vetor

$$N = (-\frac{\partial f}{\partial x}(a, b), -\frac{\partial f}{\partial y}(a, b), 1)$$

é um vetor ortogonal ao gráfico de f no ponto $(a, b, f(a, b))$.

A reta com vetor diretor N que passa em $(a, b, f(a, b))$ é chamada de reta ortogonal (ou normal) à superfície $z = f(x, y)$ no ponto $(a, b, f(a, b))$.

[a] superfície de equação $z = f(x, y)$

Exercício: Plano tangente e reta normal

Exercício:

Seja $f(x,y) = 4 - x^2 - y^2$. Determine as equações do plano tangente e da reta normal no ponto $P = (1,-1,2)$.

Como $\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = -2x$ e $\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = -2y$ são contínuas em $\mathbb{R}^2$, podemos concluir que f é diferenciável em $\mathbb{R}^2$. O plano tangente ao gráfico de f no ponto $P = (1,-1,f(1,-1))$ tem equação

$$z = f(1,-1) + \frac{\partial f}{\partial x}(1,-1)(x-1) + \frac{\partial f}{\partial y}(1,-1)(y+1),$$

ou, equivalentemente,

$$2x - 2y + z = 6.$$

A reta normal ao gráfico de f no ponto P tem equação:

$$(x,y,z) = (1,-1,2) + \lambda(2,-2,1), \quad \lambda \in \mathbb{R}.$$

Vetor Gradiente e Derivadas Direcionais

Definição:

Seja $f\colon \mathcal{D} \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ com derivadas parciais de 1.ª ordem em $P \in \operatorname{int}(\mathcal{D})$. Ao vetor

$$\nabla f(P) = \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}(P), \frac{\partial f}{\partial x_2}(P), \dots, \frac{\partial f}{\partial x_n}(P)\right)$$

chamamos gradiente de f em P.

Teorema:

Sejam $f\colon \mathcal{D} \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ uma função diferenciável em $\mathcal{D}$, $P \in \operatorname{int}(\mathcal{D})$ e $U \in \mathbb{R}^n$ um vetor unitário. Então existe a derivada direcional de f segundo U no ponto P e

$$D_U f(P) = \nabla f(P) \cdot U\,,$$

onde $\cdot$ representa o produto interno (usual) de vetores em $\mathbb{R}^n$.

Interpretações Geométricas do Gradiente (caso $n = 2$)

applet

- Sejam $f : \mathcal{D} \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ uma função diferenciável em $\mathcal{D}$, $P \in \text{int}(\mathcal{D})$ e $U \in \mathbb{R}^2$ um vetor unitário. Usando a definição de produto interno, tem-se que

$$D_U f(P) = \nabla f(P) \cdot U = \|\nabla f(P)\| \cos\theta, \text{ onde } \theta = \measuredangle(\nabla f(P), U).$$

Assim, a derivada direcional máxima em P ocorre na direção e sentido correspondente a $\theta = 0$, ou seja, na direção e sentido do vetor gradiente de f em P.

O vetor $\nabla f(P)$ fornece a direção e sentido na qual f, em redor de P, apresenta maior crescimento.

- Nas condições anteriores, se $P = (a, b)$ e $f(a, b) = k$, pode provar-se que o vetor gradiente de f em (a, b) é ortogonal à reta tangente à curva de nível $\mathcal{C}_k$, que passa em (a, b). Isto é,

$\nabla f(a, b)$ é ortogonal à curva de nível de f que passa em (a, b).

Interpretação geométrica do gradiente (caso $n = 3$):

Plano tangente a uma superfície de nível

Seja $h\colon \mathcal{B} \subseteq \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ função diferenciável em $\mathcal{B}$,
$\mathcal{S}_k = \{(x, y, z) \in \mathcal{B}\colon h(x, y, z) = k\}$ uma sua superfície de nível e $P \in \mathcal{S}_k$.
Pode provar-se que:

O vetor gradiente de h em P é ortogonal a $\mathcal{S}_k$ em P.

Assim, se $\nabla h(P) \neq (0, 0, 0)$, então a equação do plano tangente a $\mathcal{S}_k$ no ponto P é dada por

$$\nabla h(P) \cdot \overrightarrow{PX} = 0\,,$$

i.e., o plano tangente à superfície de equação $h(x, y, z) = k$ em $P = (a, b, c)$ tem por equação:

$$(x-a)\frac{\partial h}{\partial x}(a, b, c) + (y-b)\frac{\partial h}{\partial y}(a, b, c) + (z-c)\frac{\partial h}{\partial z}(a, b, c) = 0.$$

Exemplo de determinação de plano tangente a uma superfície de nível

Consideremos o elipsoide de equação $4x^2 + 9y^2 + z^2 = 49$ e $P = (1, -2, 3)$ um ponto desse elipsoide. Pretendemos determinar uma equação do plano tangente ao elipsoide no ponto P.

O elipsoide pode ser encarado como a superfície de nível 49 da função h de domínio $\mathbb{R}^3$ tal que $h(x, y, z) = 4x^2 + 9y^2 + z^2$. Note que $h \in C^1(\mathbb{R}^3)$, uma vez que, para todo o $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$,

$$\frac{\partial h}{\partial x}(x, y, z) = 8x\,, \frac{\partial h}{\partial y}(x, y, z) = 18y \text{ e } \frac{\partial h}{\partial z}(x, y, z) = 2z.$$

Assim, $\nabla h(P) = (8, -36, 6)$ e, portanto, uma equação do plano tangente ao elipsoide em P é

$$8(x - 1) - 36(y + 2) + 6(z - 3) = 0.$$

Regra da cadeia

A regra da cadeia é usada para derivar uma função composta.

Comecemos por recordar a **Regra da cadeia** para funções de uma única variável. Sejam f e g duas funções diferenciáveis, $y = f(x)$ e $x = g(t)$. Logo, $y(t) = f(g(t))$ e

$$y'(t) = f'(g(t))g'(t) = f'(x)x'(t) = \frac{df}{dx}\frac{dx}{dt},$$

ou, equivalentemente,

$$\frac{dy}{dt} = \frac{df}{dx}\frac{dx}{dt}.$$

Para funções com mais do que uma variável, a **Regra da Cadeia** tem muitas versões, cada uma delas fornecendo uma regra de derivação de uma função composta.

Regra da cadeia

Regra da cadeia (Caso 1):

Suponha-se que $z = f(x, y)$ é uma função diferenciável nas variáveis x e y, onde $x = g(t)$ e $y = h(t)$ são funções diferenciáveis de t. Então z é uma função diferenciável de t e

$$\frac{dz}{dt} = \frac{\partial f}{\partial x}\frac{dx}{dt} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{dy}{dt}.$$

Nota: Como é frequente escrever $\frac{\partial z}{\partial x}$ em vez de $\frac{\partial f}{\partial x}$, a Regra da Cadeia pode ser escrita na forma

$$\frac{dz}{dt} = \frac{\partial z}{\partial x}\frac{dx}{dt} + \frac{\partial z}{\partial y}\frac{dy}{dt}.$$

Regra da cadeia

Exercício:

Seja $z = x^2y + 3xy^4$, onde $x = \operatorname{sen}(2t)$ e $y = \cos t$. Determine $\frac{dz}{dt}$ quando $t = 0$.

Pela Regra da cadeia, concluímos que:

$$\frac{dz}{dt} = \frac{\partial z}{\partial x}\frac{dx}{dt} + \frac{\partial z}{\partial y}\frac{dy}{dt},$$

donde

$$\frac{dz}{dt} = (2xy + 3y^4) \cdot 2\cos(2t) + (x^2 + 12xy^3)(-\operatorname{sen} t).$$

Não é necessário substituir as expressões de x e de y em função de t. Simplesmente observe que, quando $t = 0$, temos $x(0) = \operatorname{sen} 0 = 0$ e $y(0) = \cos 0 = 1$, donde

$$\frac{dz}{dt}(0) = (0 + 3) \cdot 2\cos(0) + (0 + 0)(-\operatorname{sen} 0) = 6.$$

Regra da cadeia

Regra da cadeia (Caso 2):

Suponha-se que $z = f(x, y)$ é uma função diferenciável nas variáveis x e y, onde $x = g(s, t)$ e $y = h(s, t)$ são funções diferenciáveis de s e de t. Então z é uma função diferenciável e

$$\frac{\partial z}{\partial s} = \frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial s} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial s} \quad \text{e} \quad \frac{\partial z}{\partial t} = \frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial t} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial t}.$$

Notas:

1. A Regra da Cadeia (Caso 2) pode ser escrita na forma:

$$\frac{\partial z}{\partial s} = \frac{\partial z}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial s} + \frac{\partial z}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial s} \quad \text{e} \quad \frac{\partial z}{\partial t} = \frac{\partial z}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial t} + \frac{\partial z}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial t}.$$

2. O Caso 2 da Regra da Cadeia contém três tipos de variáveis: s e t, que são variáveis independentes; x e y, chamadas variáveis intermédias; z, que é a variável dependente.

Regra da cadeia

Exercício:

Seja $z = x \operatorname{sen} y + 1$, onde $x(s,t) = st^2$ e $y(s,t) = st$. Determine $\frac{\partial z}{\partial s}$ e $\frac{\partial z}{\partial t}$.

Pela Regra da cadeia, concluímos que:

$$\frac{\partial z}{\partial s} = \frac{\partial z}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial s} + \frac{\partial z}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial s} = \operatorname{sen} y \cdot t^2 + x \cos y \cdot t = t^2 \operatorname{sen}(st) + st^3 \cos(st)$$

e

$$\frac{\partial z}{\partial t} = \frac{\partial z}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial t} + \frac{\partial z}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial t} = \operatorname{sen} y \cdot 2st + x \cos y \cdot s = 2st \operatorname{sen}(st) + s^2 t^2 \cos(st).$$

Regra da cadeia

A Regra da cadeia (Caso 2) pode ser generalizada para o caso em que a variável dependente z é uma função de n variáveis intermédias $x_1, x_2, \ldots, x_n$, cada uma das quais, por seu turno, é função de m variáveis independentes $t_1, t_2, \ldots, t_m$.

Regra da cadeia (Caso 2 generalizado):

Suponha-se que z é uma função diferenciável de n variáveis $x_1, x_2, \ldots, x_n$, onde cada função x_j, $j = 1, 2, \ldots, n$, é uma função diferenciável de m variáveis $t_1, t_2, \ldots, t_m$.
Então z é uma função diferenciável de $t_1, t_2, \ldots, t_m$ e, para cada $i = 1, 2, \ldots, m$,

$$\frac{\partial z}{\partial t_i} = \frac{\partial z}{\partial x_1}\frac{\partial x_1}{\partial t_i} + \frac{\partial z}{\partial x_2}\frac{\partial x_2}{\partial t_i} + \cdots \frac{\partial z}{\partial x_n}\frac{\partial x_n}{\partial t_i}.$$

Funções definidas explicitamente e implicitamente

- Se $y = g(x)$, dizemos que y é uma função explícita da variável x.
- Na equação $f(x, y) = 0$, y não aparece como função explícita de x. Se, para cada x, existir um só y que resolva a equação, dizemos que $f(x, y) = 0$ define y como função implícita de x.

Exemplo:

Dada a equação $x^2 + y - 1 = 0$, conclui-se que $y = 1 - x^2$. Logo, podemos concluir que a equação dada define implicitamente y como função de x: $y = g(x)$ onde $g(x) = 1 - x^2$, $x \in \mathbb{R}$ (observe-se que esta equação não define implicitamente x como função de y).

Nota: Dada uma equação do tipo $f(x, y) = 0$, nem sempre é possível explicitar y como função de x nem x como função de y. Considere-se, por exemplo, as equações: $e^y + yx + x^5 - 2x^2 = 0$ e $x^2 + y^2 + 1 = 0$.

Funções definidas implicitamente

Questão:

Como podemos saber, sem recorrer à explicitação, se uma dada equação

$$f(x, y) = 0$$

define implicitamente uma das variáveis em função da outra? Além disso, em caso afirmativo, como calcular (se existir) a derivada da variável dependente relativamente à variável independente?

O **Teorema da função implícita** (a demonstração sai do âmbito desta UC) permite responder à questão colocada (se estivermos nas condições do teorema).

Teorema da função implícita

Teorema da função implícita (para duas variáveis):

Sejam $\mathcal{D} \subseteq \mathbb{R}^2$ um aberto, $f : \mathcal{D} \to \mathbb{R}$ uma função com derivadas parciais contínuas e $(x_0, y_0) \in \mathcal{D}$ tal que $f(x_0, y_0) = 0$. Se

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) \neq 0,$$

então a equação $f(x, y) = 0$ define implicitamente y como função de x, $y = g(x)$, numa vizinhaça de (x_0, y_0). Além disso, a função g é diferenciável numa vizinhaça de x_0 e

$$g'(x) = -\frac{\frac{\partial f}{\partial x}(x, y)}{\frac{\partial f}{\partial y}(x, y)}.$$

Nota: Em vez de $g'(x)$ podemos escrever $y'(x)$.

Teorema da função implícita

Exercício:

Determine y' se $x^3 + y^3 = 6xy + 1$.

Seja $f(x,y) = x^3 + y^3 - 6xy - 1$. Observe-se que $\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = 3x^2 - 6y$ e $\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = 3y^2 - 6x$ são contínuas em $\mathbb{R}^2$. Pelo Teorema da função implícita, se (x_0, y_0) satisfaz a equação dada e $\frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) \neq 0$, a equação define implicitamente y como função de x numa vizinhaça de (x_0, y_0). Além do mais, numa vizinhança de x_0, tem-se que $y'(x) = -\frac{x^2-2y}{y^2-2x}$.

Notas:

1. Observe-se que conseguimos determinar a derivada de $y = g(x)$ em ordem a x sem recorrer ao conhecimento explícito da função g!

2. Em particular, para $(x_0, y_0) = (0,1)$ (observe-se que $f(0,1) = 0$ e estamos nas condições do Teorema da função implícita), tem-se que $y'(0) = 2$.

Teorema da função implícita

Exercício:

Pretende-se saber se a equação $e^y + yx + x^5 - 2x^2 = 0$ define implicitamente y como função de x numa vizinhaça do ponto $(x_0, y_0) = (1, 0)$ (verifique que $(1, 0)$ satisfaz a equação dada).

Seja $f(x, y) = e^y + yx + x^5 - 2x^2$. Observe-se que $\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = y + 5x^4 - 4x$ e $\frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = e^y + x$ são contínuas em $\mathbb{R}^2$ e $\frac{\partial f}{\partial y}(1, 0) = 2 \neq 0$.
Logo, pelo Teorema da função implícita, a equação dada define implicitamente y como função de x numa vizinhaça de $(1, 0)$ e

$$y'(1) = -\frac{\frac{\partial f}{\partial x}(1,0)}{\frac{\partial f}{\partial y}(1,0)} = -\frac{1}{2}.$$

Nota: O Teorema da função implícita pode ser generalizado para funções com $n \geq 3$ variáveis reais (não iremos estudar este caso geral).