Álgebra Linear Computacional COC473

Luís Volnei S. Sagrilo
(sagrilo@coc.ufrj.br)

Programa de Engenharia Civil

COPPE/UFRJ

Primeiro Semestre/2020

SOLUÇÃO DIRETA DE SISTEMAS DE EQUAÇÕES LINEARES

- Métodos (sistemas quadrados m=n):

  - Matriz Inversa ($\mathbf{X} = \mathbf{A}^{-1}\mathbf{B}$) se det($\mathbf{A}$) $\neq 0$ (ok.)
  - Método de Eliminação de Gauss √
  - Método de Eliminação Gauss-Jordan
  - Decomposição LU
  - Método da Decomposição de Cholesky
  - SVD – Singular Value Decomposition (opcional)

SOLUÇÃO DIRETA DE SISTEMAS DE EQUAÇÕES LINEARES

- Eliminação de Gauss:
  - Introdução/observações importantes:

1) Se a matriz dos coeficientes for do tipo triangular superior

$$\begin{bmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \cdots & a_{1,n} \\ & a_{2,2} & \cdots & a_{2,n} \\ & & \cdots & \vdots \\ & & & a_{n,n} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix}$$

Solução:

$$x_n = \frac{b_n}{a_{n,n}}$$

$$x_{n-1} = \frac{b_{n-1} - a_{n-1,n} x_n}{a_{n-1,n-1}}$$

e assim por diante...

Algoritmo→ Retro-substituição

$$x_n = \frac{b_n}{a_{n,n}}$$

$$x_i = \frac{b_i - \sum_{j=i+1}^{n} a_{i,j} x_j}{a_{i,i}} \qquad i = n\text{-}1, n\text{-}2, \ldots, 1$$

SOLUÇÃO DIRETA DE SISTEMAS DE EQUAÇÕES LINEARES

- Eliminação de Gauss Jordan:
  - Síntese do Método: continuar a pré-multiplicar o sistema de equações original (**U′X = B′) obtido no processo de eliminação de Gauss** por n-1 matrizes **M** (matrizes de combinações de linhas) de forma a tornar a matriz dos coeficientes do "sistema equivalente" numa matriz diagonal.

$$\underbrace{\mathbf{M}_{n-1}\mathbf{M}_{n-2}\cdots\mathbf{M}_{1}}_{\text{Elim. Gauss}}\mathbf{AX} = \underbrace{\mathbf{M}_{n-1}\mathbf{M}_{n-2}\cdots\mathbf{M}_{1}}_{\text{Elim. Gauss}}\mathbf{B}$$

$$\mathbf{UX} = \mathbf{B}' \quad \rightarrow \mathbf{U}: \text{triangular superior}$$

$$\underbrace{\mathbf{M}^{*}_{n-1}\mathbf{M}^{*}_{n-2}\cdots\mathbf{M}^{*}_{1}\mathbf{U}}_{\mathbf{D}}\mathbf{X} = \underbrace{\mathbf{M}^{*}_{n-1}\mathbf{M}^{*}_{n-2}\cdots\mathbf{M}^{*}_{1}\mathbf{B}'}_{\mathbf{B}''}$$

$$\mathbf{DX} = \mathbf{B}'' \quad \rightarrow \mathbf{D}: \text{Matriz diagonal} \rightarrow X_i = \frac{b_i''}{d_{i,i}}$$

SOLUÇÃO DIRETA DE SISTEMAS DE EQUAÇÕES LINEARES

- Eliminação de Gauss: Exemplo (3x3)

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & a_{1,3} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & a_{2,3} \\ a_{3,1} & a_{3,2} & a_{3,3} \end{bmatrix} \qquad \mathbf{M}_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -a_{2,1}/a_{1,1} & 1 & 0 \\ -a_{3,1}/a_{1,1} & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{M}_1\mathbf{A} = \mathbf{A}' = \begin{bmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & a_{1,3} \\ 0 & a'_{2,2} & a'_{2,3} \\ 0 & a'_{3,2} & a'_{3,3} \end{bmatrix} \qquad \mathbf{M}_1\mathbf{B} = \mathbf{B}' = \begin{bmatrix} b_1 \\ b'_2 \\ b'_3 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{M}_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -a'_{3,2}/a'_{2,2} & 1 \end{bmatrix} \qquad \mathbf{M}_2\mathbf{A}' = \begin{bmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & a_{1,3} \\ 0 & a'_{2,2} & a'_{2,3} \\ 0 & 0 & a''_{3,3} \end{bmatrix} \qquad \mathbf{M}_2\mathbf{B}' = \begin{bmatrix} b_1 \\ b'_2 \\ b''_3 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & a_{1,3} \\ 0 & a'_{2,2} & a'_{2,3} \\ 0 & 0 & a''_{3,3} \end{bmatrix} \mathbf{X} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b'_2 \\ b''_3 \end{bmatrix} \leftarrow \text{Retro}$$

SOLUÇÃO DIRETA DE SISTEMAS DE EQUAÇÕES LINEARES

- Eliminação de Gauss-Jordan: Exemplo (3x3)

$$\mathbf{U} = \begin{bmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & a_{1,3} \\ 0 & a'_{2,2} & a'_{2,3} \\ 0 & 0 & a''_{3,3} \end{bmatrix} \qquad \mathbf{B}' = \begin{bmatrix} b_1 \\ b'_2 \\ b''_3 \end{bmatrix} \qquad \mathbf{M}_1^* = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -a_{1,3}/a''_{3,3} \\ 0 & 1 & -a'_{2,3}/a''_{3,3} \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{M}_1^*\mathbf{U} = \mathbf{U}' = \begin{bmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & 0 \\ 0 & a'_{2,2} & 0 \\ 0 & 0 & a''_{3,3} \end{bmatrix} \qquad \mathbf{M}_1^*\mathbf{B}' = \mathbf{B}'' = \begin{bmatrix} b'_1 \\ b''_2 \\ b''_3 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{M}_2^* = \begin{bmatrix} 1 & -a_{1,2}/a'_{2,2} & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad \mathbf{M}_2^*\mathbf{U}' = \begin{bmatrix} a_{1,1} & 0 & 0 \\ 0 & a'_{2,2} & 0 \\ 0 & 0 & a''_{3,3} \end{bmatrix} \qquad \mathbf{M}_2^*\mathbf{B}'' = \begin{bmatrix} b''_1 \\ b''_2 \\ b''_3 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} a_{1,1} & 0 & 0 \\ 0 & a'_{2,2} & 0 \\ 0 & 0 & a''_{3,3} \end{bmatrix} \mathbf{X} = \begin{bmatrix} b''_1 \\ b''_2 \\ b''_3 \end{bmatrix} \leftarrow x_1 = b''_1 / a_{1,1} \text{ e assim para os outros coef.}$$

SOLUÇÃO DIRETA DE SISTEMAS DE EQUAÇÕES LINEARES

- Exemplo:

$$\underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 4 & 4 & 2 \\ 4 & 6 & 4 \end{bmatrix}}_{\mathbf{A}} \underbrace{\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}}_{\mathbf{X}} = \underbrace{\begin{bmatrix} 3 \\ 6 \\ 10 \end{bmatrix}}_{\mathbf{B}} \qquad \mathbf{M}_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -4 & 1 & 0 \\ -4 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{M}_1\mathbf{A} = \mathbf{A}' = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 0 & -4 & -6 \\ 0 & -2 & -4 \end{bmatrix} \qquad \mathbf{M}_1\mathbf{B} = \mathbf{B}' = \begin{bmatrix} +3 \\ -6 \\ -2 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{M}_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1/2 & 1 \end{bmatrix} \qquad \mathbf{M}_2\mathbf{A}' = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 0 & -4 & -6 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \qquad \mathbf{M}_2\mathbf{B}' = \begin{bmatrix} +3 \\ -6 \\ +1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 0 & -4 & -6 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \mathbf{X} = \begin{bmatrix} +3 \\ -6 \\ +1 \end{bmatrix} \rightarrow \mathrm{Retro} \rightarrow \begin{array}{r} -x_3 = 1 \rightarrow x_3 = -1 \\ -4x_2 - 6x_3 = -6 \rightarrow x_2 = 3 \\ x_1 + 2x_2 + 2x_3 = 3 \rightarrow x_1 = -1 \end{array} \qquad \mathbf{X} = \begin{bmatrix} -1 \\ +3 \\ -1 \end{bmatrix}$$

SOLUÇÃO DIRETA DE SISTEMAS DE EQUAÇÕES LINEARES

- Exemplo:

$$\underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 0 & -4 & -6 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}}_{\mathbf{U}} \mathbf{X} = \begin{bmatrix} +3 \\ -6 \\ +1 \end{bmatrix} \qquad \mathbf{M}_1^* = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & -6 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{M}_1^*\mathbf{U} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & -4 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \qquad \mathbf{M}_1^* \begin{bmatrix} +3 \\ -6 \\ +1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} +5 \\ -12 \\ +1 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{M}_2^* = \begin{bmatrix} 1 & 1/2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad \mathbf{M}_2^*\mathbf{M}_1^*\mathbf{U} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -4 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \qquad \mathbf{M}_2^* \begin{bmatrix} +5 \\ -12 \\ +1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ -12 \\ +1 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{X} = \begin{bmatrix} -1/(+1) \\ -12/(-4) \\ +1/(-1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ +3 \\ -1 \end{bmatrix}$$

SOLUÇÃO DIRETA DE SISTEMAS DE EQUAÇÕES LINEARES

- Exemplo: Fazendo mais uma operação

$$\mathbf{M}_2^* = \begin{bmatrix} 1 & 1/2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad \mathbf{M}_2^*\mathbf{M}_1^*\mathbf{U} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -4 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \qquad \mathbf{M}_2^* \begin{bmatrix} +5 \\ -12 \\ +1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ -12 \\ +1 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{M}_3^* = \begin{bmatrix} 1/1 & & 0 \\ 0 & 1/(-4) & 0 \\ 0 & 0 & 1/(-1) \end{bmatrix} \qquad \mathbf{M}_3^*\mathbf{M}_2^*\mathbf{M}_1^*\mathbf{U} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{M}_3^* \begin{bmatrix} -1 \\ -12 \\ +1 \end{bmatrix} = \mathbf{M}_3^*\mathbf{M}_2^*\mathbf{M}_1^* \begin{bmatrix} +3 \\ -6 \\ +1 \end{bmatrix} = \mathbf{X} = \begin{bmatrix} -1 \\ +3 \\ -1 \end{bmatrix}$$

$$\text{Obs.: } \underbrace{\mathbf{M}_3^*\mathbf{M}_2^*\mathbf{M}_1^*\mathbf{M}_2\mathbf{M}_1}_{\mathbf{A}^{-1}}\mathbf{A} = \mathbf{I} \qquad (\mathbf{U} = \mathbf{M}_2\mathbf{M}_1\mathbf{A})$$

SOLUÇÃO DIRETA DE SISTEMAS DE EQUAÇÕES LINEARES

- Eliminação de Gauss-Jordan: inversão de matrizes

$$\begin{bmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & a_{1,3} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & a_{2,3} \\ a_{3,1} & a_{3,2} & a_{3,3} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_{1,1} & x_{1,2} & x_{1,3} \\ x_{2,1} & x_{2,2} & x_{2,3} \\ x_{3,1} & x_{3,2} & x_{3,3} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_{1,1} & b_{1,2} & b_{1,3} \\ b_{2,1} & b_{2,2} & b_{2,3} \\ b_{3,1} & b_{3,2} & b_{3,3} \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{A}\left[\mathbf{X}_1 \quad \mathbf{X}_2 \quad \mathbf{X}_3\right] = \left[\mathbf{B}_1 \quad \mathbf{B}_2 \quad \mathbf{B}_3\right] \qquad \mathbf{X}_i = \begin{bmatrix} x_{1,i} \\ x_{2,i} \\ x_{3,i} \end{bmatrix} \quad \mathbf{B}_i = \begin{bmatrix} b_{1,i} \\ b_{2,i} \\ b_{3,i} \end{bmatrix}$$

Repetindo as operações

$$\underbrace{\mathbf{M}_3^*\mathbf{M}_2^*\mathbf{M}_1^*\mathbf{M}_2\mathbf{M}_1}_{\mathbf{A}^{-1}}\mathbf{A} = \mathbf{I}$$

$$\left[\mathbf{X}_1 \quad \mathbf{X}_2 \quad \mathbf{X}_3\right] = \mathbf{M}_3^*\mathbf{M}_2^*\mathbf{M}_1^*\mathbf{M}_2\mathbf{M}_1\left[\mathbf{B}_1 \quad \mathbf{B}_2 \quad \mathbf{B}_3\right]$$

SOLUÇÃO DIRETA DE SISTEMAS DE EQUAÇÕES LINEARES

- Eliminação de Gauss-Jordan: inversão de matrizes

Se $\quad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

Sabendo - se que

$$\underbrace{\mathbf{M}_3^*\mathbf{M}_2^*\mathbf{M}_1^*\mathbf{M}_2\mathbf{M}_1}_{\mathbf{A}^{-1}}\mathbf{A} = \mathbf{I}$$

$$\underbrace{\begin{bmatrix}\mathbf{X}_1 & \mathbf{X}_2 & \mathbf{X}_3\end{bmatrix}}_{\mathbf{X}} = \underbrace{\mathbf{M}_3^*\mathbf{M}_2^*\mathbf{M}_1^*\mathbf{M}_2\mathbf{M}_1}_{\mathbf{A}^{-1}}\underbrace{\begin{bmatrix}\mathbf{B}_1 & \mathbf{B}_2 & \mathbf{B}_3\end{bmatrix}}_{\mathbf{B}\equiv\mathbf{I}}$$

então

$$\mathbf{X} = \mathbf{A}^{-1}$$

- Exemplo: Inversão de Matrizes

$$\underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 4 & 4 & 2 \\ 4 & 6 & 4 \end{bmatrix}}_{\mathbf{A}} \underbrace{\begin{bmatrix} x_{1,1} & x_{1,2} & x_{1,3} \\ x_{2,1} & x_{2,2} & x_{2,3} \\ x_{3,1} & x_{3,2} & x_{3,3} \end{bmatrix}}_{\mathbf{X}} = \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}}_{\mathbf{B}} \qquad \mathbf{M}_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -4 & 1 & 0 \\ -4 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{M}_1\mathbf{A} = \mathbf{A}' = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 0 & -4 & -6 \\ 0 & -2 & -4 \end{bmatrix} \qquad \mathbf{M}_1\mathbf{B} = \mathbf{B}' = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -4 & 1 & 0 \\ -4 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{M}_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1/2 & 1 \end{bmatrix} \qquad \mathbf{M}_2\mathbf{A}' = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 0 & -4 & -6 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \qquad \mathbf{M}_2\mathbf{B}' = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -4 & 1 & 0 \\ -2 & -1/2 & 1 \end{bmatrix}$$

SOLUÇÃO DIRETA DE SISTEMAS DE EQUAÇÕES LINEARES

- Exemplo: Inversão de Matrizes (cont.)

$$\underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 0 & -4 & -6 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}}_{\mathbf{U}} \mathbf{X} = \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -4 & 1 & 0 \\ -2 & -1/2 & 1 \end{bmatrix}}_{\mathbf{B}} \qquad \mathbf{M}_1^* = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & -6 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{M}_1^*\mathbf{U} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & -4 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \qquad \mathbf{M}_1^*\mathbf{B} = \mathbf{M}_1^* \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -4 & 1 & 0 \\ -2 & -1/2 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -3 & -1 & 2 \\ 8 & 4 & -6 \\ -2 & -1/2 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{M}_2^* = \begin{bmatrix} 1 & 1/2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad \mathbf{M}_2^*\mathbf{M}_1^*\mathbf{U} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -4 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{M}_2^*\mathbf{M}_1^*\mathbf{B} = \mathbf{M}_2^* \begin{bmatrix} -3 & -1 & 2 \\ 8 & 4 & -6 \\ -2 & -1/2 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 8 & 4 & -6 \\ -2 & -1/2 & 1 \end{bmatrix}$$

SOLUÇÃO DIRETA DE SISTEMAS DE EQUAÇÕES LINEARES

- Exemplo: Inversão de matrizes (cont.)

$$\mathbf{M}_2^* = \begin{bmatrix} 1 & 1/2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad \mathbf{M}_2^*\mathbf{M}_1^*\mathbf{U} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -4 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \qquad \mathbf{M}_2^*\mathbf{M}_1^*\mathbf{B} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 8 & 4 & -6 \\ -2 & -1/2 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{M}_3^* = \begin{bmatrix} 1/1 & & 0 \\ 0 & 1/(-4) & 0 \\ 0 & 0 & 1/(-1) \end{bmatrix} \qquad \mathbf{M}_3^*\mathbf{M}_2^*\mathbf{M}_1^*\mathbf{U} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{M}_3^*\mathbf{M}_2^*\mathbf{M}_1^*\mathbf{B} = \mathbf{X} = \mathbf{A}^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ -2 & -1 & 3/2 \\ 2 & 1/2 & -1 \end{bmatrix}$$

SOLUÇÃO DIRETA DE SISTEMAS DE EQUAÇÕES LINEARES

- Eliminação de Gauss-Jordan: Na <u>prática</u> as matrizes $\mathbf{M}_i$ não são explicitamente escritas. Opera-se diretamente sobre os termos da matriz **A** e do vetor/matriz **B**.
- Exemplo:

$$\underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 4 & 4 & 2 \\ 4 & 6 & 4 \end{bmatrix}}_{\mathbf{A}} \underbrace{\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}}_{\mathbf{X}} = \underbrace{\begin{bmatrix} 3 \\ 6 \\ 10 \end{bmatrix}}_{\mathbf{B}}$$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 2 & 3 \\ 4 & 4 & 2 & 6 \\ 4 & 6 & 4 & 10 \end{array}\right] \xrightarrow[L3^n \to -4L1+L3]{L2^n \to -4L1+L2} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 2 & 3 \\ 0 & -4 & -6 & -6 \\ 0 & -2 & -4 & -2 \end{array}\right] \xrightarrow{L3^n \to -L2/2+L3}$$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 2 & 3 \\ 0 & -4 & -6 & -6 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow[L2^n \to -6L3+L2]{L1^n \to 2L3+L1} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 0 & 5 \\ 0 & -4 & 0 & -12 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{L1^n \to L2/2+L1}$$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & -4 & 0 & -12 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow[\substack{L2^n \to L2/(-4) \\ L3^n \to L3/(-1)}]{L1^n \to L1/1} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & +3 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{array}\right] \qquad \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ +3 \\ -1 \end{bmatrix}$$

SOLUÇÃO DIRETA DE SISTEMAS DE EQUAÇÕES LINEARES

- Eliminação de Gauss-Jordan: Inversão
- Exemplo:

$$\underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 4 & 4 & 2 \\ 4 & 6 & 4 \end{bmatrix}}_{\mathbf{A}} \underbrace{\begin{bmatrix} x_{1,1} & x_{1,2} & x_{1,3} \\ x_{2,1} & x_{2,2} & x_{2,3} \\ x_{3,1} & x_{3,2} & x_{3,3} \end{bmatrix}}_{\mathbf{X}} = \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}}_{\mathbf{B}}$$

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 4 & 4 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 4 & 6 & 4 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \frac{L2^n \rightarrow -4L1 + L2}{L3^n \rightarrow -4L1 + L3} \rightarrow \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -4 & -6 & -4 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & -4 & -4 & 0 & 1 \end{array}\right] \frac{L3^n \rightarrow -L2/2 + L3}{} \rightarrow$$

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -4 & -6 & -4 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & -2 & -1/2 & 1 \end{array}\right] \frac{L1^n \rightarrow 2L3 + L1}{L2^n \rightarrow -6L3 + L2} \rightarrow \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 0 & -3 & -1 & 2 \\ 0 & -4 & 0 & 8 & 4 & -6 \\ 0 & 0 & -1 & -2 & -1/2 & 1 \end{array}\right] \frac{L1^n \rightarrow L2/2 + L1}{} \rightarrow$$

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & -4 & 0 & 8 & 4 & -6 \\ 0 & 0 & -1 & -2 & -1/2 & 1 \end{array}\right] \frac{L1^n \rightarrow L1/1}{\dfrac{L2^n \rightarrow L2/(-4)}{L3^n \rightarrow L3/(-1)}} \rightarrow \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & -2 & -1 & 3/2 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 1/2 & -1 \end{array}\right] \qquad \mathbf{A}^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ -2 & -1 & 3/2 \\ 2 & 1/2 & -1 \end{bmatrix}$$

SOLUÇÃO DIRETA DE SISTEMAS DE EQUAÇÕES LINEARES

- Decomposição LU
- Na eliminação de Gauss

  $\mathbf{M}_{n-1}\ldots\mathbf{M}_1\mathbf{A}=\mathbf{U}$

- As matrizes de combinação de linhas $\mathbf{M}_i$ tem as seguintes propriedades:
  - São triangulares inferiores com 1 nos elementos da diagonal principal
  - A inversa $\mathbf{M}_i^{-1}$ é também uma matriz triangular inferior com 1 nos elementos da diagonal principal
  - O produto $\mathbf{M}_{n-1}\ldots\mathbf{M}_1$ é uma matriz triangular inferior com 1 nos elementos da diagonal
  - A inversa de $\mathbf{M}_{n-1}\ldots\mathbf{M}_1$, **i.e.,** $(\mathbf{M}_{n-1}\ldots\mathbf{M}_1)^{-1}$ é uma matriz triangular inferior com 1 nos elementos na diagonal principal ($\mathbf{L}= (\mathbf{M}_{n-1}\ldots\mathbf{M}_1)^{-1}$)
- Portanto:

$$\mathbf{M}_{n-1}\ldots\mathbf{M}_1\mathbf{A}=\mathbf{U} \rightarrow \mathbf{A} =(\mathbf{M}_{n-1}\ldots\mathbf{M}_1)^{-1}\mathbf{U} \rightarrow \mathbf{A} =\mathbf{L}\mathbf{U}$$

SOLUÇÃO DIRETA DE SISTEMAS DE EQUAÇÕES LINEARES

- Decomposição LU
- A técnica de eliminação de Gauss, com relação as operações com a matriz **A**, pode ser vista como nada mais que a decomposição desta matriz no produto de uma matriz triangular inferior **L** por uma matriz triangular superior **U**:

$$\mathbf{A=LU}$$

- Exemplo

- Decomposição LU : Exemplo

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 4 & 4 & 2 \\ 4 & 6 & 4 \end{bmatrix} \qquad \mathbf{M}_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -4 & 1 & 0 \\ -4 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \mathbf{M}_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1/2 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{M}_2\mathbf{M}_1\mathbf{A} = \mathbf{U} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 0 & -4 & -6 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \qquad \mathbf{M}_2\mathbf{M}_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -4 & 1 & 0 \\ -4 & -0.5 & 1 \end{bmatrix}$$

$$(\mathbf{M}_2\mathbf{M}_1)^{-1} = \mathbf{L} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 4 & 1 & 0 \\ 4 & 0.5 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{LU} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 4 & 1 & 0 \\ 4 & 0.5 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 0 & -4 & -6 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 4 & 4 & 2 \\ 4 & 6 & 4 \end{bmatrix} = \mathbf{A}$$

DETALHES da DECOMPOSIÇÃO LU

- Eliminação de Gauss: Exemplo (3x3)

$$\mathbf{A}=\begin{bmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & a_{1,3} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & a_{2,3} \\ a_{3,1} & a_{3,2} & a_{3,3} \end{bmatrix} \qquad \mathbf{M}_1=\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -a_{2,1}/a_{1,1} & 1 & 0 \\ -a_{3,1}/a_{1,1} & 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad \mathbf{M}_1\mathbf{A}=\mathbf{A}'=\begin{bmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & a_{1,3} \\ 0 & a'_{2,2} & a'_{2,3} \\ 0 & a'_{3,2} & a'_{3,3} \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{M}_2=\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -a'_{3,2}/a'_{2,2} & 1 \end{bmatrix} \qquad \mathbf{M}_2\mathbf{A}'=\mathbf{M}_2\mathbf{M}_1\mathbf{A}=\begin{bmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & a_{1,3} \\ 0 & a'_{2,2} & a'_{2,3} \\ 0 & 0 & a''_{3,3} \end{bmatrix}=\mathbf{U}$$

$$\mathbf{M}_2\mathbf{M}_1\mathbf{A}=\mathbf{U} \qquad \rightarrow \qquad \mathbf{A}=\underbrace{\left(\mathbf{M}_2\mathbf{M}_1\right)^{-1}}_{\mathbf{L}}\mathbf{U}=\mathbf{M}_1^{-1}\mathbf{M}_2^{-1}\mathbf{U}$$

DETALHES da DECOMPOSIÇÃO LU

- Exemplo (3x3)

$$\mathbf{M}_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -a_{2,1}/a_{1,1} & 1 & 0 \\ -a_{3,1}/a_{1,1} & 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad \mathbf{M}_1^{-1} = \mathbf{L}_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ a_{2,1}/a_{1,1} & 1 & 0 \\ a_{3,1}/a_{1,1} & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{M}_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -a'_{3,2}/a'_{2,2} & 1 \end{bmatrix} \qquad \mathbf{M}_2^{-1} = \mathbf{L}_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & a'_{3,2}/a'_{2,2} & 1 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{L} = \mathbf{M}_1^{-1}\mathbf{M}_2^{-1} = \mathbf{L}_1\mathbf{L}_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ a_{2,1}/a_{1,1} & 1 & 0 \\ a_{3,1}/a_{1,1} & a'_{3,2}/a'_{2,2} & 1 \end{bmatrix}$$

$\mathbf{L}_i$ é igual a matriz $\mathbf{M}_i$ com os elementos fora da diagonal multiplicados por (-1).

SOLUÇÃO DIRETA DE SISTEMAS DE EQUAÇÕES LINEARES

- Decomposição LU
  - Qualquer matriz quadrada não singular **A** pode ser decomposta em **A** = **LU**

- Observando-se as operações matemáticas envolvidas é possível obter um algoritmo simples para decompor **A** em **LU**

- Algoritmo (sem pivotamento)

```
A(N,N)
DO K = 1, N-1
   DO I = K+1,N
      A(I,K) = A(I,K)/A(K,K)
   ENDDO
   DO J = K+1,N
      DO I = K+1,N
         A(I,J) = A(I,J)-A(I,K)*A(K,J)
      ENDDO
   ENDDO
ENDDO
```

SOLUÇÃO DIRETA DE SISTEMAS DE EQUAÇÕES LINEARES

- Decomposição LU : Dados armazenados/ processados pelo algoritmo

Entrada $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & a_{1,3} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & a_{2,3} \\ a_{3,1} & a_{3,2} & a_{3,3} \end{bmatrix}$

Saída $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} u_{1,1} & u_{1,2} & u_{1,3} \\ l_{2,1} & u_{2,2} & u_{2,3} \\ l_{3,1} & l_{3,2} & u_{3,3} \end{bmatrix}$

Lembrando que $\mathbf{L} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ l_{2,1} & 1 & 0 \\ l_{3,1} & l_{3,2} & 1 \end{bmatrix}$ e $\mathbf{U} = \begin{bmatrix} u_{1,1} & u_{1,2} & u_{1,3} \\ 0 & u_{2,2} & u_{2,3} \\ 0 & 0 & u_{3,3} \end{bmatrix}$

SOLUÇÃO DIRETA DE SISTEMAS DE EQUAÇÕES LINEARES

- Decomposição LU : Solução de um sistema **AX=B**

$$\mathbf{AX} = \mathbf{B}$$

$$\mathbf{L}\underbrace{\mathbf{UX}}_{\mathbf{Y}} = \mathbf{B}$$

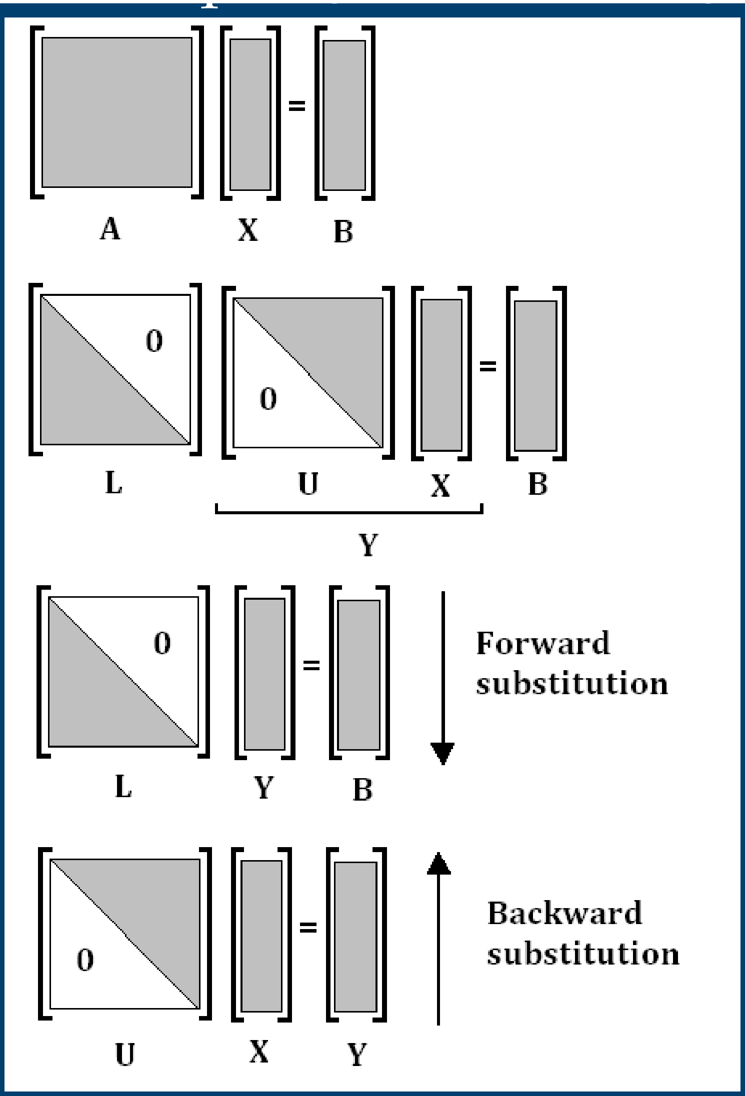
$$\mathbf{LY} = \mathbf{B} \qquad \text{Resolve-se } \mathbf{Y} \text{ facilmente por substituição "para frente"}$$

Depois

$$\mathbf{UX} = \mathbf{Y} \qquad \text{Resolve-se } \mathbf{X} \text{ facilmente por retro-substituição}$$

SOLUÇÃO DIRETA DE SISTEMAS DE EQUAÇÕES LINEARES

- Decomposição LU : Solução de um sistema **AX=B**



Substituição para a frente

$$y_1 = \frac{b_1}{l_{1,1}}$$

$$y_i = \frac{b_i - \sum_{j=1}^{i-1} l_{i,j} y_j}{l_{i,i}} \qquad i = 2,3;\cdots,n$$

Retro-substituição

$$x_n = \frac{y_n}{u_{n,n}}$$

$$x_i = \frac{y_i - \sum_{j=i+1}^{n} u_{i,j} y_j}{u_{i,i}} \qquad i = \text{n-1, n-2,...,1}$$

- Decomposição LU : Exemplo

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 4 & 4 & 2 \\ 4 & 6 & 4 \end{bmatrix} \qquad \mathbf{L} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 4 & 1 & 0 \\ 4 & 0.5 & 1 \end{bmatrix} \qquad \mathbf{U} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 0 & -4 & -6 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \qquad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 3 \\ 6 \\ 10 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{AX} = \mathbf{B} \quad \rightarrow \quad \mathbf{L}\underbrace{\mathbf{UX}}_{\mathbf{Y}} = \mathbf{B}$$

$$\mathbf{LY} = \mathbf{B} \quad \rightarrow \quad \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 4 & 1 & 0 \\ 4 & 0.5 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 6 \\ 10 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ -6 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{UX} = \mathbf{Y} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 0 & -4 & -6 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ -6 \\ 1 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ +3 \\ -1 \end{bmatrix}$$

- Decomposição de Cholesky:

Se **A** for uma matriz **simétrica positiva definida** é possível demonstrar que:

$$\mathbf{A} = \mathbf{L}\mathbf{L}^T \qquad \mathbf{U} = \mathbf{L}^T$$

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & a_{1,3} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & a_{2,3} \\ a_{3,1} & a_{3,2} & a_{3,3} \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{L} = \begin{bmatrix} l_{1,1} & 0 & 0 \\ l_{2,1} & l_{2,2} & 0 \\ l_{3,1} & l_{3,2} & l_{3,3} \end{bmatrix} \qquad \mathbf{U} = \mathbf{L}^T = \begin{bmatrix} l_{1,1} & l_{2,1} & l_{3,1} \\ 0 & l_{2,2} & l_{3,2} \\ 0 & 0 & l_{3,3} \end{bmatrix}$$

SOLUÇÃO DIRETA DE SISTEMAS DE EQUAÇÕES LINEARES

- Decomposição de Cholesky: Algoritmo

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} a & b \\ b & c \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{A} = \mathbf{L}\mathbf{L}^T$$

$$\mathbf{L} = \begin{bmatrix} l_{1,1} & 0 \\ l_{2,1} & l_{2,2} \end{bmatrix} \qquad \mathbf{L}\mathbf{L}^T = \begin{bmatrix} l_{1,1} & 0 \\ l_{2,1} & l_{2,2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} l_{1,1} & l_{2,1} \\ 0 & l_{2,2} \end{bmatrix} = \mathbf{A} = \begin{bmatrix} a & b \\ b & c \end{bmatrix}$$

$$(l_{1,1})^2 = a \qquad \rightarrow \; l_{1,1} = +\sqrt{a}$$

$$l_{1,1} \times l_{2,1} = b \qquad \rightarrow \; l_{2,1} = b / l_{1,1}$$

$$(l_{2,1})^2 + (l_{2,2})^2 = c \qquad \rightarrow \; l_{2,2} = +\sqrt{c - (l_{2,1})^2}$$

SOLUÇÃO DIRETA DE SISTEMAS DE EQUAÇÕES LINEARES

- Decomposição de Cholesky: Algoritmo

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} a & b & d \\ b & c & e \\ d & e & f \end{bmatrix} \qquad \mathbf{A} = \mathbf{LL}^T$$

$$\mathbf{L} = \begin{bmatrix} l_{1,1} & 0 & 0 \\ l_{2,1} & l_{2,2} & 0 \\ l_{3,1} & l_{3,2} & l_{3,3} \end{bmatrix} \qquad \mathbf{LL}^T = \begin{bmatrix} l_{1,1} & 0 & 0 \\ l_{2,1} & l_{2,2} & 0 \\ l_{3,1} & l_{3,2} & l_{3,3} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} l_{1,1} & l_{2,1} & l_{3,1} \\ 0 & l_{2,2} & l_{3,2} \\ 0 & 0 & l_{3,3} \end{bmatrix} = \mathbf{A} = \begin{bmatrix} a & b & d \\ b & c & e \\ d & e & f \end{bmatrix}$$

$$(l_{1,1})^2 = a \quad \rightarrow \quad l_{1,1} = +\sqrt{a}$$

$$l_{1,1} \times l_{2,1} = b \quad \rightarrow \quad l_{2,1} = b / l_{1,1}$$

$$l_{1,1} \times l_{3,1} = d \quad \rightarrow \quad l_{3,1} = d / l_{1,1}$$

$$(l_{2,1})^2 + (l_{2,2})^2 = c \quad \rightarrow \quad l_{2,2} = +\sqrt{c - (l_{2,1})^2}$$

$$l_{2,1} \times l_{3,1} + l_{2,2} \times l_{3,2} = e \quad \rightarrow l_{3,2} = (e - l_{2,1} \times l_{3,1}) / l_{2,2}$$

$$(l_{3,1})^2 + (l_{3,2})^2 + (l_{3,3})^2 = f \quad \rightarrow l_{3,3} = +\sqrt{c - (l_{3,1})^2 - (l_{3,2})^2}$$

- Decomposição de Cholesky: Algoritmo Genérico

$$
\begin{array}{l}
\mathbf{A}(N,N) \\
\left|\begin{array}{l}
i = 1,2,\cdots,N \\
\quad l_{i,i} = \left(a_{i,i} - \sum_{k=1}^{i-1} \left(l_{i,k} \right)^2 \right)^{1/2} \\
\quad \left|\begin{array}{l}
j = i+1, i+2, \cdots, N \\
\quad l_{j,i} = \dfrac{1}{l_{i,i}} \left(a_{i,j} - \sum_{k=1}^{i-1} l_{i,k} l_{j,k} \right)
\end{array}\right.
\end{array}\right.
\end{array}
$$

- Solução de um sistema **AX = B** usa os mesmos dois processos de substituição ("para frente e para trás") da decomposição LU

SOLUÇÃO DIRETA DE SISTEMAS DE EQUAÇÕES LINEARES

- Decomposição de Cholesky: Exemplo

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 0.2 & 0.4 \\ 0.2 & 1 & 0.5 \\ 0.4 & 0.5 & 1 \end{bmatrix}$$

$$l_{1,1} = +\sqrt{1} = +1$$

$$l_{2,1} = \frac{1}{1}\left(0.2 - \sum_{k=1}^{0} l_{1,k}\right) = 0.2$$

$$l_{3,1} = \frac{1}{1}\left(0.4 - \sum_{k=1}^{0} l_{1,k}\right) = 0.4$$

$$l_{2,2} = \left(1 - \sum_{k=1}^{1} (l_{2,k})^2\right)^{1/2} = \left(1 - 0.2^2\right)^{1/2} = 0.9798$$

$$l_{3,2} = \frac{1}{0.9798}\left(0.5 - \sum_{k=1}^{1} l_{2,k} l_{3,k}\right) = \frac{1}{0.9798}(0.5 - 0.2\text{x}0.4) = 0.429$$

$$l_{3,3} = \left(1 - \sum_{k=1}^{2} (l_{3,k})^2\right)^{1/2} = \left(1 - 0.4^2 - 0.429^2\right)^{1/2} = 0.81009$$

$$\mathbf{L} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0.2 & 0.98 & 0 \\ 0.4 & 0.43 & 0.81 \end{bmatrix}$$

SOLUÇÃO DIRETA DE SISTEMAS DE EQUAÇÕES LINEARES

- Decomposição de Cholesky: Exemplo

Sistema $\mathbf{AX} = \mathbf{B}$

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 0.2 & 0.4 \\ 0.2 & 1 & 0.5 \\ 0.4 & 0.5 & 1 \end{bmatrix} \qquad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} +0.6 \\ -0.3 \\ -0.6 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{L} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0.2 & 0.98 & 0 \\ 0.4 & 0.43 & 0.81 \end{bmatrix} \qquad \mathbf{U} = \begin{bmatrix} 1 & 0.2 & 0.40 \\ 0 & 0.98 & 0.43 \\ 0 & 0 & 0.81 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{LUX} = \mathbf{B} \quad \rightarrow \quad \mathbf{LY} = \mathbf{B} \quad \rightarrow \mathbf{UX} = \mathbf{Y}$$

$$\text{Resolvendo para } \mathbf{Y} \rightarrow \quad \mathbf{Y} = \begin{bmatrix} +0.600 \\ -0.429 \\ -0.810 \end{bmatrix}$$

$$\text{Resolvendo para } \mathbf{X} \rightarrow \quad \mathbf{X} = \begin{bmatrix} +1.000 \\ -0.000 \\ -1.000 \end{bmatrix}$$