

Exemplo 5.6.

$$\int \frac{1}{\sqrt{2x^2 + 8x - 24}} dx = ?$$

$$2x^2 + 8x - 24 = 2(x^2 + 4x - 12) = 2((x+2)^2 - 16)$$

Fazendo a mudança de variável

$$x+2 = 4 \sec t \Leftrightarrow x = 4 \sec t - 2 = h(t), t \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right[$$

podemos resolver o problema. Como $h'(t) = 4 \sec t \tg t$, determinamos a família de primitivas

$$\int \frac{1}{4\sqrt{2} \tg t} 4 \sec t \tg t dt = \int \frac{1}{\sqrt{2}} \sec t dt = \frac{1}{\sqrt{2}} \ln |\sec t + \tg t| + C, \text{ com } C \in \mathbb{R}.$$

Regressando à variável inicial, temos $h^{-1}(x) = \arccos \frac{4}{x+2}$ e recorrendo às fórmulas trigonométricas $\sec x = \frac{1}{\cos x}$ e $1 + \tg^2 x = \sec^2 x$ obtemos:

$$\int \frac{1}{\sqrt{2x^2 + 8x - 24}} dx = \frac{1}{\sqrt{2}} \ln \left| \frac{1}{4} \left(x + 2 + \sqrt{x^2 + 4x - 12} \right) \right| + C, \text{ com } C \in \mathbb{R}$$

Exercício 5.8 Calcule:

$$1. \int \frac{e^x}{\sqrt{4 - e^{2x}}} dx; \quad 2. \int \frac{2x + 5}{\sqrt{9x^2 + 6x + 2}} dx; \quad 3. \int \frac{1}{x(3 + \ln x)^3} dx;$$

$$4. \int \frac{1}{\sqrt{8 + 2x - x^2}} dx; \quad 5. \int \frac{\sen^3 x}{\sqrt{\cos x}} dx; \quad 6. \int \frac{1}{x^2 \sqrt{5 - x^2}} dx;$$

$$7. \int \frac{1}{x \sqrt{x^2 + 2}} dx; \quad 8. \int \sqrt{4 + 5x^2} dx; \quad 9. \int x^2 \sqrt{1 - x} dx.$$

5.7 Primitivas de Funções Racionais

Uma função racional é o quociente de dois polinómios, p e q , sendo $q(x)$ não nulo,

$$f(x) = \frac{p(x)}{q(x)}.$$

Se $\text{grau}(p) \geq \text{grau}(q)$ então devemos fazer a divisão dos polinómios e obtemos $p(x) = s(x)q(x) + r(x)$, em que $\text{grau}(r) < \text{grau}(q)$. Portanto, nesse caso,

$$\int f(x)dx = \int s(x)dx + \int \frac{r(x)}{q(x)}dx$$

Exemplo 5.7. Sejam p e q os polinómios definidos por $p(x) = x^4 + 2x + 1$ e $q(x) = x^3 - x^2 - 2x$. Para determinar $\int \frac{p(x)}{q(x)} dx$ efetuamos a divisão dos polinómios já que $\text{grau}(p) \geq \text{grau}(q)$. Como $p(x) = (x+1)q(x) + 3x^2 + 4x + 1$ vem,

$$\frac{p(x)}{q(x)} = (x+1) + \frac{3x^2 + 4x + 1}{x^3 - x^2 - 2x}.$$

J J $J \quad q(u)$

Exemplo 5.7. Sejam p e q os polinómios definidos por $p(x) = x^4 + 2x + 1$ e $q(x) = x^3 - x^2 - 2x$.

Para determinar $\int \frac{p(x)}{q(x)} dx$ efetuamos a divisão dos polinómios já que $\text{grau}(p) \geq \text{grau}(q)$. Como

$$\begin{aligned} & \left\{ \begin{array}{l} \frac{x^4 + 2x + 1}{x^3 - x^2 - 2x} du \\ \hline \end{array} \right. \\ &= \left\{ \begin{array}{l} u + 1 + \frac{3u^2 + 4u + 1}{x^3 - x^2 - 2x} du \\ \hline \end{array} \right. \\ &= \frac{u^2}{2} + u + \int \frac{3u^2 + 4u + 1}{x^3 - x^2 - 2x} du \end{aligned}$$

$$\begin{array}{r} x^4 + 2x + 1 \quad | \quad x^3 - x^2 - 2x \\ -x^4 + x^3 + 2x^2 \\ \hline 3x^2 + 4x + 1 \end{array}$$

$$\begin{aligned} x^3 - x^2 - 2x &= x(x^2 - x - 2) \\ &= x(x-2)(x+1) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} x^2 - x - 2 &= 0 \Leftrightarrow \\ x &= \frac{1 \pm \sqrt{1+8}}{2} \\ \Leftrightarrow x &= 2 \vee x = -1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{3x^2 + 4x + 1}{x^3 - x^2 - 2x} &= \frac{A}{x} + \frac{B}{x-2} + \frac{C}{x+1} \\ &\quad (x-2)(x+1) \quad x(x+1) \quad x(x-2) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{3x^2 + 4x + 1}{x(x-2)(x+1)} &= \frac{A(x-2)(x+1) + Bx(x+1) + Cx(x-2)}{x(x-2)(x+1)} \end{aligned}$$

$$3x^2 + 4x + 1 = A(x-2)(x+1) + Bx(x+1) + Cx(x-2)$$

$(\forall x \in \mathbb{R})$

$$a=0 \Rightarrow 0+0+1 = A(-2) \times 1 + 0 + 0 \Leftrightarrow A = \frac{1}{2}$$

$$a=2 \Rightarrow 12+8+1 = 0+B \times 2 \times 3 + 0 \Leftrightarrow$$

$$6B=21 \Leftrightarrow B=\frac{7}{2}$$

$$a=-1 \Rightarrow 3-\cancel{4}+1 = 0+0+C \times (-1) \times (-3) \Leftrightarrow C=0$$

$$\left\{ \frac{3u^2+4u+1}{u^3-u^2-2u} du = \left(\frac{A}{u} + \frac{B}{u-2} + \frac{C}{u+1} \right) du \right.$$

$$= \left\{ \frac{-\frac{1}{2}}{u} + \frac{\frac{7}{2}}{u-2} + 0 du = -\frac{1}{2} \ln|u| + \frac{7}{2} \ln|u-2| + C, \text{ where} \right.$$

Então,

$$\int \frac{p(x)}{q(x)} dx = \int \left((x+1) + \frac{3x^2+4x+1}{x^3-x^2-2x} \right) dx$$

Para integrar a segunda parcela decomponemos o denominador em elementos simples, de 1º e/ou 2º grau:

$$q(x) = x(x^2 - x - 2) = x(x+1)(x-2)$$

e podemos reescrever a fração como segue:

$$\frac{3x^2+4x+1}{x^3-x^2-2x} = \frac{3x^2+4x+1}{x(x+1)(x-2)}.$$

Esta fração pode ser decomposta numa soma de “frações simples”:

$$\frac{3x^2+4x+1}{x(x+1)(x-2)} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x+1} + \frac{C}{x-2}$$

onde A , B e C são constantes a determinar. Se reduzirmos as frações simples ao mesmo denominador obtemos a igualdade seguinte:

$$\frac{3x^2+4x+1}{x(x+1)(x-2)} = \frac{A(x+1)(x-2) + Bx(x-2) + Cx(x+1)}{x(x+1)(x-2)}.$$

Como os denominadores são iguais, para que as frações sejam iguais devemos igualar os numeradores:

$$3x^2 + 4x + 1 = A(x+1)(x-2) + Bx(x-2) + Cx(x+1).$$

Pela igualdade de polinómios deduz-se que:

$$(A+B+C)x^2 + (-A-2B+C)x - 2A = 3x^2 + 4x + 1, \text{ ou seja,}$$

$$\begin{cases} A+B+C=3 \\ -A-2B+C=4 \\ -2A=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} A=-\frac{1}{2} \\ B=0 \\ C=\frac{7}{2} \end{cases}$$

Um outro processo para determinar A , B e C consiste em utilizar o seguinte resultado:

$$\text{Dois polinómios são iguais se } \forall x_0 \in \mathbb{R}, p(x_0) = q(x_0).$$

Então, em particular,

$$A(x+1)(x-2) + Bx(x-2) + Cx(x+1) = 3x^2 + 4x + 1, \text{ para } x = 0, x = 2 \text{ e } x = -1.$$

$$\text{Se } x = 0, \text{ resulta } -2A = 1 \Leftrightarrow A = -\frac{1}{2}$$

$$\text{Se } x = -1, \text{ resulta } 3B = 0 \Leftrightarrow B = 0 \quad \text{Parece mais simples !!!}$$

$$\text{Se } x = 2, \text{ resulta } 6C = 21 \Leftrightarrow C = \frac{7}{2}$$

Determinados os coeficientes (por um processo ou por outro):

$$\begin{aligned} \int \frac{x^4+2x+1}{x^3-x^2-2x} dx &= \int \left[x+1 - \frac{1}{2x} + \frac{21}{6(x-2)} \right] dx \\ &= \frac{x^2}{2} + x - \frac{1}{2} \ln|x| + \frac{21}{6} \ln|x-2| + C, \quad C \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

Este processo pode ser utilizado em qualquer fração de polinómios, tendo em conta os resultados seguintes.

Teorema 5.5. Todo o polinómio de coeficientes reais pode ser decomposto num produto de fatores do primeiro e/ou segundo grau (em que cada um dos fatores terá uma multiplicidade maior ou igual a 1).

Um polinómio de grau n admite sempre n raízes complexas², não necessariamente distintas, ou seja, podem ser simples ou múltiplas. Para além disso, se admitir a raiz $a + bi$ (com $b \neq 0$) também admite a raiz $a - bi$.

O problema reduz-se assim a primitivar fatores do tipo:

$$\frac{A}{(x - \alpha)^r} \text{ e } \frac{Bx + C}{(x^2 + bx + c)^s}$$

Observe-se que se $r \neq 1$ (Caso em que o polinómio do denominador tem raízes reais múltiplas),

$$\int \frac{A}{(x - \alpha)^r} dx = \frac{A}{(1 - r)(x - \alpha)^{r-1}} + C, C \in \mathbb{R}$$

e se $r = 1$

$$\int \frac{A}{(x - \alpha)^r} dx = \int \frac{A}{x - \alpha} dx = A \ln|x - \alpha| + C, C \in \mathbb{R}$$

Exemplo 5.8. Como calcular $\int \frac{x^2 + 1}{(x - 1)^3} dx?$

$$\frac{x^2 + 1}{(x - 1)^3} = \frac{A}{x - 1} + \frac{B}{(x - 1)^2} + \frac{C}{(x - 1)^3}$$

$$x^2 + 1 = Ax^2 + (-2A + B)x + A - B + C.$$

Donde: $A = 1$, $B = 2$ e $C = 2$.

$$\begin{aligned} \int \frac{x^2 + 1}{(x - 1)^3} dx &= \int \frac{1}{x - 1} dx + 2 \int \frac{1}{(x - 1)^2} dx + 2 \int \frac{1}{(x - 1)^3} dx \\ &= \ln|x - 1| - \frac{2}{x - 1} - \frac{1}{(x - 1)^2} + C, \quad C \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

Se os fatores são de 2º grau, as coisas complicam-se... Caso em que o polinómio do denominador tem raízes complexas.

Exemplo 5.9. Como calcular $\int \frac{x^2 + x + 1}{(2x + 1)(x^2 + 1)} dx?$

$$\frac{x^2 + x + 1}{(2x + 1)(x^2 + 1)} = \frac{A}{2x + 1} + \frac{Bx + C}{x^2 + 1}$$

Donde: $A = \frac{3}{5}$, $B = \frac{1}{5}$ e $C = \frac{2}{5}$.

$$\begin{aligned} \int \frac{x^2 + x + 1}{(2x + 1)(x^2 + 1)} dx &= \frac{3}{5} \int \frac{1}{2x + 1} dx + \int \frac{\frac{1}{5}x + \frac{2}{5}}{x^2 + 1} dx \\ &= \frac{3}{10} \ln|2x + 1| + \frac{1}{5} \int \frac{x}{x^2 + 1} dx + \frac{2}{5} \int \frac{1}{x^2 + 1} dx \\ &= \frac{3}{10} \ln|2x + 1| + \frac{1}{10} \ln(x^2 + 1) + \frac{2}{5} \arctan x + C, \quad C \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

²Observemos que uma raiz real é complexa com parte imaginária nula.

Exemplo 5.8. Como calcular $\int \frac{x^2+1}{(x-1)^3} dx$?

$$\frac{x^2+1}{(x-1)^3} = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{(x-1)^2} + \frac{C}{(x-1)^3}$$

$$(x-1)^2 \quad (x-1)$$

$$x^2+1 = A(x-1)^2 + B(x-1) + C$$

$$(x=1 \Rightarrow 1+1 = 0+0+C \Rightarrow C=2)$$

$$x^2+1 = A(x^2-2x+1) + B(x-1) + C$$

$$x^2+1 = Ax^2 + (-2A+B)x + A-B+C$$

$$\begin{cases} A = 1 \\ -2A+B = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} A = 1 \\ B = 2 \end{cases}$$

$$A-B+C = 1 \quad 1=1 \checkmark$$

$$\int \frac{x^2+1}{(x-1)^3} dx = \int \frac{1}{x-1} + \frac{2}{(x-1)^2} + \frac{2}{(x-1)^3} dx$$

$$= \ln|x-1| + 2 \frac{(x-1)^{-2+1}}{-2+1} + 2 \frac{(x-1)^{-3+1}}{-3+1} + C, \quad C \in \mathbb{R}$$

Atendendo ao Teorema 5.5, podemos afirmar que qualquer polinómio $q(x)$, admite a seguinte fatorização em polinómios irredutíveis:

$$\underbrace{q(x) = \alpha(x - a_1)^{r_1} \dots (x - a_n)^{r_n} (x^2 + b_1x + c_1)^{s_1} \dots (x^2 + b_mx + c_m)^{s_m}},$$

com $b_j^2 - 4c_j < 0, j = 1 \dots, m$ e

$$(r_1 + \dots + r_n) + 2(s_1 + \dots + s_m) = \text{grau}(q).$$

Então,

$$\frac{r(x)}{q(x)} = \frac{1}{\alpha} \sum_{i=1}^n \left(\frac{A_{i1}}{(x - a_i)} + \dots + \frac{A_{ir_i}}{(x - a_i)^{r_i}} \right) +$$

$$+ \frac{1}{\alpha} \sum_{j=1}^m \left(\frac{B_{j1}x + C_{j1}}{(x^2 + b_jx + c_j)} + \dots + \frac{B_{js_j}x + C_{js_j}}{(x^2 + b_jx + c_j)^{s_j}} \right),$$

raiz Q ; raizes $\alpha \pm i\beta$

onde $A_{i1}, \dots, A_{ir_i} (i = 1 \dots, n)$ e $B_{j1}, C_{j1}, \dots, B_{js_j}, C_{js_j} (j = 1 \dots, m) \in \mathbb{R}$.

Exemplo 5.10. Para determinar o integral $\int \frac{x}{x^2 + 2x + 15} dx$ podemos escrever

$$\frac{x}{x^2 + 2x + 15} = \frac{x + 1 - 1}{x^2 + 2x + 15}$$

atendendo a que $(x^2 + 2x + 15)' = 2x + 2 = 2(x + 1)$. Assim,

$$\int \frac{x}{x^2 + 2x + 15} dx = \frac{1}{2} \int \frac{2(x + 1)}{x^2 + 2x + 15} dx - \int \frac{1}{x^2 + 2x + 15} dx$$

O primeiro integral é agora imediato; para calcular o segundo, observemos que

$$x^2 + 2x + 15 = (x + 1)^2 + 14 = 14 \left(\left(\frac{x + 1}{\sqrt{14}} \right)^2 + 1 \right)$$

e portanto

$$\int \frac{x}{x^2 + 2x + 15} dx = \frac{1}{2} \int \frac{2(x + 1)}{x^2 + 2x + 15} dx - \frac{1}{14} \int \frac{1}{\left(\frac{x+1}{\sqrt{14}} \right)^2 + 1} dx.$$

Integrando vem:

$$\int \frac{x}{x^2 + 2x + 15} dx = \frac{1}{2} \ln(x^2 + 2x + 15) - \frac{\sqrt{14}}{14} \arctan \frac{x + 1}{\sqrt{14}} + C, C \in \mathbb{R}$$

Exemplo 5.11. A primitiva da função $\frac{1}{(1+x^2)^2}$, ou das suas variantes $\frac{1}{(a^2+x^2)^2}$, aparece frequentemente na decomposição em elementos simples, por isso é importante que se perceba a sua determinação.

Como calcular

$$\int \frac{1}{(1+x^2)^2} dx?$$

Fazendo a substituição $x = g(t) = \operatorname{tg} t$, porque $1 + \operatorname{tg}^2 t = \sec^2 t$ temos que

$$\frac{1}{(1+x^2)^2} = \frac{1}{(1+\operatorname{tg}^2 t)^2} = \frac{1}{\sec^4 t}$$

Exemplo 5.10. Para determinar o integral $\int \frac{x+0}{x^2+2x+15} dx$ podemos escrever

$$= \frac{1}{2} \int \frac{2u+2+K}{u^2+2u+15} du$$

$$\Delta = 4 - 60 = -56 < 0$$

①, ②, ③

$$= \frac{1}{2} \int \frac{2u+2-2}{u^2+2u+15} du \quad \frac{1}{2}(2+K) = 0$$

$$= \frac{1}{2} \int \frac{2u+2}{u^2+2u+15} du - \left\{ \frac{1}{u^2+2u+15} du \right\} \quad K = -2$$

$$= \frac{1}{2} \ln(u^2+2u+15)$$

$$\int \frac{1}{u^2+2u+15} du = \int \frac{1}{(u+1)^2 + 14} du$$

$$= \frac{1}{14} \times \sqrt{14} \int \frac{1 \times \frac{1}{\sqrt{14}} du}{\left(\frac{u+1}{\sqrt{14}}\right)^2 + 1} =$$

$$= \frac{\sqrt{14}}{14} \operatorname{arctan} \left(\frac{u+1}{\sqrt{14}} \right) + C$$

Exemplo 5.11. A primitiva da função $\frac{1}{(1+x^2)^2}$, ou das suas variantes $\frac{1}{(a^2+x^2)^2}$, aparece fre-

$$\begin{aligned}
 & \left\{ \int \frac{1}{(1+u^2)^2} du = \right. \\
 & = \int \frac{1}{(\tan^2 t + 1)^2} \cdot \sec^2 t dt = \\
 & = \int \frac{1}{\sec^4 t} \cdot \sec^2 t dt \\
 & = \int \cos^2 t dt = \int \frac{1 + \cos(2t)}{2} dt = \\
 & = \frac{t}{2} + \frac{\sin(2t)}{4} + C, \quad C \in \mathbb{R} \\
 & = \frac{t}{2} + \frac{1}{2} \sin t \cos t + C = \\
 & \frac{1}{2} \arctan u - \frac{1}{2} \sqrt{\frac{1}{u^2+1}} \times \sqrt{1 - \frac{1}{u^2+1}} + C
 \end{aligned}$$

sim²t + cos²t = 1
 div. for cos²t
 tan²t + 1 = sec²t
 (u = tan t)
 du = sec²t dt

Derivando $\operatorname{tg} t$, obtém-se $\sec^2 t$, assim, a função a primitivar é

$$\int \frac{1}{\sec^4 t} \sec^2 t dt = \int \frac{1}{\sec^2 t} dt = \int \cos^2 t dt$$

Como $\cos^2 t = \frac{1 + \cos(2t)}{2}$, vem

$$\int \cos^2 t dt = \frac{1}{2} \int (\cos(2t) + 1) dt = \frac{1}{2} \left(t + \frac{1}{2} \sin(2t) \right) + C, \quad C \in \mathbb{R}$$

Como $\sin(2t) = 2 \sin t \cos t$

$$\int \frac{1}{\sec^2 t} dt = \frac{1}{2} \sin t \cos t + \frac{1}{2} t + C, \quad C \in \mathbb{R}$$

Como $\operatorname{tg} t = x$, resulta que $\sec^2 t = x^2 + 1$ e vem

$$\cos^2 t = \frac{1}{x^2 + 1} \quad \text{e} \quad \sin^2 t = 1 - \cos^2 t = \frac{x^2}{x^2 + 1}.$$

Regressando à variável inicial x temos:

$$\int \frac{1}{(1+x^2)^2} dx = \frac{x}{2(x^2+1)} + \frac{1}{2} \arctan x + C, \quad C \in \mathbb{R}$$

Exemplo 5.12. Vamos determinar o integral indefinido $\int \frac{x-1}{(x^2+2x+3)^2} dx$.

Atendendo a que $(x^2+2x+3)' = 2x+2$ e que $x-1 = x+1-2$, podemos reescrever o integral da seguinte forma:

$$\int \frac{x-1}{(x^2+2x+3)^2} dx = \frac{1}{2} \int \left(\frac{2x+2}{(x^2+2x+3)^2} - \frac{4}{(x^2+2x+3)^2} \right) dx$$

ou seja,

$$\int \frac{x-1}{(x^2+2x+3)^2} dx = \frac{1}{2} \int \frac{2x+2}{(x^2+2x+3)^2} dx - \int \frac{2}{(x^2+2x+3)^2} dx.$$

O primeiro integral é imediato,

$$\frac{1}{2} \int \frac{2x+2}{(x^2+2x+3)^2} dx = -\frac{1}{2(x^2+2x+3)} + C_1, \quad C_1 \in \mathbb{R}.$$

Quanto ao segundo integral, vamos recorrer ao exemplo 5.11. Começamos por transformar a função integranda:

$$\frac{2}{(x^2+2x+3)^2} = \frac{2}{4 \left(\left(\frac{x+1}{\sqrt{2}} \right)^2 + 1 \right)^2} = \frac{1}{2} \frac{1}{\left(\left(\frac{x+1}{\sqrt{2}} \right)^2 + 1 \right)^2}.$$

Faz-se agora a substituição

$$\frac{x+1}{\sqrt{2}} = \operatorname{tg} t \Leftrightarrow x = \sqrt{2} \operatorname{tg} t - 1$$

no integral $\int \frac{2}{(x^2+2x+3)^2} dx$ e o integral a determinar será

$$\frac{1}{2} \int \frac{1}{(\operatorname{tg}^2 t + 1)^2} \sqrt{2} \sec^2 t dt = \frac{\sqrt{2}}{2} \int \cos^2 t dt = \frac{\sqrt{2}}{4} (t + \sin(2t)) + C_2 = \frac{\sqrt{2}}{4} (t + 2 \sin(t) \cos(t)) + C_2, \quad C_2 \in \mathbb{R}.$$

Regressando à variável inicial,

$$\int \frac{2}{(x^2+2x+3)^2} dx = \frac{\sqrt{2}}{4} \left(\arctan \left(\frac{x+1}{\sqrt{2}} \right) + \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2+(x+1)^2}} \cdot \frac{x+1}{\sqrt{2+(x+1)^2}} \right) + C_2, \quad C_2 \in \mathbb{R},$$

Exemplo 5.12. Vamos determinar o integral indefinido $\int \frac{x-1}{(x^2+2x+3)^2} dx$.

$$\begin{aligned}
 &= \frac{1}{2} \left\{ \frac{2u+2+K}{(u^2+2u+3)^2} du = \right. \\
 &= \frac{1}{2} \left\{ \frac{2u+2}{(u^2+2u+3)^2} - 2 \int \frac{1}{(u^2+2u+3)^2} du \right. \\
 &= \frac{1}{2} \left(\frac{(u^2+2u+3)^{-2+1}}{-2+1} - 2 \int \frac{1}{(u^2+2u+3)^2} du \right) \\
 &\quad \left. \Delta = 4 - 4 \times 3 = -8 < 0 \right. \\
 &\quad \left. \frac{1}{2}(2+K) = -1 \right. \\
 &\quad \left. 2K = -2 \right. \\
 &\quad \left. K = -1 \right. \\
 &\quad \boxed{\int \frac{1}{(u^2+2u+3)^2} du}
 \end{aligned}$$

$$\int \frac{1}{(u^2+2u+3)^2} du = \left\{ \frac{1}{((u+1)^2+2)^2} du$$

$$u+1 = \sqrt{2} \operatorname{tg} t$$

$$du = \sqrt{2} \sec^2 t dt$$

$$\begin{aligned}
 &= \left\{ \frac{1}{((\sqrt{2} \operatorname{tg} t)^2+2)^2} \sqrt{2} \sec^2 t dt = \right. \\
 &= \left\{ \frac{1}{((2)(\operatorname{tg}^2 t + 1))^2} \cdot \sqrt{2} \sec^2 t dt \right.
 \end{aligned}$$

$$= \frac{\sqrt{2}}{4} \int \frac{\sec^2 t}{\sec^4 t} dt =$$

$$= \frac{\sqrt{2}}{4} \int \cos^2 t dt = \frac{\sqrt{2}}{8} \int 1 + \cos(2t) dt$$

$$= \frac{\sqrt{2}}{8} \left(\frac{t}{2} + \frac{1}{2} \sin t \cos t \right) + C$$

Cost

$$= \frac{\sqrt{2}}{16} \operatorname{arctan} \left(\frac{t+1}{\sqrt{2}} \right) + \frac{\sqrt{2}}{8} \int \frac{1}{1 + \left(\frac{t+1}{\sqrt{2}} \right)^2} dt$$

sin t

$$\int \frac{1}{1 + \left(\frac{t+1}{\sqrt{2}} \right)^2} dt + C, CE/R.$$

$$t+1 = \sqrt{2} \operatorname{tg} t$$

$$\operatorname{tg} t = \frac{t+1}{\sqrt{2}}$$

$$t = \operatorname{arctan} \left(\frac{t+1}{\sqrt{2}} \right)$$

ou escrito de forma simplificada,

$$\int \frac{2}{(x^2 + 2x + 3)^2} dx = \frac{\sqrt{2}}{4} \left(\arctan \left(\frac{x+1}{\sqrt{2}} \right) + \frac{\sqrt{2}(x+1)}{2+(x+1)^2} \right) + C_2, \quad C_2 \in \mathbb{R}.$$

Finalmente,

$$\int \frac{x-1}{(x^2 + 2x + 3)^2} dx = -\frac{1}{2(x^2 + 2x + 3)} - \frac{\sqrt{2}}{4} \left(\arctan \left(\frac{x+1}{\sqrt{2}} \right) + \frac{\sqrt{2}(x+1)}{2+(x+1)^2} \right) + C, \quad C \in \mathbb{R}.$$

Exercício 5.9 Calcule:

1. $\int \frac{1}{(x-2)^3} dx;$
2. $\int \frac{x^2 + 2}{(x+1)^3(x-2)} dx;$
3. $\int \frac{3x^2 + 2x - 3}{x^3 + 2x^2 + x} dx;$
4. $\int \frac{x^4 - 3}{x^3 + 2x^2 + x} dx;$
5. $\int \frac{5x^3 - 3x^2 + 7x - 3}{(x^2 + 1)^2} dx.$

Soluções dos exercícios

Exercício 5.1

Função	Primitiva	Domínio
$f(x) = 2e^{2x}$	$F(x) = e^{2x}$	$x \in \mathbb{R}$
$f(x) = \operatorname{tg} x$	$F(x) = -\ln(\cos x)$	$x \in]0, \frac{\pi}{2}[$
$f(x) = x^5$	$F(x) = \frac{x^6}{6}$	$x \in \mathbb{R}$
$f(x) = \sqrt[3]{x}$	$F(x) = \frac{3}{4} \sqrt[3]{x^4}$	$x \in \mathbb{R}$
$f(x) = \sqrt{7}$	$F(x) = \sqrt{7}x$	$x \in \mathbb{R}$

Exercício 5.2

$$\begin{array}{ll} 1. x^4 - \frac{5}{2}x^2 + 9x + C & 2. \frac{5}{4}x^4 + 2 \operatorname{sen} x + C \\ 5. \frac{x^3}{3} - 2x - \frac{1}{x} + C & 6. -\sqrt{3} \operatorname{cos} x + \frac{1}{2} \ln|x| + C \\ 7. \frac{2}{5} \sqrt{x^5} + x + C & 8. \frac{1}{\cos u} + C, \text{ com } C \in \mathbb{R}. \end{array}$$

Exercício 5.3

$$\begin{array}{lll} 1. \frac{(g(x))^{n+1}}{n+1} + C & 2. \operatorname{sen}(g(x)) + C & 3. -\cos(g(x)) + C \\ 4. \operatorname{tg}(g(x)) + C & 5. -\operatorname{cotg}(g(x)) + C & 6. \operatorname{arcsen}(g(x)) + C \\ 7. e^{g(x)} + C & 8. \frac{a^{g(x)}}{\ln a} + C & 9. \ln|g(x)| + C \\ 10. \operatorname{arctan}((g(x))) + C & 11. -\ln|\cos(g(x))| + C & 12. \frac{n}{n+1} \sqrt[n+1]{g(x)^{n+1}} + C \end{array}, \text{ com } C \in \mathbb{R}$$

Exercício 5.5

$$\begin{array}{ll} 1. \frac{\sqrt{7}}{7} \operatorname{arctan}\left(\frac{x}{\sqrt{7}}\right) + C; & 5. \frac{1}{2} \operatorname{arctan}(e^{2x}) + C; \\ 2. \operatorname{arcsen}\left(\frac{x}{\sqrt{8}}\right) + C; & 6. -\ln|\cos x| + C; \\ 3. -2\sqrt{1-x} + C; & 7. -\operatorname{sen}\left(\frac{1}{x}\right) + C; \\ 4. -\frac{1}{6}e^{3\cos^2 x} + C; & 8. \frac{1}{2}e^{x^2+4x+3} + C. \end{array}$$

Exercício 5.6

$$\begin{array}{ll} 1. x \operatorname{arctan} x - \frac{1}{2} \ln(1+x^2) + C; & 2. \frac{1}{2} (\operatorname{tg} x \sec x + \ln|\sec x + \operatorname{tg} x|) + C; \\ 3. \frac{2}{45} \cos(2x) \operatorname{sen}(7x) - \frac{7}{45} \operatorname{sen}(2x) \cos(7x) + C; & 4. -\frac{3}{16} \operatorname{sen}(5x) \operatorname{sen}(3x) - \frac{5}{16} \cos(5x) \cos(3x) + C; \\ 5. \frac{x^2}{2} \operatorname{arctan} x - \frac{1}{2}x + \frac{1}{2} \operatorname{arctan} x + C; & 6. \frac{x3^x}{\ln 3} - \frac{3^x}{\ln^2 3} + C; \\ 7. \frac{1}{2} \operatorname{arctan} x - \frac{1}{2} \frac{x}{1+x^2} + C (\text{Sugestão: } \frac{x^2}{(1+x^2)^2} = \frac{x}{(1+x^2)^2} x); & 8. \frac{1}{2}(x \operatorname{cos}(\ln x) + x \operatorname{sen}(\ln x)) + C; \\ 9. x \frac{(2x+5)^{11}}{22} - \frac{(2x+5)^{12}}{528} + C; & \text{com } C \in \mathbb{R} \end{array}$$

Exercício 5.7

1. $\frac{6}{7}\sqrt[6]{x^7} - \frac{6}{5}\sqrt[6]{x^5} + 2\sqrt[6]{x^3} - 6\sqrt[6]{x} + 6\arctan\sqrt[6]{x} + C;$
2. $e^x - \arctan(e^x) + C;$
3. $\frac{\ln^3 x}{3} - \ln x + \arctan(\ln x) + C;$
4. $2\sin\sqrt{x} - 2\sqrt{x}\cos\sqrt{x} + C;$
5. $\frac{\sqrt{(2x+3)^5}}{10} - \frac{\sqrt{(2x+3)^3}}{2} + C;$
6. $\ln(4x) - \ln 2 \ln|\ln(4x)| + C;$
7. $-\frac{4\sqrt{(1-\sqrt{x})^3}}{3} + C,$
com $C \in \mathbb{R}.$

Exercício 5.8

1. $\arcsen\left(\frac{e^x}{2}\right) + C;$
2. $\frac{2}{9}\sqrt{9x^2 + 6x + 2} - \frac{13}{9}\ln(\sqrt{9x^2 + 6x + 2} - 3x - 1) + C;$
3. $-\frac{1}{2(3 + \ln x)^2} + C;$
4. $\arcsen\left(\frac{x-1}{3}\right) + C;$
5. $-2\sqrt{\cos x} + \frac{2}{5}\sqrt{\cos^5 x} + C;$
6. $-\frac{\sqrt{5-x^2}}{5x} + C;$
7. $-\frac{\sqrt{2}}{4}\ln(\sqrt{2} + \sqrt{2+x^2}) + \frac{\sqrt{2}}{4}\ln(-\sqrt{2} + \sqrt{2+x^2}) + C;$
8. $\frac{1}{2}x\sqrt{4+5x^2} - 2\frac{\ln(-x\sqrt{5} + \sqrt{4+5x^2})}{\sqrt{5}} + C;$
9. $\sqrt{1-x}\left(\frac{4(1-x)^2}{5} - \frac{2(1-x)^3}{7} - \frac{2(1-x)}{3}\right) + C,$
com $C \in \mathbb{R},$

Exercício 5.9

1. $-\frac{1}{2(x-2)^2} + C,$ com $C \in \mathbb{R};$
2. $\frac{1}{18}\left(\frac{3-6x}{(x+1)^2} + 4\ln(x-2) - 4\ln(x+1)\right) + C,$ com $C \in \mathbb{R};$
3. $-\frac{2}{x+1} - 3\ln x + 6\ln(x+1) + C,$ com $C \in \mathbb{R};$
4. $\frac{x^2}{2} - 2x - \frac{2}{x+1} - 3\ln x + 6\ln(x+1) + C,$ com $C \in \mathbb{R};$
5. $-\frac{1}{x^2+1} + \frac{5}{2}\ln(x^2+1) - 3\arctan x + C,$ com $C \in \mathbb{R}.$

