Complemento Ortogonal

Marcelo Dreux

Complemento Ortogonal

Seja $V \subset \mathbb{R}^n$ um subespaço vetorial. O complemento ortogonal de V (diz-se V perp) é o conjunto

$$V^{\perp} = \{w \in \mathbb{R}^n | < v, w> = 0 \text{ para todo } v \in V \}$$

Obs:

- $V^{\perp}$ é subespaço vetorial
- O único vetor comum a V e $V^{\perp}$ é o vetor **0**
- O complemento ortogonal de $V^{\perp}$ é V

Complemento Ortogonal

Dado $V \subset \mathbb{R}^n$ para encontrar $V^\perp$ basta testar a condição $< v, w > = 0$ para os vetores de uma base qualquer de V. Dada $\{v_1, v_2, \ldots, v_k\}$ base de V, então:

$$V^\perp = \{w \in \mathbb{R}^n | < v_1, w > = \cdots = < v_k, w > = 0\}$$

Complemento Ortogonal

Seja $V \subset \mathbb{R}^n$ um subespaço. Se $\dim V = k$ então $\dim V^{\perp} = n - k$, ou seja, $\mathbb{R}^n = V \oplus V^{\perp}$. Além disso, se $\{v_1, \dots, v_k\}$ é base de V e $\{v_{k+1}, \dots, v_n\}$ é base de $V^{\perp}$, então $\{v_1, \dots, v_n\}$ é base de $\mathbb{R}^n$.

Observação Importante

Seja A uma matrix $m \ x \ n$

O espaço nulo de A e o espaço linha de A são complementos ortogonais em $\mathbb{R}^n$.

Exemplos

1 - Dado $H = span\{(1,2,3),(1,-1,1)\}$, encontrar $H^{\perp}$. Verificar as dimensões de H e $H^{\perp}$.

Exemplos

2 – Dado $H = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x - y + z = 0\}$, encontrar $H^{\perp}$.

3 – Dado H a reta $(t, -t, 2t)$, encontrar $H^{\perp}$.

Resumindo para o $\mathbb{R}^2$ e para o $\mathbb{R}^3$

$\boldsymbol{V}$	$\boldsymbol{W \subset V}$	$\boldsymbol{W^{\perp}}$
$\mathbb{R}^2$	$(0,0)$	
$\mathbb{R}^2$	$(t,-t)$	
$\mathbb{R}^2$	$\mathbb{R}^2$	
$\mathbb{R}^3$	$(0,0,0)$	
$\mathbb{R}^3$	$(t,t,2t)$	
$\mathbb{R}^3$	$x+z=0$	
$\mathbb{R}^3$	$\mathbb{R}^3$	