Espaços Vetoriais e Subespaços

Marcelo Dreux

Espaços Vetoriais

Um espaço vetorial, $(V, +, .)$, consiste em:

- Um conjunto não vazio V
- Uma soma, tal que se $u, v \in V$ então $u + v \in V$
- Uma multiplicação por escalar real tal que se $\alpha \in \mathbb{R}$ e $u \in V$, então $\alpha u \in V$

Espaços Vetoriais

Satisfazendo para todo $u, v, w \in V$ e para todo $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$:

Axiomas da soma:

- $u + v = v + u$ (comutativa)
- $(u + v) + w = u + (v + w)$
- $\exists\ 0$ tal que $u + 0 = 0 + u = u$ (elemento neutro da soma)
- $\exists$ o inverso aditivo: dado u existe w tal que $u + w = 0$ (notação: $-u$)

Espaços vetoriais

Axiomas da multiplicação:

- $(\alpha\beta)u = \alpha(\beta u)$
- $1u = u$ (elemento neutro da multiplicação)
- $\alpha(u + v) = \alpha u + \alpha v$
- $(\alpha + \beta)u = \alpha u + \beta u$

Exemplos de espaços vetoriais:

- $(\mathbb{R}^n, +, .)$
- $(M_{mxn}(\mathbb{R}), +, .)$
- $(\mathbb{C}^n, +, .)$
- Conjunto das funções contínuas
- Polinômios de grau máximo n: P_n

Subespaços Vetoriais

Seja $(V, +, .)$ um espaço vetorial. Dizemos que $W \subset V$, não vazio, é um <u>subespaço vetorial</u> de V se W, com as mesmas operações de V, é ele mesmo um espaço vetorial. Ou seja, $(W, +, .)$ é também um espaço vetorial.

$W \subset V$ é um subespaço vetorial de V se:

- $W \neq \emptyset$;
- $\forall\, u, v \in W$ e $\lambda \in \mathbb{R} \quad \Rightarrow \quad u + \lambda v \in W$

(fechamento para soma e multiplicação)

Subespaços Vetoriais

Obs: Ao tentar mostrar que o subespaço é não vazio, é comum mostrar que o vetor nulo pertence a ele.

Exercício 1: Mostre que os conjuntos abaixo não são subespaços vetoriais:

a) $V = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 < 4\}$

Exercício 1

b) $V = \{A \in M_{2\text{x}2}(\mathbb{R}) \mid a_{ij} >= 0\}$

c) $V = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y = x + 1\}$

Exercício 1

d) $V = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 | x \leq y \leq z\}$

Exercício 2

Sejam as matrizes $W = \{x \in M_{3x3}(\mathbb{R}) \mid a_{ij} = 0 \text{ se } i < j\} \subset M_{3\text{x}3}$. Mostre que W é um subespaço vetorial.

Exercício 3

$W = \{A \in M_{3\text{x}3} \,|\, A^T = A\}$
$H = \{A \in M_{3\text{x}3} \,|\, A^T = -A\}$

Mostre que $W \ e \ H$ são subespaços vetoriais de $M_{3\text{x}3}$.

Exercício 4

Encontre o subespaço vetorial $H \cap W$ do exercício anterior.

Exercício 5

Verifique se W é um subespaço vetorial. $W = \{p(x) = ax^2 + bx + c \mid a + b = 0 \ e \ c = 1\}$

Exercício 6

Verifique se W é um subespaço vetorial. $W = \{p(x) = ax^2 + bx + c \mid a + b = 0 \; e \; c = 0\}$

Exercício 7

Verifique se W é um subespaço vetorial. $W = \{p(x) = ax + b \mid p(1) = 0\}$

Obs: 1 é raiz do polinômio, ou seja $a + b = 0 \Rightarrow a = -b$

São subespaços do $\mathbb{R}^2$

No $\mathbb{R}^2$

- $\{(0,0)\}$ dimensão 0
- Reta do $\mathbb{R}^2$ que passa na origem dimensão 1
- $\mathbb{R}^2$ dimensão 2

São subespaços do $\mathbb{R}^3$

No $\mathbb{R}^3$

- $\{(0,0,0)\}$ dimensão 0
- Reta do $\mathbb{R}^3$ que passa na origem dimensão 1
- Plano do $\mathbb{R}^3$ que passa na origem dimensão 2
- $\mathbb{R}^3$ dimensão 3

Exemplos

Verificar se os polinômios da forma $a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3$, com a_0, a_1 e a_2 inteiros, são subespaços de P_3.

Verificar se o conjunto de matrizes M_{nxn} simétricas é um subespaço de matrizes M_{nxn}.

Verificar se o conjunto de matrizes M_{nxn} invertíveis é um subespaço de matrizes M_{nxn}.