

EM461 - Mecânica dos Fluidos I

Pedro Henrique Limeira da Cruz

May 8, 2023

Contents

1	Estática dos Fluidos	3
1.1	Equação Base - Estática de Fluidos	3
1.2	Variação de Pressão em um Fluido Estático	4
1.3	Variação de Pressão Em um Gás Ideal	5
1.4	One Pager - Estática de Fluidos	6
2	Conceitos Fundamentais Dinâmica dos Fluidos	7
2.1	Campo de Velocidade	7
2.2	Linhas de Caracterização	7
2.3	Tensão de Cisalhamento	8
2.4	One Pager - Conceitos Fundamentais	9
3	Equações Básicas na Forma Integral - Volume de Controle	10
3.1	Modelagem Geral: Sistema \rightarrow Volume de Controle	10
3.2	Conservação de Massa	10
3.3	Conservação de Quantidade de Movimento Linear	11
3.3.1	Caso sem Velocidade Relativa	11
3.3.2	Caso com Velocidade Relativa Constante	11
3.3.3	Caso com Aceleração Constante	11
3.4	Conservação de Energia	12
3.5	Equação de Bernoulli	12

1 Estática dos Fluidos

Antes de começarmos nossos estudos sobre a mecânica dos fluidos em movimento, iremos revisar (ou para alguns introduzir) a estática de fluidos.

1.1 Equação Base - Estática de Fluidos

A equação mais básica da estática de fluidos é aquela que modela o campo de pressão em um fluido estático. A partir das experiências do dia-a-dia podemos verificar o principal aspecto sobre a pressão em uma coluna de fluido estático:

A pressão Aumenta com a Profundidade

A partir disso, e com a intenção de modelarmos matematicamente o sistema, fazemos a análise mais básica de mecânica estática, a lei de Newton. Para esse caso, entretanto, como estamos falando de um fluido e não de um corpo concentrado, iremos aplicar a lei de newton em um cenário diferencial, para lidarmos com pequenas massas (ou pequenos volumes) do fluido, como mostra a equação 1:

$$d\vec{F}_{resultante} = \vec{a}dm \quad (1)$$

A partir disso, como temos nossa lei de newton básica (mas agora aplicada para o problemas diferencial de fluidos), podemos prosseguir e identificar as forças envolvidas.

A primeira força de campo que iremos ver e que atua nos problemas de estática de fluidos é a força oriunda da *gravidade*, quando analisamos um pequeno volume diferencial do fluido, dada por:

$$d\vec{F}_B = \vec{g}\rho dV \quad (2)$$

Onde:

- ρ : Massa específica. Para problemas que estaremos analisando é constante em função tanto do tempo quanto posição.
- V : Volume do elemento, dada em coordenadas cartesianas tal que $dV = dx \, dy \, dz$
- g : Aceleração da gravidade.

A segunda força que iremos analisar agora é a **única força de superfície** presente, tendo em vista que estamos abordado a estática de fluidos e, por conseguinte, não há a presença de tensão de cisalhamento, é a **força de pressão de superfície** $p = p(x, y, z)$ (um vetor com três componentes), que varia conforme a posição dentro do fluido. Podemos entender essa pressão de superfície como sendo a **Pressão exercida pela coluna de fluido ao redor do volume diferencial sendo estudado**.

A partir disso, temos a Lei de Newton que governa o problema diferencial do fluido (dado pela equação 1) e temos que as únicas forças que atua no nosso problema são a força de pressão $p(x, y, z)$ e a força peso do volume diferencial sob análise. Como estamos lidando com um problema de estática a somatória de todas as forças precisa ser zero, temos:

$$d\vec{F} = (-\nabla p + \rho\vec{g})dV \Rightarrow \frac{d\vec{F}}{dV} = -\nabla p + \rho\vec{g} \quad (3)$$

Onde temos então a equação final 3, que representa a força resultante por unidade de volume, que ao igualarmos a zero resulta em:

$$-\nabla p + \rho\vec{g} = 0 \quad (4)$$

Onde:

- $-\nabla p$: Força de pressão resultante por unidade de volume em um ponto. Representado pelo vetor gradiente com uma componente x uma y e uma z
- $\rho\vec{g}$: Força de campo (gravitacional) por unidade de volume em um ponto

1.2 Variação de Pressão em um Fluido Estático

A seção anterior foi de suma importância por introduzir a modelagem matemática básica para a estática de fluidos, com a equação 4. A partir disso, podemos dissecar tal equação e relacionarmos o que sabemos na prática (que a pressão aumenta com a profundidade) com a modelagem.

Para tal, precisamos primeiro considerar que estamos lidando com um **líquido incompressível**, de tal forma que $\rho = \text{const}$ e também que a gravidade é uma constante e aponta na direção z somente. A partir disso, precisamos analisar a equação 4 somente no eixo z , resultando em:

$$\begin{aligned} -\nabla p + \rho \vec{g} &= 0 \\ -\frac{\partial p}{\partial z} + \rho(-g_z) &= 0 \\ -\frac{dp}{dz} + \rho(-g_z) &= 0 \end{aligned} \tag{5}$$

$$\begin{aligned} dp &= +\rho g_z dz \\ \int_{p_0}^p dp &= \int_{z_0}^z \rho g_z dz \\ p - p_0 &= \rho g_z (z - z_0) \\ \Delta p &= \rho gh \end{aligned} \tag{6}$$

É importante ressaltar que, a equação 6 só é válida para:

- Fluido Estático
- A gravidade é a única força de campo
- O eixo z é vertical voltado para cima

Além disso, a equação 5 é importante para os casos em que o fluido não é incompressível (e por conseguinte a massa específica ρ pode variar com a pressão p). Para esses casos, devemos partir nossas contas dessa equação e fazer a integral para o devido $\rho = f(p)$, como é nos casos dos gases ideais. Importante ressaltar que o sinal da gravidade é negativo pois o eixo z é positivo para cima, **se o eixo z for positivo para baixo o sinal da gravidade na equação 5 seria positivo.**

1.3 Variação de Pressão Em um Gás Ideal

Como dito na parte anterior, há casos que lidaremos com fluidos compressíveis, sendo o mais notório deles os chamados **gases ideais**, onde:

$$p = \rho RT \therefore \rho = \frac{P}{RT} \quad (7)$$

Onde:

- T : Temperatura em Kelvin
- P : Pressão
- ρ : Massa Específica
- R : Constante universal dos gases (tabelada)

A partir da equação 7, e da equação 5, somos capazes de determinar uma expressão para a pressão em um gás ideal:

$$\begin{aligned} dp &= -\rho g dz \\ dp &= -\frac{p}{RT} g dz \\ \frac{1}{p} dp &= -\frac{1}{RT} g dz \\ \int_{p_0}^p \frac{1}{p} dp &= -\int_{z_0}^z \frac{1}{RT} g dz \\ \ln(p/p_0) &= -\frac{g}{RT} (z - z_0) \end{aligned} \quad (8)$$

1.4 One Pager - Estática de Fluidos

Uso	Equação	Descrição
Estática de Fluidos - Geral	$d\vec{F} = \vec{a} dm$	A segunda Lei de Newton em um formato infinitesimal, base para a análise de forças em Estática dos Fluidos.
Estática de Fluidos - Geral	$-\nabla p + \rho \vec{g} = 0$	A aplicação da segunda lei para um volume infinitesimal de um fluido estático apenas sob pressão e gravidade. OBS: ∇p representa o vetor gradiente nas três direções da pressão.
Variação de Pressão - Fluido Estático	$dp/dz = -\rho g_z \Rightarrow dp = -\rho g_z dz$	Aplicação específica da fórmula do volume apenas sob pressão, e gravidade somente no eixo y , base para problemas para calcular variação de pressão a depender de z (especialmente se ρ depender de z ou de p como no exemplo de gases ideais)
Variação de Pressão - Fluido Estático	$\Delta p = \rho gh$	Variação de pressão para fluidos incompressíveis, estáticos.
Variação de Pressão - Gás Ideal	$p = \rho RT \Rightarrow \rho = p/RT$	Fórmula que relaciona pressão e massa específica ρ dos gases ideais.
Variação de Pressão - Gás Ideal	$\ln(p/p_0) = -(g/RT)(z - z_0)$	Fórmula para variação da pressão em gases ideais, oriundo da integração da equação diferencial geral de variação pressão, em conjunto com a equação que expressa ρ em função de p para gases ideais acima.

2 Conceitos Fundamentais Dinâmica dos Fluidos

Agora que revemos os conceitos mais básicos de Estática dos Fluidos, iremos então explorar os principais conceitos de Dinâmica dos Fluidos, sendo o primeiro deles a ideia de campo de velocidade.

2.1 Campo de Velocidade

Algo muito importante de internalizarmos antes de falarmos sobre a velocidade de um líquido é que ele não é uma partícula, mas sim um conjunto "contínuo" de partículas, por isso chamamos um fluido de um "contínuo". Como resultado direto disso, temos que a velocidade de um certo volume de fluido pode depender não somente do tempo (como estamos mais acostumados com corpos rígidos), mas também pode depender da posição que está sendo analisada dentro de tal fluido, *i.e* a velocidade é um função da posição da partícula de análise como também do tempo:

$$\vec{V} = \vec{V}(x, y, z, t) = u\hat{i} + v\hat{j} + w\hat{k} \quad (9)$$

A partir disso, podemos agrupar os diferentes tipo de escoamento de fluidos em relação a:

- **Dimensões de Escoamento:**

↪ Escoamento Uni-Dimensional: O campo de velocidade, no que tange posição, muda em relação a somente uma coordenada.

↪ Escoamento Bi-Dimensional: O campo de velocidade, no que tange posição, muda em relação a duas coordenadas.

↪ Escoamento Tri-Dimensional: O campo de velocidade, no que tange posição, muda em relação a três coordenadas.

- **Variação no Tempo:**

↪ Regime Permanente: A velocidade nem a massa específica variam com o tempo.

↪ Regime Transiente: As propriedades do fluido podem variar em relação ao tempo.

2.2 Linhas de Caracterização

Para estudarmos o comportamento de um fluido, principalmente da sua interação com outros corpos e superfícies, nós usamos diferentes técnicas, chamadas de linhas de caracterização, sendo elas:

- **Linhas de Tempo**: Análise de Várias partículas adjacentes, em um determinado instante. Obtida via experimento.
- **Linhas de Trajetória**: Análise do caminho traçado por uma partícula em movimento. Obtida via experimento.
- **Linhas de Emissão**: Linha que traça todos os caminhos que partículas que passaram por um determinado ponto no espaço. Obtida via experimento.
- **Linhas de Corrente**: Linhas tangente à direção e velocidade de escoamento em cada ponto do campo. Obtida Matematicamente.

Sendo que é importante ressaltar que para regime permanente, todas coincidem.

A que mais vamos ver, por ser obtida matematicamente, é a linha de corrente, que é dada por:

$$\left. \frac{dy}{dx} \right|_{\text{linha de corrente}} = \frac{v}{u}, \quad \begin{cases} v = v_y \\ u = v_x \end{cases} \quad (10)$$

A partir disso somos capazes de isolar dx com tudo que depende de x , e dy com tudo que depende de y e integrar para acharmos uma equação que depende de x, y para a linha de corrente.

2.3 Tensão de Cisalhamento

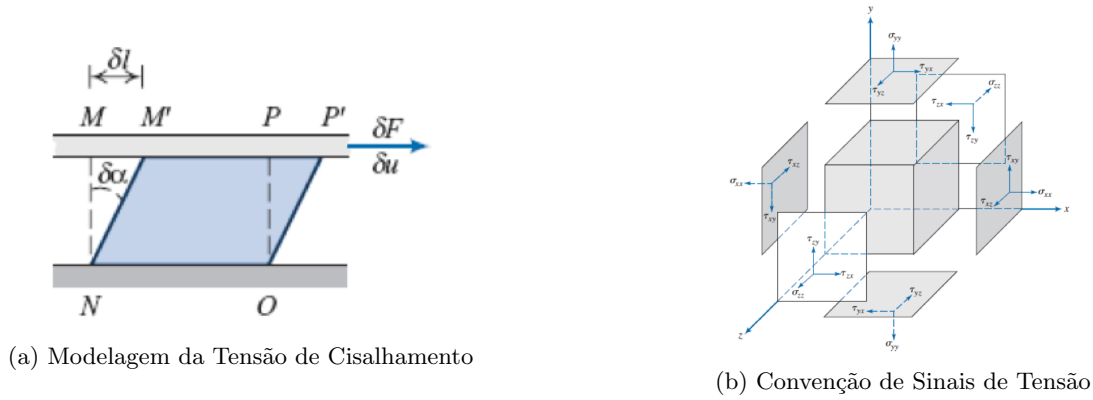


Figure 1: Modelos para Tensão

A tensão de cisalhamento é uma tensão oriunda da movimentação relativa entre as faces externas de um fluido. Tal tensão é de suma importância pois, juntamente com a **condição de não escorregamento** (*i.e* que o fluido, no ponto de contato com uma superfície, tem a mesma velocidade que tal superfície) nos possibilita calcular a força de resistência que o fluido faz ao deslocamento. Em primeiro lugar, a tensão de cisalhamento é dada por:

$$\tau_{yx} = \mu \frac{d}{dy} u, \begin{cases} \mu = \text{Viscosidade} \\ u = \text{Velocidade no eixo } x \end{cases} \quad (11)$$

A partir disso, sabemos que força nada mais é que:

$$F_{reaction} = \tau_{yx} \cdot A, \quad A = \text{Contact Area} \quad (12)$$

Algo importante de elaborarmos é a convenção de sinais para a tensão (e por conseguinte a força de reação). As tensões em um fluido seguem a convenção da imagem 1b. Isso implica, se estamos observando a tensão da superfície superior do fluido, e ela é positiva, temos que ela aponta para a direita, já se estamos observando a tensão da superfície inferior do fluido e é positiva, temos que ela aponta para a esquerda.

2.4 One Pager - Conceitos Fundamentais

Principais Fórmulas

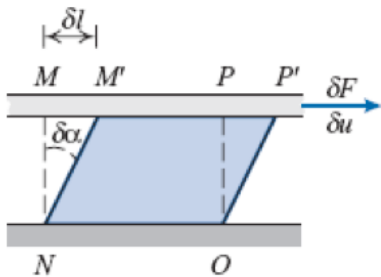
Nome	Equação	Descrição
Linha de Corrente	$\frac{dy}{dx}\bigg _{\text{linha de corrente}} = \frac{v}{u}, \begin{cases} v = v_y \\ u = v_x \end{cases}$	Cálculo da linha de corrente, que é tangente a velocidade em um ponto x, y . Podemos separar o que tem x e dx em um lado, y e dy do outro e integrar para achar uma função que depende de xy
Tensão de Cisalhamento	$\tau_{yx} = \mu \frac{d}{dy} u, \begin{cases} \mu = \text{Viscosidade} \\ u = \text{Velocidade no eixo } x \end{cases}$	Cálculo da Tensão de cisalhamento, o resultado segue a convenção de sinais da imagem 1b.
Força de Resistência	$F_{\text{reaction}} = \tau_{yx} \cdot A, \quad A = \text{Contact Area}$	Cálculo da força de resistência ao movimento relativo entre duas placas com líquido no meio.

Principais Conceitos

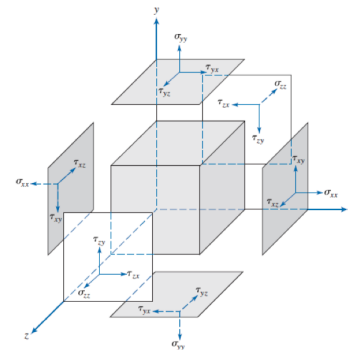
- **Dimensões de Escoamento:**
 - ↪ Uni-Dimensional: A velocidade muda em relação a somente uma coordenada.
 - ↪ Bi-Dimensional: A velocidade muda em relação a duas coordenadas.
 - ↪ Tri-Dimensional: A velocidade muda em relação a três coordenadas.
- **Variação no Tempo:**
 - ↪ Regime Permanente: A velocidade nem a massa específica variam com o tempo.
 - ↪ Regime Transiente: As propriedades do fluido podem variar em relação ao tempo.
- **Princípio de Não Escorregamento**: O fluido, no ponto de contato com uma superfície, tem a mesma velocidade que tal superfície

$$\vec{V} = \vec{V}(x, y, z, t) = u\hat{i} + v\hat{j} + w\hat{k}$$

Convenções



(a) Modelagem da Tensão de Cisalhamento



(b) Convenção de Sinais de Tensão

3 Equações Básicas na Forma Integral - Volume de Controle

Agora vamos começar a ver mais detalhadamente as várias modelagens que podem nos auxiliar na análise de sistemas de Mecânica dos Fluidos.

3.1 Modelagem Geral: Sistema → Volume de Controle

De forma geral, a análise que mais somos familiares (desde a termo dinâmica com suas leis, etc) é a análise de Sistemas. Quando estamos lidando com fluidos, entretanto, modelarmos o problema como um problema de análise de sistema se torna extremamente complexo, pois é muito difícil seguir a massa em todos os instantes (o que seria necessário já que um sistema não há troca de massa). Por causa disso, iremos formular uma relação geral entre as relações que são verdade para um sistema (como leis da termodinâmica, conservação de quantidade de movimento, etc) e a aplicação em um volume de controle.

Para uma propriedade extensiva¹ qualquer N do sistema temos que sua variação temporal, relacionada a variação no volume de controle é dada por:

$$\underbrace{\left(\frac{dN}{dt}\right)_{\text{Sistema}}}_{\text{Parte I}} = \underbrace{\frac{\partial}{\partial t} \int_{VC} n \rho dV}_{\text{Parte II}} + \underbrace{\int_{SC} n \rho \vec{V} \cdot d\vec{A}}_{\text{Parte III}} \quad (13)$$

Onde:

- Parte I - Representa a Taxa de variação da propriedade extensiva N do sistema.
- Parte II - Representa a taxa de variação da propriedade N dentro do volume de controle, com o termo $\int_{VC} n \rho dV$ representando o valor instantâneo de N .
- Parte III - Taxa na qual a propriedade N está saindo pelas superfícies do volume de controle.

Podemos observar que para uma propriedade N extensiva nós usamos para os calculos a propriedade intensiva n . Tal relação para cada propriedade de interesse para as nossas análises estão descritas na tabela abaixo:

Análise	Propriedade Extensiva	Propriedade intensiva
Conservação de Massa	$M \rightarrow$ Massa	$\rho \rightarrow$ Massa Específica
Quantidade de Movimento Linear	$H \rightarrow$ Quantidade de Movimento Linear	$\vec{V} \rightarrow$ Velocidade
Quantidade de Movimento Angular	$G \rightarrow$ Quantidade de Movimento Angular	$\vec{r} \times \vec{V} \rightarrow$ Braço vezes Velocidade

Table 1: Relação Geral entre Propriedade Extensiva e Propriedade Intensiva

Agora veremos as diferentes análises que podemos fazer.

3.2 Conservação de Massa

Para a conservação de massa temos:

$$\frac{dM}{dt} = \frac{\partial}{\partial t} \int_{VC} \rho dV + \int_{SC} \rho \vec{V} \cdot d\vec{A} \quad (14)$$

Podemos, ainda, simplificar drasticamente para casos de **Regime Permanente**, **Perfil Linear de Velocidade** e **número constante de superfícies de controle**. Resultando em:

$$Q = \sum V A = 0 \quad (15)$$

Introduzimos ainda o conceito de **Vazão de Volume** Q , dado por m^3/s , que é **positivo** se o fluidos estiver saindo e **negativo** se estiver entrando.

¹Extensiva no sentido de depender da quantidade de Matéria sob análise. Em contra partida Intensiva não depende da massa.

3.3 Conservação de Quantidade de Movimento Linear

3.3.1 Caso sem Velocidade Relativa

Para a conservação de quantidade de movimento linear temos:

$$\frac{d\vec{H}}{dt} = \vec{F} = \vec{F}_S + \vec{F}_B = \frac{\partial}{\partial t} \int_{VC} \vec{V} \rho dV + \int_{SC} \vec{V} \rho \vec{V} \cdot d\vec{A} \quad (16)$$

Que pode ser decomposto para as 3 componentes da velocidade V , resultando em 3 equações que não são vetoriais (o que facilita bastante):

$$\begin{aligned} F_x &= \vec{F}_{S_x} + \vec{F}_{B_x} = \frac{\partial}{\partial t} \int_{VC} \bar{u} \rho dV + \int_{SC} \bar{u} \rho \vec{V} \cdot d\vec{A} \\ F_y &= \vec{F}_{S_y} + \vec{F}_{B_y} = \frac{\partial}{\partial t} \int_{VC} \bar{v} \rho dV + \int_{SC} \bar{v} \rho \vec{V} \cdot d\vec{A} \\ F_z &= \vec{F}_{S_z} + \vec{F}_{B_z} = \frac{\partial}{\partial t} \int_{VC} \bar{w} \rho dV + \int_{SC} \bar{w} \rho \vec{V} \cdot d\vec{A} \end{aligned} \quad (17)$$

Onde as **forças representadas são as forças externas ao volume de controle para manter o cenário cinemático** (de velocidade constante nula), como por exemplo $F_{s_x} = F_{at}$.

Importante, também, ressaltar que cada superfície de controle do nosso volume de controle terá um \vec{V} e um $\{u, v, w\}$ específico, e que é bom usar um subscrito para identificar (*e.g.* u_1 e u_2).

Além disso, é de suma importância perceber que as velocidades de entrada **u, v, w possuem um sinal (a depender dos eixos das coordenadas)** e que a expressão $\vec{V} dA$ **também possui sinal, sendo ele positivo se o fluido estiver saindo e negativo se estiver entrando**.

3.3.2 Caso com Velocidade Relativa Constante

Para o caso em que a volume de controle possui velocidade constante, ocorre a situação em que há uma velocidade relativa entre o jato de água e a superfície de controle, que precisa ser levada em consideração.

Para exemplificar a situação acima, vamos imaginar que um bocal esteja lançando um jato de água com uma velocidade no eixo x de $V_j = V\hat{i}$. Além disso, um cano em formato de \supset está andando a uma velocidade **Constante** U (também no eixo x). Como estamos lidando com velocidades constantes não há acelerações e, para tal, há a presença de uma força de resistência R_x que impede a aceleração que seria oriunda da força necessária para virar o jato de água.

Ao analisarmos o volume de controle, há duas superfícies de controle, 1 e 2. Que possuem, por conservação de massa, as mesmas velocidades de fluido entrando, sendo esse $|V_1| = |V_2| = V - U$. A partir disso somos capazes de aplicar a equação 17 para o eixo x . Dando ênfase nos sinais tanto das velocidades u, v, w de entrada das superfícies de controle quanto no sinal oriundo do fato de estar entrando ou saindo do VC, dado pela parcela $V A$ ou $V dA$.

3.3.3 Caso com Aceleração Constante

Já para o caso onde há aceleração constante, temos que parte da quantidade de movimento é utilizada para acelerar o anteparo, e outra para "vencer" as forças externas de reação F_S e F_B , resultando na seguinte equação:

$$\vec{F}_S + \vec{F}_B - \int_{VC} \bar{a} \rho dV = \frac{\partial}{\partial t} \int_{VC} \vec{V} \rho dV + \int_{SC} \vec{V} \rho \vec{V} \cdot d\vec{A} \quad (18)$$

E, que de forma análoga a como foi feito para o caso sem aceleração, pode ser expandido para suas 3 componentes.

3.4 Conservação de Energia

A partir da conservação de energia, e da segunda lei da termo-dinâmica, obtemos a seguinte equação:

$$\dot{Q} - \dot{W}_s - \dot{W}_{\text{cisalhamento}} - \dot{W}_{\text{others}} = \frac{\partial}{\partial t} \int_{VC} e \rho dV + \int_{SC} \left(u + \rho^{-1} p + \frac{V^2}{2} + gz \right) \rho \vec{V} \cdot d\vec{A} \quad (19)$$

Onde e representa a Energia Específica do fluido.

Além disso, podemos também descrever tal equação exaltando a entalpia h :

$$h = u + P\rho^{-1}$$

$$\Delta h = c_p \Delta T$$

3.5 Equação de Bernoulli

Outra equação que é muito útil é a *Equação de Bernoulli*, que nos possibilita calcular certos parâmetros nos casos onde há uma diferença considerável de altura, pressão, etc. Sendo válida somente para os casos de:

- Escoamento Permanente
- Ausência de Atrito
- Escoamento ao longo de uma linha de corrente (normalmente sempre é para nossos exercícios)
- Escoamento incompressível
- Isotérmico

$$\frac{P_1}{\rho_1} + \frac{V_1^2}{2} + gz_1 = \frac{P_2}{\rho_2} + \frac{V_2^2}{2} + gz_2 \quad (20)$$