Universidade Federal de Pelotas

Instituto de Física e Matemática

Pró-Reitoria de Ensino

Cálculo 1

Derivadas

Aula 05

Projeto

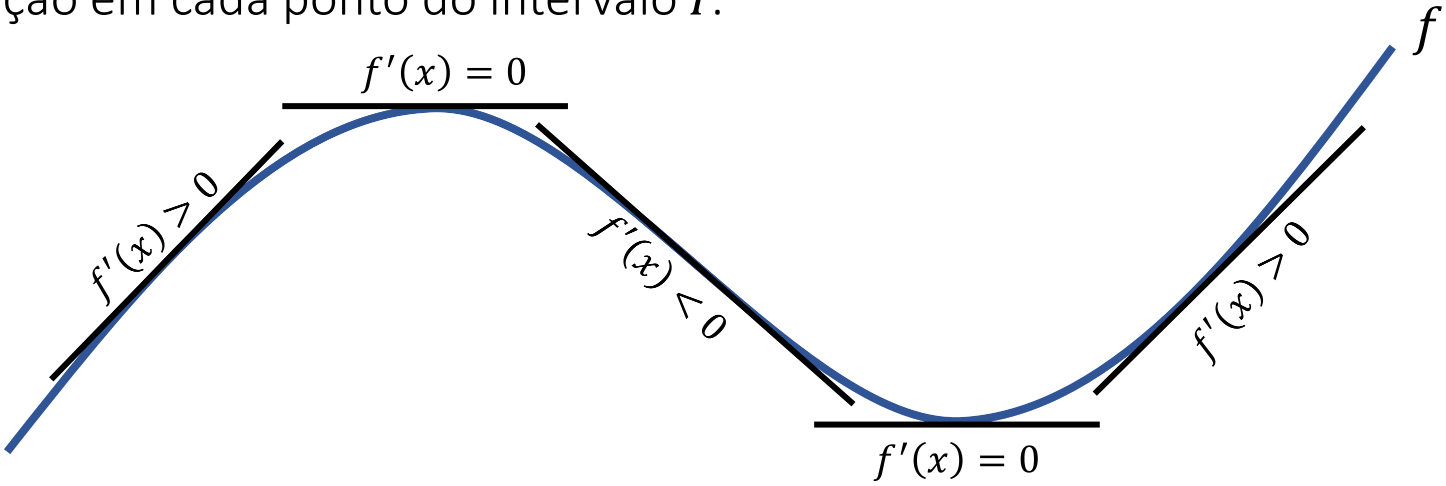
GAMA

Grupo de Apoio em Matemática

Teste da Primeira Derivada

Seja f uma função contínua e derivável num intervalo I.

Sabemos que a **primeira derivada** é a inclinação da reta tangente a essa função em cada ponto do intervalo I.



Com a primeira derivada podemos obter informações sobre:

Intervalos onde a função é crescente ou decrescente

Máximos e Mínimos Locais

Veremos nesta aula como obter cada uma dessas informações!

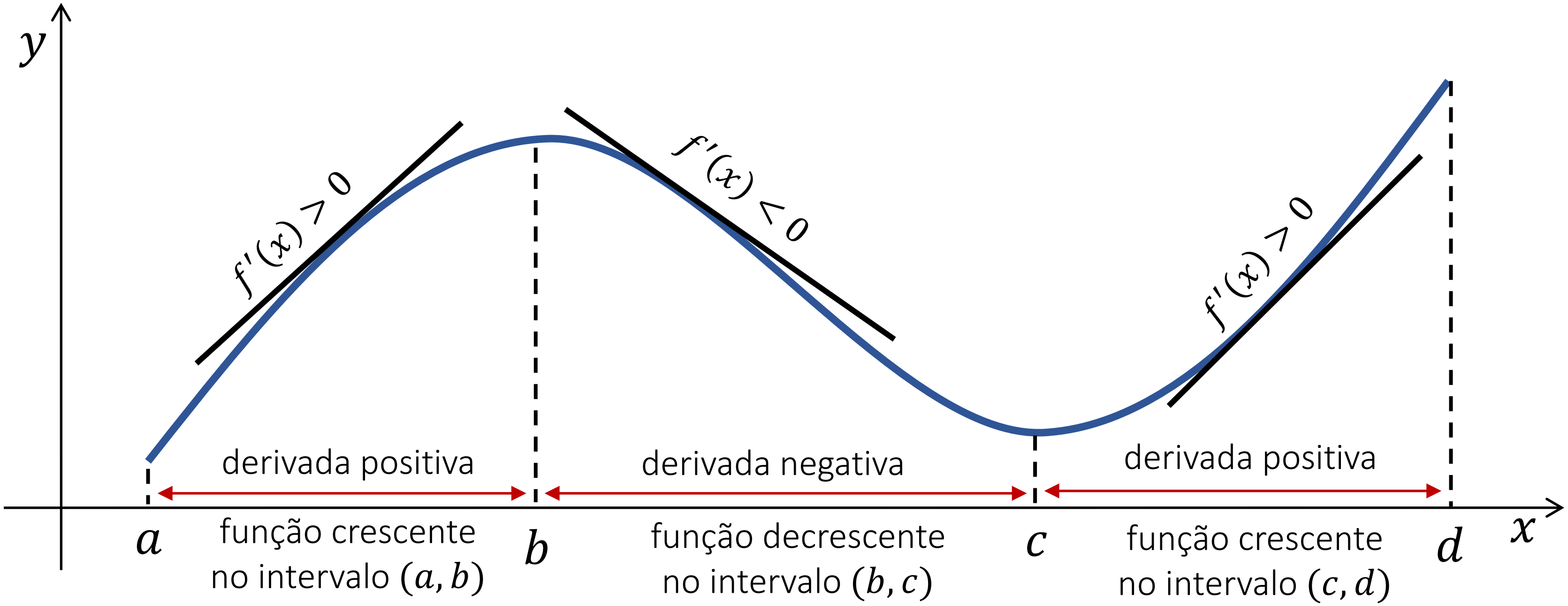
Teste da Primeira Derivada

Teorema: Sendo f uma função derivável, f' sua primeira derivada.

Onde f' é **positiva**, a função f é **crescente**.

Onde f' é **negativa**, a função f é **decrescente**.

Graficamente, a interpretação do Teorema acima é a seguinte:



Teste da Primeira Derivada

Exemplo: Dada a função

$$f(x) = x^2 - 2x,$$

determine os intervalos onde a função é crescente e decrescente.

Solução: Como $f(x) = x^2 - 2x$, temos:

$$f'(x) = 2x - 2.$$

Vamos descobrir os intervalos de crescimento e decrescimento de f analisando o sinal de f'.

Quando a função $2x - 2 > 0$? Para todo $x > 1$.

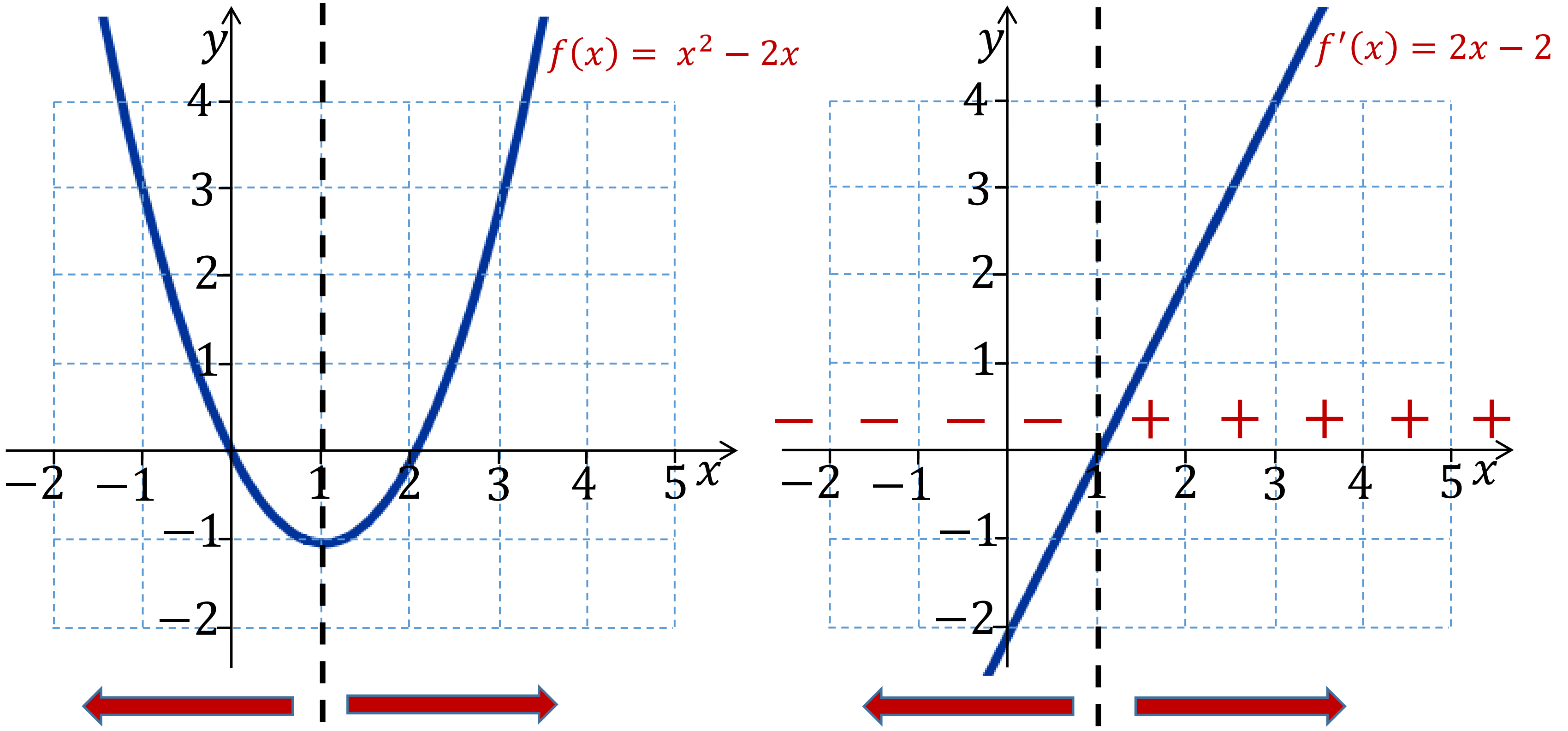
Consequentemente, f é crescente no intervalo $(1, +\infty)$.

Quando a função $2x - 2 < 0$? Para todo $x < 1$.

Consequentemente, f é decrescente no intervalo $(-\infty, 1)$.

Teste da Primeira Derivada

Observe a relação “derivada positiva resulta em função crescente” e “derivada negativa resulta em função decrescente” no gráfico da função f do exemplo anterior.



$x < 1$
função
decrescente

$x > 1$
função
crescente

$x < 1$
derivada
negativa

$x > 1$
derivada
positiva

Pontos críticos

Definição: Um número c pertencente ao domínio de uma função é chamado de **ponto crítico** da função f se uma das condições é satisfeita:

$$f'(c) = 0 \qquad \text{ou} \qquad f'(c) \text{ não existe.}$$

Portanto, para verificar se um número c é um ponto crítico de uma função f, precisamos seguir os seguintes passos:

1^o Passo: Derive a função f, ou seja, calcule $f'(x)$.

2^o Passo: Iguale a derivada a zero, ou seja, verifique se existem valores de c para os quais

$$f'(c) = 0.$$

3^o Passo: Verifique se existem valores de c para os quais $f'(c)$ não existe.

Se estes valores de c encontrados estiverem no domínio de f, eles serão os pontos críticos de f.

Pontos críticos

Exemplo: Verifique se a função

$$f(x) = x^2 + 2x - 4.$$

possui pontos críticos.

Solução:

1^o Passo: Como $f(x) = x^2 + 2x - 4$ então

$$f'(x) = 2x + 2.$$

2^o Passo: Igualando a derivada a zero, temos:

$$f'(x) = 0 \rightarrow 2x + 2 = 0 \rightarrow x = -1.$$

A derivada se anula em $x = -1$.

3^o Passo: Como f é uma função polinomial, então não existem pontos onde a derivada não existe!

Como $c = -1$ pertence ao domínio de f e $f'(-1) = 0$, então ele é um ponto crítico de f.

Note que a função f não possui outros pontos críticos.

Pontos críticos

Exemplo: Verifique se a função

$$f(x) = \sqrt{x}$$

possui pontos críticos.

Solução:

$\mathbf{1^o}$ **Passo:** Como $f(x) = \sqrt{x}$ então

$$f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}.$$

$\mathbf{2^o}$ **Passo:** Igualando a derivada a zero, temos:

$$f'(x) = 0 \; \rightarrow \frac{1}{2\sqrt{x}} = 0 \rightarrow \nexists$$

Não existem pontos onde a derivada se anula

$\mathbf{3^o}$ **Passo:** Dada a expressão que define f', percebe-se que $c = 0$ é o único ponto onde a derivada não existe.

Como $c = 0$ pertence ao domínio de f e $f'(0)$ não existe, então ele é um ponto crítico de f.

Note que a função f não possui outros pontos críticos.

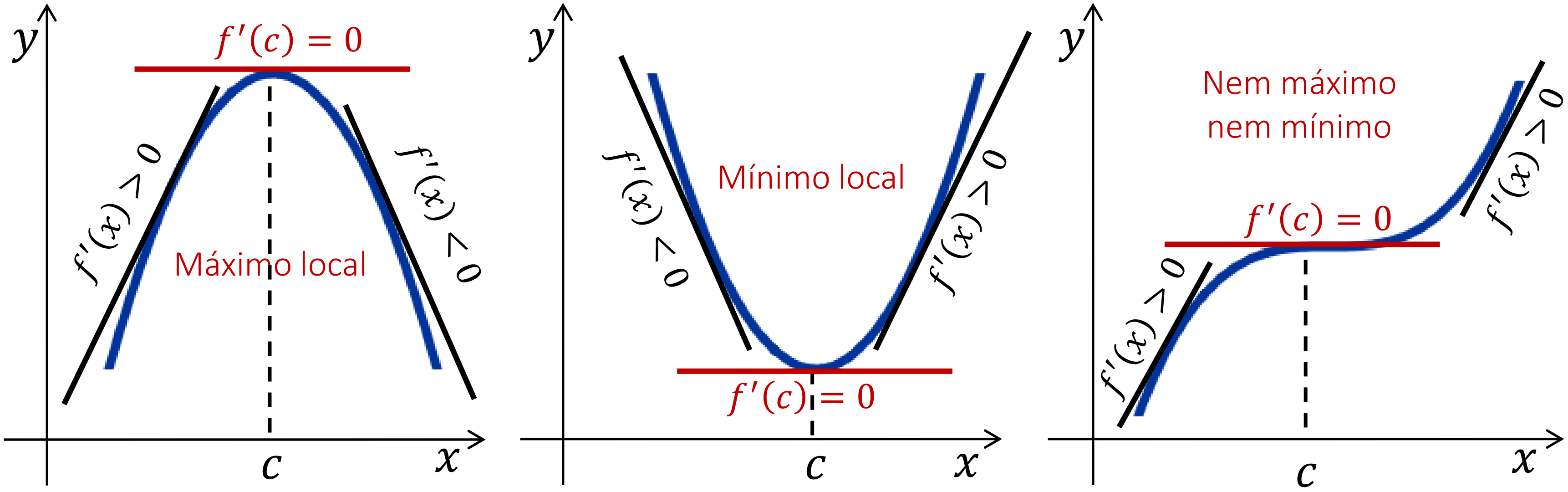
Máximos e mínimos locais

Teorema: Seja f uma função derivável em um intervalo I e $c \in I$ um ponto crítico de f.

Se o sinal de $f'(x)$ muda de positivo para negativo em c, então temos um **máximo local** em c.

Se o sinal de $f'(x)$ muda de negativo para positivo em c, então temos um **mínimo local** em c.

Se não há mudança no sinal de $f'(x)$ em c, então não temos um ponto de máximo nem de mínimo local.



Observação: O Teorema se aplica no caso em que não existe a derivada da função f em $x = c$.
Exemplo: $f(x) = |x|$ não é derivável em $x = 0$, embora este seja um ponto de mínimo.

Máximos e mínimos locais

Exemplo: Dada a função

$$f(x) = x^2 + 2x - 4.$$

determine o ponto crítico e se ele é de máximo ou de mínimo.

Solução: Calculando f':

$$f'(x) = 2x + 2.$$

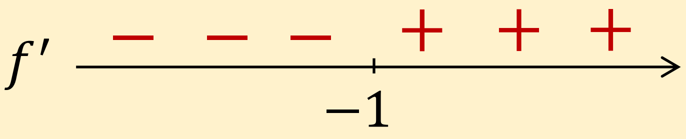
Igualando a derivada a zero:

$$2x + 2 = 0$$

$$2x = -2$$

$$x = -1 \quad \text{(ponto crítico)}$$

Sinal da derivada:



Como $f'(x)$ muda de negativo para positivo, logo $x = -1$ é um **mínimo local**.

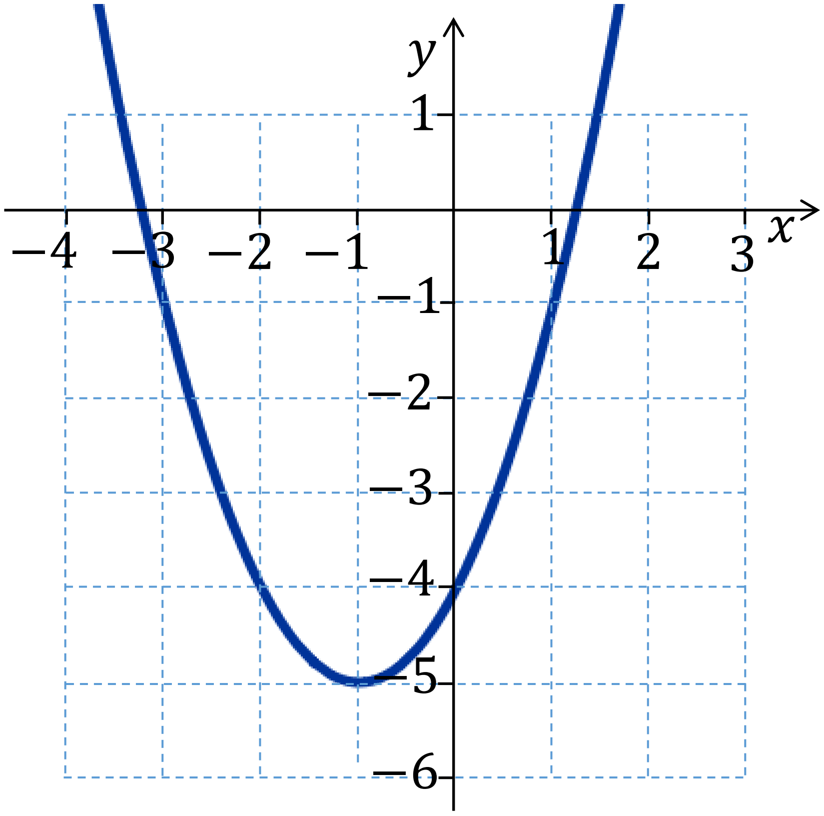


Gráfico de f

5. Exercícios Propostos

GAMA

Grupo de Apoio em Matemática

Exercícios

1) Em cada caso, determine os pontos críticos da função dada.

(a) $f(x) = 2x^5 + 5x^4 - 10x^3 - 15$ $x = -3$, $x = 0$ e $x = 1$

(b) $f(x) = 6x^{\frac{2}{3}}$ $x = 0$

Exercícios

2) Considere a função $f(x) = 3x^4 - 4x^3 - 12x^2 + 5$.

Encontre onde a função é crescente, decrescente e seus pontos de máximos e mínimos.

Pontos críticos: $x = -1, x = 0$ e $x = 2$

Crescente em $(-1, 0)$ e $(2, +\infty)$

Decrescente em $(-\infty, -1)$ e $(0, 2)$

Máximo: $x = 0$

Mínimos: $x = -1$ e $x = 2$

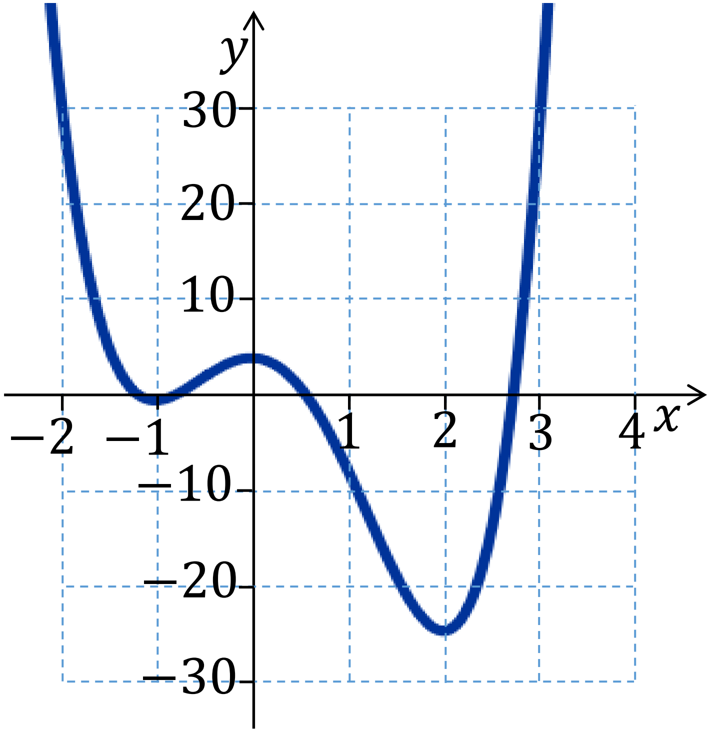


Gráfico de f

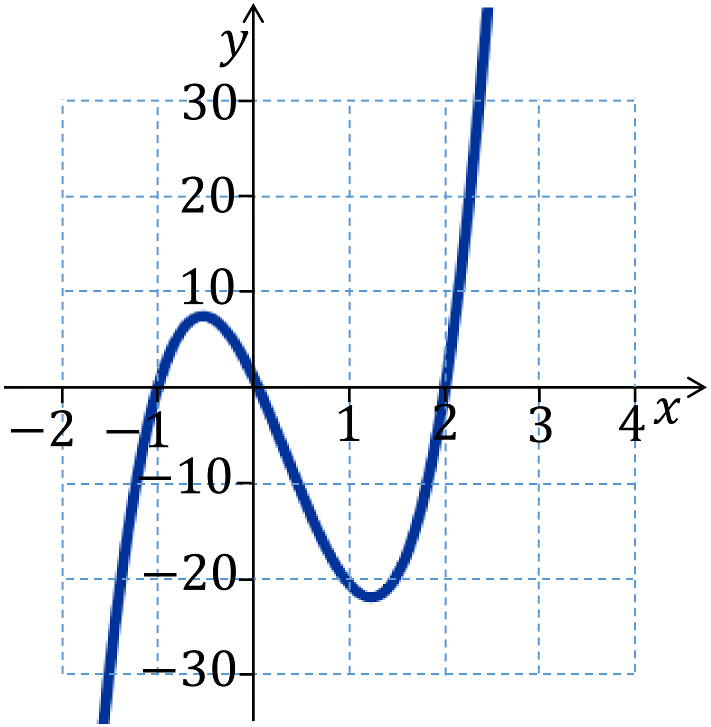


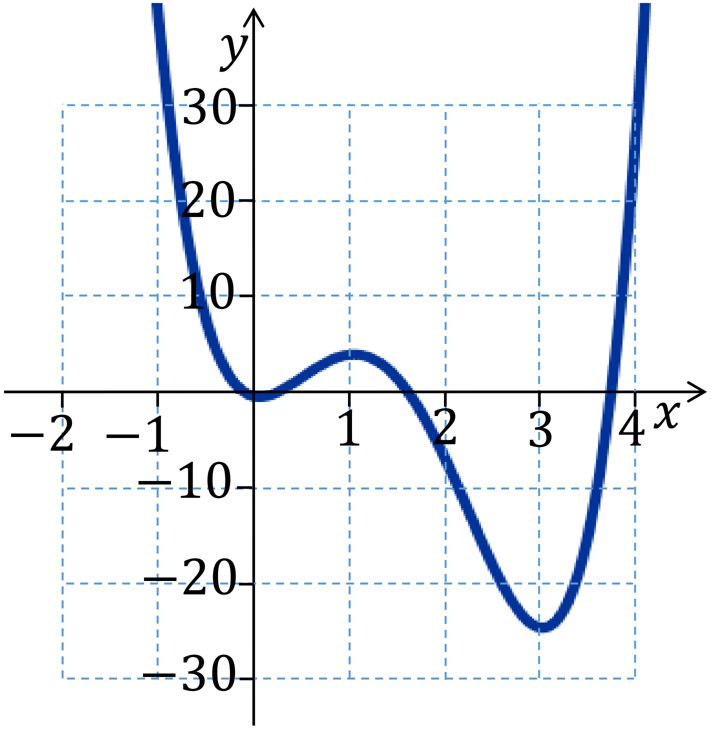
Gráfico de f'

Exercícios

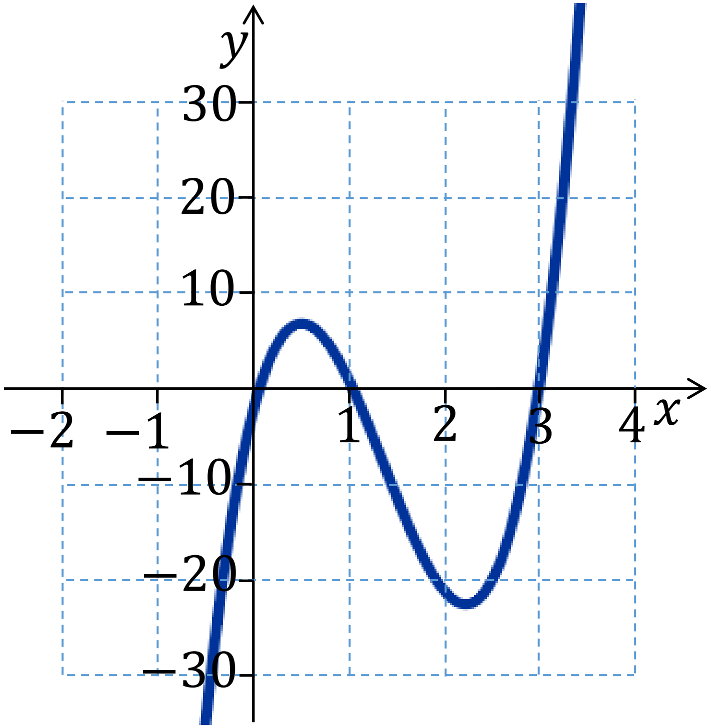
3) Seja a função $f(x) = 3x^4 - 16x^3 + 18x^2$ definida em $\mathbb{R}$. Encontre os intervalos onde a função seja crescente e decrescente e seus valores de máximos e mínimos.

Pontos críticos: $x = 0$; $x = 1$ e $x = 3$ Crescente em $(0,1)$ e $(3,+\infty)$ Decrescente em $(-\infty,0)$ e $(1\,,3)$

Máximo local: $x = 1$ Mínimos locais: $x = 0$ e $x = 3$



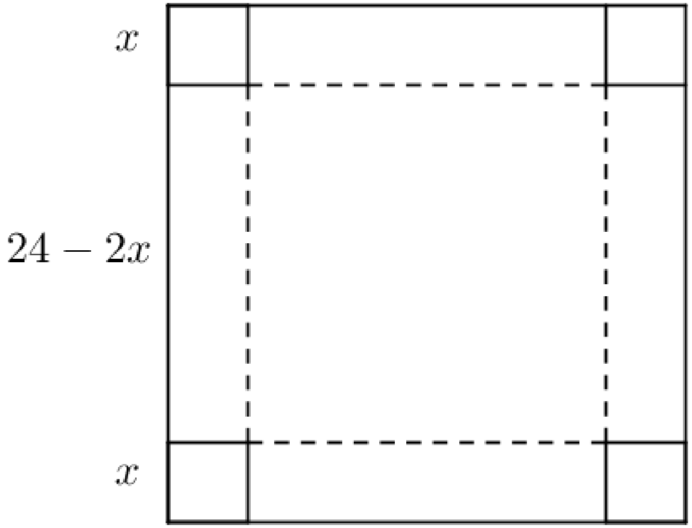
$f(x) = 3x^4 - 16x^3 + 18x^2$



$f'(x) = 12x^3 - 48x^2 + 36x$

Exercícios

4) Um fabricante de caixas de papelão pretende fazer caixas sem tampas a partir de folhas quadradas de cartão com área igual a $576cm^2$, cortando quadrados iguais nos quatro cantos e dobrando os lados para cima. Determinar o lado do quadrado que deve ser cortado para se obter uma caixa com o maior volume possível.



$Resp.: x = 4\ cm$ com $1024\ cm^3$

Exercícios

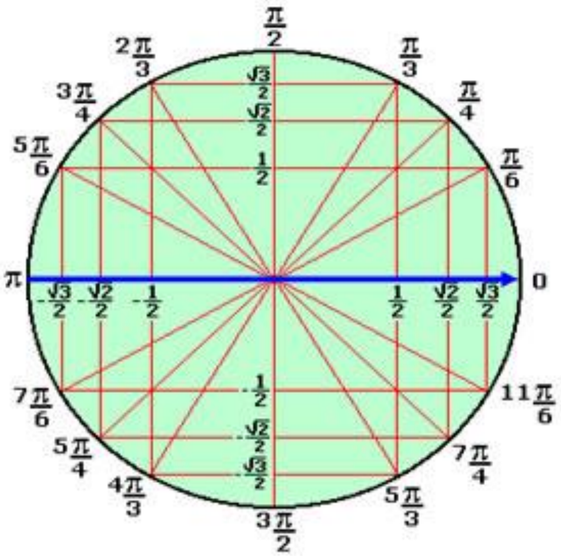
5) Encontre os valores de máximo e mínimos, onde a função é crescente e decrescente da função $g(x) = x + 2\sin x$ em $0 \leq x \leq 2\pi$.

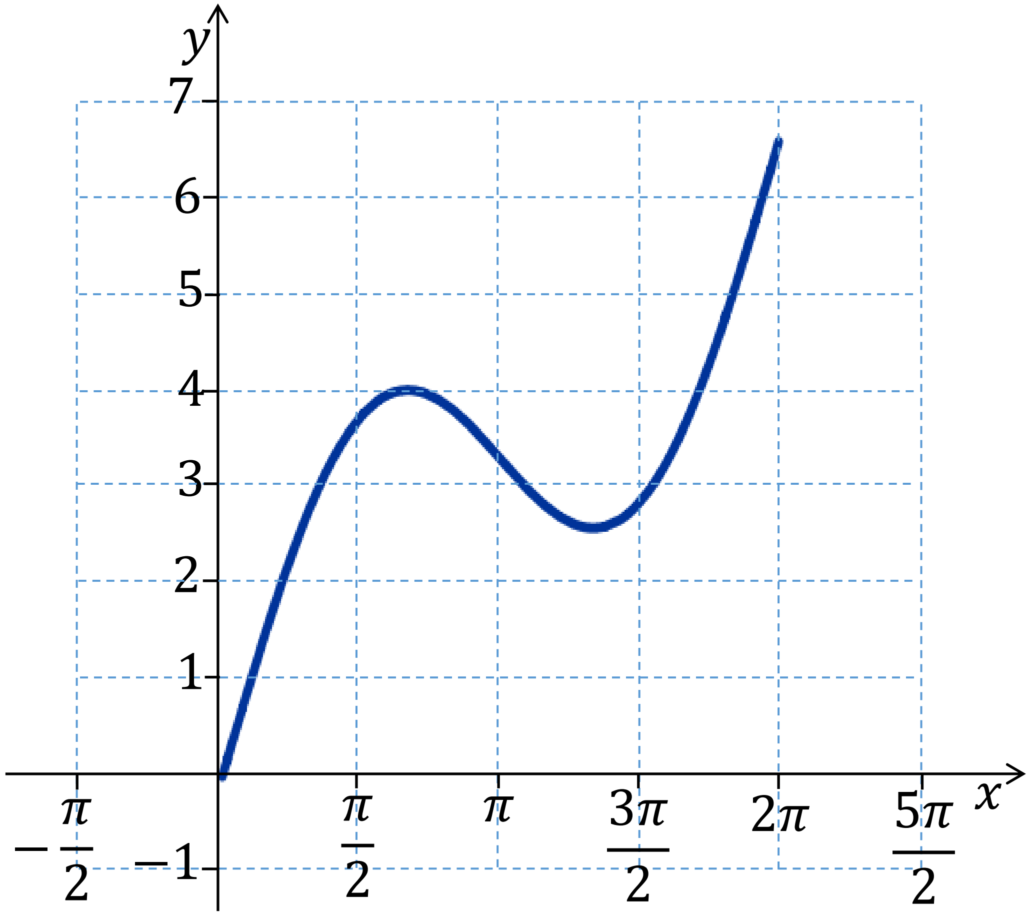
Pontos críticos: $x = \frac{2\pi}{3}$; $x = \frac{4\pi}{3}$

Crescente em $\left[0\,,\ \frac{2\pi}{3}\right[$ e $\left]\frac{4\pi}{3}\ ,\, 2\pi\right]$

Decrescente em $(\frac{2\pi}{3}, \frac{4\pi}{3})$

Mínimo: $x = \frac{4\pi}{3}$ Máximo: $x = \frac{2\pi}{3}$





Exercícios

6) Utilize o teste da primeira derivada para determinar onde a função dada por

$$h(x) = x^{2/3}(6 - x)^{1/3}$$

é crescente, decrescente e seus valores de máximos e mínimos.

Pontos críticos: $x = 0, x = 4$ e $x = 6$ Crescente em $(0, 4)$ Decrescente em $(-\infty, 0) \cup (4, +\infty)$
Máximos: $x = 4$ Mínimos: $x = 0$

Universidade Federal de Pelotas

Instituto de Física e Matemática

Pró-Reitoria de Ensino

Cálculo 1

Derivadas

Aula 06

Projeto

GAMA

Grupo de Apoio em
Matemática

Teste da Segunda Derivada

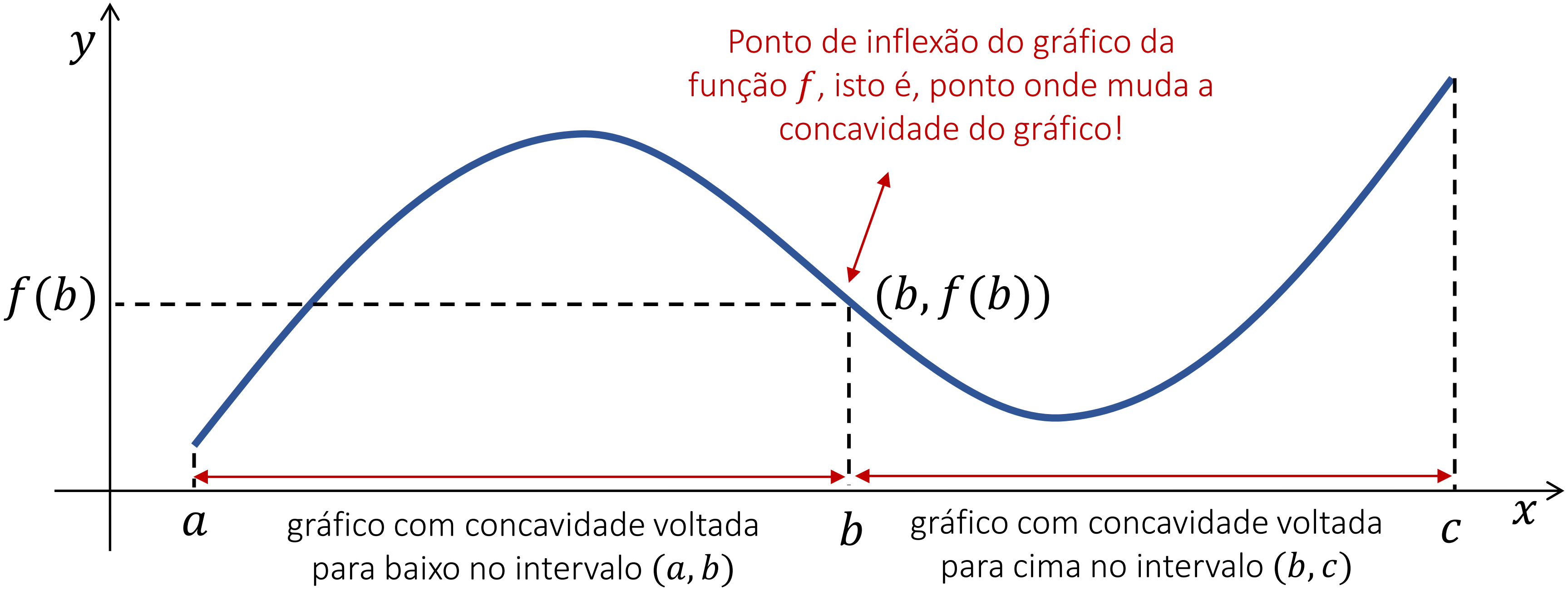
Seja f uma função contínua e duas vezes derivável num intervalo I.

Com a segunda derivada de f podemos obter informações sobre:

Máximos e mínimos locais

Concavidade do gráfico

Pontos de inflexão



Ponto de inflexão do gráfico da função f, isto é, ponto onde muda a concavidade do gráfico!

gráfico com concavidade voltada para baixo no intervalo (a, b)

gráfico com concavidade voltada para cima no intervalo (b, c)

Veremos agora como obter cada uma dessas informações:

Concavidade

Teorema: Sendo f uma função duas vezes derivável, f'e f'' sua primeira e segunda derivadas, respectivamente. Então:

Onde f'' for **positiva**, a concavidade da função é **voltada para cima**.

Onde f'' for **negativa**, a concavidade é **voltada para baixo**.

Portanto, para estudar a concavidade do gráfico de uma função f, podemos seguir os seguintes passos:

1^o Passo: Derive a função f, ou seja, calcule $f'(x)$.

2^o Passo: Derive a função f', ou seja, calcule $f''(x)$.

3^o Passo: Faça o estudo de sinal de$f''(x)$.

Nos intervalos onde$f''(x) > 0$ a concavidade é voltada para cima e onde $f''(x) < 0$ a concavidade é voltada para baixo.

Concavidade

Exemplo: Dada a função

$$f(x) = x^3,$$

determine onde a concavidade é para cima e onde é para baixo.

Solução:

1^o Passo: Como $f(x) = x^3$ então:

$$f'(x) = 3x^2.$$

2^o Passo: Calculando f'', temos:

$$f''(x) = 6x.$$

3^o Passo: Estudando o sinal de f'' temos:

Quando $f''(x)$ é positiva?

Para todo $x > 0$.

Então, f é côncava para cima em $(0, +\infty)$.

Quando $f''(x)$ é negativa?

Para todo $x < 0$.

Então, f é côncava para baixo em $(-\infty, 0)$.

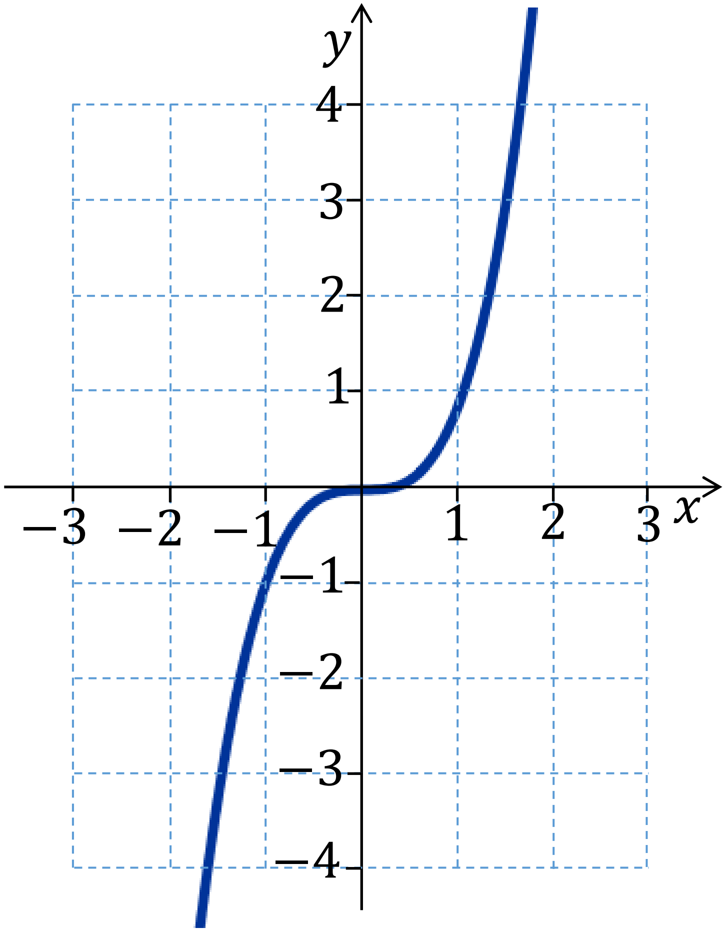


Gráfico de f

Teste da Segunda Derivada

Teorema: Seja f uma função tal que f'' seja contínua na proximidade de $x = c$.

Se $f'(c) = 0$ e $f''(c) < 0$, então f tem um ponto de **máximo local** em c.

Se $f'(c) = 0$ e $f''(c) > 0$, então f tem um ponto de **mínimo local** em c.

Portanto, para verivicar se a função f possui máximos ou mínimos locais, fazemos:

1^o Passo: Encontre $f'(x)$.

2^o Passo: Verifique se existe algum ponto crítico de f tal que $f'(c) = 0$.

3^o Passo: Encontre $f''(x)$.

4^o Passo: Analise o sinal de $f''(c)$.

Se $f''(c) < 0$ então $x = c$ é um máximo local.

Se $f''(c) > 0$ então $x = c$ é um mínimo local.

Teste da Segunda Derivada

Exemplo: Dada a função

$$f(x) = x^2 + 2x - 4.$$

determine seu ponto crítico e se ele é de máximo ou de mínimo.

Solução:

1^o Passo: Como $f(x) = x^2 + 2x - 4$ então

$$f'(x) = 2x + 2.$$

2^o Passo: Como $f'(x) = 2x + 2$ então

$$f'(x) = 0 \rightarrow 2x + 2 = 0 \rightarrow x = -1.$$

ponto crítico!

3^o Passo: Como $f'(x) = 2x + 2$ então

$$f''(x) = 2.$$

4^o Passo: Como

$$f''(-1) = 2 > 0$$

Portanto, $x = -1$ é um **mínimo local**.

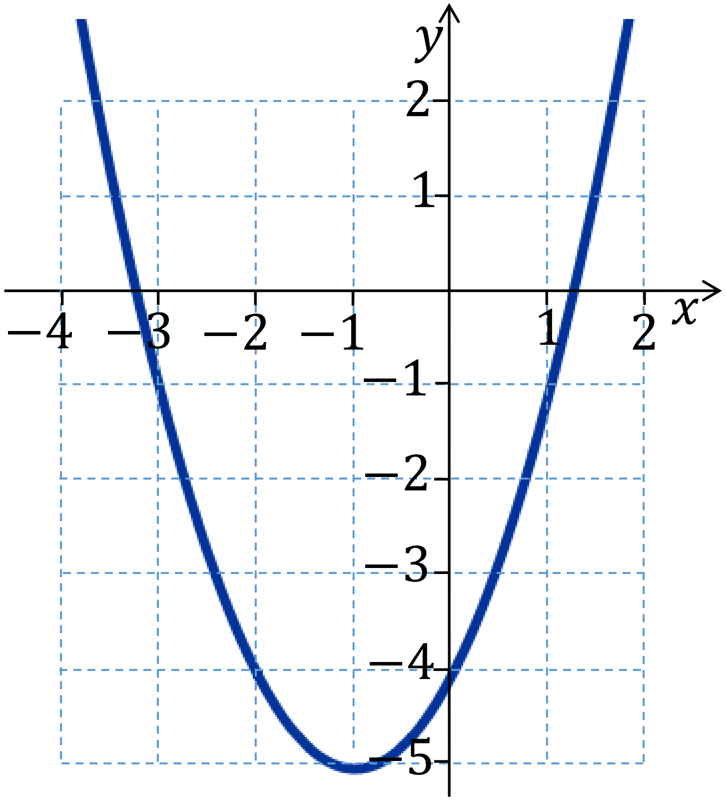


Gráfico de f

Pontos de inflexão

Definição: Um ponto P da curva $y = f(x)$ é chamado de **ponto de inflexão** se f é contínua no ponto e a curva mudar de côncava para cima para côncava para baixo ou vice-versa em P.

Portanto, para determinar se o gráfico de uma função f possui pontos de inflexão, fazemos:

$\mathbf{1^o}$ **Passo:** Encontre $f''(x)$.

$\mathbf{2^o}$ **Passo:** Verifique se f'' troca de sinal em algum número $x = d$.

$\mathbf{3^o}$ **Passo:** Verifique se f é contínua em $x = d$.

$\mathbf{4^o}$ **Passo:** Determine as coordenadas $(d, f(d))$ do ponto de inflexão.

Se f'' troca do sinal positivo para negativo, então o gráfico de f está trocando de côncavo para cima para côncavo para baixo.

Sef'' troca do sinal negativo para positivo, então o gráfico de f está trocando de côncavo para baixo para côncavo para cima.

Pontos de inflexão

Exemplo: Dada a função

$$f(x) = x^3 - 6x^2 + 9x - 3.$$

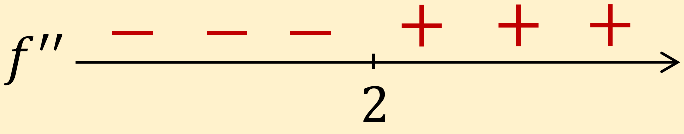
determine se f possui pontos de inflexão.

Solução:

1^o Passo:

$$f''(x) = 6x - 12.$$

2^o Passo: Sinal de f'':



3^o Passo: Como f é uma função polinomial, segue que f é contínua em $d = 2$.

Dos três passos acima, temos que a função f possui um ponto de inflexão $d = 2$.

4^o Passo: As coordenadas do ponto de inflexão são dadas por:

$$P = \big(2\,, f(2)\big) = (2, -1).$$

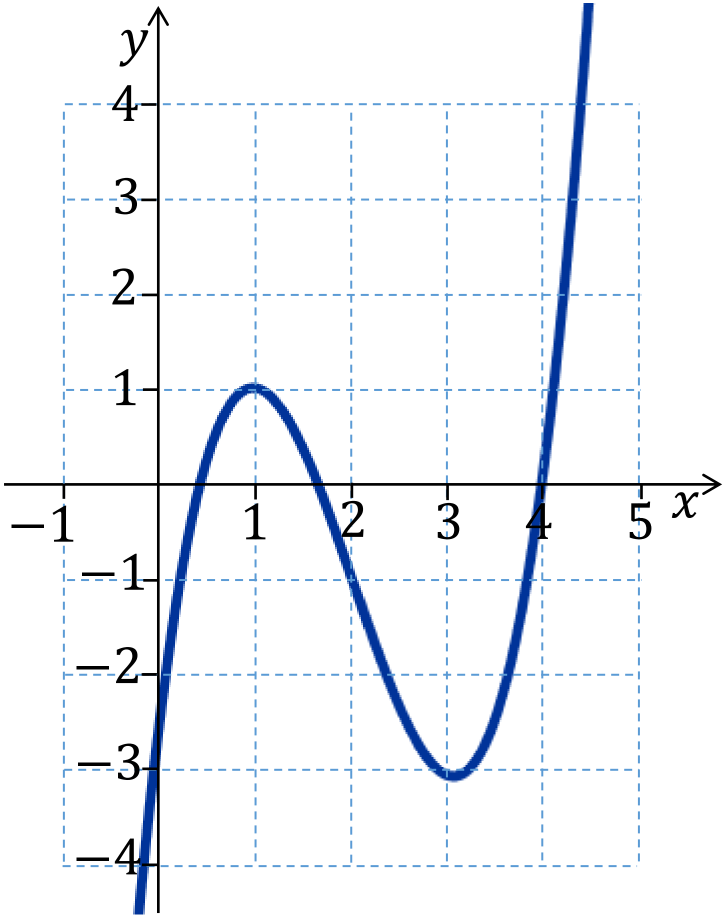


Gráfico de f

6. Exercícios Propostos

Exercícios

1) Para as funções abaixo, determine:

- i) os intervalos nos quais f é ***crescente***;
- ii) os intervalos nos quais f é ***decrescente***;
- iii) os intervalos nos quais f é ***côncava para cima***;
- iv) os intervalos nos quais f é ***côncava para baixo***;
- v) as coordenadas dos ***pontos de inflexão*** *(se existirem)*;
- vi) as coordenadas dos pontos de máximo ou mínimo *(se existirem)*;
- vii) o ***esboço do gráfico*** da função f utilizando as informações obtidas nos itens anteriores.

(a) $f(x) = x^4 - 4x^3$

(b) $f(x) = (x-1)^3$

(c) $f(x) = \dfrac{(x+2)}{(x+1)}$

(d) $f(x) = x^2 - 4x$

(e) $f(x) = x^4 - 4x^2$

(f) $f(x) = \dfrac{(x^2+1)}{(x^2-1)}$

Exercícios

(a) $f(x) = x^4 - 4x^3$

- i. $(3, +\infty)$
- ii. $(-\infty, 3)$
- iii. $(-\infty, 0) \cup (2, +\infty)$
- iv. $(0,2)$
- v. $(0, 0)$ e $(2, -16)$
- vi. $(3, -27)$ (mínimo local)

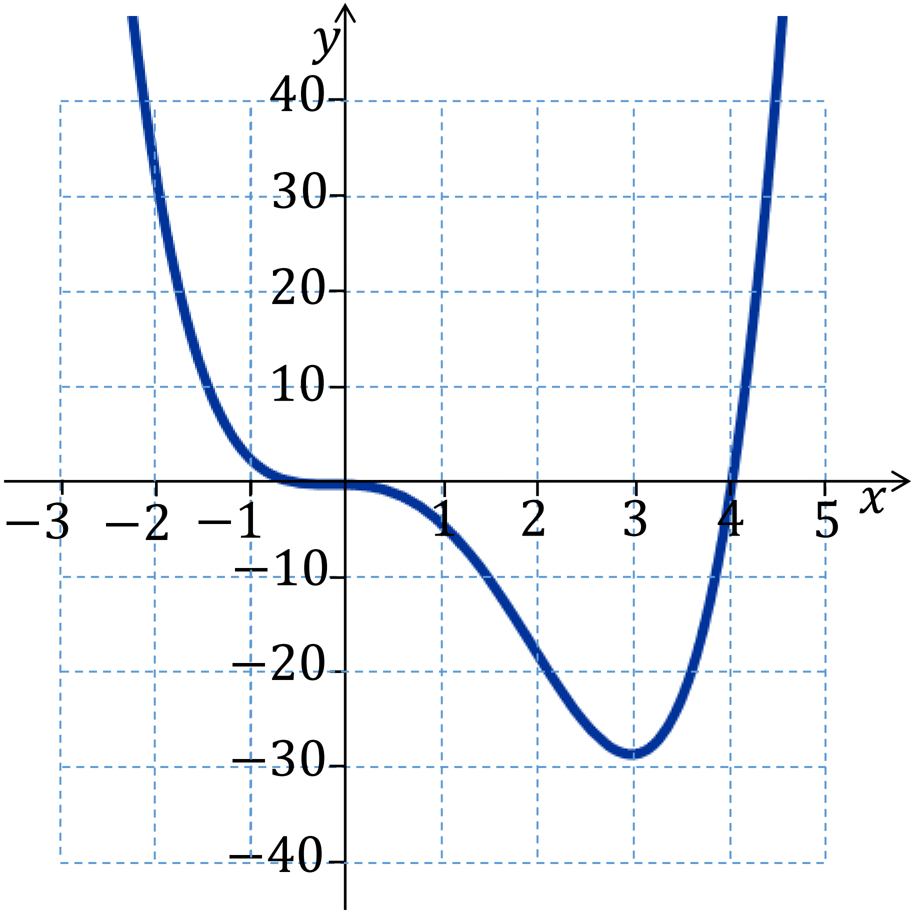


Gráfico de f

Exercícios

(b) $f(x) = (x-1)^3$

- i. $\mathbb{R}$
- ii. $\nexists$
- iii. $(1, +\infty)$
- iv. $(-\infty, 1)$
- v. $(1, 0)$
- vi. $\nexists$

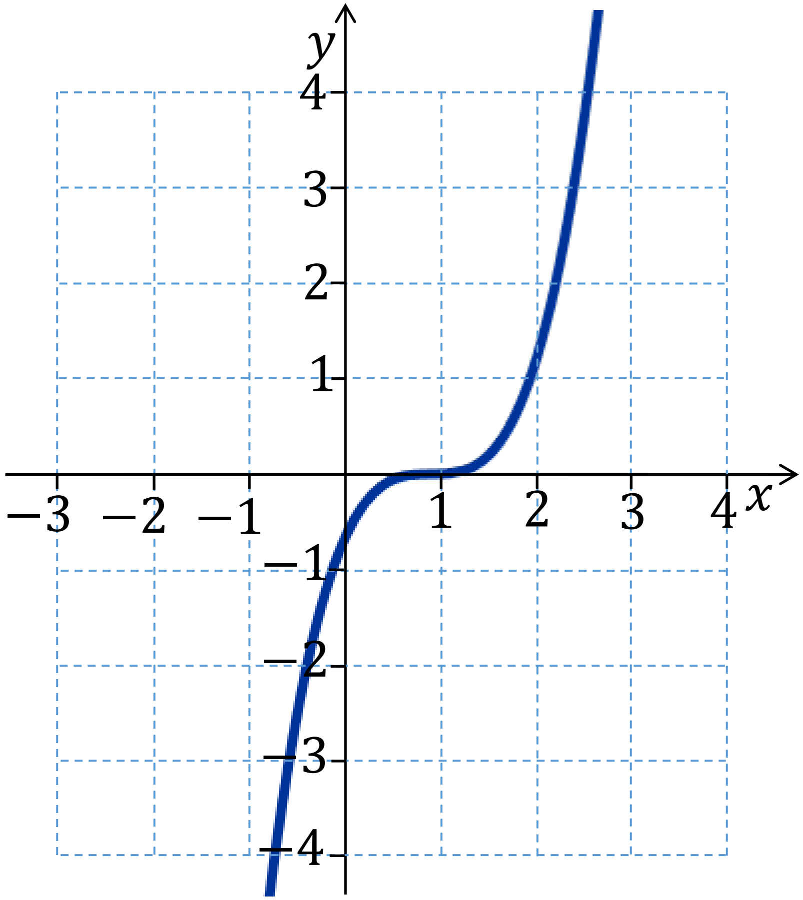


Gráfico de f

Exercícios

(c) $f(x) = \dfrac{(x+2)}{(x+1)}$

i. $\nexists$

ii. $\mathbb{R} - \{-1\}$

iii. $(-1, +\infty)$

iv. $(-\infty, -1)$

v. $\nexists$

vi. $\nexists$

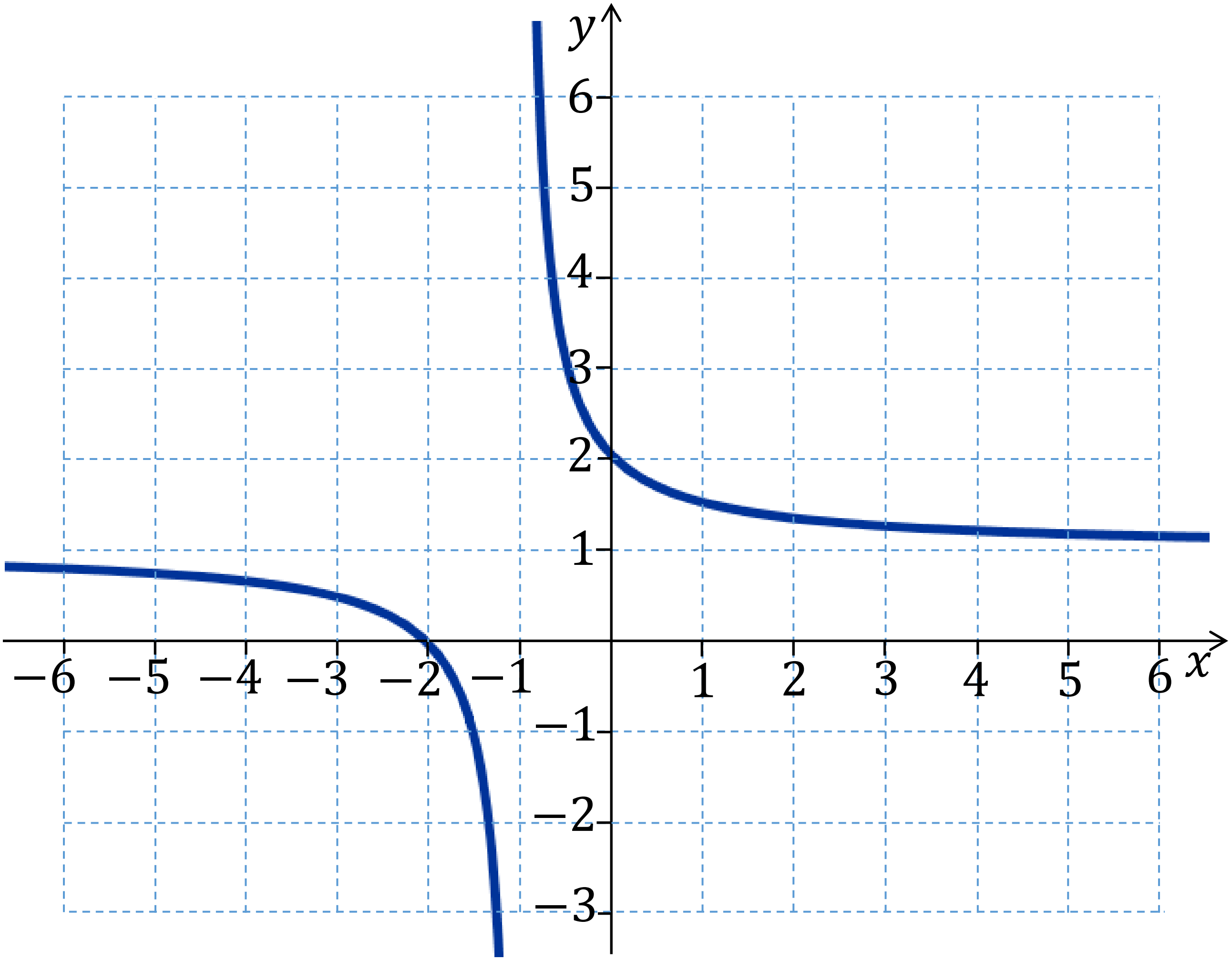


Gráfico de f

Exercícios

(d) $f(x) = x^2 - 4x$

i. $(2, +\infty)$

ii. $(-\infty, 2)$

iii. $\mathbb{R}$

iv. $\nexists$

v. $\nexists$

vi. $(2, -4)$ (mínimo local).

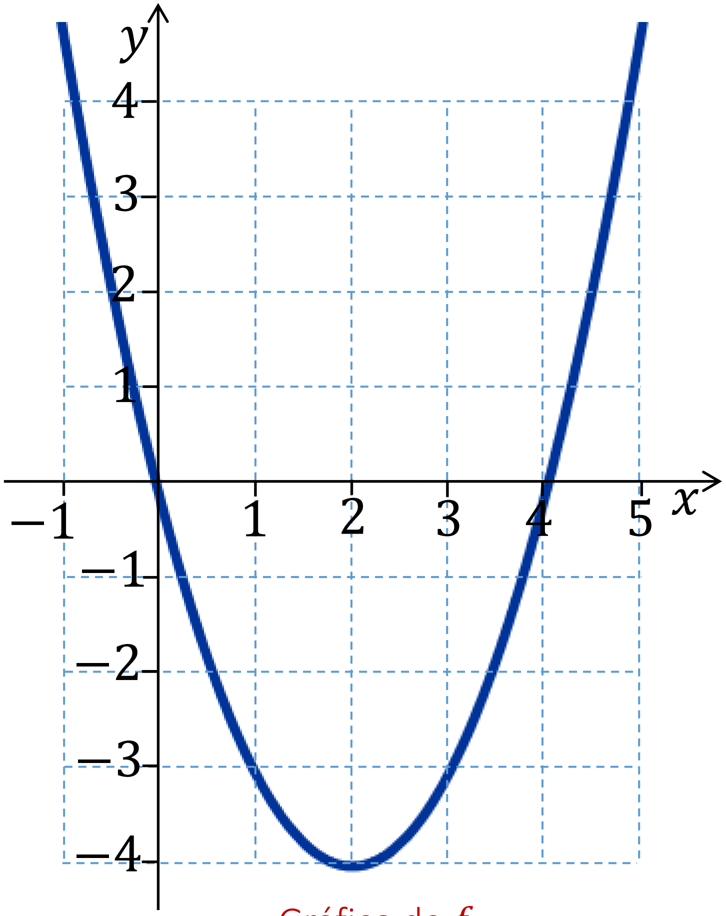


Gráfico de f

Exercícios

(e) $f(x) = x^4 - 4x^2$

i. $\left(-\sqrt{2},\ 0\right) \cup \left(\sqrt{2}, +\infty\right)$

ii. $\left(-\infty, -\sqrt{2}\right) \cup \left(0, \sqrt{2}\right)$

iii. $\left(-\infty, -\sqrt{\frac{2}{3}}\right) \cup \left(\sqrt{\frac{2}{3}}, +\infty\right)$

iv. $\left(-\sqrt{\frac{2}{3}}, \sqrt{\frac{2}{3}}\right)$

v. $\left(-\sqrt{\frac{2}{3}}, -\frac{20}{9}\right)$ *e* $\left(\sqrt{\frac{2}{3}}, -\frac{20}{9}\right)$

vi. $\left(-\sqrt{2},\ -4\right)$ e $\left(\sqrt{2},\ -4\right)$ (mínimos locais) e $(0, 0)$ (máximo local).

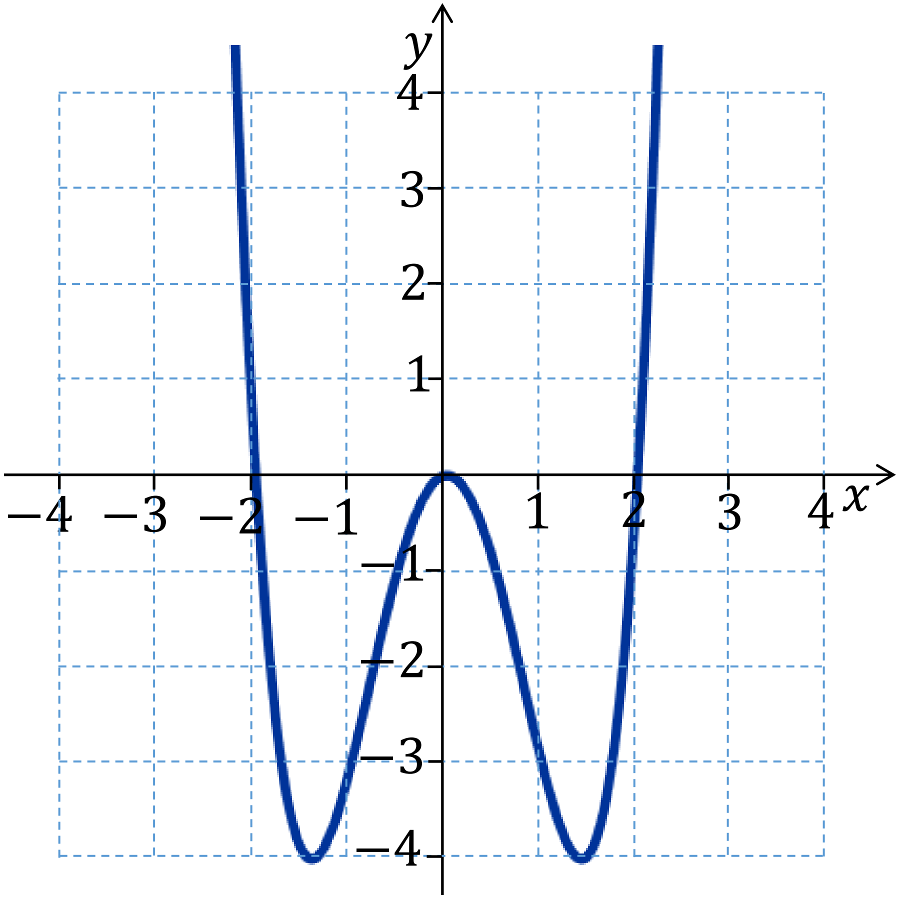


Gráfico de f

Exercícios

(f) $f(x) = \frac{(x^2+1)}{(x^2-1)}$

i. $(-\infty,-1) \cup (-1,0)$

ii. $(0,1\ ) \cup (1,+\infty)$

iii. $(-\infty,-1) \cup (1,+\infty)$

iv. $(-1{,}1)$

v. $\nexists$

vi. $(0,-1)$ (máximo local)

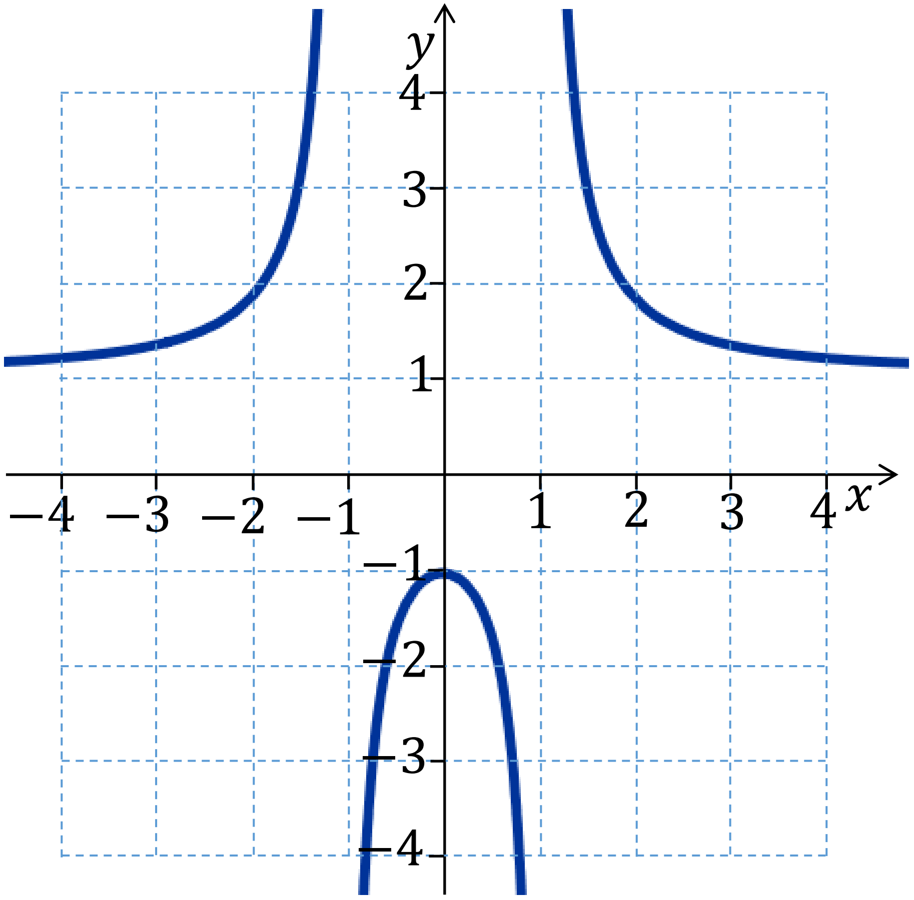


Gráfico de f