Teorema das trincas de Serer: Um método polinomial de mapear Grafos Arbitrários

Pedro Stein Serer

13 de outubro de 2025

Sumário

Resumo

Este documento apresenta uma versão preliminar do Teorema das Trincas de Serer, uma abordagem baseada em trincas válidas para reconstrução de caminhos em grafos arbitrários. A metodologia codifica subcaminhos de três vértices consecutivos e utiliza janelas deslizantes para gerar sequências conectadas, preservando

a validade de todos os caminhos possíveis. Este rascunho é publicado para registro de prioridade, e a versão final, contendo provas formais completas e exemplos detalhados, será disponibilizada posteriormente.

1 Definições e Notação

Seja $G = (V, E)$ um grafo arbitrário, onde

$$V = \{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$$

é o conjunto de todos os vértices de G. Assumimos uma **ordem arbitrária** dos vértices apenas para indexação.

1.1 Família de trincas válidas

Definimos J como a família de todas as trincas válidas de vértices distintos de G:

$$J := \{(v_i, v_j, v_k) \mid (v_i, v_j) \in E,\ (v_j, v_k) \in E,\ i \neq j \neq k \neq i\}.$$

Cada trinca representa um **subcaminho de comprimento 2** no grafo.

1.2 Relação de adjacência entre trincas

A relação de adjacência $ADJ \subseteq J \times J$ é definida por:

$$ADJ := \{(A, B) \in J \times J \mid A = (v_i, v_j, v_k),\ B = (v_j, v_k, v_l),\ v_l \notin \{v_i, v_j, v_k\},\ (v_k, v_l) \in E\}.$$

Nota: a restrição $v_l \notin \{v_i, v_j, v_k\}$ evita repetição de vértices ao concatenar, fundamental para representar Hamiltonianos corretamente.

1.3 Janela deslizante estendida

Para uma sequência de trincas adjacentes $A_1, \ldots, A_k \in J$ tal que

$$(A_j, A_{j+1}) \in ADJ, \quad \forall 1 \leq j < k,$$

definimos a **janela deslizante estendida sem repetição**:

$$A_1 \oplus A_2 \oplus \cdots \oplus A_k := (v_1, v_2, \ldots, v_{k+2}),$$

onde cada vértice aparece no máximo uma vez.

A construção de ADJ garante que não serão introduzidos vértices repetidos durante a concatenação.

1.4 Representação de caminhos Hamiltonianos via trincas

Definição: Uma sequência de trincas $A_1, \ldots, A_k$ representa um Hamiltoniano se:

1. Cada par consecutivo de trincas está conectado: $(A_j, A_{j+1}) \in ADJ$ para todo $1 \leq j < k$;
2. A concatenação via janela deslizante cobre todos os vértices do grafo exatamente uma vez:
$$A_1 \oplus \cdots \oplus A_k = (v_1, \ldots, v_n), \quad \{v_1, \ldots, v_n\} = V.$$

Essa definição garante que qualquer Hamiltoniano existente em G estará codificado em J como uma sequência de trincas válidas conectadas.

2 Teorema das Trincas de Serer

Teorema 2.1 (Teorema das Trincas de Serer)**.** *Seja $G = (V, E)$ um grafo arbitrário e seja J a família de todas as trincas válidas de G. Então,* ***se existir um caminho Hamiltoniano em*** *G, ele pode ser representado como uma sequência de trincas consecutivas em J, conectadas pela relação ADJ, de modo que a concatenação das trincas via janelas deslizantes cobre todos os vértices exatamente uma vez.*

O teorema garante:

- *Qualquer Hamiltoniano existente está codificado em J e pode ser reconstruído;*
- *A construção é polinomial em função de $|V|$;*
- *Originalidade construtiva da abordagem baseada em janelas de trincas válidas.*

3 Prova do Teorema

Demonstração. Seja $G = (V, E)$ um grafo com $|V| = n$ e suponha que exista um caminho Hamiltoniano

$$H = (v_1, v_2, \dots, v_n).$$

Decompondo H em trincas consecutivas:

$$A_1 = (v_1, v_2, v_3), \quad A_2 = (v_2, v_3, v_4), \quad \dots, \quad A_{n-2} = (v_{n-2}, v_{n-1}, v_n),$$

vemos que cada $A_i \in J$, pois todas as trincas respeitam a definição de subcaminho de três vértices consecutivos conectados.

Além disso, pela definição de ADJ, temos

$$(A_i, A_{i+1}) \in ADJ, \quad \forall i = 1, \dots, n-3,$$

porque cada par de trincas consecutivas compartilha exatamente dois vértices consecutivos e mantém a conectividade sem repetir vértices.

Aplicando a operação de janela deslizante estendida:

$$A_1 \oplus A_2 \oplus \cdots \oplus A_{n-2} = (v_1, v_2, \dots, v_n),$$

obtemos exatamente o caminho Hamiltoniano original.

Portanto, qualquer Hamiltoniano existente em G está **garantidamente codificado** como uma sequência de trincas válidas conectadas em ADJ, e pode ser reconstruído via janelas deslizantes. A complexidade da construção é polinomial em $|V|$, pois todas as trincas válidas e adjacências são geradas de forma polinomial. □

4 Prova de complexidade polinomial

Demonstração. Em construção... □

5 Discussão

6 Referências

Referências

[1] Ana Cristina Munaretto, *Descomplicando: Um Novo Olhar Sobre a Matemática Elementar*, Intersaberes

[2] J.M.S Simões-Pereira, *Grafos e Redes: Teoria e Algoritmos Básicos*, 2013.

[3] Pedro Serer, *Teorema de Serer*, GitHub repository, `https://github.com/Pedro-Serer/caixeiro-viajante/blob/main/Teorema-das-trincas-de-Serer.py`, 2025.