3. Vetores, retas e planos

produto interno em $\mathbb{R}^n$ | $X \cdot Y = (u_1, u_2, \dots, u_n) \cdot (y_1, y_2, \dots, y_n) = X^T Y = X Y^T$
$= \sum_{i=1}^{n} u_i y_i$

norma ou comprimento | $\|X\| = \sqrt{X \cdot X} = \sqrt{u_1^2 + u_2^2 + \dots + u_n}$

propriedades do produto interno em $\mathbb{R}^n$
$X, Y, Z \in \mathbb{R}^n$
$\alpha \in \mathbb{R}$

1. $X \cdot X \geq 0$
2. $X \cdot X = 0 \Leftrightarrow X = 0$
3. $X \cdot Y = Y \cdot X$ prop. comutativa
4. i. $(X+Y) \cdot Z = X \cdot Z + Y \cdot Z$ prop. distributiva
   ii. $X(Y+Z) = X \cdot Y + X \cdot Z$
5. $(\alpha X) \cdot Y = \alpha (X \cdot Y) = X (\alpha Y)$ prop. associativa
6. $\|\alpha X\| = |\alpha| \, \|X\|$

desigualdades... $X, Y \in \mathbb{R}^n$

... de Cauchy-Schwarz $|X \cdot Y| \leq \|X\| \, \|Y\|$

... triangular $\|X+Y\| \leq \|X\| + \|Y\|$

ângulo entre vetores | $\measuredangle (X, Y) = \arccos \dfrac{X \cdot Y}{\|X\| \, \|Y\|} \in [0; \pi]$

definições
$\theta = \pi/2 \rightarrow X \perp Y$ (ortogonais ou perpendiculares)
$\theta = 0 \rightarrow$ mm sentido } colineares ou paralelos
$\theta = \pi \rightarrow$ sentido oposto } colineares ou paralelos

nota $X = 0 \wedge Y = 0$ dizem-se colineares e ortogonais

vetor unitário | $\|X\| = 1$

versor | $X \neq 0$, $U = \dfrac{1}{\|X\|} X$ tem a direção e sentido de X, é o seu vetor unitário, versor

produto externo em $\mathbb{R}^3$

$X = (u_1, u_2, u_3)$ $\quad$ $X \otimes Y = \begin{vmatrix} i & j & k \\ u_1 & u_2 & u_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \end{vmatrix}$, $\quad i = (1,0,0)$

$Y = (y_1, y_2, y_3)$ $\quad$ símbolo $\quad j = (0,1,0)$

$k = (0,0,1)$

$$X \times Y = i \begin{vmatrix} u_2 & u_3 \\ y_2 & y_3 \end{vmatrix} - j \begin{vmatrix} u_1 & u_3 \\ y_1 & y_3 \end{vmatrix} + k \begin{vmatrix} u_1 & u_2 \\ y_1 & y_2 \end{vmatrix}$$

$$= (u_2 y_3 - u_3 y_2, -u_1 y_3 + u_3 y_1, u_1 y_2 - u_2 y_1)$$

obtemos vetor perpendicular simultaneamente a X e Y

propriedades do produto externo ($\mathbb{R}^3$)

(1) $X \times Y = -(Y \times X)$

(2) i $X \times (Y + Z) = (X \times Y) + (X \times Z)$ $\quad$ prop distributiva

ii $(X + Y) \times Z = (X \times Z) + (Y \times Z)$

(3) $\alpha(X \times Y) = (\alpha X) \times Y = X \times (\alpha Y)$ $\quad$ prop associativa

(4) $X \times X = 0$

(6) fórmulas de la grange

i $(X \times Y) \times Z = (Z \cdot X) Y - (Z \cdot Y) X$

ii $X \times (Y \times Z) = (X \cdot Z) Y - (X \cdot Y) Z$

ñ é preciso saber

produto misto

$(X \times Y) \cdot Z = X \cdot (Y \times Z) = Y \cdot (Z \times X)$

nota

X, Y, dois vetores

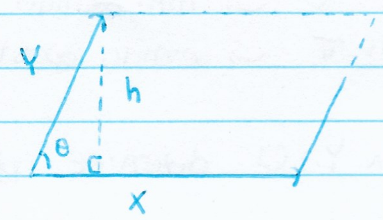
$\theta = \measuredangle (X, Y)$

$\|X\| \|Y\| \operatorname{sen} \theta = \|X \times Y\|$

$\|X\| \|Y\| \cos \theta = X \cdot Y$

aplicações

área do paralelogramo



$A = b \times h$

$= \|X\| \times \|Y\| \operatorname{sen} \theta$

$A = \|X \times Y\|$

$\operatorname{sen} \theta = \frac{h}{\|Y\|} \Leftrightarrow h = \operatorname{sen} \theta \, \|Y\|$

volume do paralelepípedo

$V = |(X \times Y) \cdot Z|$

$d(P, \mathcal{R})$
h paralelogramo

$$d(P,\mathcal{R}) = \frac{\|X \times Y\|}{\|X\|}$$

$d(P, \mathcal{P})$
h paralelepipedo

$$d(P,\mathcal{P}) = \frac{|(X \times Y)\cdot Z|}{\|X \times Y\|}$$

retas em $\mathbb{R}^3$

eq vetorial: $\overrightarrow{PX} = \alpha v$, sendo v o vetor diretor

$(x,y,z) = (p_1, p_2, p_3) + \alpha(v_1, v_2, v_3)$, $\alpha \in \mathbb{R}$

eq paramétrica
$$\begin{cases} x = p_1 + \alpha v_1 \\ y = p_2 + \alpha v_2 \\ z = p_3 + \alpha v_3 \end{cases} , \alpha \in \mathbb{R}$$

eliminando α

eq cartesiana
$$\begin{cases} a_1 x + b_1 y + c_1 z = d_1 \\ a_2 x + b_2 y + c_2 z = d_2 \end{cases} , a, b, c, d \in \mathbb{R}$$

onde $car \begin{bmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \end{bmatrix} = 2$ (pq ñ podem ser paralelos)

planos em $\mathbb{R}^3$

eq vetorial: $\overrightarrow{PX} = \alpha v + \beta u$, $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$

$(x,y,z) = (p_1, p_2, p_3) + \alpha(v_1, v_2, v_3) + \beta(u_1, u_2, u_3)$

eq paramétrica
$$\begin{cases} x = p_1 + \alpha v_1 + \beta u_1 \\ y = p_2 + \alpha v_2 + \beta u_2 \\ z = p_3 + \alpha v_3 + \beta u_3 \end{cases} , \alpha, \beta \in \mathbb{R}$$

eliminando α

eq cartesiana ou geral: $ax + by + cz + d = 0$, $(a,b,c) \neq (0,0,0)$

↳ (a,b,c) é vetor ortogonal

eq geral do plano a partir do $w \perp \mathcal{P}$ e $p \in \mathcal{P}$

$\overrightarrow{PX} \cdot \vec{w} = 0$, $P(x_0, y_0, z_0)$ eq vetorial

$(x - x_0, y - y_0, z - z_0) \cdot (a,b,c) = 0$

$ax + by + cz = \underbrace{ax_0 + by_0 + cz_0}_{-d}$ eq cartesiana

3. Vetores, retas e planos

Posição relativa de planos

P e $P' \in \mathbb{R}^3$: $ax + by + cz = d$

$$P \cap P' = [A|B] = \left[\begin{array}{ccc|c} a_1 & b_1 & c_1 & d_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 & d_2 \end{array}\right] \rightarrow 2\times 4$$

- coincidentes | $car([A|B]) = car(A) = 1$ $\quad P \cap P' = P$
  sistema possível indeterminado
- concorrentes | $car([A|B]) = car(A) = 2$ $\quad P \cap P' = \text{reta}$
  sistema possível determinado
- estritamente paralelos | $car([A|B]) > car(A) = 1$ $\quad P \cap P' = \emptyset$
  sistema impossível

Posição relativa reta/plano

$P \in \mathbb{R}^3$: $ax + by + cz = d$ $\quad R \in \mathbb{R}^3$: $a_1x + b_1y + c_1z = d_1$
$a_2x + b_2y + c_2z = d_2$

$car \begin{bmatrix} a_1 & b_1 & c_1 & \cancel{d_1} \\ a_2 & b_2 & c_2 & \cancel{d_2} \end{bmatrix} = 2$

$$P \cap R = [A|B] = \left[\begin{array}{ccc|c} a & b & c & d \\ a_1 & b_1 & c_1 & d_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 & d_2 \end{array}\right] \rightarrow 3\times 4$$

- $R \subset P$ | $car([A|B]) = car(A) = 2$ $\quad P \cap R = R$
  sistema possível indeterminado
- concorrentes | $car([A|B]) = car(A) = 3$ $\quad P \cap R = \text{ponto}$
  sistema possível determinado
- estritamente paralelos | $car([A|B]) > car(A) = 2$ $\quad P \cap R = \emptyset$
  sistema impossível

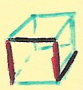
Posição relativa 2 retas

$R \cap R' = [A|B] \rightarrow 4\times 4$, $R, R' \in \mathbb{R}^3$

- coincidentes | $car([A|B]) = car(A) = 2$ $\quad R \cap R' = R$
  sistema possível indeterminado
- concorrentes | $car([A|B]) = car(A) = 3$ $\quad R \cap R' = \text{ponto}$
  sistema possível determinado
- estritamente paralelas | $car([A|B]) = 3 > car(A) = 2$ $\quad R \cap R' = \emptyset$
  ↳ complanares
  sistema impossível
- enviesadas | $car([A|B]) = 4 > car(A) = 3$ $\quad R \cap R' = \emptyset$
  sistema impossível

retas complanares

pertencem ao mesmo plano



complanares
não complanares
exemplo

noção de distância

$\overline{PQ}$, P e Q pontos de $\mathbb{R}^n$: $d(P,Q) = \|\vec{PQ}\|$

$d(P,Q) = \sqrt{(x_1-x_2)^2 + (y_1-y_2)^2 + \dots}$

$\overline{FG}$. F e G pontos, plano ou retas de $\mathbb{R}^3$

↳ $d(F,G) = \min\{ d(P,Q) : P \in F \text{ e } Q \in G \}$

nota $F \cap G \neq \emptyset$, $d(F,G) = 0$

distâncias entre F e G disjuntos

sejam P,Q pontos, R retas e P planos:

- $d(P,\mathcal{P}) = \dfrac{|\vec{QP} \cdot w|}{\|w\|}$, $Q \in \mathcal{P}$ qualquer, w vetor normal a P

  $d(P,\mathcal{P}) = \dfrac{|ax_0 + by_0 + cz_0 + d|}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}$, $P(x_0, y_0, z_0)$, $\mathcal{P}: ax+by+cz+d=0$

- $d(P,R) = \dfrac{\|u \times \vec{QP}\|}{\|u\|}$, $Q \in R$ qualquer, u vetor diretor de R

ângulo entre ...

... retas $\measuredangle(R,R') = \arccos \dfrac{|u \cdot u'|}{\|u\|\,\|u'\|}$, u vetores dir

... planos $\measuredangle(\mathcal{P},\mathcal{P}') = \measuredangle(R,R')$, tendo R como vet diretor os vetores normais dos P

..., reta/plano $\measuredangle(R,\mathcal{P}) = \frac{\pi}{2} - \measuredangle(R,R')$, sendo $R' \perp \mathcal{P}$

distâncias redutíveis

$d(R,R')$: $R \parallel R'$ = $d(P,R)$, $P \in R'$ estritamente paralelas

$d(R,\mathcal{P})$: $R \parallel \mathcal{P}$ = $d(P,\mathcal{P})$, $P \in R$

$d(\mathcal{P},\mathcal{P}')$: $\mathcal{P} \parallel \mathcal{P}'$ = $d(P,\mathcal{P})$, $P \in \mathcal{P}'$

$d(R,R')$: R enviesada R' = $d(R,\mathcal{P})$, $R' \subset \mathcal{P}$