Diagonalização

Marcelo Dreux

Matrizes Semelhantes

Duas matrizes quadradas A e B são semelhantes se existir alguma matriz invertível P tal que $P^{-1}AP = B$.

Diagonalização

Dizemos que uma matriz quadrada A é diagonalizável se existe P invertível tal que

$$P^{-1}AP = D \text{ ou } A = PDP^{-1}$$

Com D diagonal.

Em outras palavras A é diagonalizável se é semelhante a uma matriz diagonal.

Matrizes Semelhantes $A = PBP^{-1}$

- Têm o mesmo determinante;
- Têm os mesmos autovalores, logo o mesmo polinômio característico;
- Têm o mesmo traço;
- Se A é invertível então B também é invertível

Diagonalização

Obs:

i) $AP = PD$

Se $P = \begin{pmatrix} | & | & | \\ v_1 & \dots & v_n \\ | & | & | \end{pmatrix}$ e $D = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_n \end{pmatrix}$

Diagonalização

$$A\begin{pmatrix} | & & | \\ v_1 & \dots & v_n \\ | & & | \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} | & & | \\ v_1 & \dots & v_n \\ | & & | \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_n \end{pmatrix}$$

$$Av_i = \lambda_i v_i$$

As colunas de P são os autovetores de A com autovalores na diagonal de D.

Diagonalização

ii) Se uma matriz A de dimensão $n \text{ x } n$ possui n autovalores distintos, então A é diagonalizável (suficiente, mas não necessário). Se λ tem multiplicidade k então é necessário que tenha k autovetores distintos para ser diagonalizável;

Exercício

Seja $T(x, y) = (2x + y, 3y)$. Achar as matrizes P e D, tais que $T = PDP^{-1}$, com D diagonal.

Exercício

Seja $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$. Achar as matrizes P e D, tais que $A = PDP^{-1}$, com D diagonal.

Exercício

- Seja $T: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ dada por
$$T(x, y, z) = (x + 2y, 2x + y, 3z)$$

a) Encontre os autovalores de T e os respectivos autoespaços;

b) T é diagonalizável? Se sim dê sua forma diagonal

c) Calcule $\det(T)$