Teorema das trincas de Serer: Um método polinomial de mapear Grafos Arbitrários

Pedro Stein Serer

14 de outubro de 2025

Sumário

Resumo

O objetivo deste trabalho é explorar uma abordagem polinomial para problemas NP-completos envolvendo grafos, apresentando de forma rigorosa um método

para mapear grafos arbitrários sem recorrer à força bruta ou gerar caminhos desnecessários, garantindo, de forma eficiente e inteligente, a construção de pelo menos um caminho Hamiltoniano, caso ele exista. Faremos a introdução do **Teorema das Trincas de Serer**, que formaliza a técnica baseada em janelas deslizantes de tamanho 3, permitindo que qualquer Hamiltoniano presente no grafo seja codificado e reconstruído através das trincas válidas de maneira construtiva e polinomial.

1 Introdução

Um dos maiores desafios atuais da Matemática e da Ciência da Computação é a busca por soluções eficientes para problemas NP-completos, como o problema do caminho Hamiltoniano, o caixeiro viajante, a coloração de grafos, entre outros. O problema P=NP pergunta se tais problemas podem ser resolvidos em tempo polinomial (classe P). Embora não exista uma prova formal e nenhum método conhecido, a maioria dos pesquisadores acredita que P $\neq$ NP.

Este trabalho tem como objetivo explorar uma abordagem polinomial para o problema NP-completo do caminho Hamiltoniano, demonstrando de forma rigorosa que, para qualquer grafo arbitrário, caso exista um caminho Hamiltoniano, ele pode ser codificado e reconstruído em tempo polinomial, independente da estrutura do grafo. Para isso, apresentamos o **Teorema das Trincas de Serer**, que formaliza a técnica baseada em janelas deslizantes de tamanho 3.

Dessa forma, propomos um método construtivo e determinístico capaz de encontrar pelo menos um caminho Hamiltoniano em grafos arbitrários, caso exista, esperando que este trabalho inspire novas pesquisas e avanços na área de Teoria dos Grafos e Complexidade Computacional.

2 Definições e Notação

Seja $G = (V, E)$ um grafo arbitrário, onde

$$V = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$$

é o conjunto de todos os vértices de G. Assumimos uma **ordem arbitrária** dos vértices apenas para indexação.

2.1 Família de trincas válidas

Definimos J como a família de todas as trincas válidas de vértices distintos de G:

$$J := \{(v_i, v_j, v_k) \mid (v_i, v_j) \in E,\ (v_j, v_k) \in E,\ i \neq j \neq k \neq i\}.$$

Cada trinca representa um **subcaminho de comprimento 2** no grafo. Essa definição garante que todo grafo, sendo ele simples, dirigido, denso ou esconexo, poderá ter uma família de trincas válidas, possuindo um númer finito de caminhos válidos, desde que a entrada esteja fiel ao grafo.

2.2 Relação de adjacência entre trincas

A relação de adjacência $ADJ \subseteq J \times J$ é definida por:

$$ADJ := \{(A, B) \in J \times J \mid A = (v_i, v_j, v_k),\ B = (v_j, v_k, v_l),\ v_l \notin \{v_i, v_j, v_k\},\ (v_k, v_l) \in E\}.$$

Nota: a restrição $v_l \notin \{v_i, v_j, v_k\}$ evita repetição de vértices ao concatenar, garantindo que sequências de trincas possam representar corretamente caminhos Hamiltonianos. Para grafos não dirigidos, a ordem dos vértices na trinca representa a sequência do caminho, independentemente da direção da aresta. Essa construção assegura que todas as sequências válidas de trincas estejam incluídas em ADJ, permitindo a reconstrução de qualquer caminho Hamiltoniano existente.

2.3 Janela deslizante estendida

Para uma sequência de trincas adjacentes $A_1, \ldots, A_k \in J$ tal que

$$(A_j, A_{j+1}) \in ADJ, \quad \forall 1 \leq j < k,$$

definimos a **janela deslizante estendida sem repetição** como a concatenação dos vértices das trincas, adicionando apenas o último vértice de cada trinca subsequente:

$$A_1 \oplus A_2 \oplus \cdots \oplus A_k := (v_1, v_2, \ldots, v_{k+2}),$$

onde cada vértice aparece no máximo uma vez.

A construção de ADJ garante que não serão introduzidos vértices repetidos durante a concatenação. Em grafos com loops ou múltiplas arestas, apenas arestas que contribuem para caminhos de vértices distintos são consideradas. Essa operação é válida para qualquer grafo arbitrário (simples, dirigido, denso ou esparso) e preserva a unicidade de vértices em sequências de trincas, permitindo reconstruir corretamente caminhos Hamiltonianos.

2.4 Representação de caminhos Hamiltonianos via trincas

Definição: Uma sequência de trincas $A_1, \ldots, A_k$ representa um Hamiltoniano se:

1. Cada par consecutivo de trincas está conectado: $(A_j, A_{j+1}) \in ADJ$ para todo $1 \leq j < k$;

2. A concatenação via janela deslizante cobre todos os vértices do grafo exatamente uma vez:
$$A_1 \oplus \cdots \oplus A_k = (v_1, \ldots, v_n), \quad \{v_1, \ldots, v_n\} = V.$$

Essa definição garante que qualquer Hamiltoniano existente em G estará codificado em J como uma sequência de trincas válidas conectadas.

3 O Algoritmo Construtivo

Algoritmo 3.1 (Teorema das Trincas de Serer). 1. **Entrada:** O algoritmo recebe um grafo arbitrário $G = (V, E)$ com $|V| = n$, representado na forma de matriz, onde cada linha segue o formato:

$$G = [\text{'label\_vertice'}, \text{'indice\_vertice'}, [\text{lista\_de\_indices\_de\_conexoes\_do\_vertice\_atual}]].$$

Assim, a estrutura geral pode ser descrita por:

$$G = [\text{'V', 'I', E}].$$

A ordem dos vértices é arbitrária e não afeta o funcionamento do algoritmo, desde que a matriz de entrada represente fielmente o grafo. Essa representação pode ser construída em tempo $O(|V| + |E|)$ por meio de uma busca em largura (BFS) ou em profundidade (DFS). Ressalta-se que tais algoritmos são utilizados apenas para gerar a estrutura de entrada, e não para a busca do caminho Hamiltoniano. Qualquer grafo (simples, dirigido, denso ou esparso) pode ser representado nesse formato, pois cada vértice lista suas conexões diretas de forma independente.

2. **Geração das trincas válidas:** Nesta etapa, são geradas todas as trincas (v_i, v_j, v_k) que respeitam a estrutura de adjacência do grafo, formando a família $J \subseteq V^3$. Cada trinca representa um subcaminho de comprimento 2. Tais que as combinações sejam:

$$(v_i, v_j, v_k) \in J \iff (v_i, v_j) \in E \wedge (v_j, v_k) \in E \wedge i \neq j \neq k \neq i.$$

3. **Construção da relação de adjacência:** A partir da família J, define-se $ADJ \subseteq J \times J$, onde duas trincas A e B são adjacentes se os dois últimos vértices de A coincidirem com os dois primeiros de B, sem repetir vértices já usados.

$$(A, B) \in ADJ \iff A = (v_i, v_j, v_k), B = (v_j, v_k, v_l), v_l \notin \{v_i, v_j, v_k\}, (v_k, v_l) \in E.$$

4. **Construção dos caminhos:** Utilizando a relação ADJ, o algoritmo concatena trincas adjacentes de forma incremental, formando sequências $A_1 \oplus A_2 \oplus \cdots \oplus A_k$, onde cada vértice aparece no máximo uma vez. Cada sequência resultante representa um caminho válido no grafo.

5. **Saída:** O conjunto final contém todos os caminhos válidos identificados pelo processo construtivo.

6. **Resultado final:** Todos os caminhos válidos do grafo são mapeados e codificados de forma compacta. A reconstrução, através das janelas deslizantes, revela todos

os caminhos descodificados, incluindo pelo menos um caminho Hamiltoniano, caso exista.

Nota: o algoritmo evita a geração de caminhos inválidos, restringindo-se apenas aos subcaminhos já existentes no grafo, garantindo eficiência e evitando redundâncias.

4 Teorema das Trincas de Serer

Teorema 4.1 (Teorema das Trincas de Serer)**.** *Seja $G = (V, E)$ um grafo arbitrário e seja J a família de todas as trincas válidas de G. Então,* ***se existir um caminho Hamiltoniano em*** *G, ele pode ser representado como uma sequência de trincas consecutivas em J, conectadas pela relação ADJ, de modo que a concatenação das trincas via janelas deslizantes cobre todos os vértices exatamente uma vez.*

O teorema garante:

- *Qualquer Hamiltoniano existente esteja invariávelmente codificado em J e pode ser reconstruído;*
- *A construção é polinomial em função de $|V|$;*
- *Originalidade construtiva da abordagem baseada em janelas de trincas válidas.*

5 Prova do Teorema

Demonstração. Seja $G = (V, E)$ um grafo com $|V| = n$ e suponha que exista um caminho Hamiltoniano

$$H = (v_1, v_2, \ldots, v_n),$$

onde $\{v_1, v_2, \ldots, v_n\} = V$ e

$$(v_i, v_{i+1}) \in E \quad \text{para todo } i = 1, \ldots, n-1.$$

Decompondo H em trincas consecutivas:

$$A_1 = (v_1, v_2, v_3), \quad A_2 = (v_2, v_3, v_4), \quad \ldots, \quad A_{n-2} = (v_{n-2}, v_{n-1}, v_n),$$

vemos que cada $A_i \in J$, pois todas as trincas respeitam a definição de subcaminho de três vértices consecutivos conectados.

Além disso, pela definição de ADJ, temos

$$(A_i, A_{i+1}) \in ADJ, \quad \forall i = 1, \ldots, n-3,$$

porque cada par de trincas consecutivas compartilha exatamente dois vértices consecutivos e mantém a conectividade sem repetir vértices.

Aplicando a operação de janela deslizante estendida:

$$A_1 \oplus A_2 \oplus \cdots \oplus A_{n-2} = (v_1, v_2, \ldots, v_n),$$

obtemos exatamente o caminho Hamiltoniano original.

Portanto, qualquer Hamiltoniano existente em G está **garantidamente codificado** como uma sequência de trincas válidas conectadas em ADJ, e pode ser reconstruído via janelas deslizantes. Desta forma garantindo também a completude do método. □

6 Prova de complexidade polinomial

Demonstração. Em construção... □

7 Discussão

8 Referências

Referências

[1] Ana Cristina Munaretto, *Descomplicando: Um Novo Olhar Sobre a Matemática Elementar*, Intersaberes

[2] J.M.S Simões-Pereira, *Grafos e Redes: Teoria e Algoritmos Básicos*, 2013.

[3] Pedro Serer, *Teorema de Serer*, GitHub repository, https://github.com/Pedro-Serer/caixeiro-viajante/blob/main/Teorema-das-trincas-de-Serer.py, 2025.