

- Um ponto $c \in \text{Int}(D_f)$ é de inflexão para f se e só se f'' muda de sinal em c .
 f'' pode mudar de sinal em c sem existir no ponto. Consequentemente, só zeros de f'' ou pontos onde f'' não existe podem ser pontos de inflexão de f .

Exercício 4.9 Verifique que $f(x) = \sin x$ tem pontos de inflexão em $x = k\pi$ para todo o $k \in \mathbb{Z}$.

Exercício 4.10 Estude a concavidade de $f(x) = x^3 - 12x$ indicando, os pontos de inflexão, caso existam.

Exercício 4.11 Estude a concavidade das seguintes funções e averigue se 0 é ponto de inflexão.

1. $f(x) = |x|(mx + q)$ e $g(x) = mx^2 + q|x|$, com $m, q \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ (esboce e analise o gráfico!);
2. $h(x) = x\sqrt{|x|}$ e $k(x) = x^2\sqrt{|x|}$.

Exercício 4.12 Esboce o gráfico das seguintes funções

$$f(x) = \frac{x^3}{x^2 + 1}, \quad g(x) = \frac{e^x}{x}, \quad h(x) = 5|x|e^{-|x|}.$$

e estude a função quanto a

- domínio;
- sinal e zeros;
- assíntotas;
- intervalos de monotonia e pontos de extremo;
- concavidade e pontos de inflexão;
- contradomínio.

4.3 Teorema e regra de Cauchy

Sejam $f, g : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ duas funções nas condições do Teorema de Lagrange. Então existem dois pontos $c_1, c_2 \in]a, b[$, em geral distintos, tais que

$$\frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} = \frac{f'(c_1)}{g'(c_2)}$$

supondo $g'(c_2) \neq 0$ (o que implica, pelo Teorema de Lagrange que seja $g(b) \neq g(a)$).

O Teorema de Cauchy, no entanto, permite expressar aquela razão à custa de um único ponto $c \in]a, b[$.

Teorema 4.7. (Teorema de Cauchy) Sejam f e g duas funções contínuas no intervalo $[a, b]$ e deriváveis em $]a, b[$. Se $g'(x) \neq 0, \forall x \in]a, b[$, então existe pelo menos um ponto $c \in]a, b[$ tal que

$$\frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} = \frac{f'(c)}{g'(c)}.$$

Demonstração. Das hipóteses relativas à continuidade e diferenciabilidade da função g e ao facto de ser $g'(x) \neq 0, \forall x \in]a, b[$, resulta, pelo Teorema de Rolle, que se tem $g(b) - g(a) \neq 0$ e, sendo assim, está bem definido o primeiro membro da igualdade a demonstrar.

Considere-se agora a função auxiliar

$$\varphi(x) = (g(b) - g(a))f(x) - (f(b) - f(a))g(x)$$

definida em $[a, b]$. É de imediata verificação que

- (1) φ é contínua em $[a, b]$;
- (2) φ é derivável em $]a, b[$;
- (3) $\varphi(a) = \varphi(b)$.

Então φ satisfaz as condições do Teorema de Rolle e, portanto, existe $c \in]a, b[$ tal que $\varphi'(c) = 0$. Consequentemente, vem

$$0 = (g(b) - g(a))f'(c) - (f(b) - f(a))g'(c)$$

onde resulta a igualdade pretendida. \square

Este teorema é também conhecido por Teorema dos Acréscimos Finitos Generalizado.

Observação 4.2. Substituindo no Teorema de Cauchy $g(x)$ por x obtém-se o Teorema de Lagrange.

Do ponto de vista prático, uma das aplicações mais importantes do Teorema de Cauchy é a seguinte

Teorema 4.8. (Regra de Cauchy) Sejam f e g duas funções definidas e deriváveis em todos os pontos de um intervalo aberto $I \subseteq \mathbb{R}$. Suponha-se que $a \in \mathbb{R}$ é um dos extremos de I e que $g'(x) \neq 0$ em todo o ponto $x \in I$.

Se, quando $x \rightarrow a$, $f(x)$ e $g(x)$ tendem simultaneamente para zero ou ambas para infinito (podendo ser $+\infty$, $-\infty$ ou uma para $+\infty$ e outra para $-\infty$) e existe em $\tilde{\mathbb{R}}$ o limite de $\frac{f'(x)}{g'(x)}$ quando $x \rightarrow a$,

então existe o limite de $\frac{f(x)}{g(x)}$ em $\tilde{\mathbb{R}}$ quando $x \rightarrow a$ e

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f'(x)}{g'(x)}.$$

Demonstração. A demonstração deste teorema pode ser vista em [Campos Ferreira, Introdução à Análise Matemática, Cap.IV]. \square

Visto que a regra de Cauchy é aplicável tanto ao caso do limite superior como ao caso do limite inferior do intervalo aberto I então, por combinação destas duas situações, pode obter-se

Corolário 7. Sejam I um intervalo aberto, c um ponto de I e f e g duas funções deriváveis em $I \setminus \{c\}$. Se $g'(x) \neq 0, \forall x \in I \setminus \{c\}$, e se as funções f e g tendem ambas para zero quando $x \rightarrow c$ ou ambas para infinito quando $x \rightarrow c$, então

$$\lim_{x \rightarrow c} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow c} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

sempre que o limite do segundo membro exista em $\tilde{\mathbb{R}}$.

Exemplo 4.6. Seja $\alpha \in \mathbb{R}^+$ uma constante. O limite

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x^\alpha}$$

assume a forma indeterminada $\frac{\infty}{\infty}$.

Como as funções $f(x) = \ln x$ e $g(x) = x^\alpha$ são deriváveis em $]0, +\infty[$ e $g'(x) \neq 0$ neste intervalo, pode aplicar-se a regra de Cauchy, obtendo-se então

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(\ln x)'}{(x^\alpha)'} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\frac{1}{x}}{\alpha x^{\alpha-1}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{\alpha x^\alpha} = 0$$

logo

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x^\alpha} = 0.$$

Observação 4.3. (a) Observe-se que pode existir o limite de $\frac{f(x)}{g(x)}$ e, verificando-se todas as condições da regra de Cauchy (Teorema 4.8), não existir o limite de $\frac{f'(x)}{g'(x)}$. É o que se passa no caso em que

$$f(x) = x^2 \cos\left(\frac{1}{x}\right) \quad \text{e} \quad g(x) = x$$

e se consideram os limites quando $x \rightarrow 0$.

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \lim_{x \rightarrow 0} \left(2x \cos\left(\frac{1}{x}\right) + \sin\left(\frac{1}{x}\right) \right)$$

Este limite não existe, contudo, existe o limite

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 \cos\left(\frac{1}{x}\right)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} x \cos\left(\frac{1}{x}\right) = 0$$

(b) Se $f'(x)$ e $g'(x)$ tendem ambas para zero ou para infinito quando $x \rightarrow a$ e a regra de Cauchy é aplicável a $\frac{f'(x)}{g'(x)}$, tem-se

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f''(x)}{g''(x)}$$

e assim sucessivamente.

(c) Os símbolos $0 \times \infty$ ou $+\infty - \infty$ que podem surgir no cálculo do limite de $f(x)g(x)$ ou de $f(x) - g(x)$, respectivamente, reduzem-se a $\frac{0}{0}$ ou $\frac{\infty}{\infty}$ pelas seguintes transformações

$$f(x)g(x) = \frac{f(x)}{\frac{1}{g(x)}} = \frac{g(x)}{\frac{1}{f(x)}}$$

$$f(x) - g(x) = f(x)g(x) \left[\frac{1}{g(x)} - \frac{1}{f(x)} \right].$$

(d) No caso da potência exponencial

$$f(x)^{g(x)}, \quad f(x) > 0, \quad \forall x \in I$$

podem levantar-se indeterminações tendo em conta que

$$f(x)^{g(x)} = e^{g(x) \ln(f(x))}.$$

Teorema 4.9. Seja f uma função definida num intervalo aberto I e n vezes derivável num ponto $c \in I$. Se

$$f(c) = f'(c) = \dots = f^{(n-1)}(c) = 0$$

então

$$\lim_{x \rightarrow c} \frac{f(x)}{(x - c)^n} = \frac{f^{(n)}(c)}{n!}.$$

$$f(x) = x^2 \cos\left(\frac{1}{x}\right) \quad \text{e} \quad g(x) = x$$

$$\lim_{u \rightarrow 0} \frac{f'(u)}{g(u)} = \lim_{u \rightarrow 0} \frac{2u \cos\left(\frac{1}{u}\right) - u^2 \sin\left(\frac{1}{u}\right) \times \left(-\frac{1}{u^2}\right)}{1}$$

$$= \lim_{u \rightarrow 0} \left(\underbrace{2u \cos\left(\frac{1}{u}\right)}_{\text{limit 0}} + \underbrace{\sin\left(\frac{1}{u}\right)}_{\text{limit 0}} \right) =$$

$$= \lim_{u \rightarrow 0} \sin\left(\frac{1}{u}\right) \rightarrow \text{exists}$$

$$\lim_{u \rightarrow 0} \frac{f(u)}{g(u)} = \lim_{u \rightarrow 0} \frac{u^2 \cos\left(\frac{1}{u}\right)}{u} = \lim_{u \rightarrow 0} u \cos\left(\frac{1}{u}\right) = 0$$

Demonstração. A demonstração pode fazer-se por indução sobre n .

(1) Se $n = 1$, uma vez que $f(c) = 0$, vem

$$\lim_{x \rightarrow c} \frac{f(x)}{x - c} = \lim_{x \rightarrow c} \frac{f(x) - f(c)}{x - c} = f'(c)$$

(resulta da definição de derivada de f em c).

(2) Suponha-se a afirmação verdadeira para $n = p$, ou seja, se

$$f(c) = f'(c) = \dots = f^{(p-1)}(c) = 0$$

então verifica-se

$$\lim_{x \rightarrow c} \frac{f(x)}{(x - c)^p} = \frac{f^{(p)}(c)}{p!}. \quad (4.2)$$

Suponha ainda que $f(c) = f'(c) = \dots = f^{(p-1)}(c) = f^{(p)}(c) = 0$.

Usando a regra de Cauchy vem

$$\lim_{x \rightarrow c} \frac{f(x)}{(x - c)^{p+1}} = \lim_{x \rightarrow c} \frac{f'(x)}{(p+1)(x - c)^p} = \frac{1}{(p+1)} \lim_{x \rightarrow c} \frac{f'(x)}{(x - c)^p} \quad (4.3)$$

e, como $f'(c) = (f')'(c) = \dots = (f')^{(p-1)}(c) = 0$, então de (4.2) resulta

$$\lim_{x \rightarrow c} \frac{f'(x)}{(x - c)^p} = \frac{(f')^{(p)}(c)}{p!} = \frac{f^{(p+1)}(c)}{p!}. \quad (4.4)$$

De (4.3) e (4.4) obtém-se

$$\lim_{x \rightarrow c} \frac{f(x)}{(x - c)^{p+1}} = \frac{f^{(p+1)}(c)}{(p+1)!}.$$

De (1) e (2) resulta provado o teorema. \square

Teorema 4.10. (Regra de l'Hôpital) Sejam f e g duas funções definidas num intervalo aberto I e deriváveis num ponto $c \in I$. Suponha-se que $g(x) \neq 0$ em $I \setminus \{c\}$, $f(c) = g(c) = 0$ e $g'(c) \neq 0$. Então, $\frac{f(x)}{g(x)}$ tem limite quando $x \rightarrow c$ e

$$\lim_{x \rightarrow c} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f'(c)}{g'(c)}.$$

Demonstração. Em $I \setminus \{c\}$, tem-se

$$\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f(x) - f(c)}{g(x) - g(c)} = \frac{\frac{f(x) - f(c)}{x - c}}{\frac{g(x) - g(c)}{x - c}}$$

onde, passando ao limite quando $x \rightarrow c$, se obtém o resultado pretendido. \square

Exercício 4.13 Deduza os Teoremas de Rolle e de Lagrange a partir do Teorema de Cauchy.

Exercício 4.14 Calcule os seguintes limites $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{g(x)}$ e $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f'(x)}{g'(x)}$ com $f(x) = x + \operatorname{sen} x$ e $g(x) = x + \cos x$. Pode aplicar a Regra de Cauchy para o cálculo destes limites?

Exercício 4.15 A Regra de Cauchy pode utilizar-se para limites laterais. Calcule o limite $\lim_{x \rightarrow 0^+} x \ln x$.

Exercício 4.16 Verifique que $\frac{e^{\frac{1}{x}}}{x} = \frac{\frac{1}{x}}{e^{-\frac{1}{x}}}$ e aplique a regra dos limites $\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{e^{\frac{1}{x}}}{x}$ e $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\frac{1}{x}}{e^{-\frac{1}{x}}}$.

Exercício 4.17 Verifique que se f tiver assíntota não vertical direita $y = mx + b$ e $\lim_{x \rightarrow +\infty} f'(x) = l$, então $m = l$ (analogamente à esquerda).

Exercício 4.18 Calcule os seguintes limites:

$$(a) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x \operatorname{sen} x}{1 - \cos x}; (b) \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^4 - 2x^3 + 2x - 1}{x^3 - 3x + 2}; (c) \lim_{x \rightarrow 0} (1 + x)^{\frac{1}{x}}; (d) \lim_{x \rightarrow 0^+} x^x; (e) \lim_{x \rightarrow +\infty} x \operatorname{arccot} x.$$

Analisemos agora um exemplo de uma função definida por ramos. Seja a um ponto de acumulação de D_f , domínio da função contínua dada por

$$f(x) = \begin{cases} g(x) & \text{se } x < a \\ b & \text{se } x = a \\ h(x) & \text{se } x > a \end{cases}$$

Note-se que $b = \lim_{x \rightarrow a^-} g(x) = \lim_{x \rightarrow a^+} h(x)$ pela continuidade de f .

- A derivada de f coincide com a derivada de g para $x < a$ e com a derivada de h para $x > a$ (nos pontos em que g e h são deriváveis).
- Contudo $f'(a)$ pode existir ou não. Considerem-se as funções

$$f_1(x) = \begin{cases} \frac{\operatorname{sen} x}{x} & \text{se } x < 0 \\ 1 & \text{se } x = 0 \\ \cos x & \text{se } x > 0 \end{cases} \quad \text{e} \quad f_2(x) = \begin{cases} x & \text{se } x < 0 \\ 0 & \text{se } x = 0 \\ -x & \text{se } x > 0 \end{cases}$$

Uma das derivadas existe e a outra não: $f'_1(0) = 0$ e $f'_2(0)$ não existe.

Lema 4.1. Seja f contínua em a . Pode-se afirmar que

$$\text{Se } \lim_{x \rightarrow a^+} f'(x) = l \in \widetilde{\mathbb{R}} \text{ então } f'_+(a) = l \quad \text{e} \quad \text{se } \lim_{x \rightarrow a^-} f'(x) = l \in \widetilde{\mathbb{R}} \text{ então } f'_-(a) = l.$$

Exercício 4.19

Verifique que, nas condições do lema, pode usar a Regra de L'Hôpital para calcular

$$f'_+(a) = \lim_{x \rightarrow a^+} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} \quad \text{e} \quad f'_-(a) = \lim_{x \rightarrow a^-} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}.$$

Teorema 4.11. Seja f contínua em a . Se $\lim_{x \rightarrow a} f'(x) = l \in \mathbb{R}$ então $f'(a) = l$.

Exemplo 4.7. Vamos caracterizar a derivada da função definida por

$$f(x) = \begin{cases} x^2 & \text{se } x \leq 1 \\ 2x - 1 & \text{se } x > 1. \end{cases}$$

A função f é contínua em \mathbb{R} pois x^2 é contínua em $x \leq 1$, $2x - 1$ é contínua em $x > 1$ e

$$f(1) = 1^2 = \lim_{x \rightarrow 1^+} (2x - 1).$$

Se $x < 1$ então $f'(x) = 2x$ e se $x > 1$ então $f'(x) = 2$.

Em $x = 1$ tem-se $f'_-(1) = f'_+(1) = 2$, ou seja, $f'(1) = 2$. Assim,

$$f'(x) = \begin{cases} 2x & \text{se } x \leq 1, \\ 2 & \text{se } x > 1. \end{cases}$$

Exercício 4.17 Verifique que se f tiver assíntota não vertical direita $y = mx + b$ e $\lim_{x \rightarrow +\infty} f'(x) = l$, então $m = l$ (analogamente à esquerda).

$$\text{H} \left\{ \begin{array}{l} \lim_{u \rightarrow +\infty} [f(u) - (mu + b)] = 0 \\ \lim_{u \rightarrow +\infty} f'(u) = l \end{array} \right. \Rightarrow T: m = l .$$

$$\lim_{u \rightarrow +\infty} (f(u) - (mu + b)) \times \frac{1}{mu + b} = 0 =$$

$$\lim_{u \rightarrow +\infty} \left(\frac{f(u)}{mu + b} - \frac{mu + b}{mu + b} \right) = \lim_{u \rightarrow +\infty} \left(\frac{f(u) - mu - b}{m} \right) = \frac{l - 1}{m}$$

"1"

$$\Rightarrow \frac{l - 1}{m} = 0$$

$$\Leftrightarrow l = m .$$

Exercício 4.20 Caracterize a derivada da função definida por

$$g(x) = \begin{cases} e^x & \text{se } x < 0 \\ \arctan x & \text{se } x \geq 0, \end{cases}$$

explicando porque é que $D_{g'} \neq \mathbb{R}$.

Observação 4.4. Mesmo que os limites laterais da derivada f' não existam no ponto a , podem existir as derivadas laterais em a mas é preciso calculá-las pela definição. Note-se que, neste caso, a derivada pode existir em a mas não é contínua.

Exercício resolvido 4.2. Verifique que a função dada por

$$f(x) = \begin{cases} x^2 \sin \frac{1}{x} & \text{se } x \neq 0 \\ 0 & \text{se } x = 0 \end{cases}$$

é contínua em \mathbb{R} .

Prove ainda que $f'(x) = 2x \sin \frac{1}{x} - \cos \frac{1}{x}$ se $x \neq 0$ e que não existe o $\lim_{x \rightarrow 0} f'(x)$. Apesar disso, a função é derivável também em $x = 0$ e assim $D_{f'} = \mathbb{R}$.

De facto, pela definição,

$$f'(0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(0+h) - f(0)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(h)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} h \sin \frac{1}{h} = 0.$$

4.4 Soluções dos exercícios do capítulo

Exercício 4.1 O domínio da função é $[-4, 6[$. Em $x = -4$ a função tem um mínimo local, $f(-4) = 2$; não tem mínimo global. Tem o máximo local 3 (que é também máximo global) em $x = -3$, $x = -2$, $x \in [0, 1[$ e $x \in [4, 5]$. Tem o máximo local 2 em $x = 2$ e em $x \in [3, 4[$.

Exercício 4.2

1. f contínua em $\mathbb{R} \setminus \{0\}$.
2. $y = \frac{\pi+1}{2}$ é uma assíntota horizontal à direita; $y = 1$ é uma assíntota horizontal à esquerda e não tem assíntotas verticais.
3. $\left(0, \frac{1}{2}\right)$ e $\left(-\frac{1}{\ln 2}, \frac{1}{2}\right)$.

Exercício 4.3 $g(0) = -\frac{\pi}{15} < 0$ e $g(2) = \frac{4\pi}{15} > 0$, como g é contínua em $[0, 2]$, g tem um zero neste intervalo.

Exercício 4.4 f é contínua em $]1, 2]$ mas não é limitada em $]1, 2]$. Não existe contradição com o Teorema de Weierstrass já que a continuidade não se verifica num intervalo fechado.

Exercício 4.5 $y - f(c) = \frac{e}{e-1}(x - c)$ onde $c = e + 1$.

Exercício 4.8 $f(1)$ é um mínimo local e absoluto.

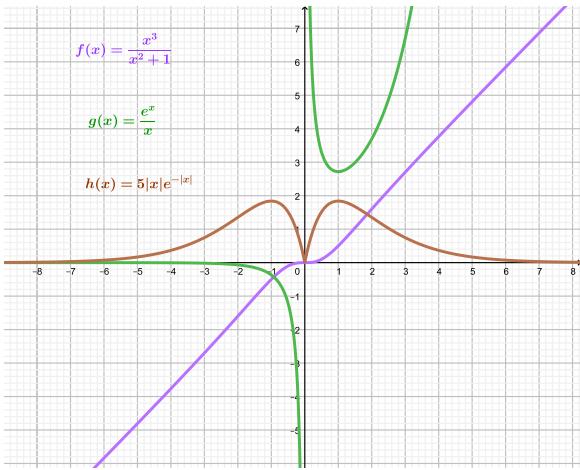
Exercício 4.10 $(0, f(0))$ ponto de inflexão; $]-\infty, 0]$ côncava; $[0, +\infty[$ convexa.

Exercício 4.11

1. $f(x) = |x|(mx + q)$ se $m > 0$ convexa em $]0, +\infty[$ e côncava em $]-\infty, 0[$; se $m < 0$ côncava em $]0, +\infty[$ e convexa em $]-\infty, 0[$; 0 é ponto de inflexão.
 $g(x) = mx^2 + q|x|$, se $m > 0$ convexa e se $m < 0$ côncava em \mathbb{R} e 0 não é ponto de inflexão.
2. $h(x) = x\sqrt{|x|}$ convexa em $]0, +\infty[$ e côncava em $]-\infty, 0[$. 0 é ponto de inflexão.
 $k(x) = x^2\sqrt{|x|}$ convexa em \mathbb{R} e 0 não é ponto de inflexão.

Exercício 4.12

- $D_f = D_h = \mathbb{R}; D_g = \mathbb{R} \setminus \{0\}$.
- $f(x) = 0 \Leftrightarrow x = 0$, $f(x) < 0 \Leftrightarrow x < 0$ e $f(x) > 0 \Leftrightarrow x > 0$; g não tem zeros, $g(x) < 0 \Leftrightarrow x < 0$ e $g(x) > 0 \Leftrightarrow x > 0$; $h(x) = 0 \Leftrightarrow x = 0$, $h(x) \geq 0, \forall x \in \mathbb{R}$.
- $y = x$ assíntota bilateral para f ; $x = 0$ assíntota vertical para g e $y = 0$ assíntota à esquerda para g ; $y = 0$ assíntota bilateral para h .
- f é crescente em \mathbb{R} ; g decrescente em $]-\infty, 0[$ e em $]0, 1[$, crescente em $]1, +\infty[$ e mínimo local em $(1, g(1)) = (1, e)$; , intervalos de monotonia e pontos de extremo; h é crescente em $]-\infty, -1[$ e em $]0, 1[$, decrescente em $]-1, 0[$ e em $]1, +\infty[$, mínimo local e absoluto em $(0, h(0)) = (0, 0)$ e máximo local e absoluto em $(1, h(1)) = (1, 5/e)$ e em $(-1, h(-1)) = (1, 5/e)$
- f tem concavidade voltada para baixo em $]-\infty, 0[$ e voltada para cima em $]0, +\infty[$, $(0, f(0)) = (0, 0)$ é ponto de inflexão; g tem concavidade voltada para baixo em $]-\infty, 0[$ e voltada para cima em $]0, +\infty[$, não tem ponto de inflexão; h tem concavidade voltada para cima em $]-\infty, -2[$ e em $]2, +\infty[$ e tem concavidade voltada para baixo em $]-2, 0[$ e em $]0, 2[$, pontos de inflexão $(-2, h(-2)) = (-2, 10/e^2)$ e $(2, h(2)) = (2, 10/e^2)$.
- $CD_f = \mathbb{R}; CD_g =]-\infty, 0] \cup [e, +\infty[; CD_h =]0, 5/e[$.



Exercício 4.14 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{g(x)} = 0$ e $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f'(x)}{g'(x)} = 2$. Não.

Exercício 4.15 0

Exercício 4.16 $\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{e^{\frac{1}{x}}}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{\frac{1}{x}}{e^{-\frac{1}{x}}} = 0$.

Exercício 4.18 (a) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x \sen x}{1 - \cos x} = 2$; (b) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^4 - 2x^3 + 2x - 1}{x^3 - 3x + 2} = 0$; (c) $\lim_{x \rightarrow 0} (1 + x)^{\frac{1}{x}} = e$; (d) $\lim_{x \rightarrow 0^+} x^x = 1$; (e) $\lim_{x \rightarrow +\infty} x \arccot x = 1$.

Exercício 4.20

$$g(x) = \begin{cases} e^x & \text{se } x < 0 \\ \frac{1}{1+x^2} & \text{se } x > 0. \end{cases}$$

Cálculo I

Cálculo com funções de uma variável

2009/10

Virgínia Santos

Departamento de Matemática



Universidade de Aveiro

Definição 3.1. Ao polinómio p_n definido por

$$\begin{aligned} p_n(x) &= \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(a)}{k!} (x-a)^k \\ &= f(a) + f'(a)(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n \end{aligned}$$

chamamos **polinómio de Taylor de ordem n da função f no ponto a** .

No caso em que $a = 0$ o polinómio de Taylor de ordem n da função f no ponto $a = 0$ é o polinómio

$$\begin{aligned} p_n(x) &= \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(0)}{k!} x^k \\ &= f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n \end{aligned}$$

que se designa por **polinómio de Mac-Laurin de ordem n da função f** .

Fórmula de Taylor

O teorema que apresentamos a seguir, habitualmente designado por **Teorema de Taylor**, dá-nos uma expressão para o erro que se comete quando se aproxima f pelo seu polinómio de Taylor de ordem n no ponto a .

Proposição 3.4. Sejam f uma função real de variável real definida num intervalo aberto $I \subset \mathbb{R}$ e $a \in I$. Suponhamos que f é $n+1$ vezes diferenciável em todo o ponto de I . Então, para todo o $b \in I \setminus \{a\}$, existe ξ entre a e b tal que

$$f(b) = f(a) + \sum_{k=1}^n \frac{f^{(k)}(a)}{k!} (b-a)^k + \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!} (b-a)^{n+1}.$$

$a+h \quad b-a=h$

$$f(a+h) = f(a) + f'(a)h + \frac{f''(a)}{2!} h^2 + R(h),$$

com $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{R(h)}{h^2} = 0$.

Exemplo: Para $f(x) = \sin(x)$ e $a=0$ obter os polinómios de Taylor e ver no GeoGebra os gráficos.

$$P(x)=\text{TaylorPolynomial}(\sin(x), 0, 9)$$

Exemplo 3.2.

2. Vamos determinar o polinómio de Taylor de ordem três da função f definida, para todo o $x \in \mathbb{R}$, por $f(x) = \sin x + x$ em torno do ponto $a = \pi$.

Temos

$$p_3(x) = f(\pi) + f'(\pi)(x - \pi) + \frac{f''(\pi)}{2}(x - \pi)^2 + \frac{f'''(\pi)}{3!}(x - \pi)^3.$$

Como

$$\begin{aligned} f(\pi) &= \pi \\ f'(\pi) &= \cos x + 1|_{x=\pi} \\ &= 0 \\ f''(\pi) &= -\sin x|_{x=\pi} \\ &= 0 \\ f'''(\pi) &= -\cos x|_{x=\pi} \\ &= 1 \end{aligned}$$

vem que

$$p_3(x) = \pi + \frac{1}{6}(x - \pi)^3.$$

Exemplo 3.6.

1. Consideremos a função f definida por $f(x) = \sqrt{x+1}$, para todo o $x \geq -1$.

Vamos determinar o polinómio de Mac-Laurin de ordem dois da função f e utilizar este polinómio para obter um valor aproximado de $\sqrt{2}$.

Temos

$$p_2(x) = f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)}{2}x^2 .$$

Como $f(0) = 1$,

$$f'(0) = \left. \frac{1}{2}(1+x)^{-1/2} \right|_{x=0} = \frac{1}{2} ,$$

e

$$f''(0) = \left. -\frac{1}{4}(1+x)^{-3/2} \right|_{x=0} = -\frac{1}{4}$$

temos

$$p_2(x) = 1 + \frac{1}{2}x - \frac{1}{8}x^2 .$$

Uma vez que $\sqrt{2} = f(1)$ obtém-se

$$\sqrt{2} \cong p_2(1) = \frac{11}{8} .$$

A Fórmula de Taylor de ordem n , a Série de Taylor e a majoração do erro são assuntos abordados em Cálculo II C.

Em Cálculo I C, como indicado no plano de aulas e competências, precisa apenas saber aplicar a fórmula:

- com $n=1$ para obter a aproximação linear
- com $n=2$ num ponto crítico no estudo de extremos

Exemplo: aproximação linear de $\exp(0,1)$

$$f(x) = e^x, \quad a = 0$$

$$e^{0,1} = f(0,1) = f\left(\underbrace{0}_{a} + \underbrace{0,1}_{h}\right) \approx f(a) + f'(a)h$$
$$1 + 1 \times 0,1 = 1,1$$

Exemplo: aproximação linear de $\cos(7\pi/12)$

$$f(x) = \cos(x), \quad a = \frac{\pi}{2}$$

$$\cos\left(\frac{7\pi}{12}\right) = f\left(\underbrace{\frac{7\pi}{12}}_{a}\right) = f\left(\underbrace{\frac{6\pi}{12}}_{a} + \underbrace{\frac{\pi}{12}}_{h}\right) \approx$$

$$f(a) + f'(a)h = 0 + (-1) \times \frac{\pi}{12} = -\frac{\pi}{12}$$

$$\left(\cos\left(\frac{7\pi}{12}\right) = -0,278\dots\right) \quad \approx -0,26$$

Exemplo: $f(x) = x \sin(x)$ em 0 , $f(0) = 0$

$$f'(x) = \sin x + x \cos x , f'(0) = 0$$

$$f''(x) = \cos x + \cos x - x \sin x$$

$$\cancel{x \cos x} - x \sin x , f''(0) = 2$$

$$f(x+h) = f(0) + f'(0)h + \underbrace{f''(0)}_{2!} h^2 + R(h)$$

$$f(x+h) = f(0) + h^2 + R(h)$$

Exemplo: $f(x) = \cosh(x)$ em 0

$$\cosh(u) = \frac{e^u + e^{-u}}{2}$$

$$\sinh(u) = \frac{e^u - e^{-u}}{2}$$

$$\cosh(0) = 1$$

$$\sinh(0) = 0$$

P_2 é matrizes de 0

(max., min. ou ponto de sela)

Ex: $f(x) = x^3$, é o ponto de sela.

sobre a derivada mao

Máx é maximo menor máximos.

