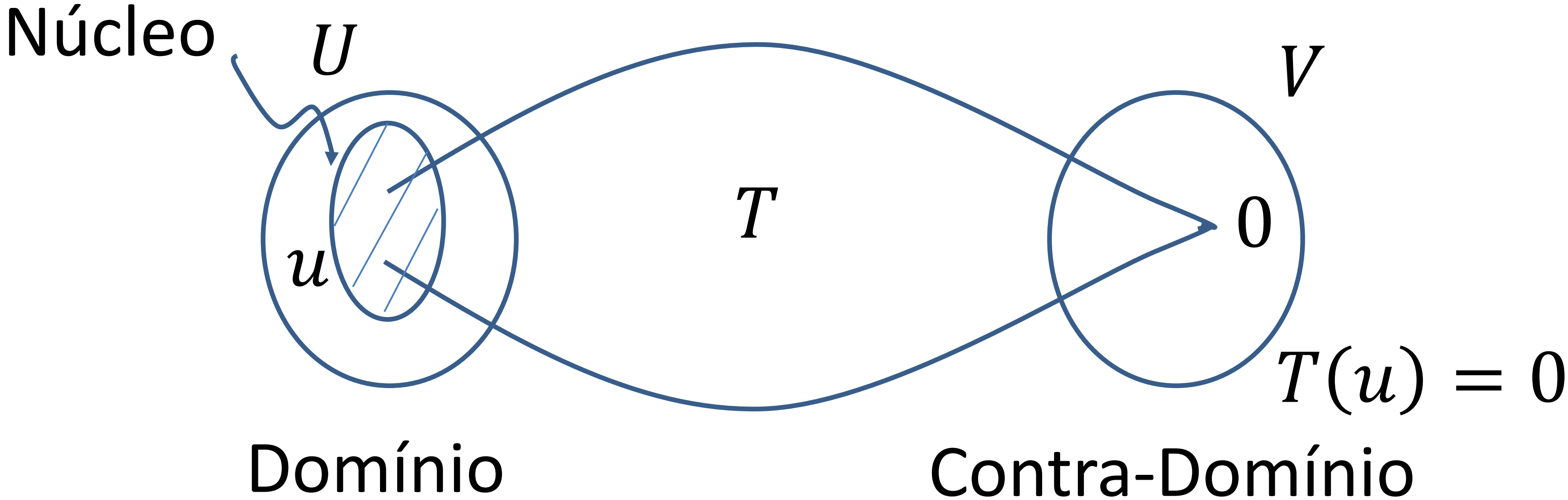
Núcleo e Imagem, Composição e Inversa de uma TL

Marcelo Dreux

Núcleo de uma TL

Seja $T: U \rightarrow V$ uma TL. O núcleo de T é o conjunto

$$Nuc(T) = \{u \in U \mid T(u) = 0\}$$



Núcleo de uma TL

Seja $T: U \to V$ uma TL

- $Nuc(T) \neq \phi$ já que $0 \in Nuc(T)$
- $Nuc(T) \subset U$
- $Nuc(T)$ é um subespaço de U
- $Nuc(T) = \{0\}$ se e somente se T é **injetiva**

$$(dim\, Nuc(T) = 0)$$

Imagem de uma TL

Seja $T: U \to V$ uma TL. A <u>imagem</u> de T é o conjunto

$$Im(T) = \{v \in V \mid \exists\, u \in U \text{ e } T(u) = v\}$$

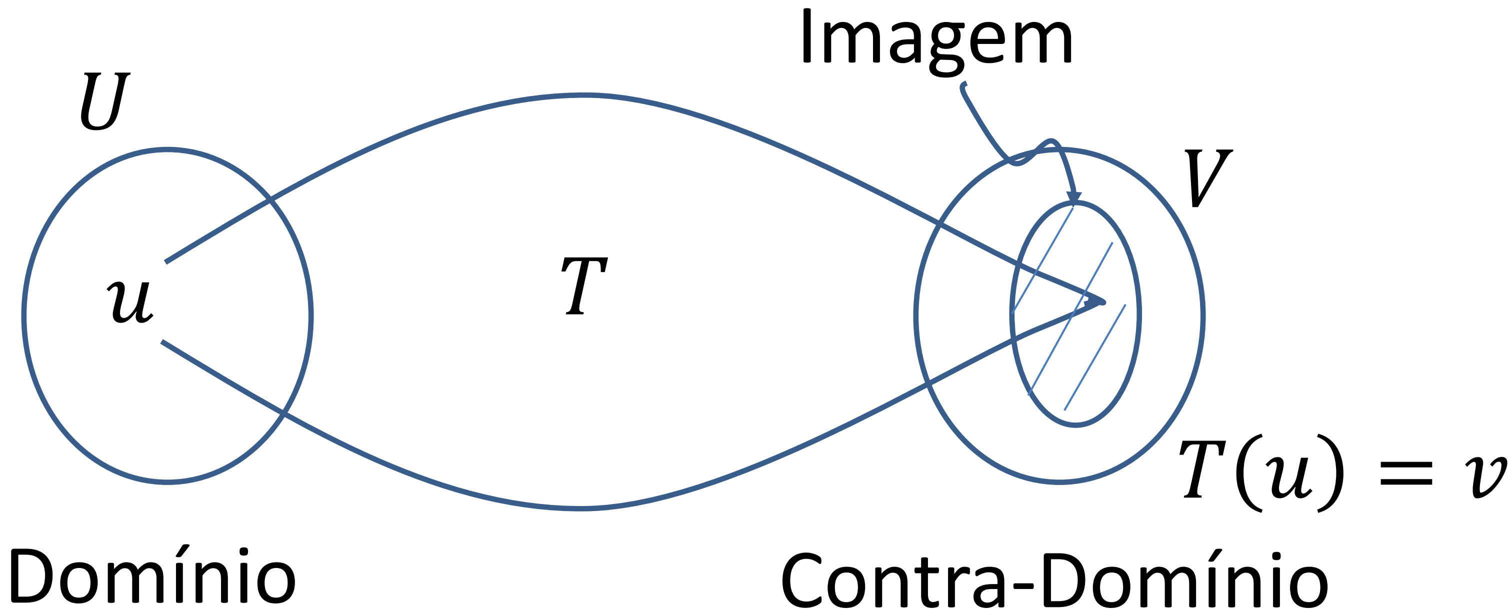


Imagem de uma TL

Seja $T: U \rightarrow V$ uma TL

- $Im(T) \neq \phi$ já que $0 \in Im(T)$
- $Im(T) \subset V$
- $Im(T)$ é um subespaço de V
- Se $Im(T) = V$ então T é **sobrejetiva**
- A imagem de uma TL é o subespaço gerado pelas imagens de uma base qualquer do domínio de T

Observações Importantes

- O núcleo de uma TL é o complemento ortogonal do espaço linha da matriz de transformação

- A imagem de uma TL é o espaço coluna da matriz de transformação

Teorema Núcleo-Imagem

Se $T: U \to V$ é uma TL então

$$\dim Nuc(T) + \dim Im(T) = \dim(U)$$

Núcleo da TL

Exemplo: Considere

$$T: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$$

$$T(x, y) = (x - y, 2x + y, x + y)$$

Imagem da TL

$$T: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$$
$$T(x, y) = (x - y, 2x + y, x + y)$$

Injetiva? Sobrejetiva?

Transformação Linear Nula

$$T: U \rightarrow V$$
$$T(u) = 0$$

$Nuc(T)$
$Im(T)$

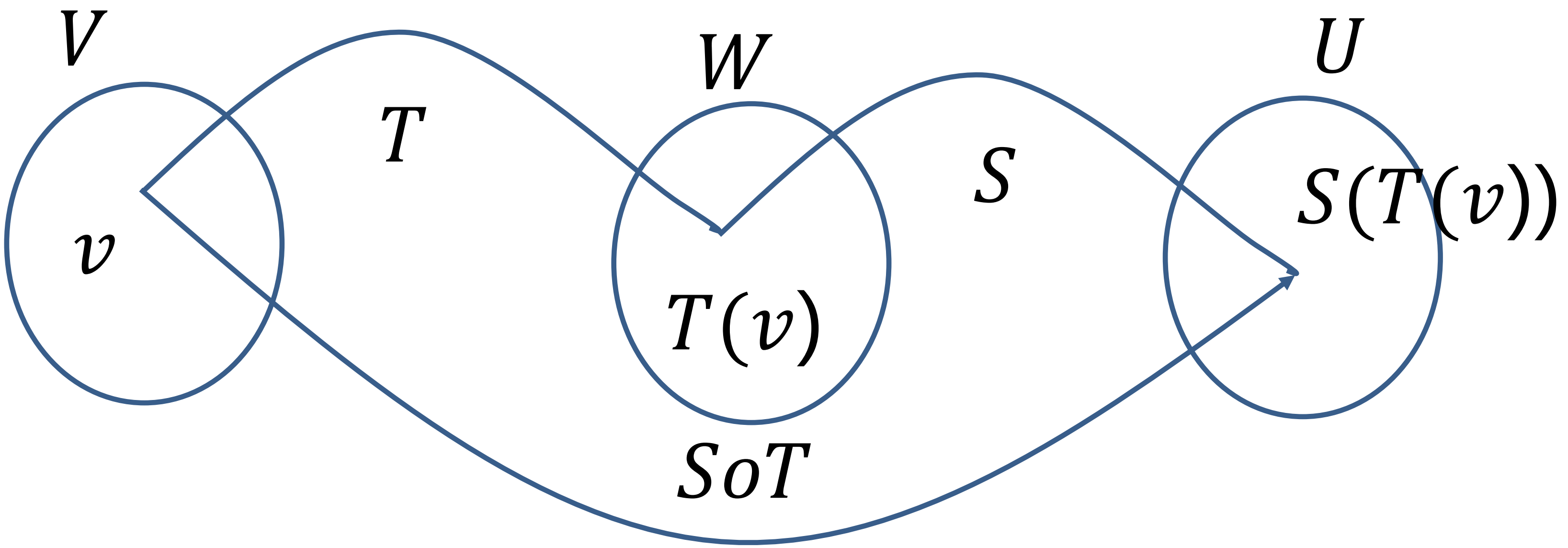
Transformação Linear Identidade

$$Id: V \to V$$
$$Id(v) \to v$$

$Nuc(Id)$
$Im(Id)$

Composição de TLs

Sejam $T: V \to W$ e $S: W \to U$ TLs.



Composição de TLs

Define-se $SoT: V \to U$ da seguinte forma:

$$SoT(v) = S\big(T(v)\big)$$
$$[SoT] = [S][T]$$

Em geral $SoT \neq ToS$

Composição de TLs

$$T: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$$
$$T(x, y) = (x, x + y, 0)$$

$$S: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$$
$$S(x, y, z) = (x + y, y + z)$$

$SoT =$

$ToS =$

Composição de TLs

Sejam $T: M_{2x2} \to P_2$ tal que

$$T\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = (a-b)x^2 - cx + d$$

e $S: P_2 \to \mathbb{R}^2$ tal que $S(ax^2 + bx + c) = (a, b + 2c)$. Determine, se possível, SoT e ToS.

$$SoT(v) = S\big(T(v)\big)$$

Composição de TLs

$$S\big(T(v)\big) = S\left(T\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\right) = S((a-b)x^2 - cx + d)$$

$$S\big(T(v)\big) = (a-b, -c+2d)$$

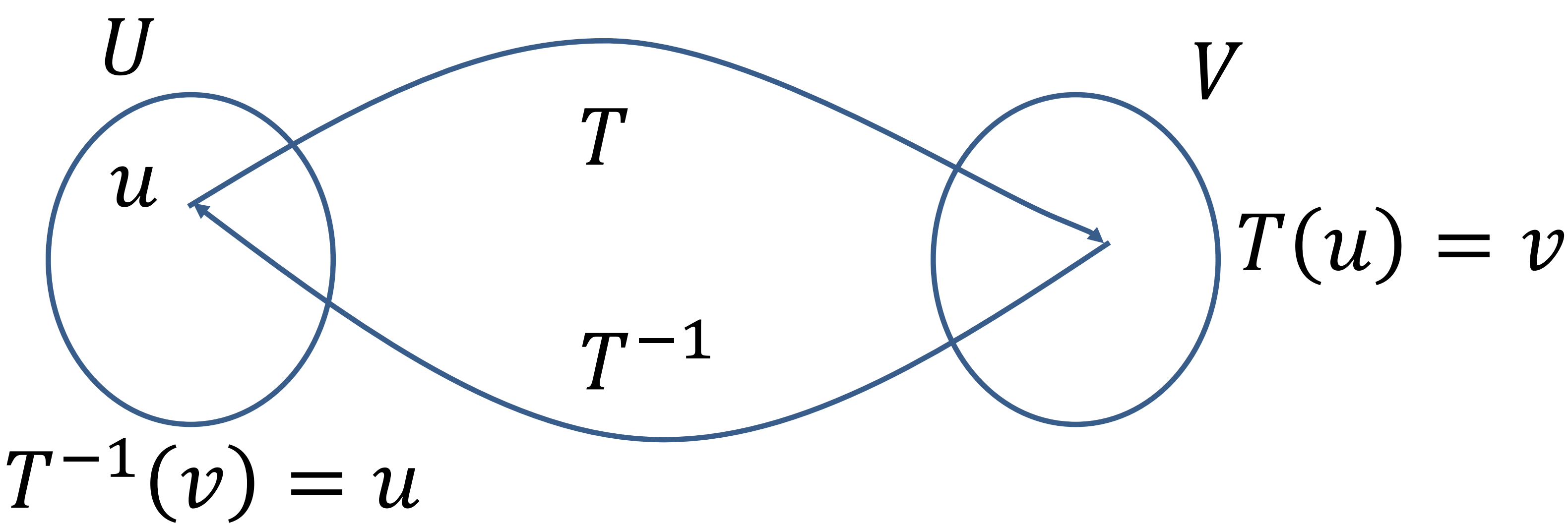
$$SoT\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} = (-2, -4)$$

$$ToS = ?$$

Inversa de uma TL

Seja $T: U \rightarrow V$ uma TL. Se T for injetora e sobrejetora então existe $T^{-1}: V \rightarrow U$, a inversa de T, tal que se $T(u) = v$ então $T^{-1}(v) = u \; \forall \, u \in U$.

$$T o T^{-1} = T^{-1} o T = Id$$



Exemplo

Seja $T: R^3 \rightarrow R^3$ a transformação linear definida por:

$$T(x, y, z) = (x + y, y + z, z).$$

T admite inversa? Justifique. Em caso afirmativo, encontre a inversa de T.