UNLP. Facultad de Informática

Fundamentos de Teoría de la Computación **Curso 2022. Práctica 12**

Bibliografía

- Hamilton. Lógica para matemáticos. Capítulo 3
- Pons, Rosenfeld, Smith. Lógica para Informática. Capítulo 2

Temario

- Lógica de predicados de primer orden. Dominios, Interpretaciones, Satisfacción de fórmulas bien formadas. Niveles de Verdad y falsedad de las fórmulas. Tautologías, contradicciones, fórmulas lógicamente válidas.

Ejercicios

1. Señalar las ocurrencias libres o ligadas de x_1, x_2, x_3 en la siguiente fbf escrita en un lenguaje de primer orden donde $\mathcal{C} = \{c\}$, $\mathcal{F} = \{f, g\}$, y $\mathcal{P} = \{A_1^2\}$, con g de aridad 1; f de aridad 2, A_1^2 de aridad 2

   i $\forall x_1(\exists x_2 A_1^2(x_1, f(x_2, x_3)) \rightarrow \forall x_3 A_1^2(g(c), x_1) \vee A_1^2(x_1, x_3))$.

   ii $\forall x_1(\exists x_2 A_1^2(x_1, f(x_2, x_3))) \rightarrow \forall x_3 A_1^2(g(c), x_1) \vee A_1^2(x_1, x_3)$.

2. Sean $\mathscr{A}$ y $\mathscr{B}$ *fbfs* escritas en un lenguaje de primer orden. Analizar si son o no lógicamente equivalentes los siguientes pares de *fbfs* (usar noción de i-equivalencia o contraejemplos según corresponda):

i	$(\forall x)\ \mathscr{A}$	$\exists x \mathscr{A}$
ii	$\exists x \exists y \mathscr{A}$	$\exists y \exists x \mathscr{A}$
iii	$\exists x \forall y \mathscr{A}$	$\forall y \exists x \mathscr{A}$
iv	$\exists x(\mathscr{A} \wedge \mathscr{B})$	$\exists x \mathscr{A} \wedge \exists x \mathscr{B}$
v	$\exists x(\mathscr{A} \vee \mathscr{B})$	$\exists x \mathscr{A} \vee \exists x \mathscr{B}$
vi	$\forall x(\mathscr{A} \vee \mathscr{B})$	$\forall x \mathscr{A} \vee \forall x \mathscr{B}$

3. Sea un lenguaje de primer orden con las siguientes características:

   Conjunto de constantes: $\mathcal{C} = \{c, u\}$.

   Sin símbolos de función: $\mathcal{F} = \varnothing$.

   Conjunto de símbolos de predicado: $\mathcal{P} = \{A_1^2\}$, con A_1^2 de aridad 2.

   Sea I la siguiente interpretación para ese lenguaje sobre el dominio de los números Naturales:

   . $I(c) = 0$

. $I(u) = 1$
. $I(A_1^2(x, y)) = \{(x, y) \in N \times N; x \leq y\}$
donde I es una función de interpretación semántica.

Verificar si las siguientes afirmaciones son o no correctas. Fundamentar las respuestas.

i $A_1^2(c, x)$ es satisfactible en I.
ii $A_1^2(u, x)$ es satisfactible en I.
iii $\forall x A_1^2(c, x)$ es satisfactible en I.
iv $\forall x A_1^2(u, x)$ es satisfactible en I.
v $A_1^2(c, x)$ es verdadera en I.
vi $\forall x A_1^2(c, x)$ es lógicamente válida.
vii $A_1^2(u, c) \wedge \neg A_1^2(u, c)$ es contradictoria.

4. Ofrecer una interpretación para los siguientes lenguajes de primer orden donde las fórmulas sean verdaderas y otra donde sean falsas. Traducir en cada caso las fórmulas dadas a oraciones apropiadas en lenguaje natural.

   i $\mathcal{C} = \mathcal{F} = \varnothing$, $\mathcal{P} = \{A_1^2\}$, con A_1^2 de aridad 2.
   . $\forall x \forall y (A_1^2(x, y) \rightarrow A_1^2(y, x))$.
   . $\forall x (A_1^2(x, x))$.
   . $\forall x \forall y \forall z ((A_1^2(x, y) \wedge A_1^2(y, z)) \rightarrow A_1^2(x, z))$.

   ii $\mathcal{C} = \{c\}$, $\mathcal{F} = \{f\}$, $\mathcal{P} = \{A_1^2\}$, con f y A_1^2 de aridad 2.
   . $\forall x (A_1^2(x, c) \rightarrow A_1^2(x, f(y)))$.
   . $\forall x (\neg A_1^2(x, x))$.
   . $\neg \forall x \forall y (A_1^2(x, y))$.

5. Determinar si las siguientes *fbfs* escritas en algún lenguaje de primer orden son contradictorias, satisfactibles en alguna interpretación, verdaderas en alguna interpretación o lógicamente válidas. Fundamentar.

   i $(\exists x)(\neg \mathscr{A}(x)) \vee (\forall x)(\mathscr{A}(x) \vee \mathscr{B}(x))$.
   ii $\exists y \exists x\ P(x, y) \rightarrow \exists x \exists y\ P(x, y)$.

6. i Si la *fbf* $\mathscr{A}(x)$ es satisfactible, ¿entonces la *fbf* $\exists x \mathscr{A}(x)$ es lógicamente válida?. Fundamentar.

   ii La *fbf* abierta $\forall y\ P(x, y) \rightarrow \forall y \forall x\ P(x, y)$ ¿es lógicamente válida?. Fundamentar.

   iii Sea un lenguaje de primer orden con la letra de constante c y las letras de predicado P y Q, ambas de aridad 1. Sea la *fbf* : $(P(c) \wedge \forall x(P(x) \rightarrow Q(x))) \rightarrow Q(c)$ ¿Es lógicamente válida? Fundamentar.

iv Sean $\mathscr{A}$ y $\mathscr{B}$ dos *fbf* escritas en un lenguaje de primer orden. La *fbf*: $\forall x(A(x) \vee B(x)) \rightarrow ((\forall x \mathscr{A}(x)) \vee (\forall x \mathscr{B}(x)))$ es lógicamente válida? Fundamentar.

7. Sea $\mathscr{A}$ una *fbf* de un lenguaje de primer orden, I una interpretación para tal lenguaje. Demostrar que $\mathscr{A}$ es verdadera en I si y sólo si $\neg\mathscr{A}$ es falsa en I.

8. Sea $\mathscr{A}$ una *fbf* que no contiene cuantificadores (es decir, abierta) escrita en algún lenguaje de primer orden. Sea I una interpretación para tal lenguaje. ¿Es posible decidir acerca del valor de verdad de $\mathscr{A}$ en I? Fundamentar.

9. Retomar la práctica anterior y para cada item (por separado) del ejercicio 4, encontrar alguna interpretación donde todas las sentencias dadas sean verdaderas y además:
   - Pipo es un dragón que vive en un zoológico.
   - Sebastián es bueno y también es malo al mismo tiempo.
   - Pedro es un peluquero.

   En algún caso la interpretación podría no existir (justificar por qué)