

## ÁLGEBRA LINEAR A

### REVISÃO DA PARTE IV

#### Parte IV - Diagonalização

##### Conceitos:

valor próprio, vector próprio, **espaço próprio**, subespaço invariante, base própria, multiplicidade algébrica, multiplicidade geométrica, **matriz diagonalizável**, valor e vector próprio complexo, base própria complexa, vector próprio generalizado, bloco de Jordan, **forma canónica de Jordan**, decomposição de Jordan

Dada uma matriz quadrada  $A = \begin{bmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix}$  com entradas reais:

Um vector não-nulo  $v \in \mathbb{R}^n$ , diz-se um **vector próprio** de  $A$  quando  $Av$  é múltiplo escalar de  $v$ , i.e., quando  $Av = \lambda v$  para algum  $\lambda \in \mathbb{R}$ .

Nesse caso,  $\lambda$  diz-se o **valor próprio** de  $A$  associado ao vector próprio  $v$ .

O **espaço próprio** de  $A$  associado ao valor próprio  $\lambda$  é  $E_\lambda = \text{Ker}(A - \lambda \text{Id})$ .

Uma **base própria** de  $A$  é uma base de  $\mathbb{R}^n$  constituída por vectores próprios de  $A$ .

Um subespaço vectorial  $E \subseteq \mathbb{R}^n$  é um **subespaço invariante** para  $A$  se  $v \in E \implies Av \in E$ . Por exemplo,  $\text{Ker } A$ ,  $\text{Im } A$ ,  $\mathbb{R}^n$ ,  $\{0\}$  e os espaços próprios de  $A$  são subespaços invariantes para  $A$ .

Seja  $\lambda_0$  um valor próprio de  $A$ .

A **multiplicidade algébrica** de  $\lambda_0$  é a multiplicidade de  $\lambda_0$  como raiz do polinómio característico  $p_A(\lambda) = \det(A - \lambda \text{Id})$ .

A **multiplicidade geométrica** de  $\lambda_0$  é a dimensão do respectivo espaço próprio  $E_{\lambda_0} = \text{Ker}(A - \lambda_0 \text{Id})$ .

A multiplicidade geométrica de  $\lambda_0$  é sempre menor ou igual à multiplicidade algébrica de  $\lambda_0$ .

Factos:

- **Vectoros próprios associados a valores próprios distintos são l.i.**

*Porquê?*

Suponha-se que  $v_1, \dots, v_m$  são vectoros próprios associados aos valores próprios  $\lambda_1, \dots, \lambda_m$  distintos, e suponha-se que  $c_1 v_1 + \dots + c_m v_m = 0$ . Aplique-se a matriz  $(A - \lambda_2 \text{Id})(A - \lambda_3 \text{Id}) \dots (A - \lambda_m \text{Id})$  a ambos os membros desta equação para concluir que tem que ser  $c_1 = 0$ . Analogamente mostra-se que  $c_2 = 0, \dots, c_m = 0$ .

*Consequências:*

- Se  $A$  tem  $n$  valores próprios distintos, então há uma base própria de  $A$ .  
*Porquê?* Para essa base própria escolha-se um vector próprio de  $A$  correspondente a cada valor próprio.
- Se as multiplicidades geométricas dos valores próprios de  $A$  somam  $n$ , então há uma base própria de  $A$ .  
*Porquê?* Para essa base própria escolha-se uma base de cada espaço próprio de  $A$ .

**Matrizes semelhantes:** Suponha-se que  $A$  e  $B$  são matrizes semelhantes, i.e., que existe uma matriz invertível  $S$  tal que  $B = S^{-1}AS$ . Então

- as características são iguais

$$\boxed{\text{car} A = \text{car} B} ;$$

- as nulidades são iguais

$$\boxed{\text{nul} A = \text{nul} B} ;$$

- os polinómios característicos são iguais

$$\boxed{p_A(\lambda) = p_B(\lambda)} ;$$

- os determinantes são iguais

$$\boxed{\det A = \det B} ;$$

- os traços são iguais

$$\boxed{\text{tr} A = \text{tr} B} ;$$

- os valores próprios são os mesmos e com as mesmas multiplicidades algébricas e geométricas;
- os vectoros próprios *correspondem-se mas não são necessariamente os mesmos*: se  $v$  é vector próprio de  $B$  associado ao valor próprio  $\lambda$ , então  $Sv$  é vector próprio de  $A$  associado ao valor próprio  $\lambda$ .

A matriz  $A$  diz-se **diagonalizável** quando  $A$  é semelhante a uma matriz diagonal.

**A matriz  $A$  é diagonalizável sse há uma base própria de  $A$ .**

*Porquê?*

Suponha-se que  $v_1, \dots, v_n$  é uma base própria de  $A$  e que  $\lambda_1, \dots, \lambda_n$  são os respectivos valores próprios associados, i.e.,  $Av_j = \lambda_j v_j$  (os  $\lambda_j$ 's podem ser repetidos). Então  $S^{-1}AS = D$  onde

$$D = \begin{bmatrix} \lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad S = \begin{bmatrix} | & & | \\ v_1 & \dots & v_n \\ | & & | \end{bmatrix}.$$

**Diagonalizar uma matriz:**

verificar se a matriz  $A$  é diagonalizável e, se for, encontrar uma matriz de mudança de base  $S$  tal que  $S^{-1}AS$  é diagonal. As etapas são as seguintes:

- (1) Achar os valores próprios de  $A$ , i.e., achar as raízes do polinómio característico

$$p_A(\lambda) = \det(A - \lambda \text{Id}).$$

- (2) Para cada valor próprio  $\lambda_j$ , achar uma base do seu espaço próprio

$$E_{\lambda_j} = \text{Ker}(A - \lambda_j \text{Id}).$$

- (3) A matriz  $A$  é diagonalizável sse as dimensões dos espaços próprios  $E_{\lambda_j}$ 's somam  $n$ . Nesse caso, obtém-se uma base própria  $v_1, \dots, v_n$  de  $A$  colecionando bases dos  $E_{\lambda_j}$ 's e  $S^{-1}AS$  é diagonal onde  $S$  é a matriz cujas colunas são os  $v_j$ 's.

O problema da existência de valores próprios leva a trabalhar com *números complexos*.

O problema da existência de vectores próprios leva a trabalhar com *forma canónica de Jordan*.

**Teorema fundamental da Álgebra (Gauss, 1799):**

Qualquer polinómio  $p(x)$  de grau  $n$  e com coeficientes complexos é da forma

$$p(x) = k(x - \lambda_1)(x - \lambda_2) \dots (x - \lambda_n)$$

para certas constantes  $k, \lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n \in \mathbb{C}$  ( $k \neq 0$ ).

I.e., a soma das multiplicidades algébricas das raízes de um polinómio de grau  $n$  é  $n$ .

*Ou seja*, qualquer polinómio não constante tem raízes em  $\mathbb{C}$ .

Em particular, *qualquer matriz tem valores próprios em  $\mathbb{C}$ .*

$\mathbb{C}^n = \{(z_1, \dots, z_n) : z_j \in \mathbb{C}\}$  é um **espaço vectorial complexo** de dimensão  $n$ :  
o produto por escalares complexos

$$\lambda(z_1, \dots, z_n) = (\lambda z_1, \dots, \lambda z_n), \quad \lambda \in \mathbb{C}$$

e a adição de vectores de  $\mathbb{C}^n$

$$(z_1, \dots, z_n) + (w_1, \dots, w_n) = (z_1 + w_1, \dots, z_n + w_n)$$

satisfazem as propriedades da definição de espaço vectorial.

As seguintes noções e os seguintes resultados valem em  $\mathbb{C}^n$  como em  $\mathbb{R}^n$ :

- matriz, transformação linear, núcleo, imagem,
- eliminação de Gauss, forma escalonada,
- espaço vectorial, independência linear, base, dimensão, coordenadas,
- determinante, valor próprio, vector próprio, diagonalização.

Dada uma matriz quadrada  $A = \begin{bmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix}$  com entradas complexas:

Um vector não-nulo  $v \in \mathbb{C}^n$ , diz-se um **vector próprio complexo** de  $A$  quando  $Av$  é múltiplo escalar de  $v$ , i.e., quando  $Av = \lambda v$  para algum  $\lambda \in \mathbb{C}$ . Nesse caso,  $\lambda$  diz-se o **valor próprio complexo** de  $A$  associado ao vector próprio  $v$ . O **espaço próprio complexo** de  $A$  associado ao valor próprio  $\lambda$  é  $E_\lambda = \text{Ker}(A - \lambda \text{Id})$  em  $\mathbb{C}^n$ . Uma **base própria complexa** de  $A$  é uma base de  $\mathbb{C}^n$  constituída por vectores próprios complexos de  $A$ .  
A partir daqui, mesmo que não seja dito o adjectivo “complexo”, considera-se as noções de vector próprio, valor próprio, etc. neste contexto mais geral.

Por definição de polinómio característico,

$$\begin{aligned} p_A(\lambda) &= \det(A - \lambda \text{Id}) \\ &= (-1)^n \lambda^n + (-1)^{n-1} (\text{tr} A) \lambda^{n-1} + \dots + (\det A). \end{aligned}$$

Pelo teorema fundamental da Álgebra,

$$\begin{aligned} p_A(\lambda) &= (-1)^n (\lambda - \lambda_1)(\lambda - \lambda_2) \dots (\lambda - \lambda_n) \\ &= (-1)^n \lambda^n + (-1)^{n-1} (\lambda_1 + \dots + \lambda_n) \lambda^{n-1} + \dots + \lambda_1 \dots \lambda_n, \end{aligned}$$

onde  $\lambda_1, \dots, \lambda_n$  são os valores próprios (complexos) de  $A$  com multiplicidades (i.e., os  $\lambda_j$ 's podem ser repetidos). Assim,

$$\boxed{\det A = \lambda_1 \dots \lambda_n} \quad \text{e} \quad \boxed{\text{tr} A = \lambda_1 + \dots + \lambda_n},$$

ou seja, o determinante é igual ao produto dos valores próprios (com multiplicidades) e o traço é igual à soma dos valores próprios (com multiplicidades).

Um **bloco de Jordan** para o valor  $\lambda \in \mathbb{C}$  é uma matriz quadrada da forma

$$\begin{bmatrix} \lambda & 1 & & & \\ & \lambda & 1 & & \\ & & \ddots & \ddots & \\ & & & \lambda & 1 \\ & & & & \lambda \end{bmatrix}$$

i.e.,

- todas as entradas da diagonal principal são  $\lambda$ ,
- todas as entradas imediatamente acima da diagonal principal são 1 e
- todas as outras entradas são 0.

Uma **forma canónica de Jordan** para uma matriz  $A$  é uma matriz  $J$  formada por blocos de Jordan ao longo da diagonal e semelhante a  $A$  (i.e.,  $A = SJS^{-1}$  para alguma matriz invertível  $S$ ).

Uma **decomposição de Jordan** para  $A$  é uma factorização de  $A$  do tipo

$$A = SJS^{-1}$$

onde  $S$  é uma matriz invertível (matriz de mudança de base) e  $J$  é uma matriz do tipo

$$J = \begin{bmatrix} \boxed{J_1} & & & \\ & \boxed{J_2} & & \\ & & \ddots & \\ & & & \boxed{J_k} \end{bmatrix}$$

com cada  $J_j$  um bloco de Jordan para o valor  $\lambda_j$ ,

$$J_j = \begin{bmatrix} \lambda_j & 1 & & \\ & \lambda_j & 1 & \\ & & \ddots & \ddots \\ & & & \lambda_j & 1 \\ & & & & \lambda_j \end{bmatrix}.$$

**Teorema:** Qualquer matriz quadrada tem formas canónicas de Jordan.

Para **achar decomposições de Jordan** para  $A$ , começa-se por calcular os valores próprios e os vectores próprios de  $A$ .

- **Quando há uma base própria de  $A$** , achar uma decomposição de Jordan para  $A$  é *diagonalizar  $A$* : Seja  $v_1, v_2, \dots, v_n$  uma base de vectores próprios de  $A$ , com  $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$  os respectivos valores próprios associados. Então  $A = SJS^{-1}$  com

$$S = \begin{bmatrix} | & & | \\ v_1 & \dots & v_n \\ | & & | \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad J = D = \begin{bmatrix} \boxed{\lambda_1} & & \\ & \boxed{\lambda_2} & \\ & & \ddots \\ & & & \boxed{\lambda_n} \end{bmatrix}.$$

Neste caso, todos os blocos de Jordan que formam  $J$  são  $1 \times 1$ .

- **Quando não há uma base própria de  $A$** , para obter uma base há que completar o máximo de vectores próprios l.i. que se conseguir com *vectores próprios generalizados*. Um vector não-nulo  $w \in \mathbb{C}^n$ , diz-se um **vector próprio generalizado** de  $A$  para o valor próprio  $\lambda$  quando  $(A - \lambda \text{Id})^n w = 0$  para algum  $n = 1, 2, 3, \dots$

De seguida, mostra-se como é que se obtém decomposições de Jordan para matrizes  $2 \times 2$  e  $3 \times 3$  com vectores próprios generalizados.

O número de blocos de Jordan em  $J$  é sempre igual ao número máximo de vectores próprios linearmente independentes de  $A$ .

Para **matrizes  $2 \times 2$**  só há dois casos possíveis:

**Caso 1** Há uma base constituída por vectores próprios  $v_1$  e  $v_2$  (eventualmente complexos) de  $A$ . Sejam  $\lambda_1$  e  $\lambda_2$  os respectivos valores próprios, i.e.,  $Av_i = \lambda_i v_i$ ,  $i = 1, 2$  (pode ser  $\lambda_1 = \lambda_2$ ). Então uma decomposição de Jordan (neste caso, uma diagonalização) para  $A$  é

$$A = \underbrace{\begin{bmatrix} | & | \\ v_1 & v_2 \\ | & | \end{bmatrix}}_S \underbrace{\begin{bmatrix} \boxed{\lambda_1} & \\ & \boxed{\lambda_2} \end{bmatrix}}_{J=D} \underbrace{\begin{bmatrix} & \\ & \end{bmatrix}}_{S^{-1}}.$$

**Caso 2** Todos os vectores próprios são múltiplos de um  $v$  para o valor próprio  $\lambda$ : tem-se  $v \neq 0$  e  $(A - \lambda \text{Id})v = 0$ . Seja  $w$  um vector próprio generalizado que é solução da equação  $(A - \lambda \text{Id})w = v$ . Então uma decomposição de Jordan para  $A$  é

$$A = \underbrace{\begin{bmatrix} | & | \\ v & w \\ | & | \end{bmatrix}}_S \underbrace{\begin{bmatrix} \lambda & 1 \\ & \lambda \end{bmatrix}}_J \underbrace{\begin{bmatrix} & \\ & \end{bmatrix}}_{S^{-1}}.$$

Para **matrizes**  $3 \times 3$  há três casos possíveis:

**Caso 1** Há uma base constituída por vectores próprios  $v_1, v_2$  e  $v_3$  (eventualmente complexos) de  $A$ . Sejam  $\lambda_1, \lambda_2$  e  $\lambda_3$  os respectivos valores próprios, i.e.,  $Av_i = \lambda_i v_i, i = 1, 2, 3$  (os  $\lambda_i$ 's podem ser repetidos). Então uma decomposição de Jordan (neste caso, uma diagonalização) para  $A$  é

$$A = \underbrace{\begin{bmatrix} | & | & | \\ v_1 & v_2 & v_3 \\ | & | & | \end{bmatrix}}_S \underbrace{\begin{bmatrix} \boxed{\lambda_1} & & \\ & \boxed{\lambda_2} & \\ & & \boxed{\lambda_3} \end{bmatrix}}_{J=D} \underbrace{\begin{bmatrix} \\ \\ \end{bmatrix}}_{S^{-1}}.$$

**Caso 2** Há dois vectores próprios  $v_1$  e  $v_2$  linearmente independentes, mas não três. Sejam  $\lambda_1$  e  $\lambda_2$  os respectivos valores próprios, i.e.,  $Av_i = \lambda_i v_i, i = 1, 2$  (pode ser  $\lambda_1 = \lambda_2$ ).

Quando  $\lambda_1 \neq \lambda_2$ , suponha-se sem perda de generalidade que  $\lambda_1$  é o valor próprio com multiplicidade algébrica 2, ou seja, que o polinómio característico de  $A$  é  $p_A(\lambda) = -(\lambda - \lambda_1)^2(\lambda - \lambda_2)$ .

Ache-se um vector próprio generalizado  $w$  que é solução da equação  $\boxed{(A - \lambda_1 \text{Id})w = v_1}$ . Então uma decomposição de Jordan para  $A$  é

$$A = \underbrace{\begin{bmatrix} | & | & | \\ v_1 & w & v_2 \\ | & | & | \end{bmatrix}}_S \underbrace{\begin{bmatrix} \boxed{\lambda_1} & 1 \\ & \boxed{\lambda_1} \\ & & \boxed{\lambda_2} \end{bmatrix}}_J \underbrace{\begin{bmatrix} \\ \\ \end{bmatrix}}_{S^{-1}}.$$

Quando  $\lambda_1 = \lambda_2$  só há um valor próprio a que se chama  $\lambda_0$ , ou seja, o polinómio característico de  $A$  é  $p_A(\lambda) = -(\lambda - \lambda_0)^3$ . Em geral, *há que substituir os vectores próprios  $v_1, v_2$  por outros linearmente independentes tais que um deles pertença ao espaço das colunas de  $A - \lambda_0 \text{Id}$ .* Sem perda de generalidade, suponha-se que  $v_1$  e  $v_2$  já foram escolhidos de maneira a ser  $\boxed{v_1 \in \text{Im}(A - \lambda_0 \text{Id})}$ . Assim há um vector próprio generalizado  $w$  satisfazendo a equação

$\boxed{(A - \lambda_0 \text{Id})w = v_1}$ . Então uma decomposição de Jordan para  $A$  é

$$A = \underbrace{\begin{bmatrix} | & | & | \\ v_1 & w & v_2 \\ | & | & | \end{bmatrix}}_S \underbrace{\begin{bmatrix} \boxed{\lambda_0} & 1 \\ & \boxed{\lambda_0} \\ & & \boxed{\lambda_0} \end{bmatrix}}_J \underbrace{\begin{bmatrix} \\ \\ \end{bmatrix}}_{S^{-1}}.$$

**Caso 3** Todos os vectores próprios são múltiplos de um  $v$  para o valor próprio  $\lambda$ : tem-se  $v \neq 0$  e  $(A - \lambda \text{Id})v = 0$ . Seja  $w$  um vector próprio generalizado que é solução da equação  $\boxed{(A - \lambda \text{Id})w = v}$  e seja  $u$  um vector próprio generalizado que é solução da equação  $\boxed{(A - \lambda \text{Id})u = w}$ . Então uma decomposição de Jordan para  $A$  é

$$A = \underbrace{\begin{bmatrix} | & | & | \\ v & w & u \\ | & | & | \end{bmatrix}}_S \underbrace{\begin{bmatrix} \lambda & 1 & \\ & \lambda & 1 \\ & & \lambda \end{bmatrix}}_J \underbrace{\begin{bmatrix} \\ \\ \end{bmatrix}}_{S^{-1}}.$$