Lógica de Predicados de Primer Orden

Semántica

Dra. Claudia Pons cpons@lifia.info.unlp.edu.ar

Clase	**Lógica de Predicados** Dominios, Interpretaciones, Satisfacción de fórmulas bien formadas. Niveles de Verdad y falsedad de las fórmulas. Tautologías, contradicciones, fórmulas lógicamente válidas.	Lógica para Matemáticos. Hamilton, Capítulo 3. Lógica para Informática. Pons, Rosenfeld, Smith. Cap. 2	**Práctica**

Semántica: Dominio de interpretación

Para poder describir los aspectos semánticos de la lógica de predicados, necesitamos antes, introducimos el concepto de ***dominio***.

Un **dominio** está constituido por:

- **Un *universo* U**, que es un conjunto no vacío de objetos.
- **Un conjunto finito F de *funciones***, cada una de las cuales asigna a una determinada cantidad de objetos o argumentos de U un objeto de U:

  F = $\{\hat{f}_1^1, \hat{f}_2^1, \ldots, \hat{f}_1^2, \hat{f}_2^2, \ldots\}$

  El símbolo $\hat{f}_j^n$ denota la j-ésima función de n argumentos. $\hat{\boldsymbol{f}}_{\boldsymbol{i}}^{\boldsymbol{n}}$ **: U^n -> U**
- **Un conjunto finito P de *relaciones*** entre los objetos de U:

  P = $\{\hat{P}_1^1, \hat{P}_2^1, \ldots, \hat{P}_1^2, \hat{P}_2^2, \ldots\}$

  El símbolo P_j^n denota la j-ésima relación de grado n. $\hat{\boldsymbol{P}}_{\boldsymbol{i}}^{\boldsymbol{n}} \subseteq$ **U^n**

Semántica: Dominio de interpretación

Ejemplo 1:

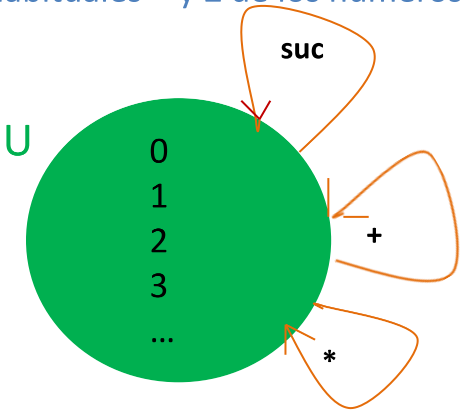
- U = **N**, es decir que U es el conjunto de los números naturales.

- **F = {suc, +, *}** o en general F = $\{f_1^1, f_1^2, f_2^2\}$

  F es un conjunto con tres elementos, la función suc, la función suma y multiplicación , con suc = {(x, y) | y = x + 1}

- **P = {=, ≤}** o en general P = $\{P_1^2, P_2^2\}$

  P es el conjunto que tiene las relaciones habituales = y ≤ de los números naturales, que asumimos definidas.



Nota: Las definiciones de las funciones y relaciones pueden ser ***extensionales***, cuando se efectúan enumerando las tuplas que las componen, o ***intensionales***, si se establecen a partir de otras funciones o relaciones.

Semántica: Dominio de interpretación

<u>Ejemplo 2</u>:

- U = {Alex, Tomás, Catty, Florencia} $\cup$ N . U es un conjunto de niños y números.

- F = {edad, altura}

  siendo:

  edad = {(Alex, 13), (Tomás, 15), (Catty, 14) , (Flor, 15)}

  altura = {(Alex,174), (Tomás,176), (Catty, 168), (Flor, 164)}

- P = {juega-básquet, toca-piano, más-alto, más-joven,amigos}

  siendo:

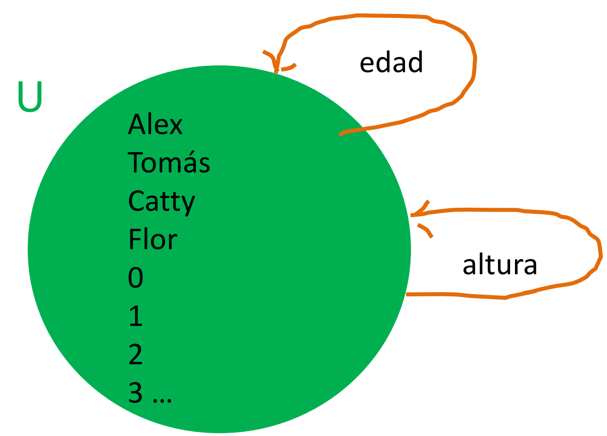
  juega-básquet = {Tomás}

  toca-piano = {Alex, Catty}

  más-alto = {(x, y) | altura(x) $>$ altura(y)}

  más-joven = {(x, y) | edad(y) $>$ edad(x)}

  amigos = { (Alex, Catty), (Alex, Flor), (Catty, Alex), (Flor, Tomás)}



Nota: Obsérvese que las nociones de verdad y falsedad, en la lógica de predicados están directamente implícitas en el dominio. Por ejemplo: para establecer la verdad de que Alex toca el piano, incluimos a Alex en el conjunto de niños que tocan el piano, que es la manera <u>extensional</u> de definir dicha propiedad.

Semántica: interpretación

Dados un lenguaje y un dominio, una ***interpretación*** I es una función que hace corresponder a los elementos del lenguaje con los elementos del dominio, satisfaciendo las siguientes condiciones:

- Si c_i es un símbolo de constante, entonces $I(c_i) \in U$ (los símbolos de constantes representan objetos del universo del discurso).
- Si f_i^n es un símbolo de función de grado n, entonces $I(f_i^n) = U^n \rightarrow U$ (los símbolos de función representan funciones del dominio).
- Si P_i^n es un símbolo de predicado de grado n, entonces $I(P_i^n) \subseteq U^n$ (los símbolos de predicado representan relaciones del dominio).

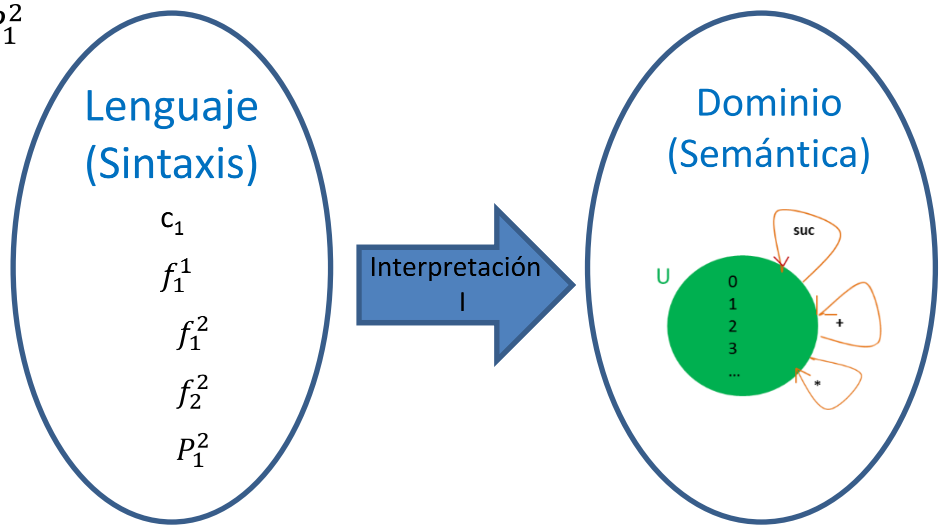
Por lo tanto, una interpretación formaliza la noción de que los símbolos representan las abstracciones de la realidad modelada en el dominio correspondiente.

Ejemplo:
Dado un lenguaje con los símbolos c_1, f_1^1, f_1^2, f_2^2 y P_1^2

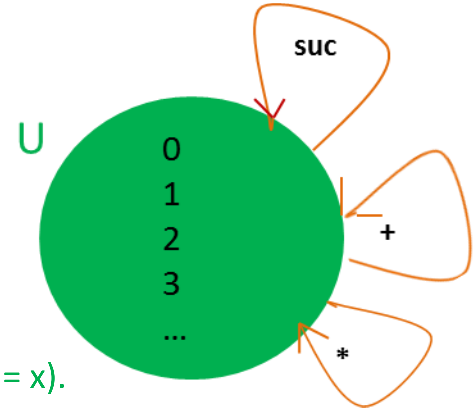
Lo interpretamos en un Dominio con:

Universo: N
F={+,suc,*}
P={=}

$I(c_1)$ es el cero de los naturales.
$I(f_1^1)$ es la función sucesor en los naturales.
$I(f_1^2)$ es la función suma en los naturales.
$I(f_2^2)$ es la función multiplicación .
$I(P_1^2)$ es la relación de igualdad.



Semántica: interpretación



Bajo esta interpretación sobre el dominio de los naturales:

I(c_1) es el cero de los naturales.

I(f_1^2) es la función suma en los naturales.

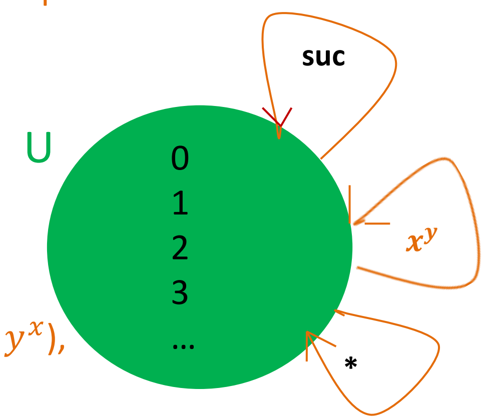
I(P_1^2) es la relación de igualdad.

Formulamos algunas propiedades :

$(\forall x)\ P_1^2(f_1^2(x, c_1), x)$. El cero es el neutro de la suma, es decir: $(\forall x)(x + 0 = x)$.

$(\forall x)(\forall y)\ P_1^2(f_1^2(x, y), f_1^2(y, x))$. La suma es conmutativa, es decir: $(\forall x)(\forall y)(x + y = y + x)$.

Si bien ésta es la interpretación “estándar”, nada, salvo el sentido común, nos impide plantear otras interpretaciones de los símbolos. Por ejemplo, podríamos establecer:



I´(f_1^2) es la función potencia en los naturales, con potencia(x, y) = x^y

Bajo esta nueva interpretación, entonces, quedaría formulado lo siguiente:

$(\forall x)\ P_1^2(f_1^2(x, c_1), x)$. El cero es el neutro de la potencia, es decir: $(\forall x)(x^0 = x)$,

$(\forall x)(\forall y)\ P_1^2(f_1^2(x, y), f_1^2(y, x))$. La potencia es conmutativa, es decir: $(\forall x)(\forall y)(x^y = y^x)$,

Ninguna se cumple en el dominio considerado.

Observemos que:

- Los símbolos son sólo símbolos, carentes de «significado» .
- Los símbolos obtienen un significado al ser interpretados sobre un Dominio Semántico.
- El mismo símbolo puede interpretarse de distintas formas (no simultaneamente).

Semántica

- Queda claro que si nos preguntamos acerca del «valor de verdad» de la siguiente formula:

  $(\forall x)\ P_1^2(f_1^2(x, c_1), x)$

  Nada podemos afirmar sin antes definir un dominio e interpretar el lenguaje.
  Para esta fórmula ya vimos dos interpretaciones diferentes:
  En I, (Para todo numero natural x) (x + 0 = x)
  En I´(Para todo numero natural x) (x^0 = x)

- Analicemos el siguiente caso:

  $(\forall x)\ P_1^2(x, x) \rightarrow (\forall x)\ P_1^2(x, x)$

  ¿Podemos afirmar cual es su «valor de verdad» aun antes de interpretar el lenguaje?

- Analicemos el siguiente caso:

  $(\forall x)\ P_1^2(y, x)$

  Bajo la interpretación sobre el dominio de los naturales con la relación ≤,

  (Para todo numero natural x) $y \leq x$

Semántica: valoración

Para completar la definición anterior falta establecer una manera de asignar objetos a todos los términos del lenguaje.

Esto se logra por medio de una función denominada ***valoración*** (en una interpretación).

Una valoración v, queda completamente especificada indicando cómo se valoran los símbolos de variables, es decir $v(x_1)$, $v(x_2)$, …, dado que se define:

- **Si c_i es un símbolo de constante, $v(c_i) = I(c_i)$.**
- **Si f_i^n es un símbolo de función, $v(f_i^n(t_1, \ldots, t_n)) = I(f_i^n)(v(t_1), \ldots, v(t_n))$.**

Por ejemplo, en la interpretación estándar de los naturales, fijando $v(x) = 7$, la valoración del término $f_1^1(f_1^2(x, c_1))$ se obtiene de la siguiente manera:

$\mathbf{v(f_1^1(f_1^2(x, c_1)))} = I(f_1^1)(v(f_1^2(x, c_1))) = suc(v(f_1^2(x, c_1))) = suc(I(f_1^2)(v(x), v(c_1))) =$

$suc(+(v(x), v(c_1))) = suc(+(7, 0)) = suc(7) = 8$

Semántica: Satisfacción

Para denotar que una fórmula A se satisface con una interpretación I y una valoración v, escribiremos

$$|=_{I,v} A$$

La definición inductiva de la satisfacción de una fórmula es la siguiente:

- **$|=_{I,v} P(t_1,..,t_n)$ si y sólo si $(v(t_1), \ldots, v(t_n)) \in I(P)$**

Por ejemplo:

Sea I la interpretación en el dominio de los Naturales con la suma y la igualdad. Sea v, tal que v(x)=5, v(y)=7

$|=_{I,v} P_1^2(f_1^2(x, c_1), x)$ si y solo si $(v(f_1^2(x, c_1)), v(x)) \in I(P_1^2)$

si y solo si$(I(f_1^2) (v(x), v(c_1)), v(x)) \in I(P_1^2)$

si y solo si$(+(5, 0), 5) \in I(P_1^2)$

si y solo si $(5, 5) \in =$

si y solo si 5=5

Otro ejemplo.

$|=_{I,v} P_1^2(y, x)$ si y solo si $(v(y),v(x)) \in I(P_1^2)$

si y solo si $(5,7) \in =$

si y solo si5=7

Semántica: Satisfacción

A partir de la definición de satisfacción para una fbf **atómica** definimos inductivamente la noción de satisfacción para todas las fbfs del lenguaje.

- **$|=_{I,v} P(t_1,..,t_n)$ si y sólo si $(v(t_1), ...,v(t_n)) \in I(P)$**

Sean A y B fbfs del lenguaje:

- $|=_{I,v} (\neg A)$ si y sólo si no es el caso que $|=_{I,v} A$
- $|=_{I,v} (A \wedge B)$ si y sólo si $|=_{I,v} A$ y $|=_{I,v} B$
- $|=_{I,v} (A \to B)$ si y sólo si no es el caso que $|=_{I,v} A$ y no $|=_{I,v} B$
- $|=_{I,v} (\forall xi) A$ si y sólo si para toda valoración w, i-equivalente, se cumple $|=_{I,w} A$

  Es decir que A es verdadera cualquiera sea la valoración de xi.
- $|=_{I,v} (\exists x) A$ si y sólo si para alguna valoración w, i-equivalente, se cumple $|=_{I,w} A$

  En este caso alcanza con que A sea verdadera en alguna valoración particular de x.

Anexo: i-equivalencias

Una valoración w es i-equivalente a otra valoración v, cuando w(xj)=v(xj), para todo j tal que j≠i

	x1	x2	x3
v_1	1	2	1
v_2	3	2	1
v_3	2	2	1

$V_1 v_2$ v_3 son 1-equivalente entre ellas

Dominio ={1,2,3}

¿Cuales son 2-equivalentes a v_1?

	x1	x2	x3
v_1	1	2	1
v_2			
v_3			

Semántica: Verdad, Validez

Si una fórmula es verdadera en toda interpretación
es ***LÓGICAMENTE VÁLIDA***.
La notación es $|= A$.
Por ejemplo, $((\forall x)\ P(x) \rightarrow (\exists x)\ P(x)\ )$es válida, cualquiera sea P.

Si una fórmula A, con una interpretación I, se satisface en todas las valoraciones, se dice que A es ***VERDADERA*** en I.
Se escribe así: $|=_{I} A$.
Por ejemplo, $(\forall x)\ P_1^2(f_1^2(x, c_1), x)$ es verdadera en la interpretación de los naturales con la suma y la igualdad.
Pq todo número natural x cumple que $x + 0 = x$

Una fórmula A es ***SATISFACTIBLE***
cuando existe una interpretación I y una valoración v,
donde $\mathbf{|=_{I,v} A}$

Hay formulas que no son **ni Verdaderas ni Falsas** en una I.
Por ejemplo: $P_1^2(x,y)$ si la interpretamos como $x < y$, se puede satisfacer cuando $v(x)=5$ y $v(y)=7$

Como contrapartida, decimos que una fórmula A es ***FALSA*** en una interpretación I si no existe ninguna valoración en I que la satisfaga.
Por ejemplo, fórmula ya vista $(\forall x)\ P_1^2(f_1^2(x, c_1), x)$: todo numero natural x cumple que $x + 0 < x$ es falsa en la interpretación de los naturales con la suma y la relación menor.

Las fórmulas falsas en toda interpretación se identifican como ***CONTRADICCIONES***.
Por ejemplo, la negación de cualquier fórmula lógicamente válida.

Semántica: Verdad, Modelo, Validez

Particularmente, una fórmula válida cuya estructura se corresponde con una tautología de la lógica proposicional, como por ejemplo $P(x) \vee (\neg P(x))$, es una ***tautología*** de la lógica de predicados. Las fórmulas válidas no proporcionan información alguna de un dominio.

(*a*) Hemos visto que toda *fbf* de $\mathscr{L}$ que provenga de una tautología de *L* por sustitución es lógicamente válida (Proposición 3.31). Nótese, pues, que la clase de las *fbfs* de $\mathscr{L}$ lógicamente válidas contiene a la clase de las tautologías.

Semántica: Verdad, Modelo, Validez

(b) $((\forall x_i)\mathscr{A} \to (\exists x_i)\mathscr{A})$ es lógicamente válida, cualquiera que sea la *fbf* $\mathscr{A}$ de $\mathscr{L}$. Esto se demuestra por un método standard como sigue.

Sea I una interpretación de dominio D_I y sea v una valoración en I. Si v no satisface $(\forall x_i)\mathscr{A}$ entonces v satisface $((\forall x_i)\mathscr{A} \to (\exists x_i)\mathscr{A})$. Si v satisface $(\forall x_i)\mathscr{A}$, entonces toda valoración v' que sea i-equivalente a v satisface $\mathscr{A}$. Está claro, entonces, que existe una valoración i-equivalente a v que satisface $\mathscr{A}$. Así pues, v satisface $(\exists x_i)\mathscr{A}$, por la Proposición 3.29. Así pues, también en este caso v satisface $((\forall x_i)\mathscr{A} \to (\exists x_i)\mathscr{A})$. Hemos demostrado, pues, que una valoración arbitraria en una interpretación arbitraria satisface la *fbf* dada, con lo que ésta es lógicamente válida.

Semántica: Verdad, Modelo, Validez

(*c*) $((\forall x_1)(\exists x_2) A_1^2(x_1, x_2) \rightarrow (\exists x_1)(\forall x_2) A_1^2(x_1, x_2))$ no es lógicamente válida. La demostración quizá es algo menos inmediata, puesto que lo que tenemos que hacer es encontrar una interpretación en la que la *fbf* dada no sea verdadera. Hemos de elegir un dominio D_I, una interpretación para la letra de predicado A_1^2, y una valoración que no satisfaga la *fbf*.