

Distâncias no \mathbb{R}^3

Marcelo Dreux

1 - Distância de Ponto a Ponto

- Dados dois pontos $A = (x_1, y_1, z_1)$ e $B = (x_2, y_2, z_2)$

$$d_{AB} = \|\overrightarrow{AB}\|$$

$$d_{AB} = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}$$

2- Distância de Ponto à Reta

- Dados $A = (x_1, y_1, z_1)$ e $r = P_0 + t v$
 - Se $A \in r$ então $d_{Ar} = 0$
 - Se $A \notin r$

Distância de Ponto à Reta

Achar a distância de um ponto A à reta $r = P_0 + v t$

- Passo 1:

Fazer a projeção de P_0A na reta

- Passo 2:

Achar o ponto B projetado na reta

- Passo 3:

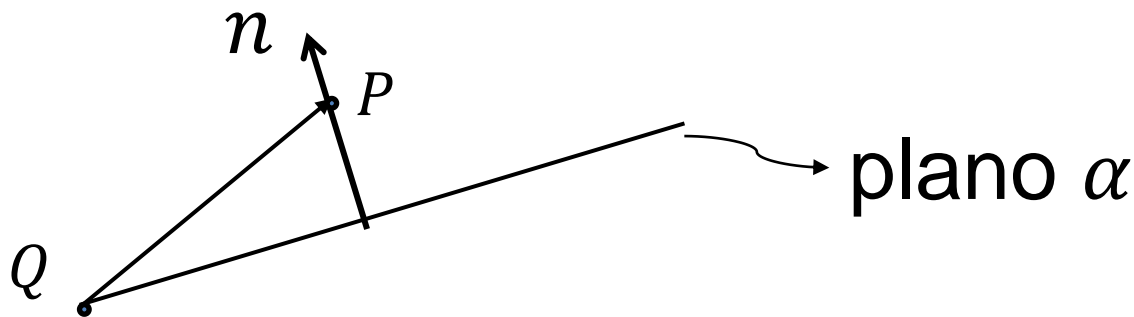
Calcular a distância de A a B

3 - Distância de Ponto a Plano

- 1º método:

Dados o plano α e o ponto P

$$d = \left\| Proj_n \overrightarrow{QP} \right\|$$



Exemplo

$$\alpha: x - y + z = 2$$

$$P = (1, 1, 1)$$

4 - Distância de Reta a Plano

- Dados: $r = P_0 + t v$
- $\alpha: ax + by + cz = d$

Se $\langle v, n \rangle \neq 0 \Rightarrow$ reta intercepta o plano $d = 0$

Se $\langle v, n \rangle = 0 \Rightarrow$ reta paralela ao plano

Se $u \notin \alpha$ então $d =$ distância de ponto ao plano
(distância de u a α)

Exemplo

$$\text{a) } r = (1 + t, -t, 2t) \qquad v = (1, -1, 2)$$

$$\alpha: 2x - y + z = 1 \qquad n = (2, -1, 1)$$

$\langle v, n \rangle$ diferente de zero. “Fura” o plano $\Rightarrow d = 0$

Exemplo

$$\begin{array}{ll} \text{b) } r = (1 + t, -t, 2t) & v = (1, -1, 2) \\ \beta: x + y = 0 & n = (1, 1, 0) \end{array}$$

$$\langle v, n \rangle = 1 - 1 = 0 \Rightarrow \text{reta paralela ao plano}$$

Verificar se $P = (1, 0, 0) \in \beta$

$$P \notin \beta \Rightarrow d \neq 0.$$

Calcular distância do ponto P ao plano beta

5 - Distância entre dois planos

- $\alpha: a_1x + b_1y + c_1z = d_1$

$$\beta: a_2x + b_2y + c_2z = d_2$$

- Somente para planos paralelos. Distância de ponto a plano.

$$\frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2} = \frac{c_1}{c_2} \neq \frac{d_1}{d_2}$$

Exemplo

a) $\alpha: x + y - 2z = 4$
 $\beta: 2x + z = 2$

b) $\alpha: x + z = 2$
 $\beta: 2x + 2z = 4$

Exemplo

$$c) \alpha: x + y + z = 1$$

$$\beta: x + y + z = 2$$

6 – Distância de Reta à Reta

Dados: $r: P_1 + t v_1$

$s: P_2 + s v_2$

- Se v_1 é paralelo a v_2
 - se $u \in s$ então $d_{rs} = 0$ (retas coincidentes)
 - se $u \notin s$ então $d_{rs} = d_{us} \Rightarrow$ distância de ponto a reta

Distância de Reta à Reta

- Se v_1 não é paralelo a v_2
 - se $r \cap s \neq \emptyset \Rightarrow d = 0$
 - se $r \cap s = \emptyset \Rightarrow r$ e s são reversas

Exercícios

Calcule as distâncias entre:

- (a) O ponto $A(1,1,1)$ e a reta $r: (t, t, t)$;
- (b) O ponto $A(1,1,1)$ e a reta $r: (t, t, 1 + t)$;
- (c) O ponto $A(1,1,1)$ e o plano $x + y + z = 1$;
- (d) As retas $r: (t, 2t, 1 - t)$ e $s: (2t, 4t, -2t)$;
- (e) As retas $r: (t, 2t, 1 - t)$ e $s: (t, 0, t)$;
- (f) A reta $r: (t, 2t, 1 - t)$ e o plano $x + z = 0$;
- (g) Os planos $x + y + z = 0$ e $x + y + z = 1$.