Matrizes Ortogonais

Marcelo Dreux

Matrizes Ortogonais

Dizemos que uma matriz A é **ortogonal** se sua transposta for sua inversa, ou seja, se

$$A^{-1} = A^T$$

ou, equivalentemente, se

$$AA^T = A^T A = I$$

Matriz Ortogonal

Uma matriz é ortogonal se é formada por vetores ortonormais. Vetores ortonormais são tais que:

$$\langle v_i, v_j \rangle = 0 \text{ para } i \neq j$$

$$\|v_i\| = 1$$

Exemplo

Verificar que a matriz de rotação de $\mathbb{R}^2$ por um ângulo θ é ortogonal

$$R_\theta = \begin{pmatrix} \cos\theta & -sen\,\theta \\ sen\,\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$$

Propriedades de matrizes ortogonais

Se A for ortogonal então:

i. O produto de matrizes ortogonais é uma matriz ortogonal

ii. $\det(A) = 1$ ou $\det(A) = -1$

iii. $\|A\,x\| = \|x\|$

iv. $A\,x\,.\,A\,y = x.\,y$

Matriz Ortogonal

Se A for uma matriz ortogonal e $T_A: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ a multiplicação por A, dizemos que T_A é um operador ortogonal. Os operadores ortogonais mantêm inalterados os comprimentos de todos os vetores (propriedade iii).