Base, Dimensão e Coordenadas

Marcelo Dreux

Base de Um Espaço Vetorial

O conjunto ordenado $\beta = \{u_1, u_2, \dots, u_k\} \subset V$ (V é um espaço vetorial) é uma <u>base</u> de V se e só se:

- $V = span\{u_1, u_2, \dots, u_k\}$ (gera V)
- $\beta = \{u_1, u_2, \dots, u_k\}$ é LI

Ao número k dá-se o nome de <u>dimensão</u> e denotamos por $\dim V = k$.

Base

- O uso da palavra “ordenado” na definição acima implica que os conjuntos $\{u_1, u_2, \dots, u_k\}$ e $\{u_2, u_1, \dots, u_k\}$ são bases diferentes, apesar de serem conjuntos iguais, e portanto geram o mesmo espaço.

Base

Exemplo: Decida se $\{(1,1)\}$ é uma base do $\mathbb{R}^2$.

Exemplo: Decida se $\{(1,1), (-1,1), (2,3)\}$ é uma base do $\mathbb{R}^2$.

Base

Exemplo: Decida se $\beta = \{(2,4)\}$ é base de $V = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 |\ y = \ 2x\}$

Exemplo: Decida se $\beta = \{(2,4),(1,3)\}$ é base de $V = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 |\ y = \ 2x\}$

Base

Exemplo: Decida se $\beta = \{(1,0,-1),(0,1,0)\}$ é base de V que é o plano $x + z = 0$

Base

Exemplo: Achar uma base para o conjunto das matrizes diagonais 2 x 2.

Base

Exemplo: Achar uma base para

$$V = \{A \in M_{2x2} | A^T = A\}$$

Base

Exemplo: Achar uma base para $V = \{p(x) = ax^2 + bx + c \mid a = b = c\}$

Base

Exemplo: Achar uma base para $V = \{p(x) \in P_3 \mid p(-1) = p(3) = 0\}$

$(x+1)(x-3)(ax+b)$
$\dim V = 2$

Fazer $a = 1, b = 0$ e $a = 0, b = 1$

Base para $V = \{(x+1)(x-3).x, (x+1)(x-3).1\}$

Base

- Se $\{u_1, u_2, \dots, u_k\}$ é base de um espaço vetorial V e $u \in V$, então a combinação linear que faz com que $u = a_1 u_1 + \cdots + a_k u_k$ é <u>única.</u>

- Convenciona-se que a base do espaço nulo é um conjunto vazio de dimensão zero

Base Canônica

O conjunto

$$\varepsilon = \{(\overbrace{1,0,0,\dots,0}^{\text{n elementos}}), (0,1,0,\dots,0), \dots (0,0,0,\dots 1)\} \subset$$

$\mathbb{R}^n$ é chamado de <u>base canônica</u> do $\mathbb{R}^n$

Bases muito usadas

$\mathbb{R}^2: \varepsilon = \{(1,0), (0,1)\}$

$\mathbb{R}^3: \varepsilon = \{(1,0,0), (0,1,0), (0,0,1)\}$

$M_{2x2}: \beta = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}$

$P_1: \{x, 1\}$

$P_2: \{x^2, x, 1\}$

Coordenadas

- Seja $\beta = \{u_1, u_2, \dots, u_k\}$ uma base de V e $u \in V$. Os coeficientes $\{a_1, a_2, \dots, a_k\} \subset \mathbb{R}$, <u>únicos</u>, tais que $v = a_1u_1 + \cdots + a_ku_k$, são chamados de <u>coordenadas de v na base β</u>. Notação:

$$(v)_\beta = \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_k \end{pmatrix}$$

Coordenadas

- Seja $V = \mathbb{R}^3$. Seja $\beta = \{(1, -1,0), (0,1,1), (1,0,0)\}$ uma base do $\mathbb{R}^3$. Seja $v = (5, -3,2) \in V$. Quais são as coordenadas de v na base β?

$$\begin{pmatrix} 5 \\ -3 \\ 2 \end{pmatrix}_{\beta} = \begin{pmatrix} \\ \\ \\ \end{pmatrix}$$

Coordenadas

Seja V o plano $x + y - z = 0$. Seja $\beta = \{(1, -1,0), (0,1,1)\}$ uma base de V. Seja $v = (5, -3,2) \in V$. Quais são as coordenadas de v na base β?

$$\begin{pmatrix} 5 \\ -3 \\ 2 \end{pmatrix}_{\beta} = \begin{pmatrix} \quad \end{pmatrix}$$

Coordenadas

Exemplo: Se $\beta = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}$, quais são as coordenadas de $\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 4 \end{pmatrix}$ na base β.

$$\left(\begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 4 \end{bmatrix} \right)_{\beta} = \left(\quad \right)$$

Coordenadas

Sejam $\beta = \{(2,0,0),(0,1,1),(1,1,2)\}$

e $(w)_\beta = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$, calcular $(w)_\varepsilon = w$

Base Ortogonal

- Diz-se que β é uma base ortogonal de V se β for base de V e β for um conjunto ortogonal. Definição análoga serve para uma base ortonormal.