Norma, Produto Interno, Ângulo e Distância entre Dois Pontos

Marcelo Dreux

Norma

Se $v = (v_1, v_2, \dots, v_n)$ for um vetor no $\mathbb{R}^n$, então a **norma** (ou comprimento, ou magnitude) de $\boldsymbol{v}$ é denotada por $\|\boldsymbol{v}\|$ e definida pela fórmula

$$\|\boldsymbol{v}\| = \sqrt{v_1^2 + v_2^2 + \cdots + v_n^2}$$

Propriedades

- $\|\mathbf{0}\| = 0$;
- $\|\boldsymbol{v}\| = 0$ se e só se $\boldsymbol{v} = \mathbf{0}$;
- $\|\alpha\boldsymbol{v}\| = |\alpha|\|\boldsymbol{v}\|$ para todo $\alpha \in \mathbb{R}$;

Vetor Unitário

Um vetor ($\boldsymbol{u}$) é dito **unitário** se tem norma 1. Pode-se obter um vetor unitário numa direção desejada escolhendo-se qualquer vetor não nulo $\boldsymbol{v}$ nessa direção e dividindo-se pela norma de $\boldsymbol{v}$.

$$\boldsymbol{u} = \frac{\boldsymbol{v}}{\|\boldsymbol{v}\|}$$

Distância entre Dois Pontos

Se P_1 e P_2 forem pontos no $\mathbb{R}^2$ ou no $\mathbb{R}^3$, então o comprimento do vetor $\overrightarrow{P_1P_2}$ é igual à distância entre os pontos P_1 e P_2.

No $\mathbb{R}^2$ $d = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$

No $\mathbb{R}^3$ $d = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}$

Produto Interno

Se $\boldsymbol{u}$ e $\boldsymbol{v}$ forem vetores não nulos do $\mathbb{R}^2$ou do $\mathbb{R}^3$ e se $\boldsymbol{\theta}$ for o ângulo entre $\boldsymbol{u}$ e $\boldsymbol{v}$, então o produto escalar (também denominado produto interno euclidiano) de $\boldsymbol{u}$ e $\boldsymbol{v}$ é denotado por $\boldsymbol{u}.\boldsymbol{v}$ ou $\langle \boldsymbol{u}, \boldsymbol{v} \rangle$ e definido por

$$\boldsymbol{u}.\boldsymbol{v} = \|\boldsymbol{u}\|\|\boldsymbol{v}\| \cos \boldsymbol{\theta}$$

Se $\boldsymbol{u} = \boldsymbol{0}$ ou $\boldsymbol{v} = \boldsymbol{0}$, definimos $\boldsymbol{u}.\boldsymbol{v}$ como sendo 0.

Propriedades do Produto Interno

Considere $\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}, \mathbf{w} \in \mathbb{R}^n$

- **Simetria**: $\langle \boldsymbol{v}, \boldsymbol{w} \rangle = \langle \boldsymbol{w}, \boldsymbol{v} \rangle$;
- **Linearidade**: $\langle \alpha \boldsymbol{u} + \boldsymbol{v}, \boldsymbol{w} \rangle = \alpha \langle \boldsymbol{u}, \boldsymbol{w} \rangle + \langle \boldsymbol{v}, \boldsymbol{w} \rangle$
- **Positividade**: $\langle \boldsymbol{v}, \boldsymbol{v} \rangle > 0$ para todo $\boldsymbol{v} \neq 0$

Produto Interno

O sinal do produto escalar revela uma informação sobre o ângulo $\boldsymbol{\theta}$, que pode ser observada pela fórmula

$$\mathbf{cos}\,\boldsymbol{\theta} = \frac{\boldsymbol{u}.\boldsymbol{v}}{\|\boldsymbol{u}\|\|\boldsymbol{v}\|}$$

Obs: verificar o que significa $\boldsymbol{u}.\boldsymbol{v} = 0$.

Cálculo do Produto Escalar

Usando componentes cartesianas

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = \left(a_x\vec{i} + a_y\vec{j} + a_z\vec{k}\right) \cdot \left(b_x\vec{i} + b_y\vec{j} + b_z\vec{k}\right)$$

$$\begin{aligned}\vec{a} \cdot \vec{b} = \quad & \left(a_x\vec{i} + a_y\vec{j} + a_z\vec{k}\right) \cdot b_x\vec{i} \\ & + \left(a_x\vec{i} + a_y\vec{j} + a_z\vec{k}\right) \cdot b_y\vec{j} \\ & + \left(a_x\vec{i} + a_y\vec{j} + a_z\vec{k}\right) \cdot b_z\vec{k}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\vec{a} \cdot \vec{b} = \quad & \left(a_xb_x\vec{i} \cdot \vec{i} + a_yb_x\vec{j} \cdot \vec{i} + a_zb_x\vec{k} \cdot \vec{i}\right) \\ & + \left(a_xb_y\vec{i} \cdot \vec{j} + a_yb_y\vec{j} \cdot \vec{j} + a_zb_y\vec{k} \cdot \vec{j}\right) \\ & + \left(a_xb_z\vec{i} \cdot \vec{k} + a_yb_z\vec{j} \cdot \vec{k} + a_zb_z\vec{k} \cdot \vec{k}\right)\end{aligned}$$

Cálculo do Produto Escalar

Usando componentes cartesianas

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = \left(a_x b_x \vec{i} \cdot \vec{i} + a_y b_x \vec{j} \cdot \vec{i} + a_z b_x \vec{k} \cdot \vec{i}\right) + \left(a_x b_y \vec{i} \cdot \vec{j} + a_y b_y \vec{j} \cdot \vec{j} + a_z b_y \vec{k} \cdot \vec{j}\right) + \left(a_x b_z \vec{i} \cdot \vec{k} + a_y b_z \vec{j} \cdot \vec{k} + a_z b_z \vec{k} \cdot \vec{k}\right)$$

$\vec{i}, \vec{j}$ e $\vec{k}$ são ortonogonais entre si

$$\begin{cases} \vec{i} \cdot \vec{i} = (1)(1)\cos 0° = 1 \\ \vec{i} \cdot \vec{j} = (1)(1)\cos 90° = 0 \end{cases}$$

Produto Interno

$$\overrightarrow{a} \cdot \overrightarrow{b} = \quad \big(a_x b_x(1) + a_y b_x(0) + a_z b_x(0)\big) \\ + \big(a_x b_y(0) + a_y b_y(1) + a_z b_y(0)\big) \\ + \big(a_x b_z(0) + a_y b_z(0) + a_z b_z(1)\big)$$

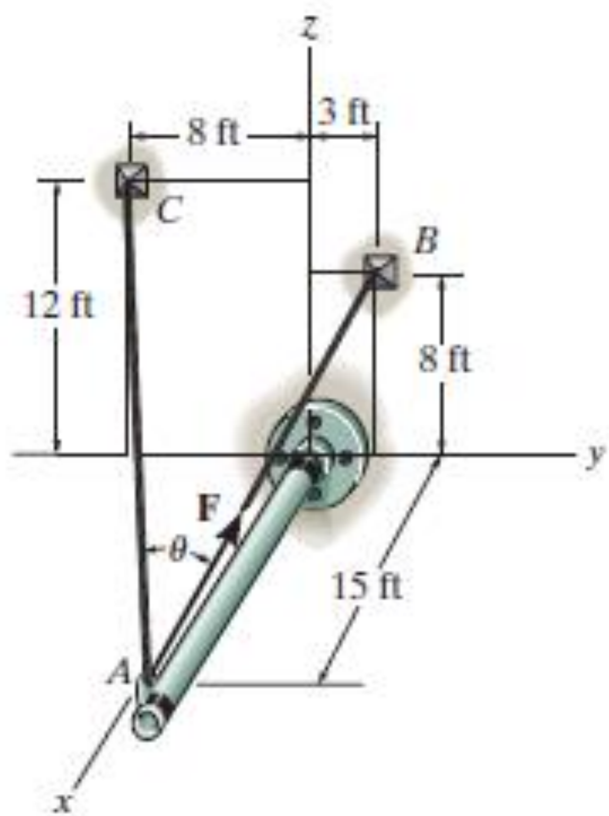
$$\boxed{\overrightarrow{a} \cdot \overrightarrow{b} = a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z}$$

Importante notar:

$$\|v\| = \sqrt{v.v}$$

Exercício

Calcular o ângulo formado entre os cabos AB e AC



$\theta = 34{,}2^o$

Exercício

Encontrar o ângulo entre a diagonal de um cubo e uma de suas arestas.

Ortogonalidade

Dizemos que $\boldsymbol{u}$ e $\boldsymbol{v}$ são ortogonais se $\langle \boldsymbol{u}, \boldsymbol{v} \rangle = 0$.

Obs: Note que o vetor nulo é ortogonal a qualquer outro vetor.

Conjunto Ortogonal

Diz-se que o conjunto $\{\boldsymbol{v_1}, \boldsymbol{v_2}, \dots, \boldsymbol{v_p}\}$ é **ortogonal** se os vetores são dois a dois ortogonais ($\langle \boldsymbol{v_i}, \boldsymbol{v_j} \rangle = 0\ \forall i \neq j$) ou se $p = 1$.

Conjunto Ortonormal

Diz-se que o conjunto $\{\boldsymbol{v_1}, \boldsymbol{v_2}, \dots, \boldsymbol{v_p}\}$ é **ortonormal** se, além de ser ortogonal, todos os seus vetores são unitários, isto é, se:

$$\langle \boldsymbol{v_i}, \boldsymbol{v_j} \rangle = \begin{cases} 0 \ \text{ se } \ i \neq j \\ 1 \ \text{ se } \ i = j \end{cases}$$

Exercício

Verificar se o conjunto $\{(1,0,1),(0,1,0),(-1,0,1)\}$ é ortogonal? Caso afirmativo transformá-lo num conjunto ortonormal.

Projeção Ortogonal Sobre Uma Reta

$$\boldsymbol{Proj_v u = \frac{u.v}{v.v} v}$$