

# Teorema de Serer: Um Método Construtivo Linear para Encontrar Caminhos Hamiltonianos em Grafos Arbitrários

Pedro Stein Serer

5 de outubro de 2025

## Sumário

<b>1</b>	<b>Introdução</b>	<b>2</b>
<b>2</b>	<b>Definições e Notação</b>	<b>2</b>
<b>3</b>	<b>Relação com o Teorema de Bondy–Chvátal</b>	<b>2</b>
<b>4</b>	<b>O Algoritmo Construtivo</b>	<b>3</b>
<b>5</b>	<b>Teorema de Serer</b>	<b>4</b>
<b>6</b>	<b>Prova de Completude</b>	<b>4</b>
<b>7</b>	<b>Complexidade</b>	<b>5</b>
<b>8</b>	<b>Discussão</b>	<b>6</b>
8.1	Por que é teórica . . . . .	6
8.2	Limites da novidade . . . . .	6
8.3	Comparação com a literatura . . . . .	7
<b>9</b>	<b>Referências</b>	<b>7</b>

## Resumo

Apresentamos um método construtivo e determinístico capaz de encontrar pelo menos um caminho Hamiltoniano em grafos arbitrários, se existir, **condicional à atribuição de valores compatível com o Teorema de Bondy–Chvátal**. O método utiliza janelas de tamanho constante para gerar permutações locais que respeitam as restrições de adjacência e vizinhança, garantindo linearidade assintótica para  $k$  constante. A abordagem é *originalmente construtiva*, e não propõe uma solução geral do problema Hamiltoniano.

## 1 Introdução

O problema do caminho Hamiltoniano é um clássico da Teoria dos Grafos e da Computação Teórica, sendo NP-completo para grafos arbitrários. Neste trabalho, propomos um método construtivo que garante encontrar pelo menos um caminho Hamiltoniano, caso ele exista, em qualquer grafo arbitrário, com complexidade linear para  $k$  constante. Formulamos o **Teorema de Serer**, destacando a completude condicional e a eficiência do algoritmo, sem pretender resolver o problema Hamiltoniano de forma geral.

## 2 Definições e Notação

**Definição 2.1** (Grafo arbitrário). Um grafo arbitrário é um par  $G = (V, E)$ , onde  $V$  é o conjunto de vértices e  $E \subseteq V \times V$  é o conjunto de arestas.

**Definição 2.2** (Caminho Hamiltoniano). Um caminho Hamiltoniano é uma sequência  $(v_1, v_2, \dots, v_n)$  de vértices distintos tal que  $(v_i, v_{i+1}) \in E$  para  $1 \leq i \leq n - 1$  e  $|V| = n$ .

## 3 Relação com o Teorema de Bondy–Chvátal

O Teorema de Bondy–Chvátal estabelece uma condição suficiente para que um grafo seja Hamiltoniano: se para quaisquer dois vértices não adjacentes  $u$  e  $v$  tivermos  $\deg(u) + \deg(v) \geq |V|$ , então a adição da aresta  $(u, v)$  não altera a Hamiltonianidade do grafo.

O algoritmo proposto realiza um processo construtivo análogo. A função de mapeamento  $F : V \rightarrow \{1, \dots, |V|\}$  e a condição de vizinhança

$$|F(u) - F(v)| = 1$$

atuam como uma operação de *fechamento local*, preservando a conectividade mínima exigida pelo Teorema de Bondy–Chvátal. Dessa forma, o método pode ser interpretado como uma **extensão construtiva do Teorema de Bondy–Chvátal**, com construção efetiva e linear.

## 4 O Algoritmo Construtivo

**Algoritmo 4.1** (Busca de Caminho Hamiltoniano via Janelas de Valores).    1. **Atribuição**

**de valores:** Para cada vértice  $v \in V$ , atribuir um valor único  $val(v) \in \{1, \dots, n\}$ , de forma a respeitar a conectividade local conforme o Teorema de Bondy–Chvátal.

2. **Divisão em janelas:** Dividir os vértices em janelas consecutivas de tamanho constante  $k \geq 2$ . Cada janela conterá  $k$  vértices que serão permutados localmente.
3. **Geração de permutações:** Para cada janela, gerar todas as  $k!$  permutações possíveis. Cada conjunto de permutações forma uma matriz  $M_{|V| \times k!}$ , onde cada linha representa uma possível sequência de vértices da janela atual.
4. **Verificação de vizinhança:** Aplicar a função

$$F(u, v) = |val(u) - val(v)| = 1$$

para cada par de vértices consecutivos dentro de cada permutação. Apenas sequências que respeitam a vizinhança local são consideradas.

5. **Filtragem de sequências inválidas:** Descartar permutações que não respeitam:
  - (a) as arestas do grafo  $(v_i, v_{i+1}) \notin E$ ;
  - (b) a condição de vizinhança  $F(u, v) \neq 1$ ;
6. **Combinação de janelas:** Concatenar janelas consecutivas, mantendo a consistência das arestas entre o último vértice da janela anterior e o primeiro vértice da janela atual.
7. **Resultado final:** Retornar pelo menos um caminho Hamiltoniano válido, se existir, ou indicar inexistência.

## 5 Teorema de Serer

**Teorema 5.1** (Teorema de Serer). *Seja  $G = (V, E)$  um grafo finito arbitrário, com  $|V| = n$ , e seja  $k \geq 2$  uma constante. Então, **condicional à atribuição de valores compatível com Bondy–Chvátal**, se existir um caminho Hamiltoniano em  $G$ , ele pode ser construído progressivamente a partir de permutações locais de tamanho  $k$ .*

*O teorema garante:*

- *Pelo menos um caminho Hamiltoniano válido (não todos);*
- *Complexidade linear  $O(|V|)$  para  $k$  constante;*
- *Originalidade construtiva da abordagem.*

## 6 Prova de Completude

*Prova da completude.* Seja  $G = (V, E)$  um grafo finito arbitrário e seja  $k \geq 2$  uma constante. Considere a função  $F : V \rightarrow \{1, 2, \dots, |V|\}$  que associa um valor único a cada vértice, respeitando a conectividade mínima do Teorema de Bondy–Chvátal.

Definimos a relação de vizinhança local como

$$F(u, v) = |F(u) - F(v)| = 1,$$

assegurando que dois vértices consecutivos em um caminho possuam valores consecutivos no mapeamento  $F$ .

Para cada janela de tamanho  $k$ , o algoritmo gera todas as  $k!$  permutações possíveis. Como toda permutação de tamanho  $k$  está contida nesse conjunto, se existir um caminho Hamiltoniano em  $G$ , pelo menos uma dessas permutações corresponderá a uma subsequência válida do caminho.

Ao concatenar janelas consecutivas que respeitam  $F(u, v) = 1$ , formamos progressivamente um caminho maximal que percorre todos os vértices exatamente uma vez.

Logo, se  $G$  possui um caminho Hamiltoniano, o processo garante sua construção, assegurando completude **condicional** à atribuição de valores compatível com Bondy–Chvátal.  $\square$

## 7 Complexidade

Seja  $V$  o vetor contendo todos os vértices de um grafo, com  $|V| = Q$ , e seja  $k \geq 2$  o tamanho da janela utilizada pelo algoritmo. O número de permutações possíveis em cada janela é  $k!$ , e o número de janelas é

$$J = Q - (k - 1),$$

de modo que o total de permutações geradas é

$$T(Q) = k! \cdot J = k! \cdot (Q - (k - 1)).$$

Cada permutação é filtrada para manter apenas sequências que respeitam as arestas do grafo e a condição de vizinhança

$$|val(u) - val(v)| = 1,$$

o que pode ser verificado em tempo constante  $O(1)$  para cada par de vértices consecutivos. Como cada permutação possui  $k - 1$  pares consecutivos, o tempo para verificar uma permutação inteira é  $O(k)$ .

Portanto, o tempo total do algoritmo é

$$O(k \cdot k! \cdot J).$$

Como  $k$  é constante, podemos simplificar:

$$O(k \cdot k! \cdot J) = O(k! \cdot J) \approx O(J) = O(|V|),$$

demonstrando que o algoritmo é linear no número de vértices.

No limite quando  $|V| \rightarrow \infty$ , mantendo  $k$  constante, temos:

$$\lim_{|V| \rightarrow \infty} \frac{k! \cdot J}{|V|} = \lim_{|V| \rightarrow \infty} \frac{k! \cdot (|V| - (k - 1))}{|V|} = k!.$$

Isso significa que, à medida que o número de vértices cresce indefinidamente, o custo médio por vértice tende a uma constante  $k!$ . Em outras palavras, podemos escrever o

tempo total de execução como:

$$T(|V|) = k! \cdot |V| + O(1),$$

mostrando claramente que o algoritmo possui **crescimento linear assintótico**, mesmo no pior caso.

Por exemplo, para  $k = 4$ , temos  $k! = 24$ , de modo que o custo médio por vértice tende a 24 operações quando  $|V| \rightarrow \infty$ .

## 8 Discussão

### 8.1 Por que é teórica

O trabalho formaliza uma condição sob a qual é garantido encontrar pelo menos um caminho Hamiltoniano em grafos arbitrários. Até o presente momento, não existia nenhum método que fornecesse formalmente a construção de um caminho em tempo linear, mesmo que de forma condicional.

O que foi apresentado consiste em um teorema rigoroso (**Teorema de Serer**), acompanhado de prova de completude e análise de complexidade, baseado na atribuição de valores e na utilização de janelas de permutação local.

Mesmo sendo condicional, esta abordagem representa uma contribuição teórica, pois:

- Existe um enunciado formal verificável (Teorema de Serer);
- Há uma prova de completude e linearidade;
- Introduz uma abordagem construtiva inédita no contexto do problema Hamiltoniano.

### 8.2 Limites da novidade

A novidade apresentada não implica na quebra da NP-completude do problema do caminho Hamiltoniano. A linearidade e a completude são garantidas somente sob a condição de atribuição de valores compatível com Bondy–Chvátal. Em termos práticos, o teorema não resolve todos os casos de grafos arbitrários, mas fornece uma técnica rigorosa para encontrar pelo menos um caminho Hamiltoniano quando essa condição é satisfeita.

### 8.3 Comparação com a literatura

Algoritmos heurísticos e métodos probabilísticos podem encontrar caminhos Hamiltonianos rapidamente, porém não oferecem garantias formais de completude linear. O **Teorema de Serer** formaliza uma construção condicional, o que representa uma contribuição inédita para a literatura teórica de grafos.

## 9 Referências

### Referências

- [1] Marino H. Catarino, *Teoria dos Grafos*, Freitas Bastos Editora, 2025.
- [2] J.M.S Simões-Pereira, *Grafos e Redes: Teoria e Algoritmos Básicos*, 2013.
- [3] Pedro Serer, *Teorema de Serer*, GitHub repository, <https://github.com/Pedro-Serer/caixeiro-viajante/blob/main/Teorema-de-Serer.py>, 2025.