Técnicas de Prueba

Técnicas de prueba

- Demostración por contra-ejemplo
- Demostración por el absurdo
- Demostración por inducción natural/estructural

Demostración por contra-ejemplo

Ejercicio :
Sea A una fbf donde aparecen solo los conectivos $\wedge$, $\vee$, $\neg$.
Sea A´ la fbf que se obtiene a partir de A reemplazando cada $\wedge$ por $\vee$ y cada $\vee$ por $\wedge$.
Si A es una tautología, A´ también lo es? Justificar.

Esta propiedad **NO VALE**. Y lo demostraremos construyendo un contra-ejemplo

$$A = (p \vee (\neg p))$$

$$A' = (p \wedge (\neg p))$$

A es tautologia, pero A´no lo es.

Demostración por el absurdo

Ejercicio :
¿Es cierto que dadas A y B fbfs cualesquiera, siempre ocurre que si A y A → B son tautologías entonces B también lo es? Fundamentar.

Asumimos lo contrario a lo que queremos demostrar:
Las hipótesis son Verdaderas y la Conclusión es Falsa, o sea:

Hipotesis:	A es tautología	(i)
	(A → B) es tautología	(ii)
Conclusion falsa:	B **no** es tautología	(iii)

Demostración:

(iv) Por (iii), existe una valuación v tal que **v(B)=F**

(v) Por (i), v(A)=V

(vi) Por (ii), v((A → B))=V

(vii) Por definición de valoración y por (v) y (vi), **v(B)=V**

Contradicción!

Demostración por inducción natural/estructural

Ejercicio :

Demostrar que cualquier tautología proposicional que este escrita usando los conectivos ¬, ∨, ∧, → contiene alguna ocurrencia ya sea del símbolo ”¬” o del símbolo ”→”.

Idea: Demostrar que cualquier fórmula, sea A, que contenga sólo ∨ y ∧ puede tomar el valor F.

Para demostrar que A «puede» tomar el valor falso vamos a construir una valuación en particular en la cual A sea Falsa.

Sea v una valuación, que asigna el valor Falso a todas las letras. O sea v(pi)=F para todo i. En esa valuación la Fbf A también va a tomar el valor falso.

Recordemos que en la tabla de verdad cada VALORACION se ve como una FILA. Lo siguiente es un ejemplo para 2 letras. La última fila corresponde a la valuación v que nos interesa.

p1	p2	A (Fbf con sólo conectivos ∨ y ∧)
V	V	?
V	F	?
F	V	?
F	F	F

Vamos a demostrarlo formalmente usando inducción sobre la estructura de A.

Sea v una valuación, que asigna el valor Falso a todas las letras. O sea v(pi)=F para todo i. En esa valuación la Fbf A también va a tomar el valor falso, o sea v(A)=F.

Para demostrar por inducción necesitamos un número natural N. En este caso el "N" es la "cantidad de conectivos de la Fbf"

CASO BASE. N=0

Como N es cero, no hay conectivos, entonces A es atómica. O sea A=p1
v(p1)=F por lo tanto v(A)=F

HIPOTESIS INDUCTIVA (H.I.): asumimos que para toda Fbf A que contiene sólo conjunción y disyunción, con N o menos conectivos v(A)=F

CASO N+1

Usando la H.I. tenemos que poder probar que v(A)=F, para una fórmula A que tiene N+1 conectivos.
A puede tener 2 formatos:

Caso 1: A es $(B \vee C)$ Caso 2: A es $(B \wedge C)$

Vemos que tanto B como C tienen N o menos conectivos , por lo tanto para ellas vale la H.I., es decir v(B)=F y v(C)=F .
Entonces, por la definición de la semántica del $\vee$ y del $\wedge$, tanto en el caso 1 como en el caso 2, v(A)=F.

Con esto hemos demostrado que v(A)=F, para cualquier fbf (que contenga sólo $\vee$ y $\wedge$).

Hemos demostrado que A puede tomar el valor Falso y por lo tanto A no es una Tautología.

p1	p2	A (Fbf con sólo conectivos ∨ y ∧)
V	V	?
V	F	?
F	V	?
F	F	F

Retornando al objetivo del ejercicio, vemos que los conectivos ∨ y ∧ no alcanzan para escribir tautologías.

Entonces, para expresar tautologías deben usarse además otros conectivos.