Funções e Transformações Lineares

Marcelo Dreux

Conceito de Função

Uma função consiste em três ingredientes:

- Um conjunto X, a ser chamado **domínio;**
- Um conjunto Y, a ser chamado **contra-domínio**;
- Uma lei f que associa elementos de X a elementos de Y. Tal lei deve satisfazer à condição de que para todo $x \in X$ existe um único elemento $y \in Y$ associado a x.

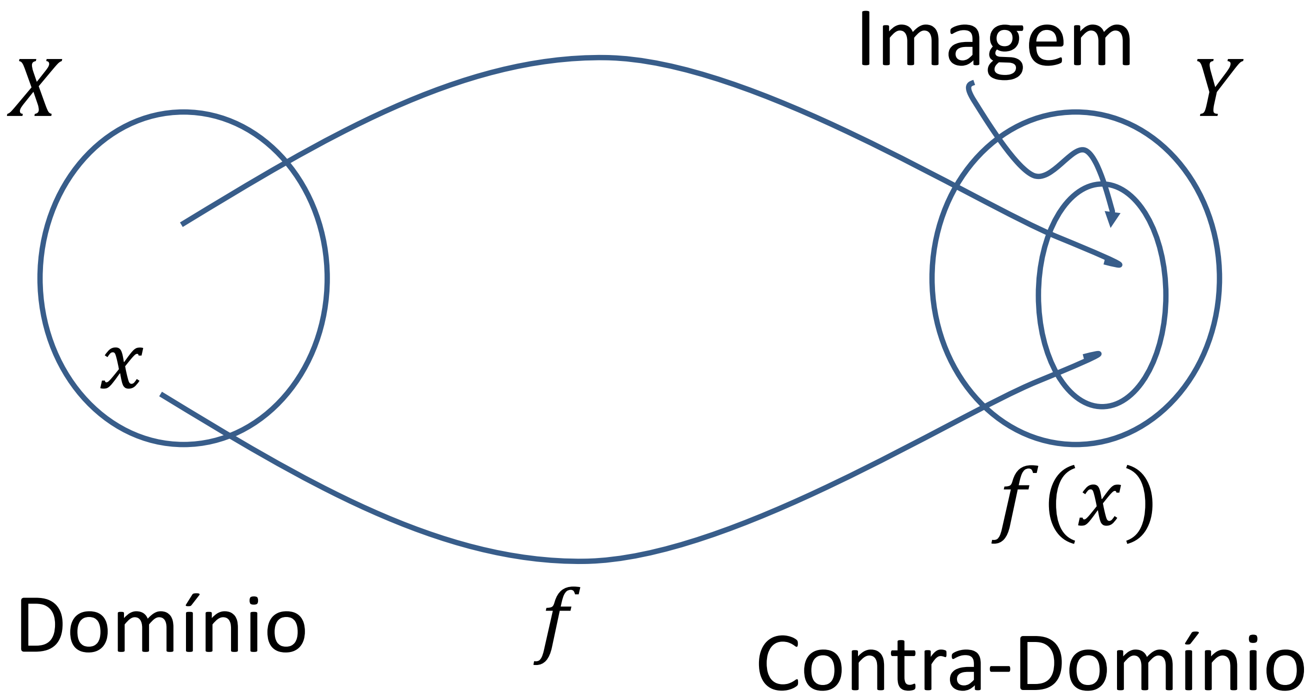
Notação: $$\begin{aligned} f: X &\to Y \\ x &\to f(x) \end{aligned}$$

Imagem de uma função

$$f: X \to Y$$
$$x \to f(x)$$

A imagem f é o conjunto $Im(f) = \{y \in Y \mid \exists\, x \in X$ tal que $y = f(x)\}$. É comum a notação $Im(f) = f(X)$

Domínio, Contra-Domínio e Imagem



Função

- Dizemos que duas funções

$f: X \to Y$ e $g: X' \to Y'$

$x \to f(x)$ $x' \to g(x')$

são iguais se e somente se $X = X', Y = Y'$ e $f(x) = g(x)$ para todo $x \in X$

Exemplos de Não-Função

1) Círculo de raio 1

2) $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

$$x \to \frac{1}{x}$$

3) $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

f associa $x \in X$ às soluções da equação $|x| = |s|$

Exemplos de Função

1) $f_1: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

$$x \to x^2$$

2) $f_2: \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$

$$x \to x^2$$

3) $f_3: \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$

$$x \to x^2$$

4) $f_4: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$

$$(s,t) \to s(1,1,1) + t(0,1,2)$$

5) $f_5: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$

$$(a,b,c) \to a(1,0) + b(1,1) + c(-1,-2)$$

Exemplos de Funções

6) Considere V como o subconjunto de matrizes A pertencentes ao M_{3x3} tais que $\det(A) \neq 0$.

$$f_6: V \to V$$
$$A \to A^{-1}$$

7) Considere

$$f_7: \mathbb{R}^4 \to P_3$$
$$[a, b, c, d] \to ax^3 + bx^2 + cx + d$$

8) $f_8: M_{2x2} \to \mathbb{R}^2$

$$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} a.b \\ c.d \end{bmatrix}$$

Injetividade, Sobrejetividade e Bijetividade

- Uma função f é injetiva se vale

$$f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow x_1 = x_2 \text{ ou}$$
$$x_1 \neq x_2 \Rightarrow f(x_1) \neq f(x_2)$$

- Uma função f é sobrejetiva se $Im(f) = Y$

- Uma função f é bijetiva se é injetiva e sobrejetiva

Injetividade, Sobrejetividade e Bijetividade

1) $f_1: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ injetiva?

$x \to x^2$ sobrejetiva?

2) $f_2: \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ injetiva?

$x \to x^2$ sobrejetiva?

3) $f_3: \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$ injetiva?

$x \to x^2$ sobrejetiva?

Injetividade, Sobrejetividade e Bijetividade

4) $f_4 : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$

$$(s,t) \to s(1,1,1) + t(0,1,2)$$

injetiva?

sobrejetiva?

5) $f_5 : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$

$$(a,b,c) \to a(1,0) + b(1,1) + c(-1,-2)$$

injetiva?

sobrejetiva?

Transformações Lineares - TL

Sejam U e V espaços vetoriais. Uma função $T: U \to V$ é uma transformação linear (TL) se para todo $u, v \in U$ e todo $\lambda \in \mathbb{R}$, valem:

1. $T(u + v) = T(u) + T(v)$
2. $T(\lambda u) = \lambda\, T(u)$

Observe que $T(0) = T(0 + 0) = T(0) + T(0) = 2T(0)$, logo $T(0) = 0$

Verificar se são TL

1) $T: \quad \to$

$$T(x, y) = (y, x + 1)$$

2) $T: \quad \to$

$$T(x, y) = x^2 + y$$

Verificar se são TL

3) $T\colon \qquad \rightarrow$

$$T(x,y,z)=(x+y,y+z)$$

4) $T\colon \qquad \rightarrow$

$$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \rightarrow (a+b,c+d)$$

Verificar se são TL

5) $T: P_2 \to \mathbb{R}^3$
$T(ax^2 + bx + c) = (a + b, a + b, c)$

TL Associada a Uma Matriz

Exemplo: $T: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$

$$T(x, y) = (3x + y, -x, 2x + y)$$

É possível escrever T na forma matricial fazendo $T(\tilde{x}) = A.\tilde{x}$, onde $\tilde{x}$ é o vetor do domínio. Nesse exemplo o vetor (x, y).

$$T(x, y) = A.x = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ -1 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

TL Associada a uma Matriz

$$Im(T) = (x', y', z') = (3x + y, -x, 2x + y)$$

$$x' = 3x + y$$
$$y' = -x$$
$$z' = 2x + y$$

$$(x', y', z') = t(3, -1,2) + s(1,0,1)$$

A imagem de T é um plano no $\mathbb{R}^3$, logo não é sobrejetiva. É injetiva pois os vetores que geram a imagem são linearmente independentes.

Interessante Notar

Quanto vale $T(1{,}0)$?

Quanto vale $T(0{,}1)$?

Implica que $A = [T(1{,}0) \quad T(0{,}1)]$

Transformações Lineares Geométricas

Exemplo 1: determine a TL no $\mathbb{R}^2$ que amplia, ou contrai, todos os vetores de um fator k, ou seja, $T(x, y) = k(x, y)$

Transformações Lineares Geométricas

Exemplo 2: determine a TL no $\mathbb{R}^2$ que reflete os vetores em torno do eixo x.

Transformações Lineares Geométricas

Exemplo 3: determine a TL no $\mathbb{R}^2$ que reflete os vetores em torno da origem.

Transformações Lineares Geométricas

Exemplo 4: determine a TL no $\mathbb{R}^2$ que reflete os vetores em torno da reta $y = x$.

Transformações Lineares Geométricas

Exemplo 5: determine a TL no $\mathbb{R}^2$ que projeta ortogonalmente os vetores no eixo x.

Transformações Lineares Geométricas

Exemplo 6: determine a TL no $\mathbb{R}^2$ que gira os vetores de um ângulo θ em relação à origem.

$$R_\Theta = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\operatorname{sen}\theta \\ \operatorname{sen}\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$$

Transformações Lineares Geométricas

Exemplo 8: determine a TL no $\mathbb{R}^3$ que projeta ortogonalmente os vetores no plano $z = 0$.

Transformações Lineares Geométricas

Exemplo 9: determine a TL no $\mathbb{R}^3$ que reflete os vetores em relação ao plano $z = 0$.