Lógica de Enunciados o Proposicional

Cátedra: FUNDAMENTOS DE TEORÍA DE LA COMPUTACION (FTC) 2024

Temas:

- Introducción a la Lógica de Enunciados.
- Conocimiento: definición.
- Adquisición del conocimiento.
- Formas de razonamiento.
- Argumentaciones.

Bibliografía:

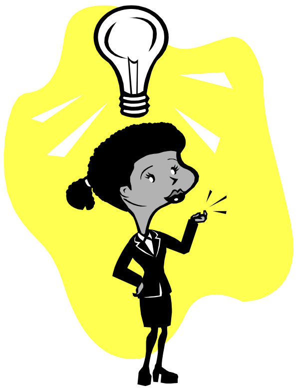
- Pons, Rosenfeld, Smith. Lógica para Informática. Capítulo 1
- Hamilton. Lógica para Matemáticos. Capítulo 1

Profesora: Dra. Claudia Pons
Claudia.pons@lifia.info.unlp.edu.ar

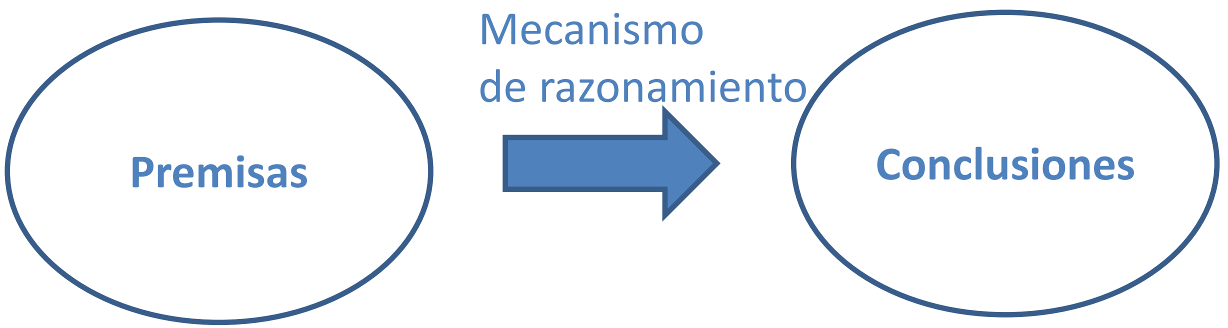
Qué es la lógica ?

- Trata acerca de los medios a través de los cuales puede propagarse y articularse el **conocimiento**.

- Es la disciplina que estudia las formas de **razonamiento**.



Que es el Razonamiento ?



- Se apoya en verdades supuestas, para obtener otras como resultado de la actividad de razonamiento.

- Sirve para justificar ciertas verdades, si son consecuencia (formal) de conocimientos previamente aceptados:

  - *Premisas* del razonamiento (propuestas)
  - *Conclusión* (conocimiento nuevo)

Los conocimientos se expresan mediante proposiciones o enunciados (lenguaje de la lógica)

Razonamiento = encadenamiento de enunciados formado por premisas y conclusiones.

El lenguaje de la lógica

La lógica proposicional, también conocida como lógica de enunciados, es un sistema formal cuyos elementos representan *proposiciones* o *enunciados*.
Esta lógica no tiene, por sí misma, mucha utilidad para la representación del conocimiento. Está justificado detenerse en ella porque permite introducir de una manera sencilla algunos conceptos que, explicados directamente para la lógica de predicados , son más difíciles de captar.

Nos interesa examinar los mecanismos de razonamiento con precisión matemática. Esta precisión requiere que el lenguaje que usemos no dé lugar a confusiones, lo cual conseguimos mediante un lenguaje simbólico donde cada símbolo tenga un significado bien definido.

Dada una frase en lenguaje natural, en primer lugar, podemos observar si se trata de una frase simple o de una frase compuesta.

Una frase simple consta de un sujeto y un predicado.
Por ejemplo:

Java es un lenguaje de programación.
Android es un sistema operativo moderno.

Una frase compuesta se forma a partir de frases simples por medio de algún término de enlace (o conectiva).
Por ejemplo:

Java es un lenguaje de programación y Java es compatible con Android.
Si Android es un sistema operativo moderno entonces Android soporta Java.

El lenguaje de la lógica

En segundo lugar, vamos a suponer que todas las frases simples pueden ser verdaderas o falsas. Ahora bien, en castellano hay frases que no son ni verdaderas ni falsas, por tanto tenemos que usar un término diferente. Hablaremos de enunciados (o proposiciones) para referirnos a frases que son verdaderas o falsas. Y distinguiremos entre enunciados simples (atómicos) o enunciados compuestos.

Denotamos los enunciados con letras mayúsculas A, B, C, …

Para construir enunciados compuestos introducimos símbolos para las conectivas. Las conectivas más comunes y los símbolos que emplearemos para denotarlas son los siguientes:

$\neg A$	Negación de A
$A \wedge B$	Conjunción de A y B
$A \vee B$	Disyunción de A o B
$A \rightarrow B$	Si A entonces B
$A \leftrightarrow B$	A si y sólo si B

Así, los enunciados compuestos vistos antes

Java es un lenguaje de programación y Java es compatible con Android.

Si Android es un sistema operativo moderno entonces Android soporta Java.

pueden escribirse simbólicamente de la siguiente forma:

$A \wedge B$

$C \rightarrow D$

A simboliza “Java es un lenguaje de programación”, B simboliza “Java es compatible con Android”, C simboliza “Android es un sistema operativo moderno” y D simboliza “Android soporta Java”.

El lenguaje simbólico de la lógica

Para estudiar los principios del razonamiento, necesitamos:

- capturar y formalizar las estructuras del lenguaje natural en un lenguaje simbólico,

- para luego formalizar los mecanismos de razonamiento que se aplican sobre dichas estructuras lingüísticas.

El lenguaje tiene SINTAXIS y SEMÁNTICA

Sintaxis: el lenguaje simbólico de la lógica

El lenguaje simbólico consta de un conjunto de:

- símbolos primitivos (el alfabeto o vocabulario) y

- un conjunto de reglas de formación (la gramática) que nos dice cómo construir fórmulas bien formadas a partir de los símbolos primitivos.

Alfabeto

El alfabeto de un sistema formal es el conjunto de símbolos que pertenecen al lenguaje del sistema.
Si L es el nombre del sistema de lógica proposicional, entonces el alfabeto de L consiste en:

- Una cantidad finita pero arbitrariamente grande de variables proposicionales (o variables de enunciado).
  En general se las toma del alfabeto latino, empezando por la letra p, luego q, r, etc., y utilizando subíndices cuando es necesario. Las variables de enunciado representan enunciados simples como "está lloviendo" o «java es un lenguaje de programación“.

- Un conjunto de operadores lógicos o conectivas: $\neg$, $\wedge$, $\vee$, $\rightarrow$, $\leftrightarrow$.
- Dos signos de puntuación: el paréntesis izquierdo y el paréntesis derecho.

Gramática

Una vez definido el alfabeto, el siguiente paso es determinar qué combinaciones de símbolos pertenecen al lenguaje del sistema. Esto se logra mediante una gramática formal.
La misma consiste en un conjunto de reglas que definen recursivamente las cadenas de caracteres que pertenecen al lenguaje. A las cadenas de caracteres construidas según estas reglas se las llama *fórmulas bien formadas (fbf)*, y también se las conoce como *formas enunciativas*.

Las reglas del sistema L son :

- Las variables de enunciado del alfabeto de L son formas enunciativas.
  Es decir, p,q,..

- Si A y B son formas enunciativas de L, entonces también lo son ($\neg$ A), (A $\wedge$ B), (A $\vee$ B) , (A $\rightarrow$ B) y (A $\leftrightarrow$ B).

- Sólo las expresiones que pueden ser generadas mediante las cláusulas i y ii en un número finito de pasos son formas enunciativas de L.

Ejemplos

Según estas reglas, las siguientes cadenas de caracteres son ejemplos de formas enunciativas:

p, q, r, por la definición (i).
$(\neg p)$, $(q \wedge r)$, $(p \rightarrow q)$, por la definición (ii) y la línea anterior.
$(((\neg p) \vee (q \wedge r)) \rightarrow (p \rightarrow q))$, por la definición (ii) y la línea anterior.

Y los siguientes son ejemplos de fórmulas que no son formas enunciativas:

Fórmula	Error	Corrección
(p)	Sobran paréntesis	p
$\neg (p)$	Mal los paréntesis	$(\neg p)$
$p \rightarrow q$	Faltan paréntesis	$(p \rightarrow q)$

Semántica: interpretación y satisfacción

Como todo enunciado simple es verdadero o falso, una variable de enunciado tomará uno u otro valor de verdad: V (verdadero) o F (falso).

La verdad o falsedad de un enunciado compuesto depende de la verdad o falsedad de los enunciados simples que lo constituyen, y de la forma en que están conectados.

Primeramente vamos a analizar el significado de cada una de las conectivas, mediante *tablas de verdad*.

Negación

Sea A un enunciado. Denotaremos con $\neg$ A a su negación. Si A es verdadero entonces $\neg$ A es falso, y recíprocamente si A es falso entonces $\neg$ A es verdadero. La siguiente es la tabla de verdad que especifica el significado de esta conectiva:

A	$\neg$ A
V	F
F	V

La conectiva $\neg$ da lugar a una función de verdad llamada $f^{\neg}$ que tiene como dominio y codominio al conjunto {V, F} y se define así:

$f^{\neg}(V) = F$
$f^{\neg}(F) = V$

Conjunción

Sean A y B dos enunciados, denotamos con $A \wedge B$ a la conjunción de ámbos. Su tabla de verdad es la siguiente:

A	B	$A \wedge B$
V	V	V
V	F	F
F	V	F
F	F	F

La conectiva $\wedge$ define una función de verdad $f^{\wedge}$ de dos argumentos:

$f^{\wedge}$ (V, V) = V
$f^{\wedge}$ (V, F) = F
$f^{\wedge}$ (F, V) = F
$f^{\wedge}$ (F, F) = F

Disyunción

Sean A y B dos enunciados. En castellano tenemos dos usos distintos para la disyunción “o”. Elegimos “A o B o ámbos”, que denotamos con $A \vee B$. Su tabla de verdad es:

A	B	$A \vee B$
V	V	V
V	F	V
F	V	V
F	F	F

La conectiva $\vee$ define una función de verdad $f^{\vee}$ de dos argumentos, como la anterior:

$f^{\vee}(V, V) = V$
$f^{\vee}(V, F) = V$
$f^{\vee}(F, V) = V$
$f^{\vee}(F, F) = F$

Nótese que el otro uso de la disyunción, es decir “A o B pero no ámbos”, se puede simbolizar mediante $(A \vee B) \wedge \neg (A \wedge B)$.

Condicional

Sean A y B dos enunciados. Utilizaremos $A \rightarrow B$ para representar el enunciado "A implica a B" o "si A entonces B". En este caso el significado intuitivo de esta frase genera algunos conflictos con su significado formal. La tabla de verdad de esta conectiva es la siguiente:

A	B	$A \rightarrow B$
V	V	V
V	F	F
F	V	V
F	F	V

De la misma forma que las anteriores, la conectiva $\rightarrow$ define una función de verdad de dos argumentos:

$f^{\rightarrow}(V, V) = V$
$f^{\rightarrow}(V, F) = F$
$f^{\rightarrow}(F, V) = V$
$f^{\rightarrow}(F, F) = V$

Bicondicional

Sean A y B dos enunciados. Denotamos el enunciado “A si y sólo si B” o “A equivale a B” con $A \leftrightarrow B$. Este enunciado será verdadero cuando A y B tengan el mismo valor de verdad (ambos verdaderos o ambos falsos), y sólo en dicho caso.

La tabla de verdad es la siguiente:

A	B	$A \leftrightarrow B$
V	V	V
V	F	F
F	V	F
F	F	V

Como antes, la conectiva $\leftrightarrow$ define una función de verdad de dos argumentos:

$f^{\leftrightarrow}(V, V) = V$
$f^{\leftrightarrow}(V, F) = F$
$f^{\leftrightarrow}(F, V) = F$
$f^{\leftrightarrow}(F, F) = V$

Tablas de verdad para enunciados compuestos

En lo que sigue veremos que el valor de verdad de un enunciado compuesto depende de los valores de verdad de los enunciados simples que lo forman, aplicando las funciones de verdad de las conectivas.

La tabla es una representación gráfica de una función de verdad, cuyo número de argumentos es igual al número de variables distintas que intervienen.

p	q	r	$(q \wedge r)$	$p \rightarrow (q \wedge r)$
V	V	V	V	V
V	V	F	F	F
V	F	V	F	F
V	F	F	F	F
F	V	V	V	V
F	V	F	F	V
F	F	V	F	V
F	F	F	F	V

3 letras
2^3= 8 filas

A una forma enunciativa con n variables diferentes, le corresponde una función de verdad de n argumentos, y la tabla de verdad tendrá 2^n filas, una para cada una de las posibles combinaciones de valores de verdad.

Ejercicio

- Si Alexia toma el autobús, entonces Alexia pierde su entrevista si el autobús llega tarde.
- Alexia no vuelve a su casa, si Alexia pierde su entrevista y Alexia se siente deprimida.
- Si Alexia no consigue el trabajo, entonces Alexia se siente deprimida y Alexia no vuelve a su casa.

Traducción del lenguaje natural al lenguaje simbólico.
Consideraremos las siguientes variables de enunciado:

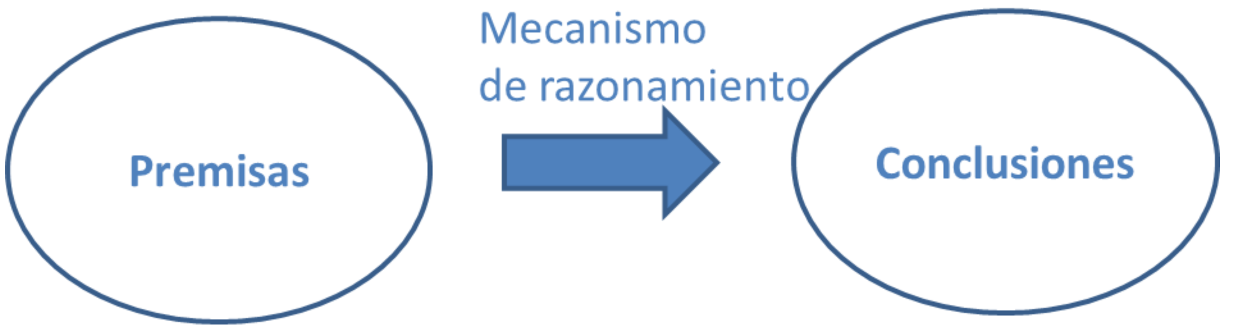
p: Alexia toma el autobús
q: Alexia pierde su entrevista
r: el autobús llega tarde
s: Alexia vuelve a su casa
t: Alexia se siente deprimida
u: Alexia consigue el trabajo

Construyamos las proposiciones:

A_1: $p \to (r \to q)$
A_2: $(q \land t) \to (\neg s)$
A_3: $(\neg u) \to (t \land (\neg s))$

Razonamiento

Usaremos este lenguaje para analizar los razonamientos:



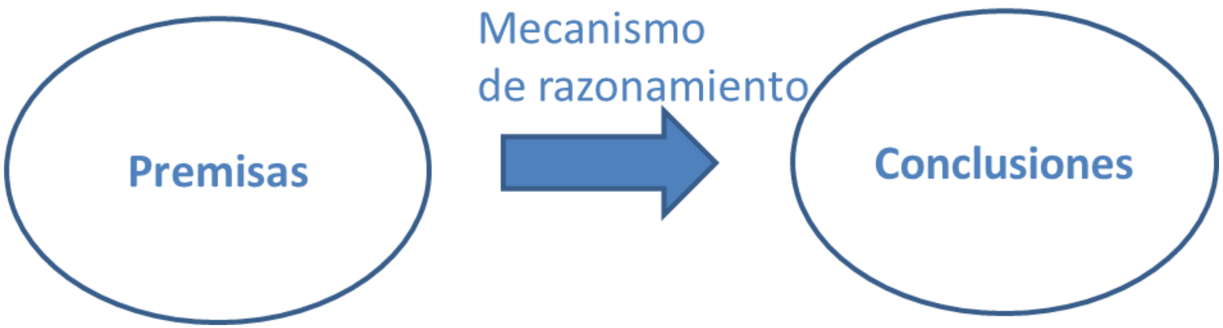
Razonamiento y deducción

- El razonamiento puede ser:
  - ***correcto o válido***: si la manera en que está construido garantiza la conservación de la verdad. Si las premisas son V, entonces la conclusión es necesariamente V.
  - ***Incorrecto o inválido***: su construcción es defectuosa (no hay garantía acerca del valor de verdad de la conclusión)

Deducción = razonamiento correcto

Razonamiento

Observemos los siguientes 4 casos:



V V
F F
FV
VF

Razonamiento

Las premisas son verdaderas y la conclusión también es verdadera

Consideremos el siguiente razonamiento:

Si Juan es mendocino entonces Juan es argentino.
Si Juan es argentino entonces Juan es sudamericano.
Por lo tanto: si Juan es mendocino entonces Juan es sudamericano.

Este razonamiento posee la siguiente estructura lógica:

Si A entonces B.
Si B entonces C.
Por lo tanto: si A entonces C.

Esta estructura refleja una forma de razonamiento correcto, conocida como silogismo.

Consideremos ahora el siguiente razonamiento:

Si Juan es mendocino entonces Juan es sudamericano.
Si Juan es argentino entonces Juan es sudamericano.
Por lo tanto: si Juan es mendocino entonces Juan es argentino.

Este razonamiento posee la siguiente estructura de razonamiento:

Si A entonces B.
Si C entonces B.
Por lo tanto: si A entonces C.

Esta estructura evidencia una forma incorrecta de razonar, que en este caso permitió obtener una conclusión verdadera a partir de premisas verdaderas. Sin embargo la misma estructura de razonamiento podría instanciarse con otros enunciados que dejarían en evidencia su incorrección, tal como veremos a continuación.

Razonamiento

Las premisas son falsas y la conclusión es falsa

Consideremos las mismas estructuras de razonamiento de antes, pero ahora utilizando premisas falsas:

Si Juan es argentino entonces Juan es africano.
Si Juan es africano entonces Juan es asiático.
Por lo tanto: si Juan es argentino entonces Juan es asiático.

Observamos que se trata de un razonamiento correcto (nuevamente el esquema del silogismo), que nos ha permitido deducir información falsa a partir de premisas falsas.

Utilicemos ahora el razonamiento incorrecto anterior:

Si Juan es chino entonces Juan es sudamericano.
Si Juan es peruano entonces Juan es sudamericano.
Por lo tanto: si Juan es chino entonces Juan es peruano.

También esta forma de razonamiento incorrecto nos ha permitido deducir información falsa a partir de premisas falsas.

Razonamiento.

Las premisas son falsas y la conclusión es verdadera

Es posible partir de premisas falsas y arribar a conclusiones verdaderas. Podríamos decir que se llega a la verdad “por casualidad”.
Veamos el siguiente ejemplo que nuevamente aplica el silogismo como esquema de razonamiento correcto:

Si Juan es argentino entonces Juan es africano.
Si Juan es africano entonces Juan es sudamericano.
Por lo tanto: si Juan es argentino entonces Juan es sudamericano.

Una situación similar ocurre si aplicamos una forma incorrecta de razonar, como en el siguiente ejemplo:

Si Juan es mendocino entonces Juan es africano.
Si Juan es argentino entonces Juan es africano.
Por lo tanto: si Juan es mendocino entonces Juan es argentino.

Razonamiento

Las premisas son verdaderas y la conclusión es falsa

El razonamiento correcto preserva la verdad, no es posible partir de premisas verdaderas y llegar a conclusiones falsas a través de un razonamiento correcto.

Esta situación puede ocurrir únicamente si aplicamos un razonamiento incorrecto, como en el siguiente ejemplo:

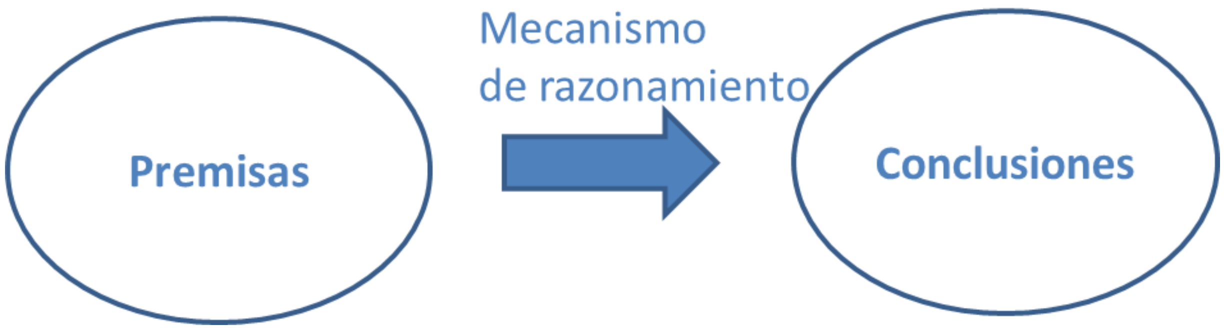
Si Juan es mendocino entonces Juan es argentino.
Si Juan es salteño entonces Juan es argentino.
Por lo tanto: si Juan es mendocino entonces Juan es salteño.

Esta es otra instancia de la estructura de razonamiento incorrecto vista antes:

Si A entonces B.
Si C entonces B.
Por lo tanto: si A entonces C.

Razonamiento

Vimos los siguientes 4 casos:



V V
F F
FV
VF

Razonamiento

- En resumen, un razonamiento es directamente incorrecto cuando a partir de premisas verdaderas permite arribar a una conclusión falsa,

  Si Juan es mendocino entonces Juan es argentino.
  Si Juan es salteño entonces Juan es argentino.
  Por lo tanto: si Juan es mendocino entonces Juan es salteño.

- o bien es incorrecto porque tiene la estructura de un razonamiento incorrecto (aunque la conclusión sea verdadera).

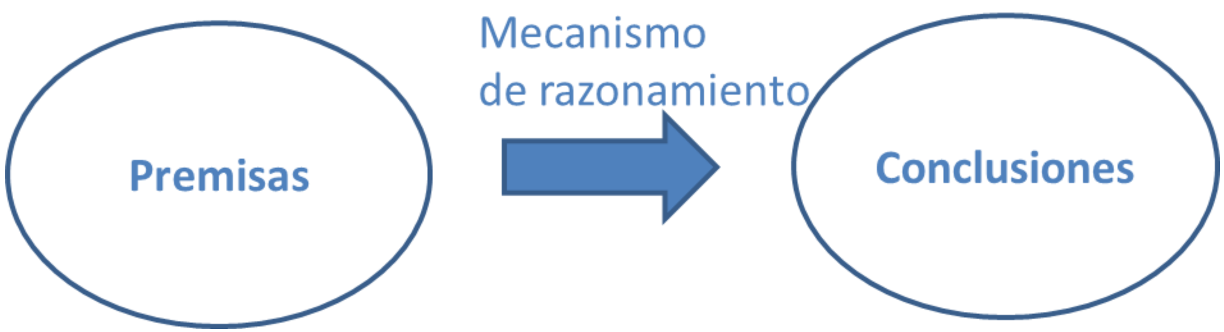
  Si Juan es mendocino entonces Juan es sudamericano.
  Si Juan es argentino entonces Juan es sudamericano.
  Por lo tanto: si Juan es mendocino entonces Juan es argentino.

- La corrección de la forma solamente garantiza que si las premisas son verdaderas entonces lo será también la conclusión.

- El caso F V es de gran importancia en el método científico, ya que permite razonar correctamente, pero sobre hipótesis que podrían ser falsas. La verdad de la conclusión no nos asegura nada acerca de la verdad de las premisas.

Razonamiento - Argumentación

Definamos argumentación válida:



Argumentaciones

Una ***forma argumentativa*** es una sucesión finita de formas enunciativas, de las cuales la última se considera como la *conclusión* de las anteriores, conocidas como *premisas*. La notación es:

$$A_1, A_2, \ldots, A_n \therefore A$$

Para que una **forma argumentativa sea válida** debe representar un razonamiento correcto. Es decir, bajo cualquier asignación de valores de verdad a las variables de enunciado, si las premisas $A_1, A_2, \ldots, A_n$, toman el valor V, la conclusión A también debe tomar el valor V.

Definición. Forma argumentativa válida.
Una forma argumentativa $A_1, A_2, \ldots, A_n \therefore A$ es *inválida* si es posible asignar valores de verdad a las variables de enunciado que aparecen en ella, de tal manera que $A_1, A_2, \ldots, A_n$, tomen el valor V y A tome el valor F.
De lo contrario la forma argumentativa es *válida*.

Argumentaciones

Por ejemplo, analicemos la validez de la siguiente argumentación:

- Si Alexia toma el autobús, entonces Alexia pierde su entrevista si el autobús llega tarde.
- Alexia no vuelve a su casa, si Alexia pierde su entrevista y Alexia se siente deprimida.
- Si Alexia no consigue el trabajo, entonces Alexia se siente deprimida y Alexia no vuelve a su casa.

Por lo tanto,

- si Alexia toma el autobús entonces Alexia no consigue el trabajo si el autobús llega tarde.

En primer lugar debemos construir la forma argumentativa correspondiente, traduciendo del lenguaje natural al lenguaje simbólico. Consideraremos las siguientes variables de enunciado:

p: Alexia toma el autobús
q: Alexia pierde su entrevista
r: el autobús llega tarde
s: Alexia vuelve a su casa
t: Alexia se siente deprimida
u: Alexia consigue el trabajo

Construyamos las premisas del razonamiento anterior:

A_1: $p \to (r \to q)$
A_2: $(q \wedge t) \to (\neg s)$
A_3: $(\neg u) \to (t \wedge (\neg s))$

La conclusión es:

A: $p \to (r \to (\neg u))$

Argumentaciones

Tenemos entonces la forma argumentativa A_1, A_2, A_3 $\therefore$ A. Observemos que es posible asignar valores de verdad a las variables de enunciado de modo tal que las premisas tomen el valor V y la conclusión el valor F:

A_1	A_2	A_3	A
$p \to (r \to q)$	$(q \wedge t) \to (\neg s)$	$(\neg u) \to (t \wedge (\neg s))$	$p \to (r \to (\neg u))$
V **V** V V V	V F F **V** FV	FV **V** FF FV	V **F** V F FV

Así, la forma argumentativa es **inválida**.

Argumentaciones

Veamos ahora un ejemplo de una argumentativa válida:

Por lo tanto, Alexia consigue el trabajo si Alexia pierde su entrevista y Alexia vuelve a su casa.

Nos queda: A: $(q \wedge s) \rightarrow u$

A_1	A_2	A_3	A
$p \rightarrow (r \rightarrow q)$	$(q \wedge t) \rightarrow (\neg s)$	$(\neg u) \rightarrow (t \wedge (\neg s))$	$(q \wedge s) \rightarrow u$
		V F **V** V V V F	V V V **F** F

En este caso es imposible asignar valores de verdad a las variables de enunciado tal que las premisas sean verdaderas y la conclusión falsa. Independientemente de otras variables de enunciado, sería el caso de asignar el valor F a la variable u (y en consecuencia el valor V a la variable s), para que A sea falsa, pero como vemos en la tabla de abajo, para que A_3 sea verdadera con la variable u falsa la variable s debe ser falsa (absurdo):