La jerarquía de la Computabilidad

Comentario: Hacer mínimamente los ejercicios del 1 al 3. Los ejercicios 4 y 5 son un poco más difíciles; intentar hacerlos, porque se basan en una típica técnica relacionada con la clase RE.

Ejercicio 1. Responder breve y claramente los siguientes incisos:

1. ¿En qué se diferencian los lenguajes recursivos, los lenguajes recursivamente numerables no recursivos y los lenguajes no recursivamente numerables?
2. Probar que $R \subseteq RE \subseteq \mathfrak{L}$. *Ayuda: usar las definiciones*.
3. Dijimos en clase que el hecho de que si L es recursivo entonces L^C también lo es, significa en términos de problemas que si un problema es decidible entonces también lo es el problema contrario. ¿Qué significa en términos de problemas que la intersección de dos lenguajes recursivos es también un lenguaje recursivo?
4. Explicar por qué no es correcta la siguiente prueba de que si $L \in RE$, también $L^C \in RE$: dada una MT M que acepta L, entonces la MT M', igual que M pero con los estados finales permutados, acepta L^C.
5. ¿Qué lenguajes de la clase CO-RE tienen MT que los aceptan? ¿También los deciden?
6. Probar que el lenguaje Σ^* de todas las cadenas y el lenguaje vacío $\emptyset$ son recursivos. Alcanza con plantear la idea general. *Ayuda: encontrar MT que los decidan*.
7. Probar que todo lenguaje finito es recursivo. Alcanza con plantear la idea general. *Ayuda: encontrar una MT que lo decida (pensar cómo definir sus transiciones para cada una de las cadenas del lenguaje).*

Ejercicio 2. Considerando la Propiedad 2 estudiada en clase:

1. ¿Cómo implementaría la copia de la entrada w en la cinta 2 de la MT M?
2. ¿Cómo implementaría el borrado del contenido de la cinta 2 de la MT M?

Ejercicio 3. Probar:

1. La clase R es cerrada con respecto a la operación de unión.
   Ayuda: la prueba es similar a la desarrollada para la intersección.
2. La clase RE es cerrada con respecto a la operación de intersección.
   Ayuda: la prueba es similar a la desarrollada para la clase R.

Ejercicio 4. Sean L_1 y L_2 dos lenguajes recursivamente numerables de números naturales codificados en unario (por ejemplo, el número 5 se representa con 11111). Probar que también es recursivamente numerable el lenguaje $L = \{x \mid x$ es un número natural codificado en unario, y existen y, z, tales que $y + z = x$, con $y \in L_1, z \in L_2\}$.
Ayuda: la prueba es similar a la vista en clase, de la clausura de la clase RE con respecto a la operación de concatenación.

Ejercicio 5. Dada una MT M_1 con alfabeto $\Gamma = \{0, 1\}$:

1. Construir una MT M_2, utilizando la MT M_1, que acepte, cualquiera sea su cadena de entrada, sii la MT M_1 acepta **al menos** una cadena.
2. ¿Se puede construir además una MT M_3, utilizando la MT M_1, que acepte, cualquiera sea su cadena de entrada, sii la MT M_1 acepta **a lo sumo** una cadena? Justificar.

Ayuda para la parte (1): si M_1 acepta al menos una cadena, entonces existe al menos una cadena de símbolos 0 y 1, de tamaño n, tal que M_1 la acepta en k pasos. Teniendo en cuenta esto, pensar cómo M_2 podría simular M_1 considerando todas las cadenas de símbolos 0 y 1 hasta encontrar eventualmente una que M_1 acepte (¡cuidándose de los casos en que M_1 entre en loop!).