lista 02 (Distribuição Normal)

Pedro Manoel Herminio Alves - 119210706

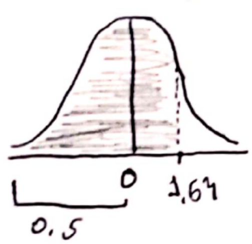
16/10/2022

Questão 01

a)

Solução (Manual)

$$P(Z < 1{,}64) = 0{,}5 + P(0 \leq Z \leq 1{,}64) = 0{,}5 + 0{,}44950 = \underline{0{,}9495}$$



Solução (R)

```r
# P(Z < 1,64)

pnorm(1.64)
```

```
[1] 0.9494974
```

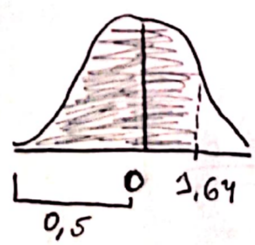
b)

As probabilidades de variáveis aleatórias contínuas (X) são definidas como a área sob a curva da sua distribuição. Assim, apenas as faixas de valores podem ter uma probabilidade diferente de zero. A probabilidade de que uma variável aleatória contínua seja igual a algum valor é sempre zero. Sendo assim, $P(Z = 1,64) = 0$

c)

Solução (Manual)

$$P(Z \leq 1,64) = 0,5 + P(0 \leq Z \leq 1,64) = 0,5 + 0,44950 = \underline{\underline{0,9495}}$$



Solução (R)

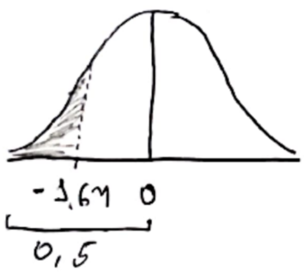
```r
# P(Z <= 1,64)

pnorm(1.64)
```

```
[1] 0.9494974
```

d)

Solução (Manual)

$$P(Z < -1{,}64) = 0{,}5 - P(0 \leq Z \leq 1{,}64) = 0{,}5 - 0{,}4495 = \underline{\underline{0{,}0505}}$$



Solução (R)

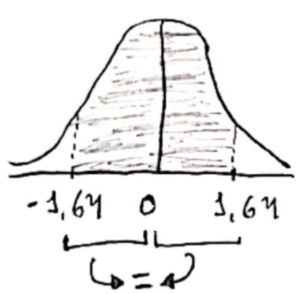
```r
# P(Z < -1,64)

pnorm(-1.64)
```

```
[1] 0.05050258
```

e)

Solução (Manual)

$$P(-1{,}64 < Z < 1{,}64) = 2 \cdot P(0 \leq Z \leq 1{,}64) = 2 \cdot 0{,}4495 = \underline{\underline{0{,}899}}$$



Solução (R)

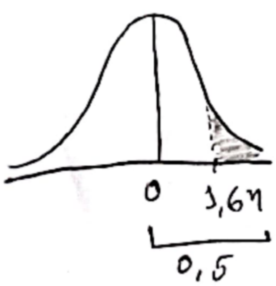
```r
# P(-1,64 < Z < 1,64) = P(Z < 1,64) - P(Z < -1,64)

pnorm(1.64) - pnorm(-1.64)
```

```
[1] 0.8989948
```

f)

Solução (Manual)

$$P(Z > 1,64) = 0,5 - P(0 \leq Z \leq 1,64) = 0,5 - 0,4495 = \underline{0,0505}$$



Solução (R)

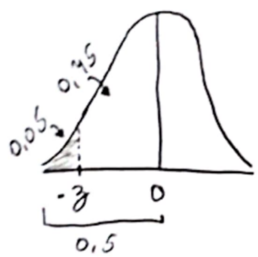
```r
# P(Z > 1,64) = 1 - P(Z < 1,64)

1 - pnorm(1.64)
```

```
[1] 0.05050258
```

g)

Solução (Manual)

$$P(Z < z) = 0,05\ (5\%)$$



$$P(0 \leq Z \leq -z) = 0,45$$

$$-z = 1,64$$

$$\underline{\underline{z = -1,64}}$$

Solução (R)

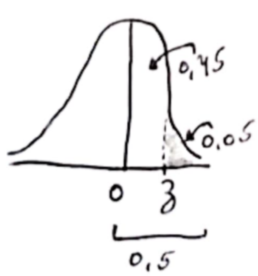
```r
# P(Z < z) = 0,05 (5%)

qnorm(0.05)
```

```
[1] -1.644854
```

h)

Solução (Manual)

$$P(Z \geq z) = 0,05\ (5\%)$$



$$P(0 \leq Z \leq z) = 0,45$$

$$\underline{\underline{z = 1,64}}$$

Solução (R)

```r
# P(Z >= z) = 0,05 (5%)

qnorm(1 - 0.05)
```

```
[1] 1.644854
```

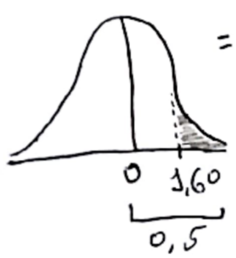
Questão 02

```r
# X   N(100; 25)

# Parâmetros
mean = 100 # Média
vari = 25 # Variância
sd = sqrt(vari) # Desvio Padrão
```

a)

Solução (Manual)

$$P(X \geq 108) = P\left(Z \geq \frac{108-100}{5}\right) = P(Z \geq 1{,}60) = 0{,}5 - P(0 \leq Z \leq 1{,}60)$$



$$= 0{,}5 - 0{,}4452 = \underline{\underline{0{,}0548}}$$

Solução (R)

```r
# P(X >= 108)

1 - pnorm(108, mean, sd)
```

```
[1] 0.05479929
```

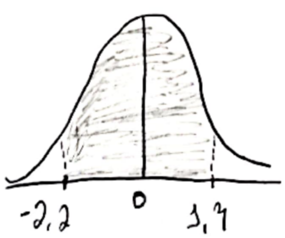
b)

As probabilidades de variáveis aleatórias contínuas (X) são definidas como a área sob a curva da sua distribuição. Assim, apenas as faixas de valores podem ter uma probabilidade diferente de zero. A probabilidade de que uma variável aleatória contínua seja igual a algum valor é sempre zero. Sendo assim, $P(Z = 100) = 0$

c)

Solução (Manual)

$$P(89 \leq X \leq 107) = P\left(\frac{89-100}{5} \leq Z \leq \frac{107-100}{5}\right) = P(-2,2 \leq Z \leq 1,4)$$



$$= P(0 \leq Z \leq 1,4) + P(0 \leq Z \leq 2,2)$$

$$= 0,4192 + 0,4861 = 0,9053$$

Solução (R)

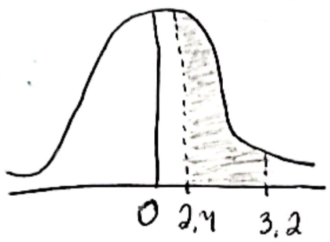
```r
# P(89 <= X <= 107) = P(X <= 107) - P(X <= 89)

pnorm(107, mean, sd) - pnorm(89, mean, sd)
```

```
[1] 0.9053399
```

d)

Solução (Manual)

$$P(12 < X - \mu < 16) = P\left(\frac{12}{5} < Z < \frac{16}{5}\right) = P(2,4 < Z < 3,2)$$



$$= P(0 \leq Z \leq 3,2) - P(0 \leq Z \leq 2,4)$$

$$= 0,4993 - 0,4918 = \underline{0,0075}$$

Solução (R)

```r
# P(12 < X − μ < 16) = P(X < 12/sd) - P(X < 16/sd)

pnorm(16/sd) - pnorm(12/sd)
```

```
[1] 0.007510398
```

e)

Solução (Manual)

$$P(112 < x < 116) = P\left(\frac{112-100}{5} < Z < \frac{116-100}{5}\right) = P(2,4 < Z < 3,2)$$

$$= 0,0075$$

* Mesmo cálculo da questão "d"

Solução (R)

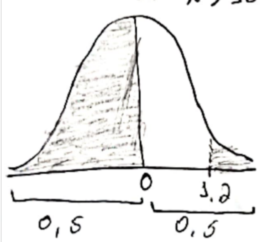
```r
# P(112 < X < 116) = P(116) - P(112)

pnorm(116, mean, sd) - pnorm(112, mean, sd)
```

```
[1] 0.007510398
```

f)

Solução (Manual)

$$P(X<100 \text{ ou } X>106) = P(X<100) + P(X>106) = P\left(Z < \frac{100-100}{5}\right) + P\left(Z > \frac{106-100}{5}\right)$$



$$= P(Z<0) + P(Z>1,2)$$

$$= 0,5 + (0,5 - P(0 \leq Z \leq 1,2))$$

$$= 0,5 + (0,5 - 0,3849)$$

$$= 0,5 + 0,1151$$

$$= \underline{\underline{0,6151}}$$

Solução (R)

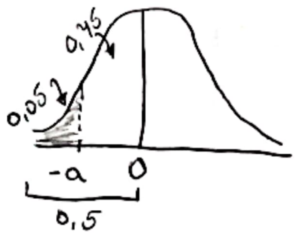
```r
# P(X < 100 ou X > 106) = P(X < 100) + P(x > 106)

pnorm(100, mean, sd) + (1 - pnorm(106, mean, sd))
```

```
[1] 0.6150697
```

g)

Solução (Manual)

$$P(X < x) = 0{,}05 = P\Big(Z < \underbrace{\frac{x-100}{5}}_{a}\Big) = P(Z < a) = 0{,}05$$



$$P(0 \leq Z \leq -a) = 0{,}45$$

$$-a = 1{,}64$$

$$a = -1{,}64$$

$$\frac{x-100}{5} = -1{,}64$$

$$x = (5 \cdot -1{,}64) + 100$$

$$x = 91{,}80$$

Solução (R)

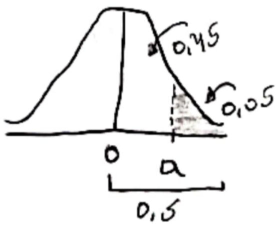
```r
# P(X < x) = 0,05;

qnorm(0.05, mean, sd)
```

```
[1] 91.77573
```

h)

Solução (Manual)

$$P(X > x) = 0{,}05 = P\left(Z > \underbrace{\frac{x-100}{5}}_{a}\right) = P(Z > a) = 0{,}05$$



$$P(0 \leq Z \leq a) = 0{,}45$$

$$a = 1{,}64$$

$$\frac{x-100}{5} = 1{,}64$$

$$x = (5 \cdot 1{,}64) + 100$$

$$x = 108{,}20$$

Solução (R)

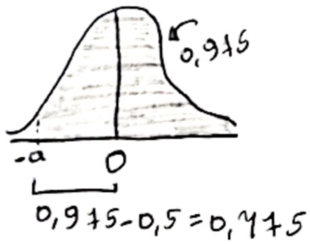
```r
# P(X > x) = 0,05

qnorm(1 - 0.05, mean, sd)
```

```
[1] 108.2243
```

i)

Solução (Manual)

$$P(X > x) = 0{,}975 = P\Big(Z > \underbrace{\frac{x-100}{5}}_{a}\Big) = 0{,}975 = P(Z > a) = 0{,}975$$



$$P(0 \leq Z \leq -a) = 0{,}475$$

$$-a = 1{,}96$$

$$a = -1{,}96$$

$$\frac{x-100}{5} = -1{,}96$$

$$x = (5 \cdot -1{,}96) + 100$$

$$x = 90{,}20$$

Solução (R)

```
# P(X > x) = 0,975

qnorm(1 - 0.975, mean, sd)
```

```
[1] 90.20018
```

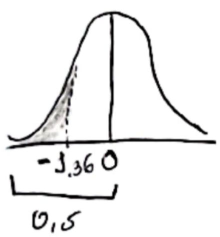
Questão 03

```
# X   N(100; 25)

# Parâmetros
mean = 2.9 # Média
vari = 1.96 # Variância
sd = sqrt(vari) # Desvio Padrão
```

a)

Solução (Manual)

$$P(X < 1) = P\left(Z < \frac{1-2,9}{1,4}\right) = P(Z < -1,36) = 0,5 - P(0 \leq Z \leq 1,36)$$



$$= 0,5 - 0,4131$$

$$= \underline{\underline{0,0869}}$$

Solução (R)

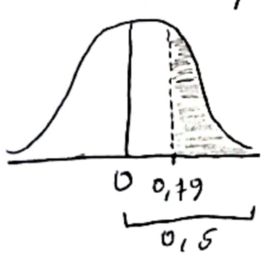
```r
# P(X < 1)

pnorm(1, mean, sd)
```

```
[1] 0.08736791
```

b)

Solução (Manual)

$$P(X \geq 4) = P\left(Z \geq \frac{4-2,9}{1,4}\right) = P(Z \geq 0,79) = 0,5 - P(0 \leq Z \leq 0,79)$$



$$= 0,5 - 0,2852$$

$$= \underline{\underline{0,2148}}$$

Solução (R)

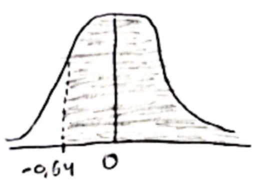
```r
# P(X >= 4)

1 - pnorm(4, mean, sd)
```

```
[1] 0.2160174
```

c)

Solução (Manual)

$$P(X \geq 2) = P\left(Z \geq \frac{2-2,9}{1,4}\right) = P(Z \geq -0,64) = 0,5 + P(0 \leq Z \leq 0,64)$$



$$= 0,5 + 0,2389$$

$$= \underline{\underline{0,7389}}$$

Solução (R)

```r
# P(X >= 2)

1 - pnorm(2, mean, sd)
```

```
[1] 0.7398416
```

d)

Solução (Manual)

$$P(2{,}5 < x < 4) = P\left(\frac{2{,}5-2{,}9}{1{,}4} < Z < \frac{4-2{,}9}{1{,}4}\right) = P(-0{,}29 < Z < 0{,}79)$$

$$= P(0 \leq Z \leq 0{,}29) + P(0 \leq Z \leq 0{,}79)$$

$$= 0{,}1141 + 0{,}2852$$

$$= \underline{0{,}3993}$$

Solução (R)

```r
# P(2,5 < X < 4) = P(X < 4) - P(X < 2,5)

pnorm(4, mean, sd) - pnorm(2.5, mean, sd)
```

```
[1] 0.3964341
```

e)

Questão não apresenta um enunciado válido e lógico.

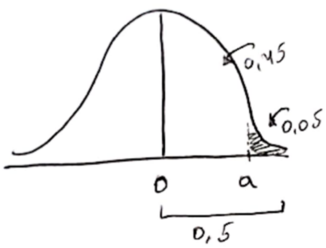
f)

Questão não apresenta um enunciado válido e lógico.

g)

Solução (Manual)

$$P(X \geq x) = 0{,}05 = P\left(Z \geq \underbrace{\frac{x-2{,}9}{1{,}4}}_{a}\right) = 0{,}05 = P(Z \geq a) = 0{,}05$$



$$P(0 \leq Z \leq a) = 0{,}45$$

$$a = 1{,}64$$

$$\frac{x-2{,}9}{1{,}4} = 1{,}64$$

$$x = (1{,}4 \cdot 1{,}64) + 2{,}9$$

$$x = 5{,}396$$

5,396 anos

Solução (R)

```r
# P(X >= x) = 0,05;

qnorm(1 - 0.05, mean, sd)
```

```
[1] 5.202795
```

Questão 04

OBS_01

Para qualquer distribuição normal, a área sob a curva (probabilidade) do intervalo $(\mu - k\sigma;\ \mu + k\sigma)$ com $k \in \mathbb{R}$ e quaisquer valores de μ e σ é igual a:

$P(\mu - k\sigma \leqslant X \leqslant \mu + k\sigma)$

sabendo que $Z = \frac{X-\mu}{\sigma}$ podemos normalizar X da seguinte forma:

$$P\left(\mu - k\sigma \leqslant X \leqslant \mu + k\sigma\right) =$$

$$P\left(\frac{\mu-k\sigma-\mu}{\sigma}\leqslant\frac{X-\mu}{\sigma}\leqslant\frac{\mu+k\sigma-\mu}{\sigma}\right)=$$

$$P\left(\frac{\cancel{\mu}-k\cancel{\sigma}-\cancel{\mu}}{\cancel{\sigma}}\leqslant Z\leqslant\frac{\cancel{\mu}+k\cancel{\sigma}-\cancel{\mu}}{\cancel{\sigma}}\right)=$$

$$P\left(-k\leqslant Z\leqslant k\right)$$

Com isso, podemos concluir que para qualquer distribuição normal a área sob a curva (probabilidade) do intervalo $(\mu-k\sigma;\ \mu+k\sigma)$ com $k\in\mathbb{R}$ sempre será a probabilidade do intervalo $(-k;\ k)$ não importando os valores de μ e σ

a)

Levando em conta a [OBS_01] e $k = 1,64$ sabemos que $(\mu-1,64\sigma;\ \mu+1,64\sigma) = (-1,64;1,64)$

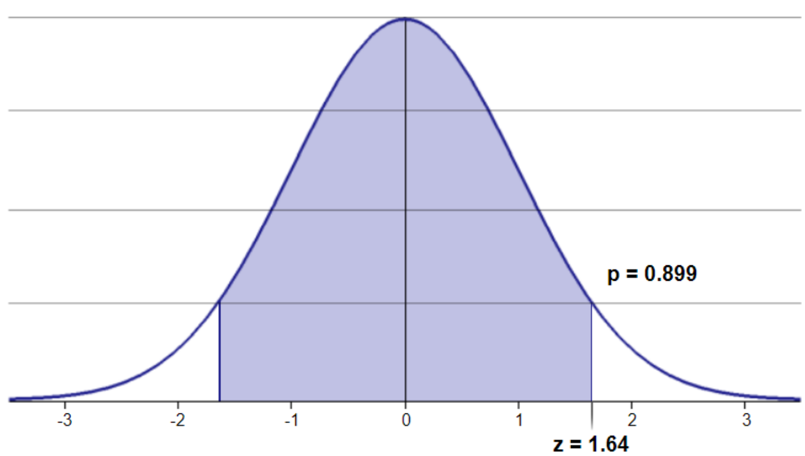
Com isso, podemos calcular:

$P(-1,64\leqslant Z\leqslant 1,64)$

```
pnorm(1.64) - pnorm(-1.64)
```

```
[1] 0.8989948
```

Gráfico:



b)

Levando em conta a [OBS_01] e $k = 1,96$ sabemos que $(\mu - 1,96\sigma;\ \mu + 1,96\sigma) = (-1,96; 1,96)$

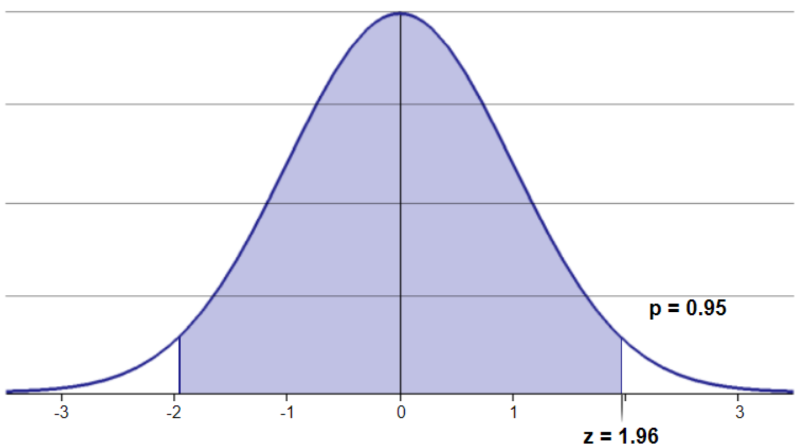
Com isso, podemos calcular:

$P(-1,96 \leqslant Z \leqslant 1,96)$

```
pnorm(1.96) - pnorm(-1.96)
```

```
[1] 0.9500042
```

Gráfico:



c)

Levando em conta a [OBS_01] e $k = 2,57$ sabemos que $(\mu - 2,57\sigma;\ \mu + 2,57\sigma) = (-2,57; 2,57)$

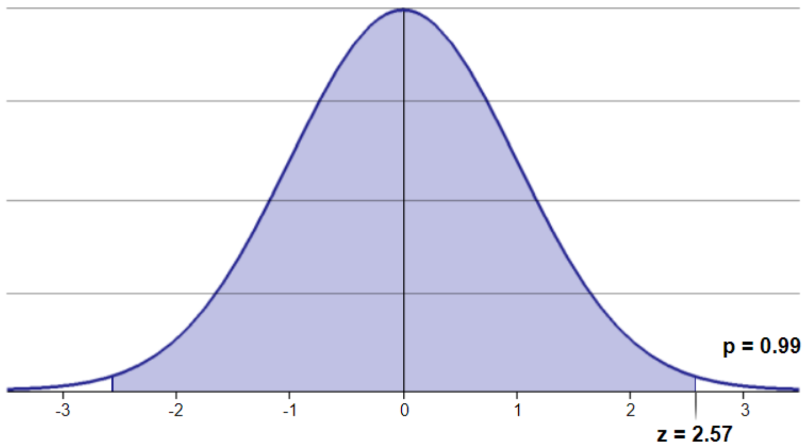
Com isso, podemos calcular:

$P(-2,57 \leqslant Z \leqslant 2,57)$

```
pnorm(2.57) - pnorm(-2.57)
```

```
[1] 0.9898301
```

Gráfico:



d)

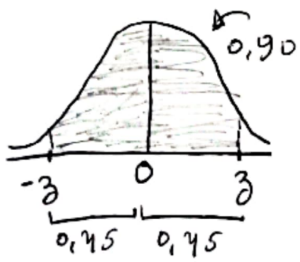
Intervalo	Área (Probabilidade)
$(\mu - 1,64\sigma;\ \mu + 1,64\sigma)$	0.8989948 **(0.90)**
$(\mu - 1,96\sigma;\ \mu + 1,96\sigma)$	0.9500042 **(0.95)**
$(\mu - 2,57\sigma;\ \mu + 2,57\sigma)$	0.9898301 **(0.99)**

Questão 05

a)

Solução (Manual)

$P(-z < Z < z) = 0,90$



$P(0 \le Z \le z) = 0,45$

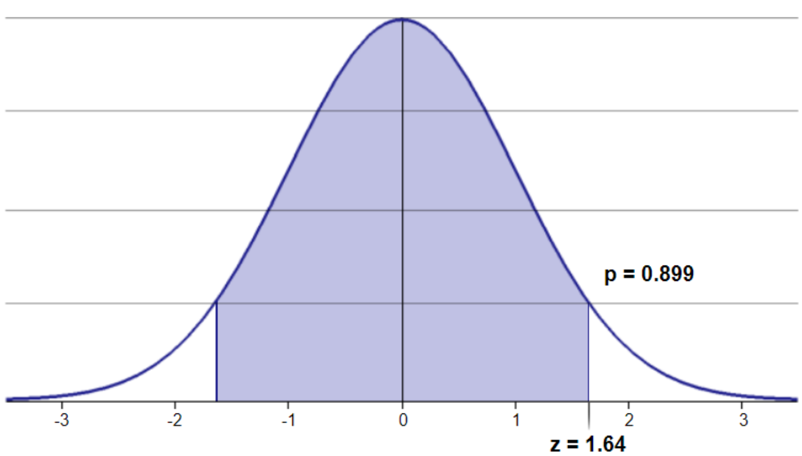
$z = 1,64$

Solução (R)

```r
# P(-z < Z < z) = 0,90 (90,0%) = -1 * P(Z < (0,50 - 0,90/2))

-1 * qnorm(0.50 - 0.90/2)
```

```
[1] 1.644854
```

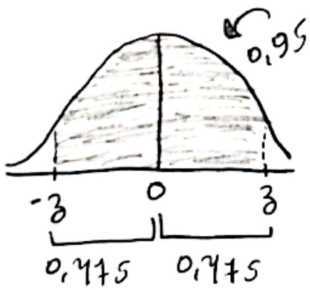
Gráfico



b)

Solução (Manual)

$$P(-z < Z < z) = 0{,}95$$



$$P(0 \leq Z \leq z) = 0{,}475$$

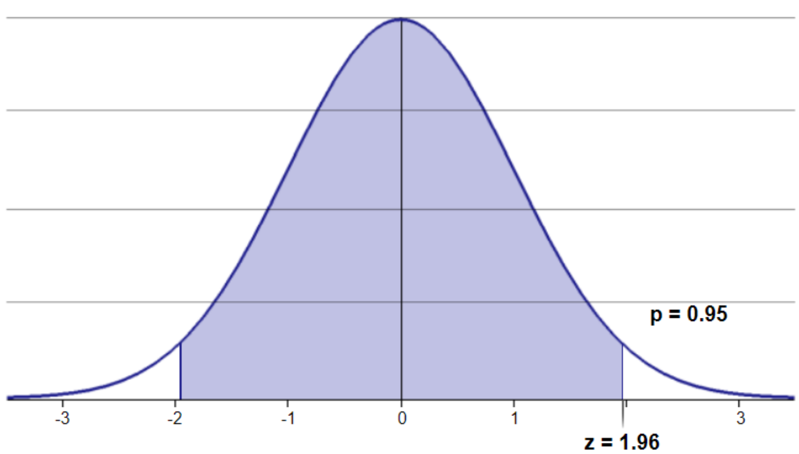
$$\underline{\underline{z = 1{,}96}}$$

Solução (R)

```
# P(-z < Z < z) = 0,95 (95,0%) = -1 * P(Z < (0,50 - 0,95/2))

-1 * qnorm(0.50 - 0.95/2)
```

```
[1] 1.959964
```

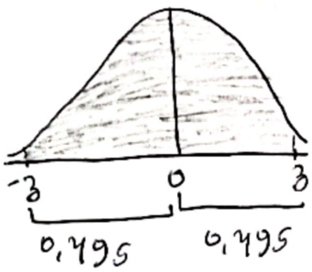
Gráfico



c)

Solução (Manual)

$$P(-z < Z < z) = 0,99$$



$$P(0 \leq Z \leq z) = 0,495$$

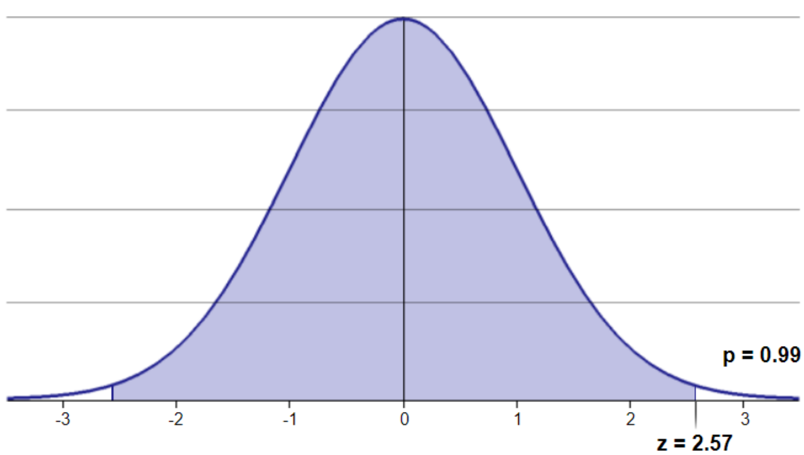
$$z = 2,57$$

Solução (R)

```
# P(-z < Z < z) = 0,99 (99,0%) = -1 * P(Z < (0,50 - 0,99/2))

-1 * qnorm(0.50 - 0.99/2)
```

```
[1] 2.575829
```

Gráfico



d)

Tabela

$P(-z < Z < z)$	Proporção	z
0,90	90%	1.644854 **(1.64)**
0,95	95%	1.959964 **(1.96)**
0,99	99%	2.575829 **(2.58)**

e)

Sim. Ambas as questões estão trabalhando com o mesmo intervalo de valores, com isso, estão resultando em mesmos valores de probabilidades