

Determinação preditiva de função para vazão de água em ferramenta com refrigeração interna

Descrição de caso

Neste modelo, será estudado a vazão no interior de ferramentas com refrigeração interna, com o desenho esquemático mostrado na Figura 1, a qual água no estado líquido percorre o seu interior. A Figura 2 mostra o formato das galerias que as quais são percorridas pelo fluido.

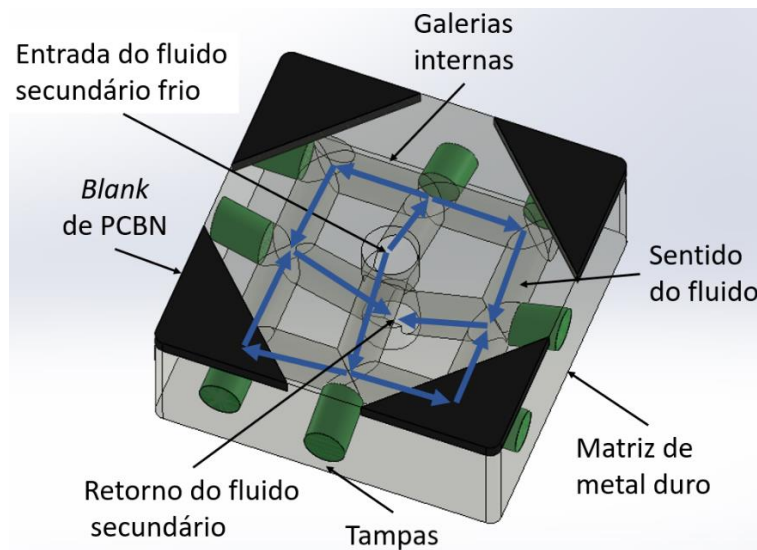


Figura 1. Desenho em CAD da ferramenta analisada

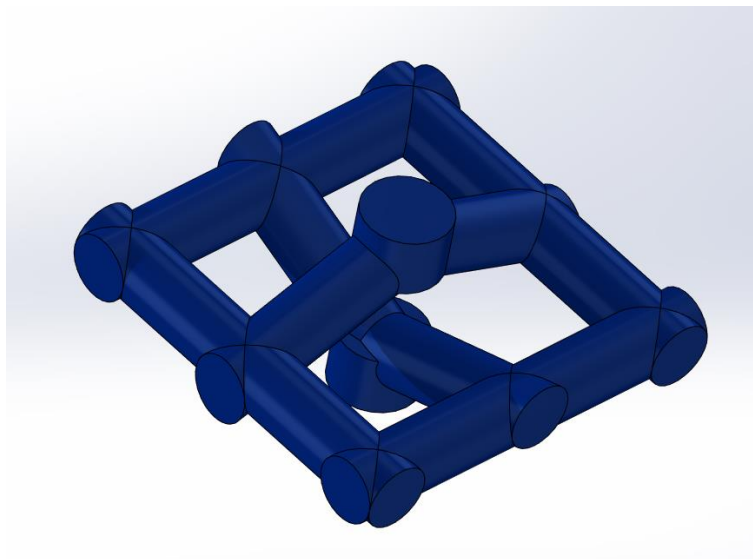


Figura 2. CAD dos canais de fluxo

Esta geometria de ferramentas refrigeradas será utilizada em conjunto com o ciclo de refrigeração indireta, representado na Figura 3, no qual um sistema de refrigeração primário refrigera água e esta é bombeada pelo interior da ferramenta de corte, com a entrada na superfície de saída, direcionada pelo grampo, e a saída na face inferior da ferramenta. Este sistema foi utilizado no torneamento de aço endurecido com a ferramenta com arestas de PCBN (nitreto cúbico de boro policristalino), e matriz de metal duro (carboneto de tungstênio), conforme a Figura 1.

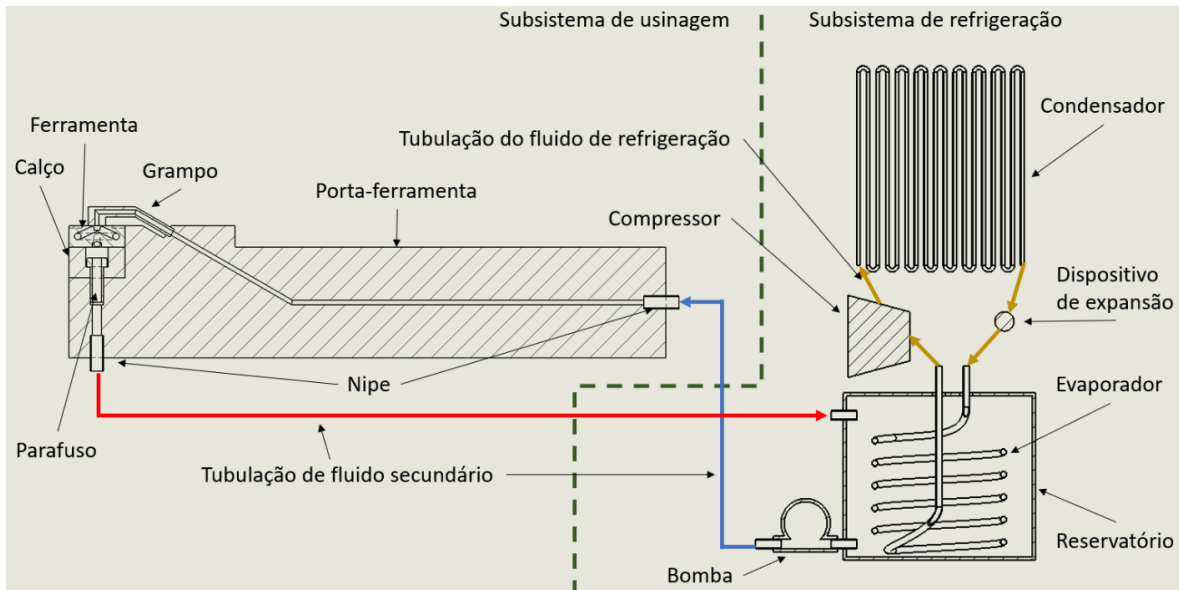


Figura 3. Esquema dos subsistemas de refrigeração e usinagem

Variáveis importantes

Para o cálculo da vazão serão utilizadas as seguintes variáveis, sendo definidas como as mais importantes no estudo em questão:

- Vazão mássico $\rightarrow Q [M * T^{-1}]$
- Densidade $\rightarrow \rho [M * L^{-3}]$
- Diâmetro hidráulico $\rightarrow D_h [L]$
- Diferença de pressão $\rightarrow \Delta P [M * L^1 * T^{-2}]$
- Viscosidade do fluido $\rightarrow \mu [M * L^{-1} * T^{-1}]$
- Comprimento da tubulação $\rightarrow C [L]$

Dessa forma a equação 1 demonstra que a vazão é dependente das outras variáveis e a equação 2 depende da amostra.

$$Q = f(\rho, D_h, \Delta P, \mu, C) \quad (1)$$

Definição dos π -termos

Para a definição dos π -termos, foram agrupadas as variáveis na equação 2, e posteriormente foram agrupadas as suas dimensões, equação 3. Nas equações 4, 5 e 6 foram agrupadas as constantes em cada dimensão; massa, comprimento e tempo, respectivamente.

$$Q * \rho^{C1} * D_h^{C2} * \Delta P^{C3} * \mu^{C4} * C^{C5} = 1 \quad (2)$$

$$\{M^1 * T^{-1}\} * \{M^1 * L^{-3}\}^{C1} * \{M * L^{-3}\}^{C2} * \{L\}^{C3} * \{M^1 * L^{-1} * T^{-1}\}^{C4} * \{L^1\}^{C5} = 1 \quad (3)$$

$$M \rightarrow 1 * C1 + 0 * C2 + 1 * C3 + 1 * C4 + 0 * C5 = 0 \quad (4)$$

$$L \rightarrow -3 * C1 + 1 * C2 + 1 * C3 - 1 * C4 + 1 * C5 = 0 \quad (5)$$

$$T \rightarrow 0 * C1 + 0 * C2 - 2 * C3 - 1 * C4 + 0 * C5 = 0 \quad (6)$$

Dessa forma o número de variáveis (N_{var}) foi igual a 6 e o número de dimensões (N_{dim}) igual a 3, dessa forma serão utilizados 3 π -termos (N_{π}), conforme a equação 7.

$$N_{\pi} = N_{var} - N_{dim} = 6 - 3 = 3 \quad (7)$$

No para definir as variáveis dependentes (ρ, μ, C), foi necessário verificar se os determinantes das dimensões eram diferentes de zero, mostrado a seguir. Dessa forma foram definidas as variáveis dependentes.

$$\text{Det} \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -3 & -1 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{vmatrix} = 1 \neq 0 \text{ condição válida}$$

Calculo dos π -termos

Cálculo do π_1

Para o cálculo do π_1 foi utilizado a variável resposta, vazão, equação 8. Ao resolver o sistema linear da equação 9, foi encontrado os coeficientes $C1 = 0$; $C4 = -1$ e $C5 = -1$, dessa forma o π_1 é representado na equação 10.

$$\pi_1 = Q * \rho^{C1} * \mu^{C4} * C^{C5} \quad (8)$$

$$\{M^0 * L^0 * T^0\} = \{M^1 * T^{-1}\} * \{M^1 * L^{-3}\}^{C1} * \{M^1 * L^{-1} * T^{-1}\}^{C4} * \{L^1\}^{C5} \quad (9)$$

$$\pi_1 = \frac{Q}{\mu^{1 * C1}} \quad (10)$$

Cálculo do π_2

Para o cálculo do π_2 foi diâmetro, equação 11. Ao resolver o sistema linear da equação 12, foi encontrado os coeficientes $C1 = 0$; $C4 = 0$ e $C5 = -1$, dessa forma o π_2 é representado na equação 13.

$$\pi_2 = D_h * \rho^{C1} * \mu^{C4} * C^{C5} \quad (11)$$

$$\{M^0 * L^0 * T^0\} = \{L\} * \{M^1 * L^{-3}\}^{C1} * \{M^1 * L^{-1} * T^{-1}\}^{C4} * \{L^1\}^{C5} \quad (12)$$

$$\pi_2 = \frac{D_h}{C} \quad (13)$$

Cálculo do π_3

Para o cálculo do π_3 foi utilizado a variável resposta, vazão, equação 14. Ao resolver o sistema linear da equação 15, foi encontrado os coeficientes $C1 = 1$; $C4 = -2$ e $C5 = 2$, dessa forma o π_3 é representado na equação 16.

$$\pi_3 = \Delta P * \rho^{C1} * \mu^{C4} * C^{C5} \quad (14)$$

$$\{M^0 * L^0 * T^0\} = \{M^1 * L^{-1} * T^{-2}\} * \{M^1 * L^{-3}\}^{C1} * \{M^1 * L^{-1} * T^{-1}\}^{C4} * \{L^1\}^{C5} \quad (15)$$

$$\pi_3 = \frac{\Delta P * \rho * C^2}{\mu^2} \quad (16)$$

Relação entre os π -termos

Como o π_1 é escrito em função de π_2 e π_3 , conforme equação 17, a equação 18, é a união das equações 17, 10, 13 e 16, representado a função a ser analisada neste problema de similitude.

$$\pi_1 = f(\pi_2, \pi_3) \quad (17)$$

$$\frac{Q}{\mu^1 * C^1} = f\left(\frac{D_h}{C}, \frac{\Delta P * \rho * C^2}{\mu^2}\right) \quad (18)$$

Planejamento experimental

Foram utilizadas 3 situações distintas, variando a o π_2 e mantendo o π_3 constante em com duas pressões distintas, além de alterar o π_3 e manter o π_2 constante, no programa Ansys® Fluent 19. Foram alteradas somente as variáveis diâmetro hidráulico (D_h), para duas diferenças de pressão (ΔP), a fim de determinar o π_1 . Os valores padrões foram definidos como:

- $\rho = 998,2 \frac{\text{kg}}{\text{m}^3}$
- $D_h = 0,0015 \text{ m}$
- $\Delta P = 1000000 \text{ Pa}$
- $\mu = 1,0030 * 10^{-3} \frac{\text{kg}}{\text{m} \cdot \text{s}}$
- $C = 0,0179 \text{ m}$

A Figura 4 mostra as condições de contornos impostas, com a superfície A representando a entrada de fluido, e a superfície B, oposta à superfície A, representando a saída de fluido; as outras superfícies são marcadas como parede. Como modelo de turbulência foram utilizados k-epsilon e tratamento próximo das paredes de *Scalable Wall Function*. A figura 5 mostra a malha utilizada, com 48959 elementos triangulares de 0,0003 mm de lado de média. Como critério de parada foram utilizados todos os resíduos de continuidade, velocidade (X, Y e Z), k-epsilon menores que 0,001 ou 1000 interações, sendo que o critério de numero de interações foi utilizado em todas as simulações devido a ser o critério atingido, uma vez que a presença de turbulência dificulta a convergência.

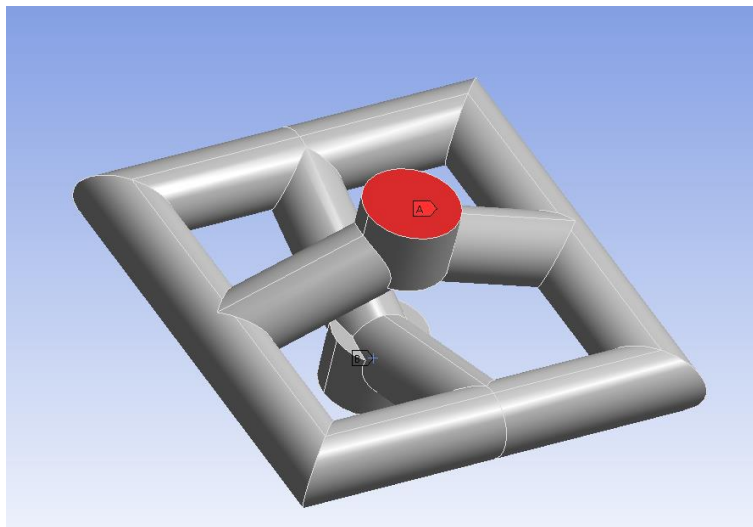


Figura 4. Condições de contorno

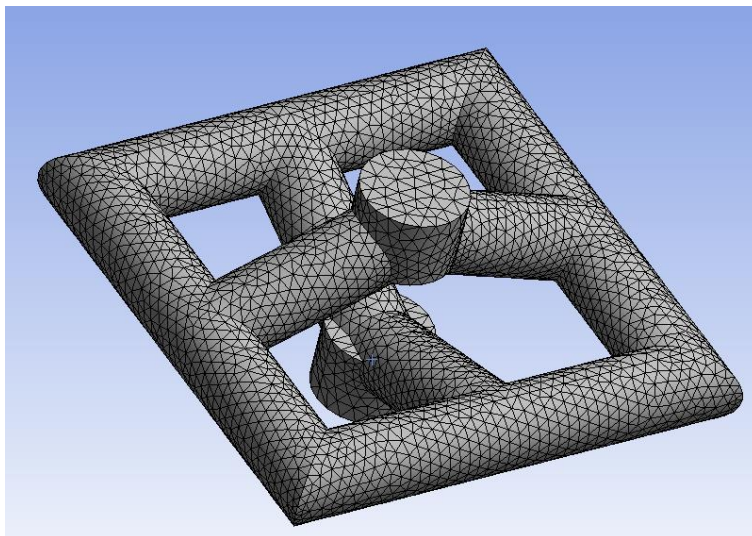


Figura 5. Malha

Resultados das simulações e obtenção das funções parciais de π

Como exemplo será mostrado somente os resultados gráficos da simulação padrão, a fim de não prolongar excessivamente, com os resultados das outras simulações serão mostradas nas tabelas 1, 2 e 3. A Figura 6 mostra a velocidade do fluido dentro dos canais, e a figura 7 mostra a pressão estática nas paredes do domínio.

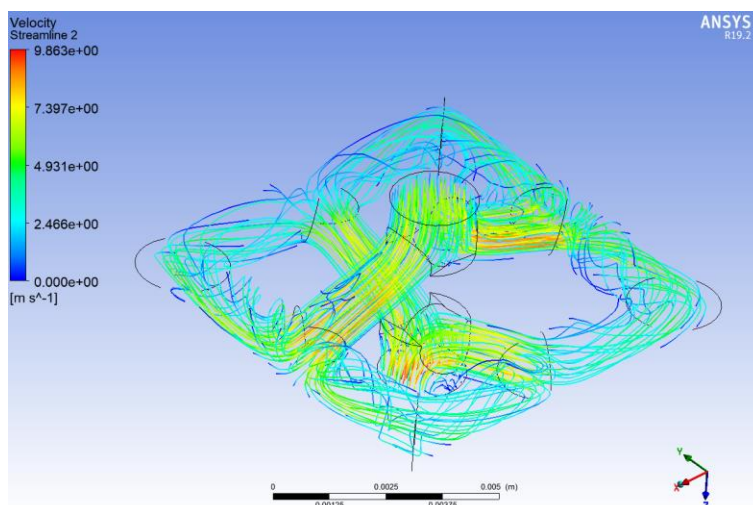


Figura 6. Velocidade do fluido nos canais

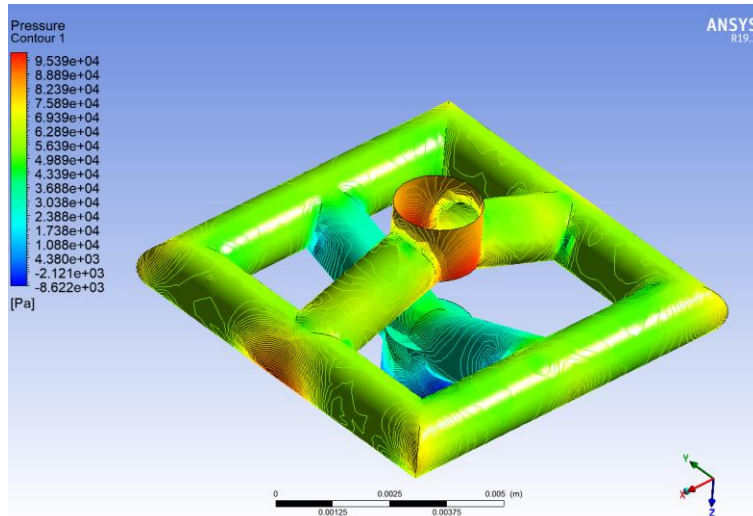


Figura 7. Pressão estática na parede

A tabela 1 mostra todas as variáveis e π -termos para a variação do diâmetro hidráulico, mantendo a pressão constante de 100000 Pa. O π_1 foi calculado a partir de π_2 conforme a interpolação exponencial da Figura 8, e da equação 19.

Tabela 1. π_2 variável e $\overline{\pi_3}$ constante.

Q [kg/s]	ρ [kg/m³]	Dh [m]	P [Pa]	μ [Kg/(m*s)]	C [m]	π_1	π_2	π_3
<u>0,00886</u>	998,2	<u>0,00100</u>	100000	0,001003	0,0179	<u>493,63</u>	<u>0,056</u>	3,179E+10
<u>0,01357</u>	998,2	<u>0,00125</u>	100000	0,001003	0,0179	<u>755,98</u>	<u>0,070</u>	3,179E+10
<u>0,01945</u>	998,2	<u>0,00150</u>	100000	0,001003	0,0179	<u>1083,34</u>	<u>0,084</u>	3,179E+10
<u>0,02721</u>	998,2	<u>0,00175</u>	100000	0,001003	0,0179	<u>1515,38</u>	<u>0,098</u>	3,179E+10
<u>0,03619</u>	998,2	<u>0,00200</u>	100000	0,001003	0,0179	<u>2015,48</u>	<u>0,112</u>	3,179E+10

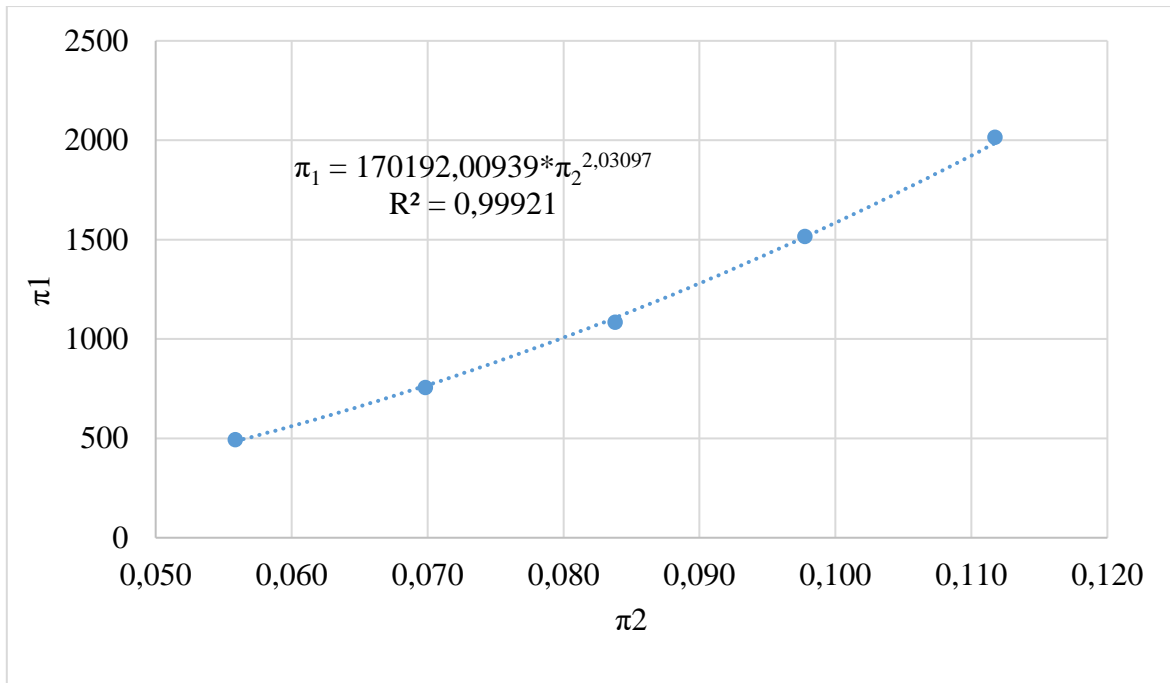


Figura 8. π_2 variável e $\overline{\pi_3}$ constante

$$f(\pi_2, \overline{\pi_3}) = \pi_1 = 170192 * \pi_{2a}^{2,03097} \quad (19)$$

A tabela 2 mostra todas as variáveis e π -termos para a variação do diâmetro hidráulico, mantendo a pressão constante de 200000 Pa. O π_1 foi calculado a partir de π_2 conforme a interpolação exponencial da Figura 9, e da equação 20. Para facilitar a leitura, os dados que foram variados foram sublinhados para maior destaque.

Tabela 2. π_2 variável e $\overline{\pi_3}$ constante

Q [kg/s]	ρ [kg/m ³]	Dh [m]	P [Pa]	μ [Kg/(m*s)]	C [m]	π_1	π_2	π_3
<u>0,01250</u>	998,2	<u>0,00100</u>	200000	0,001003	0,0179	<u>696,29</u>	<u>0,056</u>	6,358E+10
<u>0,01927</u>	998,2	<u>0,00125</u>	200000	0,001003	0,0179	<u>1073,33</u>	<u>0,070</u>	6,358E+10
<u>0,02711</u>	998,2	<u>0,00150</u>	200000	0,001003	0,0179	<u>1510,11</u>	<u>0,084</u>	6,358E+10
<u>0,03830</u>	998,2	<u>0,00175</u>	200000	0,001003	0,0179	<u>2133,49</u>	<u>0,098</u>	6,358E+10
<u>0,05115</u>	998,2	<u>0,00200</u>	200000	0,001003	0,0179	<u>2848,93</u>	<u>0,112</u>	6,358E+10

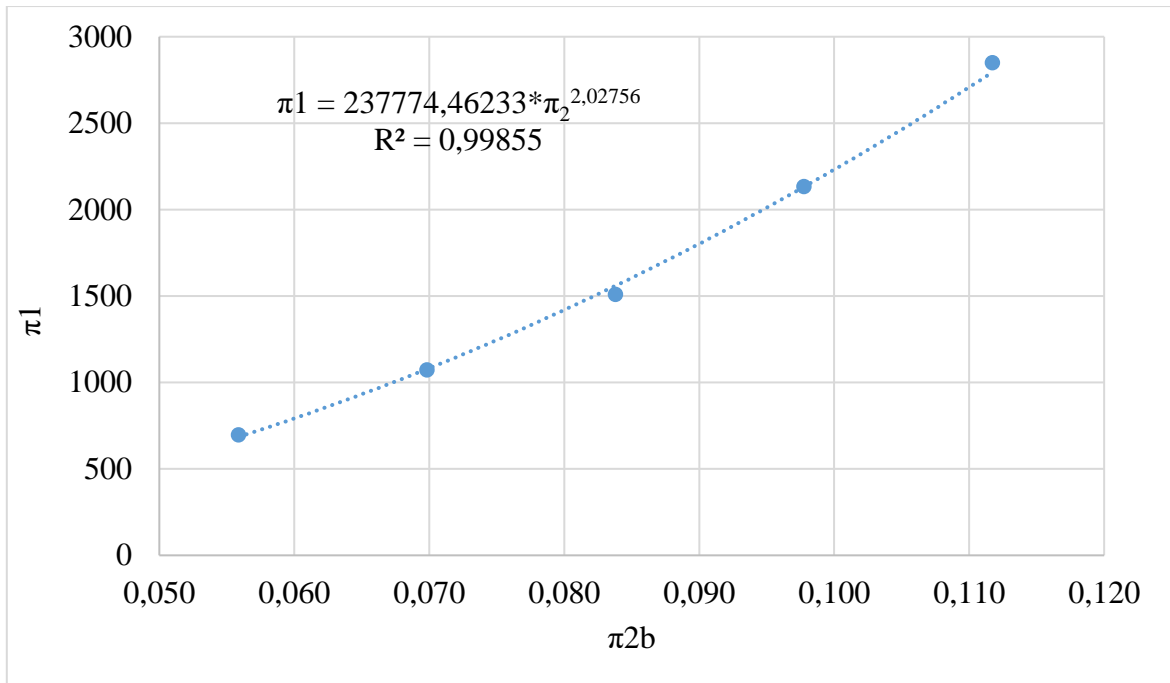


Figura 9. π_2 variável e $\overline{\pi_3}$ constante

$$f(\pi_2, \overline{\pi_3}) = \pi_1 = 237774 * \pi_{2b}^{2,02756} \quad (20)$$

A tabela 3 mostra todas as variáveis e π -termos para a variação da pressão. O π_1 foi calculado a partir de π_2 conforme a interpolação exponencial da figura 10, e da equação 21.

Tabela 3. $\overline{\pi_2}$ constante e π_3 variável

Q [kg/s]	ρ [kg/m³]	Dh [m]	P [Pa]	μ [Kg/(m*s)]	C [m]	π_1	π_2	π_3
<u>0,01945</u>	998,2	0,00150	<u>100000</u>	0,001003	0,0179	<u>1083,34</u>	0,084	<u>3,179E+10</u>
<u>0,02178</u>	998,2	0,00150	<u>125000</u>	0,001003	0,0179	<u>1213,09</u>	0,084	<u>3,974E+10</u>
<u>0,02372</u>	998,2	0,00150	<u>150000</u>	0,001003	0,0179	<u>1321,06</u>	0,084	<u>4,769E+10</u>
<u>0,02568</u>	998,2	0,00150	<u>175000</u>	0,001003	0,0179	<u>1430,33</u>	0,084	<u>5,564E+10</u>
<u>0,02711</u>	998,2	0,00150	<u>200000</u>	0,001003	0,0179	<u>1510,11</u>	0,084	<u>6,358E+10</u>

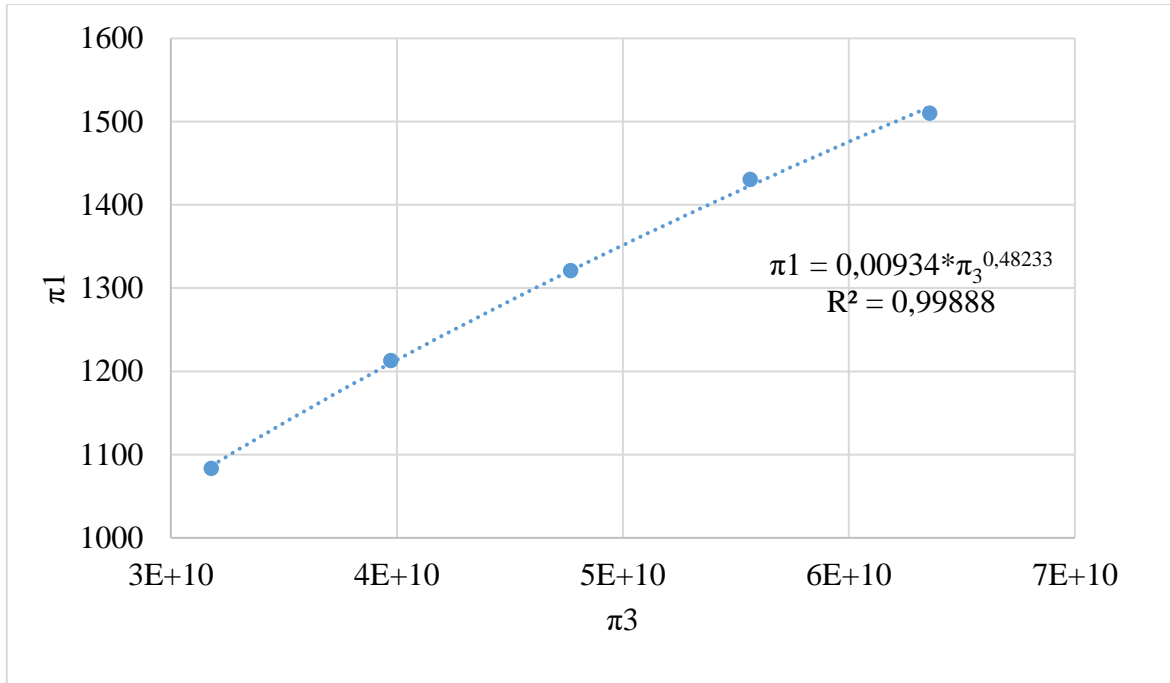


Figura 10. $\overline{\pi_2}$ constante e π_3 variável

$$f(\overline{\pi_2}, \pi_3) = \pi_1 = 0,00934133 * \pi_3^{0,48233} \quad (21)$$

Resolução final e equação preditiva

Para obedecer a regra do produto, equação 22, as duas curvas para a variação do π_{2a} e π_{2b} , equações 23 e 24 respectivamente, tem que ser aproximadamente igual ao aplicar uma constante, equação 25, no caso foi utilizado o diâmetro de 0,001 m.

$$\pi_1 = f(\pi_2, \pi_3) = \frac{f(\pi_2, \overline{\pi_3}) * f(\overline{\pi_2}, \pi_3)}{f(\overline{\pi_2}, \overline{\pi_3})} \quad (22)$$

$$\frac{f(\pi_{2a}, \overline{\pi_3})}{f(\overline{\pi_{2a}}, \overline{\pi_3})} = \frac{170192 * \pi_{2a}^{2,03097}}{493,6338} = 344,7737 * \pi_{2a}^{2,03097} \quad (23)$$

$$\frac{f(\pi_{2b}, \overline{\pi_3})}{f(\overline{\pi_{2b}}, \overline{\pi_3})} = \frac{237774 * \pi_{2b}^{2,02756}}{696,2916} = 341,4862 * \pi_{2b}^{2,02756} \quad (24)$$

$$\frac{f(\pi_{2a}, \overline{\pi_3})}{f(\pi_{2a}, \pi_3)} \cong \frac{f(\pi_{2b}, \overline{\pi_3})}{f(\pi_{2b}, \pi_3)} \rightarrow 344,7737 * \pi_{2a}^{2,03097} \cong 341,4862 * \pi_{2b}^{2,02756} \quad (25)$$

Ao utilizar a $f(\pi_{2a}, \overline{\pi_3})$, em detrimento da $f(\pi_{2b}, \overline{\pi_3})$, a equação 26 foi formada unindo as equações 21, 22 e 23. Sendo que a equação 27, foi isolado a variável vazão.

$$\frac{Q}{\mu^1 * C^1} = \frac{170192 * \left(\frac{D_h}{C}\right)^{2,03097} * 0,00934133 * \left(\frac{\Delta P * \rho * C^2}{\mu^2}\right)^{0,48233}}{493,6338} \quad (26)$$

$$Q = \frac{3,22065 * D_h^{2,03097} * \Delta P^{0,48233} * \rho^{0,48233} * \mu^{0,03534}}{C^{1,03097}} \quad (27)$$

Ao comparar os valores da vazão calculados pela equação 27 e obtidos pelo Ansys nas tabelas 1, 2 e 3, figura 11 utilizando os mesmos valores para as incógnitas, foi necessário utilizar um constante k na equação 27, resultando na equação 29, com a constante k pela inclinação angular da reta, presente na equação 28.

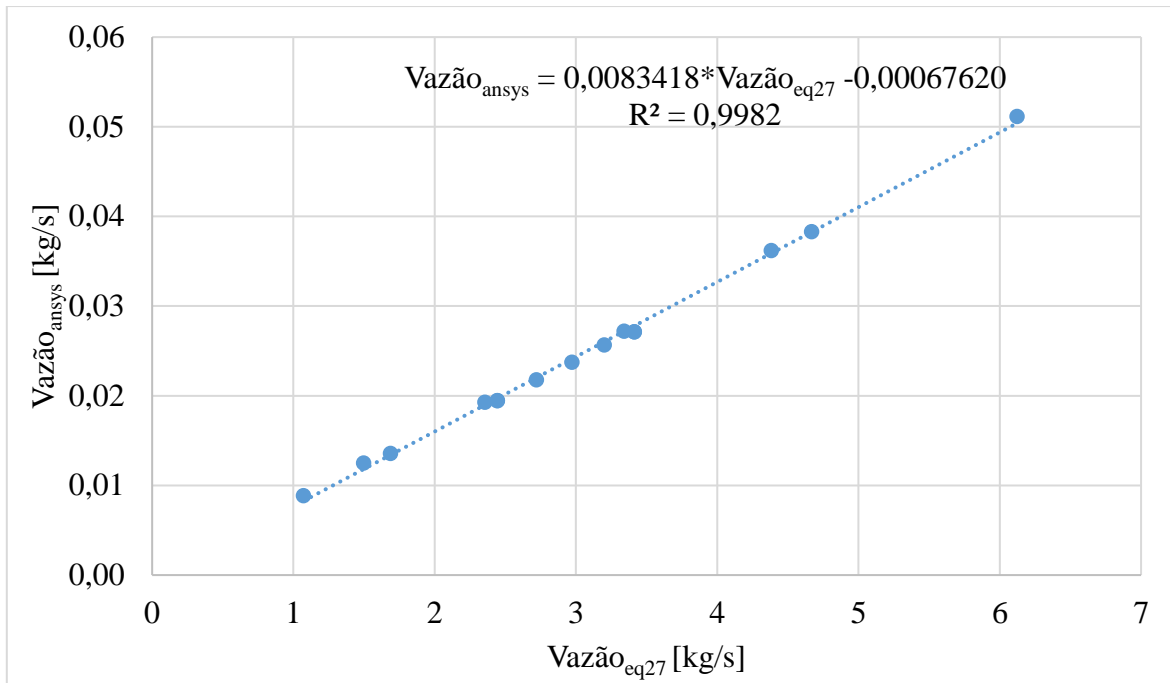


Figura 11. Vazão Ansys X Vazão Equação 27.

$$\text{Vazão}_{\text{ansys}} = 0,0083418 * \text{Vazão}_{\text{eq27}} - 0,00067620 \quad (28)$$

$$Q = k * \frac{3,22065 * D_h^{2,03097} * \Delta P^{0,48233} * \rho^{0,48233} * \mu^{0,03534}}{C^{1,03097}} \quad (29)$$

A partir da substituição do da constante k da equação 29, pelo coeficiente angular da equação 28, foi obtido a equação 30, a qual é a equação preditiva para este problema. A figura 12 mostra que o coeficiente de determinação (R^2) de 0,9982 representa boa com boa correlação os valores simulados e os obtidos através da análise dimensional.

$$Q = \frac{0,026866 * D_h^{2,03097} * \Delta P^{0,48233} * \rho^{0,48233} * \mu^{0,03534}}{C^{1,03097}} \quad (30)$$

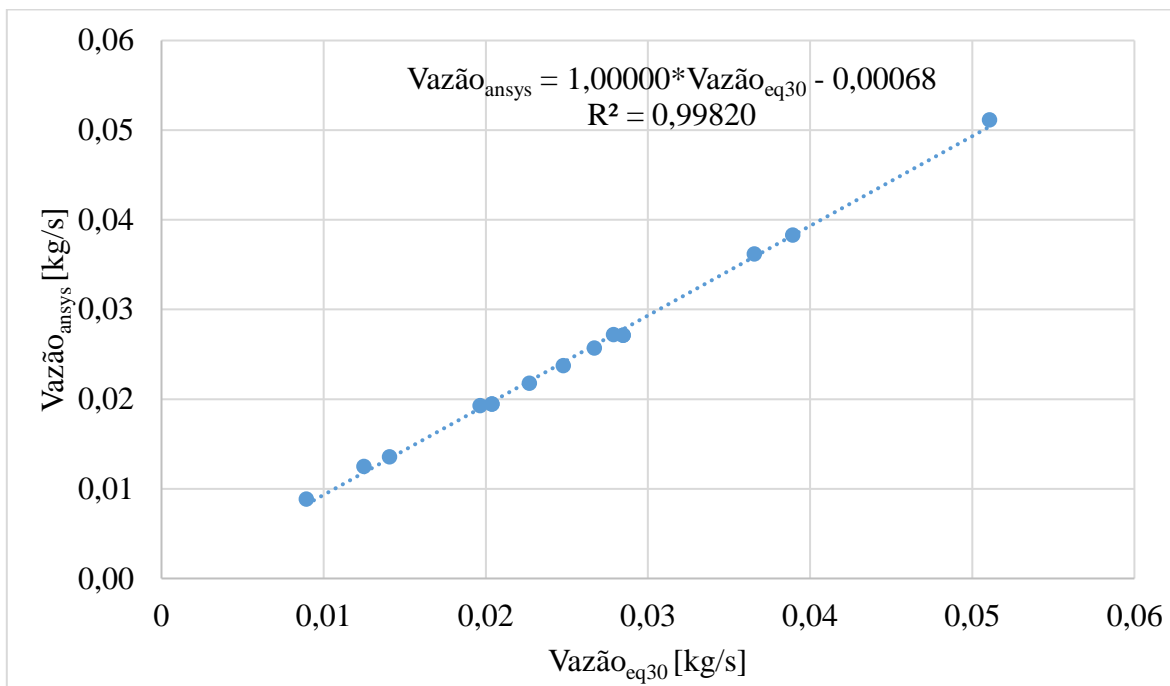


Figura 12. Vazão Ansys X Vazão Análise dimensional.