

**Exercício 6.8** Considere a função definida por

$$f(x) = \begin{cases} 1, & x \in [0, 1[ \\ 2, & x \in [1, 2[ \\ 3, & x \in [2, 3] \end{cases}$$

a) Mostre que  $F(x) = \int_0^x f(t)dt = \begin{cases} x, & x \in [0, 1[ \\ 2x - 1, & x \in [1, 2[ \\ 3x - 3, & x \in [2, 3] \end{cases}$

b) Verifique que  $F$  é contínua em  $[0, 3]$ .

**Observação 6.2.** Observe que

$$G(x) = \begin{cases} x, & x \in [0, 1[ \\ 2x, & x \in [1, 2[ \\ 3x, & x \in [2, 3] \end{cases}$$

não pode ser dado por  $G(x) = \int_0^x f(t)dt$ .

### 6.6.1 Primeiro Teorema Fundamental do Cálculo Integral (T.F.C.I.)

**Teorema 6.15.** Seja  $f$  uma função contínua num intervalo  $I$  e  $a \in I$ . Se

$$F(x) = \int_a^x f(t)dt,$$

para cada  $x \in I$ , então  $F$  é uma função diferenciável e  $F'(x) = f(x)$ .

*Demonastração.* Pelo teorema 6.14, a função  $F$  é contínua em  $I$ . O Teorema do Valor Médio para Integrais (teorema 6.13) diz-nos que, no intervalo  $]x_0, x[$  (supondo  $x > x_0$ , o caso contrário é análogo), existe  $c$  tal que

$$F(x) - F(x_0) = \int_{x_0}^x f(t)dt = f(c)(x - x_0)$$

e, portanto,

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{F(x) - F(x_0)}{x - x_0} = \lim_{x \rightarrow x_0} f(c).$$

Pela continuidade da função  $f$ ,  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(c) = f(x_0)$ . Como  $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{F(x) - F(x_0)}{x - x_0} = F'(x_0)$ , resulta que  $F'(x_0) = f(x_0)$ .  $\square$

**Corolário 1.** Se  $f$  é uma função contínua em  $I$  e  $a \in I$ , então  $f$  tem uma primitiva em  $I$  que é dada por  $F(x) = \int_a^x f(t)dt$ .

O teorema 6.15 pode ser generalizado usando como extremos funções deriváveis.

**Teorema 6.16.** Seja  $f$  uma função contínua no intervalo  $J$  e  $H$  a função definida por

$$H(x) = \int_{g_1(x)}^{g_2(x)} f(t)dt,$$

com  $g_1$  e  $g_2$  definidas em  $I \subseteq \mathbb{R}$  tais que  $g_1(I) \subseteq J$  e  $g_2(I) \subseteq J$ .

Se  $f$  é contínua em  $J$  e  $g_1$  e  $g_2$  são deriváveis em  $I$ , então

$$H'(x) = f(g_2(x))g'_2(x) - f(g_1(x))g'_1(x),$$

para todo o  $x \in I$ .

*Demonstração.* Comecemos por observar que  $H(x) = F(g_2(x)) - F(g_1(x))$  com  $F(x) = \int_a^x f(t)dt$  e portanto,

$$H'(x) = (F(g_2(x)) - F(g_1(x)))' = (F(g_2(x)))' - (F(g_1(x)))'$$

e usando a derivada da função composta podemos afirmar que

$$(F(g_2(x)))' = F'(g_2(x))g'_2(x) \text{ e } (F(g_1(x)))' = F'(g_1(x))g'_1(x)$$

e, finalmente, pelo teorema 6.15, como  $F'(x) = f(x)$ , temos

$$H'(x) = f(g_2(x))g'_2(x) - f(g_1(x))g'_1(x).$$

□

### Exercício 6.9

1. Seja  $F(x) = \int_0^{\operatorname{sen} x} (x+1)^2 \operatorname{arcsen} t dt$  uma função definida em  $[0, \frac{\pi}{2}]$ . Calcule  $F'(x)$ .

2. Determine  $k \in \mathbb{R}$  de modo que  $F'(1) = 0$ , sendo  $F$  a função dada por

$$F(x) = \int_{x^2}^{k \ln x} e^{-t^2} dt.$$

3. Seja  $F$  a função dada por  $F(x) = \int_0^x \left( \int_0^t e^{-u^2} du \right) dt$ . Calcule  $F''(x)$ .

4. Seja  $f$  uma função real de variável real contínua e positiva em  $\mathbb{R}$ .

Mostre que a função  $F$  dada por

$$F(x) = \int_0^{6x-x^2} f(t) dt$$

admite um só extremo no ponto de abcissa  $x = 3$ . Classifique esse extremo.

### 6.6.2 Segundo Teorema Fundamental do Cálculo Integral (T.F.C.I.)

**Teorema 6.17.** *Sejam  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  uma função contínua e  $F$  uma primitiva de  $f$ . Então*

$$\int_a^b f(x) dx = F(b) - F(a).$$

Habitualmente escrevemos  $[F(x)]_a^b$  ou  $F(x)|_a^b$  para denotar  $F(b) - F(a)$ .

*Demonstração.* Seja

$$\begin{aligned} G &: [a, b] \rightarrow \mathbb{R} \\ x &\rightarrow G(x) = \int_a^x f(t) dt. \end{aligned}$$

Por hipótese,  $F$  é uma primitiva de  $f$  em  $[a, b]$ . Do Primeiro T.F.C.I. podemos concluir que  $G$  é também uma primitiva de  $f$  em  $[a, b]$ . Logo, existe  $c \in \mathbb{R}$  tal que, para cada  $x \in [a, b]$ ,  $G(x) = F(x) + c$  (vimos no capítulo anterior que duas primitivas de uma mesma função apenas diferem de uma constante). Podemos determinar essa constante  $c$ . Em particular, para  $x = a$ , vem  $G(a) = F(a) + c$ . Como  $G(a) = \int_a^a f(t) dt = 0$  tem-se que  $c = -F(a)$ .

Por outro lado  $G(b) = F(b) + c$  e, como  $G(b) = \int_a^b f(t)dt$  então,

$$\int_a^b f(t)dt = G(b) = F(b) + c = F(b) - F(a).$$

□

**Exemplo 6.12.** Vejamos alguns exemplos simples de cálculo do integral definido, usando uma primitiva da função integranda.

1.  $\int_{-1}^0 e^x dx = e^x \Big|_{-1}^0 = e^0 - e^{-1} = 1 - \frac{1}{e}.$
2.  $\int_{-e}^{-1} \frac{1}{x} dx = \ln|x| \Big|_{-e}^{-1} = \ln 1 - \ln e = -1.$
3.  $\int_1^e x \ln x dx = \frac{x^2}{2} \ln x \Big|_1^e - \frac{1}{2} \int_1^e x dx = \frac{e^2}{2} - \frac{1}{2} \frac{x^2}{2} \Big|_1^e = \frac{e^2}{4} + \frac{1}{4}$

**Exercício 6.10** Calcule os seguintes integrais definidos:

1.  $\int_0^5 xe^{3x^2+4} dx;$
2.  $\int_0^2 \frac{1}{1+(2x)^2} dx;$
3.  $\int_1^3 \frac{1}{x(2x+4)} dx.$

### 6.6.3 Substituição no integral definido

O processo de substituição no integral definido torna-se mais simples do que nas primitivas, já que não será necessário regressar à variável inicial...se a substituição for bem feita!

**Exemplo 6.13.** Consideremos o integral definido  $\int_0^3 \frac{x}{\sqrt{x+1}} dx.$

Podemos calcular uma primitiva da função  $\frac{x}{\sqrt{x+1}}$  por substituição, usando a mudança de variável dada por  $t^2 = x + 1$ , com  $t > 0$ . Neste caso  $dx = 2tdt$  e a função a primitivar será:

$$\int \frac{t^2 - 1}{t} 2t dt = \frac{2}{3} t^3 - 2t + C, C \in \mathbb{R}.$$

Regressando à variável inicial temos

$$\int \frac{x}{\sqrt{x+1}} dx = \frac{2}{3} \sqrt{(x+1)^3} - 2\sqrt{x+1} + C, C \in \mathbb{R}.$$

Pelo segundo T.F.C.I. (teorema 6.17) vem

$$\int_0^3 \frac{x}{\sqrt{x+1}} dx = \frac{2}{3} \sqrt{(x+1)^3} - 2\sqrt{x+1} \Big|_0^3 = \frac{8}{3}.$$

Contudo, podemos fazer a substituição diretamente no integral definido. Atendendo a que  $x \in [0, 3]$ , pela substituição acima referida  $t^2 = x + 1$ , com  $t > 0$ , conduz a  $t \in [1, 2]$  (para  $x = 0$  vem  $t = 1$  e para  $x = 3$  vem  $t = 2$ ). Assim,

$$\int_0^3 \frac{x}{\sqrt{x+1}} dx = \int_1^2 \frac{t^2 - 1}{t} 2tdt = 2 \int_1^2 (t^2 - 1) dt = 2 \left( \frac{t^3}{3} - t \right) \Big|_1^2 = \frac{8}{3}.$$

**Exercício 6.10** Calcule os seguintes integrais definidos:

$$1. \int_0^5 xe^{3x^2+4} dx; = \lim_{M \rightarrow +\infty} \sum_{i=1}^M f(\xi_i^*) (\varphi_i - \varphi_{i-1}) =$$

*centrando o ponto integral*

*muir theobles*

*(particularizar)* =  $\lim_{M \rightarrow +\infty} \sum_{i=1}^M f\left(\frac{5i}{M}\right) \cdot \frac{5}{M} = \dots$

$$\frac{1}{6} \int_0^5 6ue^{3u^2+4} du = \frac{1}{6} \left[ e^{3u^2+4} \right]_0^5 =$$

$$= \frac{1}{6} \left( e^{3 \times 25 + 4} - e^{0+4} \right) = \frac{1}{6} (e^{79} - e^4).$$

$$2. \int_0^2 \frac{1}{1+(2x)^2} dx; = \frac{1}{2} \int_0^2 \frac{2}{1+(2u)^2} du =$$

$$= \frac{1}{2} \left[ \operatorname{arctan}(2u) \right]_0^2 = \frac{1}{2} (\operatorname{arctan} 4 - \operatorname{arctan} 0)$$

$$= \frac{1}{2} \operatorname{arctan} 4$$

$$3. \int_1^3 \frac{1}{x(2x+4)} dx. = \frac{1}{2} \int_1^3 \frac{1}{u(u+2)} du =$$

$$\frac{1}{u(u+2)} = \frac{A}{u} + \frac{B}{u+2} \Rightarrow \frac{1}{u(u+2)} = \frac{A(u+2) + Bu}{u(u+2)}$$

$$\Leftrightarrow 1 = A(u+2) + B u$$

$u=0 \Rightarrow 1 = A \cdot 2 \Leftrightarrow A = \frac{1}{2}$

$u=-2 \Rightarrow 1 = B \cdot (-2) \Leftrightarrow B = -\frac{1}{2}$

$$= \frac{1}{2} \int_1^3 \left( \frac{\frac{1}{2}}{u} + \frac{-\frac{1}{2}}{u+2} \right) du =$$

$$= \frac{1}{4} \int_1^3 \left( \frac{1}{u} - \frac{1}{u+2} \right) du = \frac{1}{4} \left[ \ln u - \ln(u+2) \right]_1^3$$

$$= \frac{1}{4} \left[ \underbrace{\ln 3 - \ln 5}_{F(3)} - \underbrace{(\ln 1 - \ln 3)}_{F(1)} \right]$$

**Exemplo 6.13.** Consideremos o integral definido  $\int_0^3 \frac{x}{\sqrt{x+1}} dx.$  =

$$\boxed{u+1=t^2}, \quad t > 0$$

$$\boxed{u=t^2-1}$$

$$h(t)$$

$$du = 2t dt$$

$$u=0 \Rightarrow t=1$$

$$u=3 \Rightarrow t=2$$

$$t = \sqrt{u+1}$$

$$h^{-1}(u)$$

$$h^{-1}(0) = \sqrt{0+1} = 1$$

$$h^{-1}(3) = \sqrt{3+1} = 2$$

$$= \int_1^2 \frac{t^2-1}{\sqrt{t^2}} \cdot 2t dt =$$

$$= 2 \int_1^2 \frac{t^2-1}{\sqrt{t}} dt =$$

$$= 2 \int_1^2 (t^2-1) dt =$$

$$= 2 \left[ \frac{t^3}{3} - t \right]_1^2 = 2 \left( \frac{8}{3} - 2 - \frac{1}{3} + 1 \right) = \frac{8}{3}$$

**Teorema 6.18.** Se  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  é contínua e  $h : I \rightarrow \mathbb{R}$  é derivável, invertível e  $h(I) \subseteq [a, b]$ , sendo  $I$  um intervalo de  $\mathbb{R}$ , então,

$$\int_a^b f(x) dx = \int_{h^{-1}(a)}^{h^{-1}(b)} f(h(t)) h'(t) dt.$$

No exemplo 6.13 a função  $f$  definida em  $[a, b] = [0, 3]$  é dada por  $f(x) = \frac{x}{\sqrt{x+1}}$ . A função  $h$  é definida por  $h(t) = t^2 - 1$  em  $I = [1, 2]$ . A função  $h$  é invertível neste intervalo e  $h^{-1}(x) = \sqrt{x+1}$ , sendo  $h^{-1}(a) = h^{-1}(0) = 1$  e  $h^{-1}(b) = h^{-1}(3) = 2$ . Temos então que

$$\int_0^3 \frac{x}{\sqrt{x+1}} dx = \int_1^2 \underbrace{\frac{t^2-1}{t}}_{f(h(t))} \underbrace{2t}_{h'(t)} dt.$$

**Proposição 6.2.** Sejam  $D \subseteq \mathbb{R}$  um conjunto simétrico, isto é, para todo o  $x \in D$ , o seu simétrico também pertence a  $D$  ( $-x \in D$ ), e  $f : D \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  uma função integrável em qualquer subconjunto de  $D$  do tipo  $[-a, a]$ . Então:

1. se  $f$  é uma função par, isto é,  $f(-x) = f(x)$ ,  $\forall x \in D$ ,  $\int_{-a}^a f(x) dx = 2 \int_0^a f(x) dx$ ;
2. se  $f$  é uma função ímpar, isto é,  $f(-x) = -f(x)$ ,  $\forall x \in D$ ,  $\int_{-a}^a f(x) dx = 0$ .

*Demonstração.* Comecemos por observar que, sendo  $f$  integrável em  $[-a, a]$ ,

$$\int_{-a}^a f(x) dx = \int_{-a}^0 f(x) dx + \int_0^a f(x) dx.$$

Consideremos agora o integral  $\int_{-a}^0 f(x) dx$  e a mudança de variável  $x = -t$ . Então:

$$\int_{-a}^0 f(x) dx = \int_a^0 f(-t) (-dt) = - \int_a^0 f(-t) dt = \int_0^a f(-t) dt.$$

1. se  $f$  é uma função par,  $\int_0^a f(-t) dt = \int_0^a f(t) dt$  e portanto,

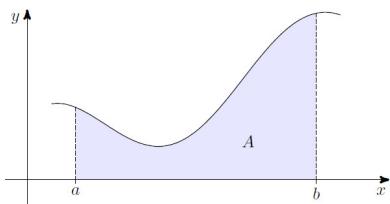
$$\int_{-a}^a f(x) dx = \int_{-a}^0 f(x) dx + \int_0^a f(x) dx = \int_0^a f(x) dx + \int_0^a f(x) dx = 2 \int_0^a f(x) dx.$$

2. se  $f$  é uma função ímpar,  $\int_0^a f(-t) dt = - \int_0^a f(t) dt$  e portanto,

$$\int_{-a}^a f(x) dx = \int_{-a}^0 f(x) dx + \int_0^a f(x) dx = - \int_0^a f(x) dx + \int_0^a f(x) dx = 0.$$

□

## 6.7 Aplicação do integral de Riemann ao cálculo de áreas

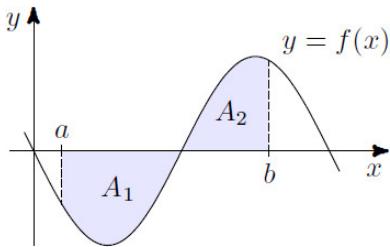


**Figura 6.10:** Área sob o gráfico da função  $f$ .

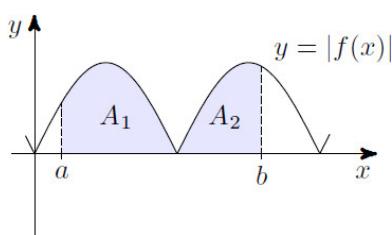
Seja  $f$  uma função não negativa e contínua num intervalo  $[a, b]$ . A área  $A$  da região limitada pelo gráfico de  $f$ , pelo eixo  $Ox$  e pelas retas de equações  $x = a$  e  $x = b$  (ver figura 6.10) é dada por

$$A = \int_a^b f(x)dx.$$

Se  $f$  é uma função contínua num intervalo  $[a, b]$  então  $\int_a^b |f(x)|dx$  é a área da região limitada pelo gráfico de  $|f|$ , pelo eixo  $Ox$  e pelas retas de equações  $x = a$  e  $x = b$ .



**Figura 6.11:** Área da região limitada pelo gráfico da função  $f$ , pelo eixo das abcissas e pelas retas  $x = a$  e  $x = b$ .



**Figura 6.12:** Área da região limitada pelo gráfico da função  $|f|$ , pelo eixo das abcissas e pelas retas  $x = a$  e  $x = b$ .

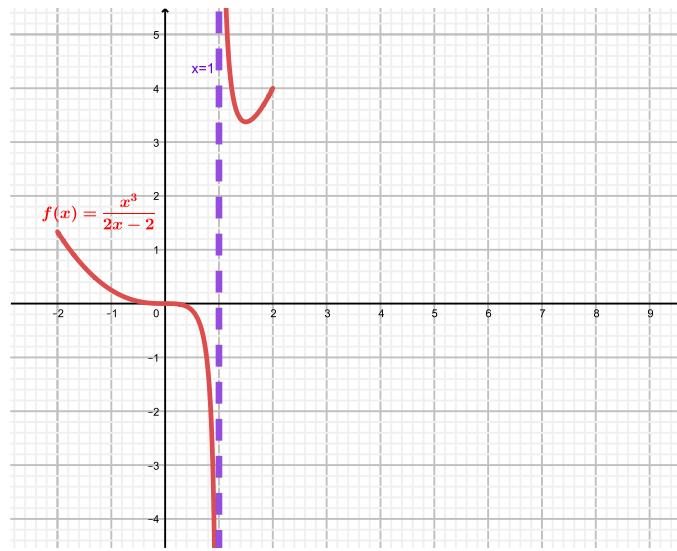
**Exercício resolvido 6.2.** Considere a função real de variável real dada por  $f(x) = \frac{x^3}{2x - 2}$ .

1. Estude o sinal da função  $f$ .
2. Exprima, em termos de integrais definidos, a área da região do plano limitada pelo eixo  $Ox$ , pelas retas de equações  $x = -1$  e  $x = \frac{1}{2}$  e pelo gráfico de  $f$ .

**Resolução do exercício 6.2.** Para determinar o sinal da função  $f$  podemos construir um quadro de sinal

		0	1	
$x^3$	-	0	+	+
$2x - 2$	-	-	-	0
$f(x) = \frac{x^3}{2x - 2}$	+	0	-	ND

Portanto,  $f(x) \leq 0$ , em  $[0, 1[$  e  $f(x) > 0$  em  $] -\infty, 0 [ \cup ] 1, +\infty [$ .

Figura 6.13: Esboço do gráfico da função  $f$ .

A área pedida é dada por

$$A = \int_{-1}^{\frac{1}{2}} |f(x)| dx = \int_{-1}^0 \frac{x^3}{2x-2} dx + \int_0^{-\frac{1}{2}} \frac{x^3}{2x-2} dx$$

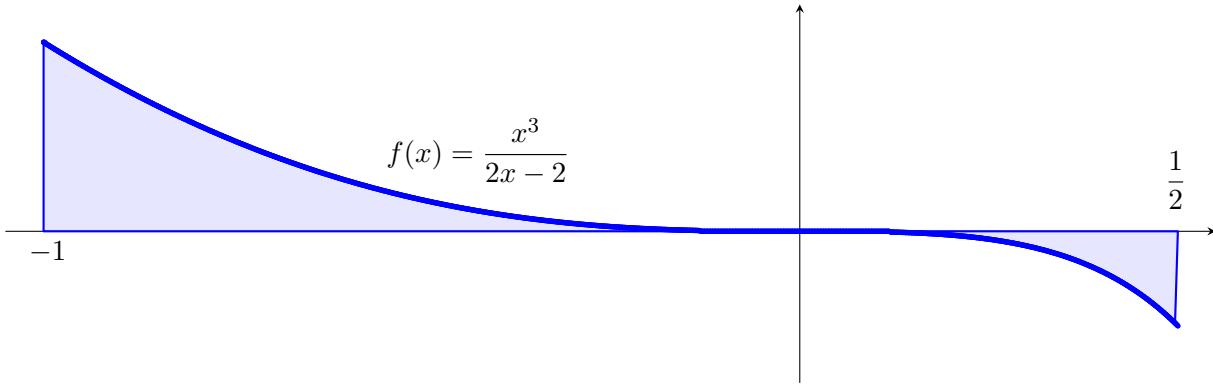


Figura 6.14: Área referente ao exercício 6.2.

Uma primitiva de  $f(x) = \frac{x^3}{2x-2}$ <sup>1</sup> é  $F(x) = \frac{1}{2} \left( \frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{2} + x + \ln|x-1| \right)$  e portanto,

$$A = \frac{1}{2} \left( \frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{2} + x + \ln|x-1| \right) \Big|_{-1}^0 - \frac{1}{2} \left( \frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{2} + x + \ln|x-1| \right) \Big|_0^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{12}.$$

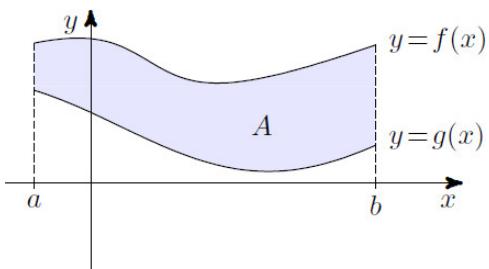
### 6.7.1 Área compreendida entre duas curvas

Sejam  $f$  e  $g$  funções contínuas em  $[a, b]$ . A área  $A$  da região do plano limitada inferiormente pelo gráfico de  $g$  e limitada superiormente pelo gráfico de  $f$  e pelas retas de equações  $x = a$  e  $x = b$ , é dada por

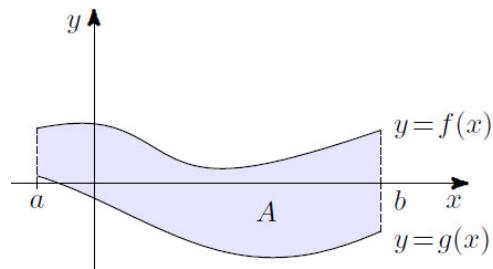
$$A = \int_a^b (f(x) - g(x)) dx.$$

---

<sup>1</sup>Note que  $\frac{x^3}{2x-2} = \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{2}x + \frac{1}{2} + \frac{1}{2(x-1)}$ .



**Figura 6.15:** Área compreendida entre duas funções não negativas em  $[a, b]$ .

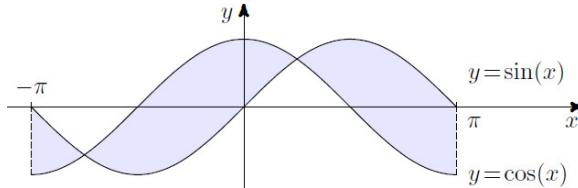


**Figura 6.16:** Área compreendida entre duas funções em  $[a, b]$ .

Observe que, em geral, a área \$A\$ da região do plano limitada pelo gráfico de \$f\$, pelo gráfico de \$g\$ e pelas retas de equações \$x = a\$ e \$x = b\$, é dada por

$$A = \int_a^b |f(x) - g(x)| dx.$$

**Exercício resolvido 6.3.** Exprima, em termos de integrais definidos, a área da região do plano delimitada pelos gráficos das funções \$f(x) = \sin x\$ e \$g(x) = \cos x\$ e pelas retas \$x = -\pi\$ e \$x = \pi\$.



**Figura 6.17:** Área da região definida no exercício 6.3.

**Resolução do exercício 6.3.** No intervalo  $[-\pi, \pi]$  as duas funções intersetam-se em  $-\frac{3\pi}{4}$  e em  $\frac{\pi}{4}$ .

A área sombreada é dada por

$$A = \int_{-\pi}^{\pi} |\sin x - \cos x| dx.$$

Atendendo ao gráfico e aos pontos de interseção das duas funções, podemos concluir que

$$A = \int_{-\pi}^{-\frac{3\pi}{4}} (\sin x - \cos x) dx + \int_{-\frac{3\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} (\cos x - \sin x) dx + \int_{\frac{\pi}{4}}^{\pi} (\sin x - \cos x) dx.$$

Assim,

$$A = (-\cos x - \sin x) \Big|_{-\pi}^{-\frac{3\pi}{4}} + (\sin x + \cos x) \Big|_{-\frac{3\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} - (\cos x + \sin x) \Big|_{\frac{\pi}{4}}^{\pi} = 4\sqrt{2}.$$

**Exercício 6.11** Exprima, em termos de integrais definidos, a área da região limitada pelos gráficos das funções dadas por  $f(x) = \frac{1 + \cos^2 x}{1 + e^{2x}}$  e  $g(x) = \frac{\cos^2 x}{1 + e^{2x}}$ , em  $[\ln 2, \ln 5]$ .

Mostre ainda que, quaisquer que sejam  $a, b \in \mathbb{R}$  com  $a < b$ , a área da região limitada pelos gráficos das duas funções em  $[a, b]$  é dada por  $\frac{1}{2} \ln \left( \frac{1 + e^{2a}}{1 + e^{2b}} \right) + b - a$ .

**Exercício 6.12** Exprima, em termos de integrais definidos, a área da região do primeiro quadrante limitada pela parábola de equação  $y = x^2 - 2x + 2$  e pela reta que lhe é tangente no ponto  $(2, 2)$ .

## 6.8 Exercícios do capítulo

**Exercício 6.13** Calcule os seguintes integrais definidos:

1.  $\int_0^1 e^{-x} \cos(e^{-x}) dx$
2.  $\int_4^9 \frac{dx}{\sqrt{x-1}}$  (Sugestão: Faça a substituição  $t = \sqrt{x}$ )

**Exercício 6.14** Considere a função  $F$  definida por

$$F(x) = \int_{x^2}^{k \ln(x)} e^{-t^2} dt$$

1. Determine a expressão da derivada de  $F$ ,  $F'(x)$ .
2. Determine  $k \in \mathbb{R}$  de modo a que  $F'(1) = 0$ .

**Exercício 6.15** Considere a função definida em  $\mathbb{R}$  por  $f(x) = xe^x$ .

1. Diga, justificando, se a função  $f$  é integrável em qualquer intervalo  $[a, b] \subset \mathbb{R}$  com  $b > a$ .
2. Calcule o valor da área da região limitada do plano situada entre  $x = -1$  e  $x = 1$  e compreendida entre o gráfico de  $f$  e o eixo das abscissas.

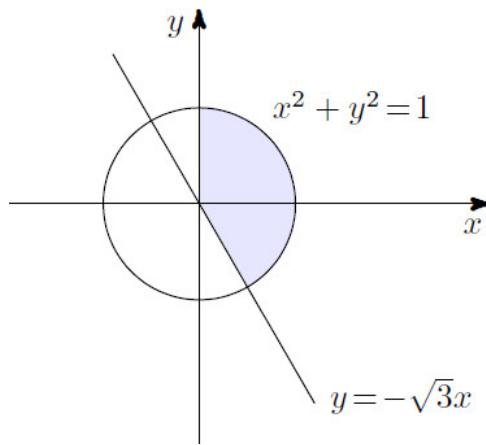
**Exercício 6.16** Considere a função  $F$  definida por  $F(x) = \int_0^{x^2} e^{-t^2} \arctan t dt$ , para todo o  $x \in \mathbb{R}$ .

1. Determine  $F'(x)$  e o seu domínio.
2. Estude  $F$  quanto à existência de extremos locais.

**Exercício 6.17** Considere a função  $F$  definida por  $F(x) = \int_0^{x^2} t \ln(1 + e^t) dt$ , para todo o  $x \in \mathbb{R}$ .

1. Justifique que  $F$  é diferenciável em  $\mathbb{R}$  e determine  $F'(x)$ .
2. Estude  $F$  quanto à monotonía e existência de extremos locais.

**Exercício 6.18** Exprima, em termos de integrais definidos, a área da região assinalada na figura



**Figura 6.18:** Área da região definida no exercício 6.18.

**Exercício 6.19** Seja  $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y \geq (x-3)^2 \wedge y \geq x-1 \wedge y \leq 4\}$ .

1. Represente geometricamente a região  $A$ .
2. Calcule a área da região  $A$ .

**Exercício 6.20** Determine a área da região de  $\mathbb{R}^2$  delimitada pelos gráficos de  $f(x) = \sqrt{4+x^2}$  e  $g(x) = x$  e pelas retas de equações  $x = -2$  e  $x = 2$ .

**Exercício 6.21** Considere a função  $F$  dada por

$$F(x) = \int_0^x \frac{1}{1+t^2} dt + \int_0^{\frac{1}{x}} \frac{1}{1+t^2} dt$$

para  $x \in [1, +\infty[$ . Determine  $F(1)$ .

**Exercício 6.22** Considere a função real de variável real  $f$  definida por

$$f(x) = \begin{cases} x \ln x & \text{se } x > 0 \\ k & \text{se } x \leq 0 \end{cases}, \quad \text{onde } k \text{ é um número real.}$$

1. Diga, justificando, para que valores de  $k$  a função  $f$  é integrável no intervalo  $[-1, 1]$ .
2. Determine a família de primitivas  $\int x \ln x dx$ , definidas no intervalo  $]0, +\infty[$ .
3. Determine o valor da área da região limitada do plano situada entre  $x = 1/e$  e  $x = e$  e delimitada pelo gráfico de  $f$  e pelo eixo das abscissas.

**Exercício 6.23** Considere a função definida por  $f(x) = \int_0^x \frac{1}{1+t+t^2} dt$ . Determine o subconjunto de  $\mathbb{R}$  onde o gráfico da função  $f$  tem concavidade voltada para cima.

**Exercício 6.24** Prove que se  $f$  é uma função contínua em  $\mathbb{R}$  e  $a$  é uma constante arbitrária, então

$$\int_0^a f(x) dx = \int_0^a f(a-x) dx.$$

## Soluções dos exercícios

**Exercício 6.1** 1.  $S_f(\mathcal{P}, \mathcal{C}_1) = \frac{125}{216}$ ; 2.  $S_f(\mathcal{P}, \mathcal{C}_2) = \frac{23}{72}$ ; 3.  $S_f(\mathcal{P}', \mathcal{C}') = \frac{7}{32}$ .

**Exercício 6.2**  $S_f(\mathcal{P}, \mathcal{C}_1) = -\frac{125}{216}$ .

**Exercício 6.4**  $\int_0^3 (2x + 1)dx = 12$ .

### Exercício 6.5

1.  $f$  é contínua em  $[-1, 2]$ , logo, pelo teorema 6.1 é integrável.
2.  $g$  é limitada em  $[1, 5]$  e descontínua apenas nos inteiros  $\{1, 2, 3, 4, 5\}$ , logo, pelo teorema 6.2 é integrável.
3.  $h$  é limitada em  $[0, 3]$  e descontínua em  $x = 1$ , logo, pelo teorema 6.2 é integrável.
4. A função  $h$  não é limitada em  $[0, 1]$ , logo, pelo teorema 6.5 não é integrável neste intervalo.
5. A função  $i$  não é limitada em  $[0, \pi]$  já que  $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}^-} i(x) = +\infty$ , logo, pelo teorema 6.5,  $i$  não é integrável neste intervalo.

**Exercício 6.7** Sim.  $\int_0^2 g(x)dx = 2$

### Exercício 6.9

1.  $F'(x) = 2(x+1) \int_0^{\operatorname{sen} x} \arcsen t dt + (x+1)^2 \cos x$ .
2.  $k = \frac{2}{e}$ .
3.  $F''(x) = e^{-x^2}$ .
4.  $x = 3$  é um maximizante de  $F$ .

### Exercício 6.10

1.  $\int_0^5 xe^{3x^2+4}dx = \frac{1}{6}(e^{79} - e^4)$ ;
2.  $\int_0^2 \frac{1}{1+(2x)^2}dx = \frac{1}{2}\arctan 4$ ;
3.  $\int_1^3 \frac{1}{x(2x+4)}dx = \frac{1}{4}\ln \frac{18}{10}$ .

**Exercício 6.11**  $A = \int_{\ln 2}^{\ln 5} \frac{1}{1+e^{2x}} dx$ .

**Exercício 6.12**  $A = \int_0^1 (x^2 - 2x + 2)dx + \int_1^2 (x^2 - 4x + 4)dx$ .

**Exercício 6.13** 1.  $\operatorname{sen} 1 - \operatorname{sen} \left(\frac{1}{e}\right)$ ; 2.  $2(1 + \ln 2)$ .

**Exercício 6.14** 1.  $F'(x) = e^{-k^2 \ln^2 x} - 2xe^{-x^4}$ ; 2.  $k = \frac{2}{e}$ .

**Exercício 6.15** 1. Sim, porque é uma função contínua em  $\mathbb{R}$ , logo também o é em qualquer intervalo  $[a, b]$ . 2.  $2 - 2/e$ .

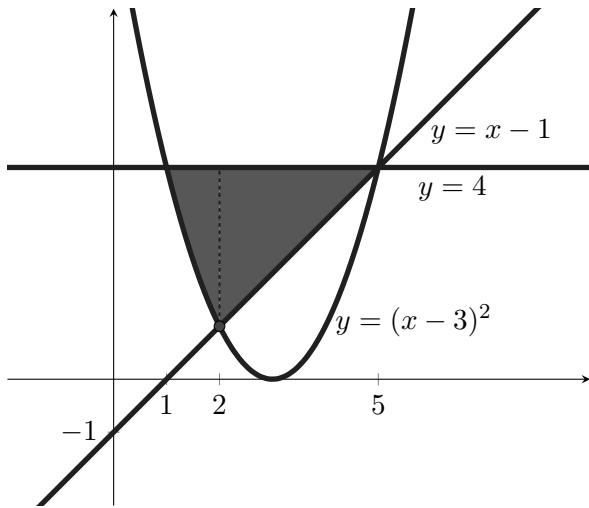
**Exercício 6.16** 1.  $F'(x) = 2xe^{-x^4} \arctan(x^2)$ ,  $x \in \mathbb{R}$ ; 2.  $F$  admite um mínimo absoluto em  $x = 0$  sendo  $F(0) = 0$ . Não tem máximo.

**Exercício 6.17** 1.  $F'(x) = 2x^3 \ln(1 + e^{x^2})$ ; 2.  $F$  tem um mínimo absoluto em  $x = 0$  e é zero; é estritamente decrescente em  $]-\infty, 0[$  e estritamente crescente em  $]0, +\infty[$ .

**Exercício 6.18**  $A = \int_0^1 \sqrt{1-x^2} dx + \int_0^{\frac{1}{2}} \sqrt{3}x dx + \int_0^{\frac{1}{2}} \sqrt{1-x^2} dx$ .

**Exercício 6.19**

1.



$$2. \quad A = \frac{37}{6}.$$

**Exercício 6.20**  $A = \frac{32}{3}$ .

**Exercício 6.21**  $A = \frac{\pi}{2}$ .

**Exercício 6.22** 1. Para qualquer valor de  $k$  a função é seccionalmente contínua (note que  $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = 0$ ), logo integrável em qualquer intervalo de números reais. Em particular, se  $k = 0$  a função é contínua. 2.  $F(x) = \frac{x^2}{2} \ln x - \frac{x^2}{4} + C$ ,  $C \in \mathbb{R}$ ; 3.  $\frac{1}{2} + \frac{1}{4e^2} + \frac{e^2}{4}$ .

**Exercício 6.23** O gráfico tem a concavidade voltada para cima em  $]-\infty, -\frac{1}{2}[$

**Exercício 6.24** Se  $f$  é contínua em  $\mathbb{R}$ , então é integrável em qualquer intervalo da forma  $[0, a]$ , com  $a \in \mathbb{R}$ . Efetuando a mudança de variável  $u = a - x$  ( $x = a - u$ ,  $dx = -1 \cdot du$ ,  $x = 0 \Rightarrow u = a$  e  $x = a \Rightarrow u = 0$ ), obtém-se

$$\int_0^a f(a - x) dx = \int_a^0 f(u)(-1)du = - \int_a^0 f(u) du = \int_0^a f(u) du = \int_0^a f(x) dx,$$

o que demonstra a propriedade pedida.

**Exercício 6.13** Calcule os seguintes integrais definidos:

$$1. \int_0^1 e^{-x} \cos(e^{-x}) dx = - \int_0^1 \underbrace{-e^{-u} \cos(e^{-u})}_{(\sin(e^{-u}))'} du = \\ - \left[ \sin(e^{-u}) \right]_0^1 = - \left( \sin(e^{-1}) - \sin(e^0) \right) = \sin(1) - \sin\left(\frac{1}{e}\right).$$

$$2. \int_4^9 \frac{dx}{\sqrt{x-1}} \quad (\text{Sugestão: Faça a substituição } t = \sqrt{x}, \quad t > 0) \\ \text{ou} \quad u = t^2, \quad du = 2t dt$$

$$\int_2^3 \frac{2t}{t-1} dt = \quad u = 4 \Rightarrow t = 2 \\ \quad u = 9 \Rightarrow t = 3 \\ 2 \int_2^3 \frac{t}{t-1} dt = 2 \int_2^3 \frac{t-1+1}{t-1} dt = \\ = 2 \int_2^3 \left(1 + \frac{1}{t-1}\right) dt = 2 \left[ t + \ln(t-1) \right]_2^3 = \\ = 2 \left( 3 + \ln(2) - 2 - \ln(1) \right) = 2 + 2 \ln 2.$$

**Exercício 6.14** Considere a função  $F$  definida por

$$F(x) = \int_{x^2}^{k \ln(x)} e^{-t^2} dt$$

$\underbrace{f(t)}$

- Determine a expressão da derivada de  $F$ ,  $F'(x)$ .
- Determine  $k \in \mathbb{R}$  de modo a que  $F'(1) = 0$ .

$$\begin{aligned} 1. \quad F'(u) &= f(k \ln u) \cdot (k \ln u)' - f(u^2) \cdot (u^2)' \\ &= f(k \ln u) \cdot \frac{k}{u} - f(u^2) \cdot 2u \\ &= e^{-(k \ln u)^2} \cdot \frac{k}{u} - e^{-(u^2)^2} \cdot 2u \end{aligned}$$

(falta isto na solução)

$$2. \quad F'(1) = 0 \Leftrightarrow e^0 \cdot \frac{k}{1} - e^{-1} \cdot 2 = 0 \Rightarrow k = \frac{2}{e}$$

**Exercício 6.16** Considere a função  $F$  definida por  $F(x) = \int_0^{x^2} \underbrace{e^{-t^2} \arctan t dt}_{f(t)}$ , para todo o  $x \in \mathbb{R}$ .

- Determine  $F'(x)$  e o seu domínio.

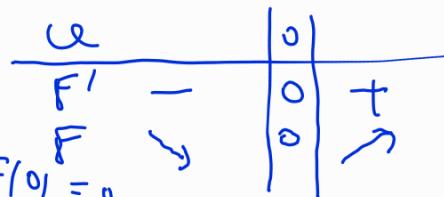
- Estude  $F$  quanto à existência de extremos locais.

$$\begin{aligned} 1. \quad F'(u) &= f(u^2) \cdot 2u - \underbrace{f(0) \cdot 0}_0 = e^{-(u^2)^2} \operatorname{arctan}(u^2) \cdot 2u = \\ &= 2u \underbrace{e^{-u^4}}_{>0} \underbrace{\operatorname{arctan}(u^2)}_{\geq 0} \end{aligned}$$

$D_{\operatorname{arctan}} = \mathbb{R} \Rightarrow D_F = \mathbb{R}$ .

$$2. \quad F'(u) = 0 \Leftrightarrow u = 0$$

$F$  tem um mínimo local em  $u = 0$  de valor  $F(0) = 0$

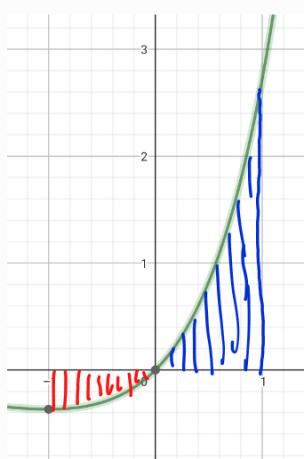
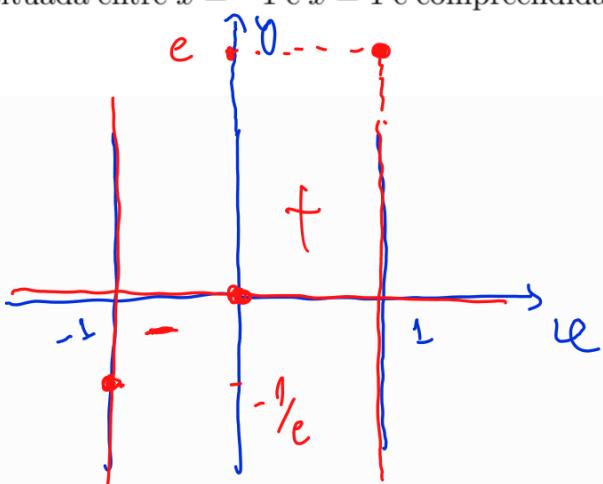


**Exercício 6.15** Considere a função definida em  $\mathbb{R}$  por  $f(x) = xe^x$ .

- Diga, justificando, se a função  $f$  é integrável em qualquer intervalo  $[a, b] \subset \mathbb{R}$  com  $b > a$ .
- Calcule o valor da área da região limitada do plano situada entre  $x = -1$  e  $x = 1$  e compreendida entre o gráfico de  $f$  e o eixo das abscissas.

2. Área =

$$-\int_{-1}^0 f(u) du + \int_0^1 f(u) du$$



$$\begin{aligned} \int_0^1 e^u \cdot u du &= \left[ e^u \cdot u \right]_0^1 - \int_0^1 e^u \cdot 1 du \\ &= e^1 - 0 \cdot e^0 - \left[ e^u \right]_0^1 \\ &= e - (e - 1) = 1 \end{aligned}$$

**Exercício 6.17** Considere a função  $F$  definida por  $F(x) = \int_0^{x^2} t \ln(1 + e^t) dt$ , para todo o  $x \in \mathbb{R}$ .

- Justifique que  $F$  é diferenciável em  $\mathbb{R}$  e determine  $F'(x)$ .

- Estude  $F$  quanto à monotonia e existência de extremos locais.

$$\begin{aligned}
 1. \quad F'(u) &= \int (u^2) \cdot 2u = u^2 \ln(1 + e^{u^2}) \cdot 2u = \\
 &= 2u^3 \underbrace{\ln(1 + e^{u^2})}_{> 0 \text{ pois}} \\
 2. \quad F'(u) &= 0 \Leftrightarrow 2u^3 = 0 \Leftrightarrow u = 0 \quad 1 + e^{u^2} > 1
 \end{aligned}$$

$u$	0	
$F'$	-	+
$F$	↓	↗