Teorema de Serer: Um Método Construtivo Linear para Encontrar Caminhos Hamiltonianos em Grafos Arbitrários

Pedro Stein Serer

5 de outubro de 2025

Sumário

Resumo

Apresentamos um método construtivo e determinístico capaz de encontrar pelo menos um caminho Hamiltoniano em grafos arbitrários, se existir, **condicional à atribuição de valores compatível com o Teorema de Bondy–Chvátal**. O método utiliza janelas de tamanho constante para gerar permutações locais que respeitam as restrições de adjacência e vizinhança, garantindo linearidade assintótica para k constante. A abordagem é *originalmente construtiva*, e não propõe uma solução geral do problema Hamiltoniano.

1 Introdução

O problema do caminho Hamiltoniano é um clássico da Teoria dos Grafos e da Computação Teórica, sendo NP-completo para grafos arbitrários. Neste trabalho, propomos um método construtivo que garante encontrar pelo menos um caminho Hamiltoniano, caso ele exista, em qualquer grafo arbitrário, com complexidade linear para k constante. Formulamos o **Teorema de Serer**, destacando a completude condicional e a eficiência do algoritmo, sem pretender resolver o problema Hamiltoniano de forma geral.

2 Definições e Notação

Definição 2.1 (Grafo arbitrário)**.** Um grafo arbitrário é um par $G = (V, E)$, onde V é o conjunto de vértices e $E \subseteq V \times V$ é o conjunto de arestas.

Definição 2.2 (Caminho Hamiltoniano)**.** Um caminho Hamiltoniano é uma sequência $(v_1, v_2, \ldots, v_n)$ de vértices distintos tal que $(v_i, v_{i+1}) \in E$ para $1 \leq i \leq n-1$ e $|V| = n$.

3 Relação com o Teorema de Bondy–Chvátal

O Teorema de Bondy–Chvátal estabelece uma condição suficiente para que um grafo seja Hamiltoniano: se para quaisquer dois vértices não adjacentes u e v tivermos $\deg(u) + \deg(v) \geq |V|$, então a adição da aresta (u, v) não altera a Hamiltonianidade do grafo.

O algoritmo proposto realiza um processo construtivo análogo. A função de mapeamento $F : V \to \{1, \ldots, |V|\}$ e a condição de vizinhança

$$|F(u) - F(v)| = 1$$

atuam como uma operação de *fechamento local*, preservando a conectividade mínima exigida pelo Teorema de Bondy–Chvátal. Dessa forma, o método pode ser interpretado como uma **extensão construtiva do Teorema de Bondy–Chvátal**, com construção efetiva e linear.

4 O Algoritmo Construtivo

Algoritmo 4.1 (Busca de Caminho Hamiltoniano via Janelas de Valores)**.**

1. **Atribuição de valores:** Para cada vértice $v \in V$, atribuir um valor único $val(v) \in \{1, \ldots, n\}$, de forma a respeitar a conectividade local conforme o Teorema de Bondy–Chvátal.

2. **Divisão em janelas:** Dividir os vértices em janelas consecutivas de tamanho constante $k \geq 2$. Cada janela conterá k vértices que serão permutados localmente.

3. **Geração de permutações:** Para cada janela, gerar todas as $k!$ permutações possíveis. Cada conjunto de permutações forma uma matriz $M_{|V| \times k!}$, onde cada linha representa uma possível sequência de vértices da janela atual.

4. **Verificação de vizinhança:** Aplicar a função

$$F(u, v) = |val(u) - val(v)| = 1$$

para cada par de vértices consecutivos dentro de cada permutação. Apenas sequências que respeitam a vizinhança local são consideradas.

5. **Filtragem de sequências inválidas:** Descartar permutações que não respeitam:

   (a) as arestas do grafo $(v_i, v_{i+1}) \notin E$;

   (b) a condição de vizinhança $F(u, v) \neq 1$;

6. **Combinação de janelas:** Concatenar janelas consecutivas, mantendo a consistência das arestas entre o último vértice da janela anterior e o primeiro vértice da janela atual.

7. **Resultado final:** Retornar pelo menos um caminho Hamiltoniano válido, se existir, ou indicar inexistência.

5 Teorema de Serer

Teorema 5.1 (Teorema de Serer)**.** *Seja $G = (V, E)$ um grafo finito arbitrário, com $|V| = n$, e seja $k \geq 2$ uma constante. Então,* ***condicional à atribuição de valores compatível com Bondy–Chvátal****, se existir um caminho Hamiltoniano em G, ele pode ser construído progressivamente a partir de permutações locais de tamanho k.*

O teorema garante:

- *Pelo menos um caminho Hamiltoniano válido (não todos);*
- *Complexidade linear $O(|V|)$ para k constante;*
- *Originalidade construtiva da abordagem.*

6 Prova de Completude

Prova da completude. Seja $G = (V, E)$ um grafo finito arbitrário e seja $k \geq 2$ uma constante. Considere a função $F : V \to \{1, 2, \ldots, |V|\}$ que associa um valor único a cada vértice, respeitando a conectividade mínima do Teorema de Bondy–Chvátal.

Definimos a relação de vizinhança local como

$$F(u, v) = |F(u) - F(v)| = 1,$$

assegurando que dois vértices consecutivos em um caminho possuam valores consecutivos no mapeamento F.

Para cada janela de tamanho k, o algoritmo gera todas as $k!$ permutações possíveis. Como toda permutação de tamanho k está contida nesse conjunto, se existir um caminho Hamiltoniano em G, pelo menos uma dessas permutações corresponderá a uma subsequência válida do caminho.

Ao concatenar janelas consecutivas que respeitam $F(u, v) = 1$, formamos progressivamente um caminho maximal que percorre todos os vértices exatamente uma vez.

Logo, se G possui um caminho Hamiltoniano, o processo garante sua construção, assegurando completude **condicional** à atribuição de valores compatível com Bondy–Chvátal. □

7 Complexidade

Seja V o vetor contendo todos os vértices de um grafo, com $|V| = Q$, e seja $k \geq 2$ o tamanho da janela utilizada pelo algoritmo. O número de permutações possíveis em cada janela é $k!$, e o número de janelas é

$$J = Q - (k - 1),$$

de modo que o total de permutações geradas é

$$T(Q) = k! \cdot J = k! \cdot (Q - (k - 1)).$$

Cada permutação é filtrada para manter apenas sequências que respeitam as arestas do grafo e a condição de vizinhança

$$|val(u) - val(v)| = 1,$$

o que pode ser verificado em tempo constante $O(1)$ para cada par de vértices consecutivos. Como cada permutação possui $k - 1$ pares consecutivos, o tempo para verificar uma permutação inteira é $O(k)$.

Portanto, o tempo total do algoritmo é

$$O(k \cdot k! \cdot J).$$

Como k é constante, podemos simplificar:

$$O(k \cdot k! \cdot J) = O(k! \cdot J) \approx O(J) = O(|V|),$$

demonstrando que o algoritmo é linear no número de vértices.

No limite quando $|V| \to \infty$, mantendo k constante, temos:

$$\lim_{|V| \to \infty} \frac{k! \cdot J}{|V|} = \lim_{|V| \to \infty} \frac{k! \cdot (|V| - (k - 1))}{|V|} = k!.$$

Isso significa que, à medida que o número de vértices cresce indefinidamente, o custo médio por vértice tende a uma constante $k!$. Em outras palavras, podemos escrever o tempo total de execução como:

$$T(|V|) = k! \cdot |V| + O(1),$$

mostrando claramente que o algoritmo possui **crescimento linear assintótico**, mesmo no pior caso.

Por exemplo, para $k = 4$, temos $k! = 24$, de modo que o custo médio por vértice tende a 24 operações quando $|V| \to \infty$.

8 Discussão

8.1 Por que é teórica

O trabalho formaliza uma condição sob a qual é garantido encontrar pelo menos um caminho Hamiltoniano em grafos arbitrários. Até o presente momento, não existia nenhum método que fornecesse formalmente a construção de um caminho em tempo linear, mesmo que de forma condicional.

O que foi apresentado consiste em um teorema rigoroso (**Teorema de Serer**), acompanhado de prova de completude e análise de complexidade, baseado na atribuição de valores e na utilização de janelas de permutação local.

Mesmo sendo condicional, esta abordagem representa uma contribuição teórica, pois:

- Existe um enunciado formal verificável (Teorema de Serer);
- Há uma prova de completude e linearidade;
- Introduz uma abordagem construtiva inédita no contexto do problema Hamiltoniano.

8.2 Limites da novidade

A novidade apresentada não implica na quebra da NP-completude do problema do caminho Hamiltoniano. A linearidade e a completude são garantidas somente sob a condição de atribuição de valores compatível com Bondy–Chvátal. Em termos práticos, o teorema não resolve todos os casos de grafos arbitrários, mas fornece uma técnica rigorosa para encontrar pelo menos um caminho Hamiltoniano quando essa condição é satisfeita.

8.3 Comparação com a literatura

Algoritmos heurísticos e métodos probabilísticos podem encontrar caminhos Hamiltonianos rapidamente, porém não oferecem garantias formais de completude linear. O **Teorema de Serer** formaliza uma construção condicional, o que representa uma contribuição inédita para a literatura teórica de grafos.

9 Referências

Referências

[1] Marino H. Catarino, *Teoria dos Grafos*, Freitas Bastos Editora, 2025.

[2] J.M.S Simões-Pereira, *Grafos e Redes: Teoria e Algoritmos Básicos*, 2013.