Combinação Linear e Espaços Gerados

Marcelo Dreux

Relembrando - Combinação Linear

- Dizemos que v é combinação linear (CL) de v_1, $v_2, \ldots v_p$ se e só se existem $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_p \in \mathbb{R}$ tais que

$$v = \alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \cdots + \alpha_p v_p$$

$$v = \sum_{i=1}^{p} \alpha_i v_i$$

Combinação Linear

Ex: a) Determine se $u = (1,3,4)$ é combinação linear de $v = (1,1,0)$ e $w = (1,0,1)$

Combinação Linear

b) Determine se $u = (1,3,-3,7)$ é uma combinação linear dos vetores $(1,1,1,1)$ e $(0,1,-2,3)$

Combinação Linear

c) Seja $C = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \right\}$

Determine se $A = \begin{pmatrix} 5 & 0 \\ -2 & 5 \end{pmatrix}$ é CL dos elementos de C.

Combinação Linear

d) Seja $C = \{1 - x^2, x + 2\}$

Determine se $-2x^2 + x + 4$ é CL dos vetores de C

Combinação Linear

e) $(5,5)$ é CL de $\{(1,1),(-2,-2)\}$?

Espaço Gerado

O espaço gerado pelo conjunto de vetores $\{v_1, v_2, \dots, v_p\} \in V$, denotado por $span\,\{v_1, \dots, v_p\}$ ou $ger\,\{v_1, \dots, v_p\}$, é o conjunto de todas as combinações lineares de $v_1, v_2, \dots, v_p$

$$span\{v_1, v_2, \dots, v_p\} = \left\{ \sum_{i=1}^{p} t_i v_i \mid t_i \in \mathbb{R}, i = 1,2, \dots p \right\}$$

Se $v \in span\{v_1, \dots, v_p\}$ então $v = a_1 v_1 + \cdots + a_p v_p$

Conjunto Gerador

- O conjunto ordenado gera W (é conjunto gerador de W) se $W = \text{span}\{v_1, v_2, \dots, v_p\}$

Exemplos:

$\text{span}\{(1,1)\}$

$\text{span}\{(1,1),(2,2)\}$

$\text{span}\{(1,0),(0,1)\}$

$\text{span}\{1,0),(1,1)\}$

$\text{span}\{(1,0),(1,1),(3,5)\}$

Conjunto Gerador

$$\text{span}\left\{\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}\right\}$$

Conjunto Gerador

$\text{span}\{x^2 + 1, -2\}$

Linearmente Dependente e Linearmente Independente – LD e LI

O conjunto de vetores $\mathrm{C} = \{v_1, v_2, \dots v_p\}$ é dito linearmente independente (LI) se e só se o sistema

$$a_1 v_1 + a_2 v_2 + \cdots + a_p v_p = 0$$

<u>só admitir a solução</u> $a_1 = a_2 = \cdots = a_p = 0\ (\mathrm{SPD})$

Caso contrário, ou seja, se além da solução trivial existem outras soluções (SPI), diz-se que trata-se de um conjunto linearmente dependente (LD)

Decida se os conjuntos a seguir são LI ou LD

a) $C = \{(1, -1, 1)\}$

b) $C = \{(1, 0, 1), (1, 1, 1)\}$

Decida se o conjunto a seguir é LI ou LD

c) $C = \{(1,0,1), (1,1,1), (3,5,3)\}$

Decida se o conjunto a seguir é LI ou LD

d) $C = \{(1,0,-1,1),(1,2,1,1),(2,2,0,2),(4,4,0,4)\}$

Decida se o conjunto a seguir é LI ou LD

e) $C = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 4 & -1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -3 & 3 \\ 1 & -3 \end{pmatrix} \right\}$

Decida se o conjunto a seguir é LI ou LD

f) $C = \{x^3 - 1, x^3 + x^2, -x, x + 1\}$

Espaço Gerado – LI e LD

- A noção de espaço gerado explica o sentido de se perguntar se um conjunto é LI ou LD. Se $\{u_1, u_2, \ldots, u_k\}$ é LD, há vetores "sobrando" quando se faz referência ao espaço gerado