5. Valores próprios e vetores próprios

valor e vetor próprios	$A, n \times n$ $\quad \lambda \in \mathbb{R}$ se $\exists_1 X$ não nulo $\in \mathbb{R}^n$: $\quad AX = \lambda X$ valor próprio (λ), vetor próprio (X)
conclusão	$\lambda \in \mathbb{R}$ é valor próprio de $A, n \times n$ sse $\exists_1 X \in \mathbb{R}^n$ não nulo: $AX = \lambda X$ sse $AX - \lambda I_n X = 0$ sse $(A - \lambda I_n) X = 0$ sse $\det(A - \lambda I_n) = 0$
polinómio característico	é o polinómio de grau n em λ, dado por: $p_A(\lambda) = \det(A - \lambda I_n)$ $\Downarrow$ $\det(A - \lambda I_n) = 0$ equação característica
subespaço próprio associado a um vetor próprio	$\lambda \in \mathbb{R}$ é valor próprio de A, $n \times n$ sse $\exists_1 X \in \mathbb{R}^n$ não nulo: $AX = \lambda X$ sse $(A - \lambda I_n) X = 0$ sse $X \in \mathcal{N}(A - \lambda I_n)$ U_λ, subespaço próprio associado a um valor próprio $U_\lambda = \{X \in \mathbb{R}^n : AX = \lambda n\}$ $= \{X \in \mathbb{R}^n : (A - \lambda I_n)X = 0\}$ $= \mathcal{N}(A - \lambda I_n)$ U_λ: é o conjunto de todos os vetores próprios de A associados a λ, juntamente com o vetor nulo (que não é vetor próprio). Teorema: $A, n \times n$ e $\lambda_1, \ldots, \lambda_k$ valores próprios distintos $p_A(\lambda) = (\lambda_1 - \lambda)^{n_{\lambda_1}} \cdot (\ldots) \cdot (\lambda_k - \lambda)^{n_{\lambda_k}}$ $1 \leq \dim U_{\lambda_i} \leq n_{\lambda_i}, \; i = 1, \ldots, k$

matrizes semelhantes	A, B dizem-se semelhantes sse $\exists\, P : P^{-1} A P = B$
	mta se B é diagonal, A diz-se diagonalizável
	obs se P for invertível, $P^{-1} A P = B \Leftrightarrow AP = PB \Leftrightarrow A = PBP^{-1}$
VIP	teorema: matrizes semelhantes têm o mesmo polinómio característico; os mesmos valores próprios
matriz diagonalizável	se é semelhante a uma matriz diagonal (com P invertível)
	teorema A, $n \times n$ é diagonalizável $\Leftrightarrow$ tem n vetores próprios l.i.
	potência A, diagonalizável, $A^k = (PDP^{-1})^k = P D^k P^{-1}$
diagonalização	de A é obter P invertível e D diagonal : $P^{-1} A P = D$, onde
	→ as colunas da m. diagonalizante P, são n vetores próprios linearmente independentes de A;
	→ a diagonal principal da m. diagonal D é formada pelos valores próprios de A.
	→ a ordem dos vetores próprios em P determina a ordem dos valores próprios em D.
independência linear dos vetores próprios	teorema se $X_1, \dots, X_k$ são vetores próprios de A associados aos valores próprios distintos $\lambda_1, \dots, \lambda_k$, respetivamente, então $X_1, \dots, X_k$ são l.i.
	corolário sejam $\lambda_1, \dots, \lambda_k$ valores próprios distintos de A: A possui $\dim U_{\lambda_1} + \dots + \dim U_{\lambda_k}$ vetores próprios l.i.
diagonalização e dimensão dos subespaços próprios	teorema $p_A(\lambda) = (\lambda_1 - \lambda)^{n_{\lambda_1}} \dots (\lambda_k - \lambda)^{n_{\lambda_k}}$ então A é diagonalizável sse $\dim U_{\lambda_i} = n_{\lambda_i}$, $i = 1, \dots k$

observações

A, $n \times n$

1. Se A possui n valores próprios distintos $\Rightarrow$ é diagonalizável
2. Para descobrir se A com $k < n$ (valores próprios distintos de A) é diagonalizável, basta verificar se $\dim U_{\lambda_i} = n_{\lambda_i}$ só para $n_{\lambda_i} > 1$.
3. $\dim U_{\lambda_i} = \dim \mathrm{er}(A - \lambda I_n) = \mathrm{nul}(A - \lambda_i I_n) =$
$= n - \mathrm{car}(A - \lambda_i I_n)$

valores e vetores próprios de matrizes simétricas

teorema: uma matriz simétrica ($A^T = A$) $n \times n$ possui n valores próprios (reais).

teorema: vetores próprios de uma matriz simétrica associados a valores próprios distintos são ortogonais.

diagonalização ortogonal de matrizes simétricas

definição: P, quadrada, é ortogonal sse $\begin{cases} P^T P = I_n \\ P^{-1} = P^T \end{cases}$

teorema: $P = [P_1 \ldots P_n]$ ortogonal
$\Leftrightarrow \{P_1, \ldots, P_n\}$ é uma base o.n de $\mathbb{R}^n$

definição: A é ortogonalmente diagonalizável se possui uma matriz diagonalizante ortogonal.

teorema: Toda a matriz simétrica é ortogonalmente diagonalizável.