

# EM461 - Mecânica dos Fluidos I

Pedro Henrique Limeira da Cruz

April 18, 2023



# UNICAMP

## Contents

<b>1</b>	<b>Estática dos Fluidos</b>	<b>3</b>
1.1	Equação Base - Estática de Fluidos . . . . .	3
1.2	Variação de Pressão em um Fluido Estático . . . . .	4
1.3	Variação de Pressão Em um Gás Ideal . . . . .	5
1.4	One Pager - Estática de Fluidos . . . . .	6
<b>2</b>	<b>Conceitos Fundamentais Dinâmica dos Fluidos</b>	<b>7</b>
2.1	Campo de Velocidade . . . . .	7
2.2	Linhas de Caracterização . . . . .	7
2.3	Tensão de Cisalhamento . . . . .	8
2.4	One Pager - Conceitos Fundamentais . . . . .	9

# 1 Estática dos Fluidos

Antes de começarmos nossos estudos sobre a mecânica dos fluidos em movimento, iremos revisar (ou para alguns introduzir) a estática de fluidos.

## 1.1 Equação Base - Estática de Fluidos

A equação mais básica da estática de fluidos é aquela que modela o campo de pressão em um fluido estático. A partir das experiências do dia-a-dia podemos verificar o principal aspecto sobre a pressão em uma coluna de fluido estático:

### A pressão Aumenta com a Profundidade

A partir disso, e com a intenção de modelarmos matematicamente o sistema, fazemos a análise mais básica de mecânica estática, a lei de Newton. Para esse caso, entretanto, como estamos falando de um fluido e não de um corpo concentrado, iremos aplicar a lei de newton em um cenário diferencial, para lidarmos com pequenas massas (ou pequenos volumes) do fluido, como mostra a equação 1:

$$d\vec{F}_{resultante} = \vec{a}dm \quad (1)$$

A partir disso, como temos nossa lei de newton básica (mas agora aplicada para o problemas diferencial de fluidos), podemos prosseguir e identificar as forças envolvidas.

A primeira força de campo que iremos ver e que atua nos problemas de estática de fluidos é a força oriunda da *gravidade*, quando analisamos um pequeno volume diferencial do fluido, dada por:

$$d\vec{F}_B = \vec{g}\rho dV \quad (2)$$

Onde:

- $\rho$ : Massa específica. Para problemas que estaremos analisando é constante em função tanto do tempo quanto posição.
- $V$ : Volume do elemento, dada em coordenadas cartesianas tal que  $dV = dx \, dy \, dz$
- $g$ : Aceleração da gravidade.

A segunda força que iremos analisar agora é a **única força de superfície** presente, tendo em vista que estamos abordado a estática de fluidos e, por conseguinte, não há a presença de tensão de cisalhamento, é a **força de pressão de superfície**  $p = p(x, y, z)$  (um vetor com três componentes), que varia conforme a posição dentro do fluido. Podemos entender essa pressão de superfície como sendo a **Pressão exercida pela coluna de fluido ao redor do volume diferencial sendo estudado**.

A partir disso, temos a Lei de Newton que governa o problema diferencial do fluido (dado pela equação 1) e temos que as únicas forças que atua no nosso problema são a força de pressão  $p(x, y, z)$  e a força peso do volume diferencial sob análise. Como estamos lidando com um problema de estática a somatória de todas as forças precisa ser zero, temos:

$$d\vec{F} = (-\nabla p + \rho\vec{g})dV \Rightarrow \frac{d\vec{F}}{dV} = -\nabla p + \rho\vec{g} \quad (3)$$

Onde temos então a equação final 3, que representa a força resultante por unidade de volume, que ao igualarmos a zero resulta em:

$$-\nabla p + \rho\vec{g} = 0 \quad (4)$$

Onde:

- $-\nabla p$ : Força de pressão resultante por unidade de volume em um ponto. Representado pelo vetor gradiente com uma componente  $x$  uma  $y$  e uma  $z$
- $\rho\vec{g}$ : Força de campo (gravitacional) por unidade de volume em um ponto

## 1.2 Variação de Pressão em um Fluido Estático

A seção anterior foi de suma importância por introduzir a modelagem matemática básica para a estática de fluidos, com a equação 4. A partir disso, podemos dissecar tal equação e relacionarmos o que sabemos na prática (que a pressão aumenta com a profundidade) com a modelagem.

Para tal, precisamos primeiro considerar que estamos lidando com um **líquido incompressível**, de tal forma que  $\rho = \text{const}$  e também que a gravidade é uma constante e aponta na direção  $z$  somente. A partir disso, precisamos analisar a equação 4 somente no eixo  $z$ , resultando em:

$$\begin{aligned} -\nabla p + \rho \vec{g} &= 0 \\ -\frac{\partial p}{\partial z} + \rho(-g_z) &= 0 \\ -\frac{dp}{dz} + \rho(-g_z) &= 0 \end{aligned} \tag{5}$$

$$\begin{aligned} dp &= +\rho g_z dz \\ \int_{p_0}^p dp &= \int_{z_0}^z \rho g_z dz \\ p - p_0 &= \rho g_z (z - z_0) \\ \Delta p &= \rho gh \end{aligned} \tag{6}$$

É importante ressaltar que, a equação 6 só é válida para:

- Fluido Estático
- A gravidade é a única força de campo
- O eixo  $z$  é vertical voltado para cima

Além disso, a equação 5 é importante para os casos em que o fluido não é incompressível (e por conseguinte a massa específica  $\rho$  pode variar com a pressão  $p$ ). Para esses casos, devemos partir nossas contas dessa equação e fazer a integral para o devido  $\rho = f(p)$ , como é nos casos dos gases ideais. Importante ressaltar que o sinal da gravidade é negativo pois o eixo  $z$  é positivo para cima, **se o eixo  $z$  for positivo para baixo o sinal da gravidade na equação 5 seria positivo.**

### 1.3 Variação de Pressão Em um Gás Ideal

Como dito na parte anterior, há casos que lidaremos com fluidos compressíveis, sendo o mais notório deles os chamados **gases ideais**, onde:

$$p = \rho RT \therefore \rho = \frac{P}{RT} \quad (7)$$

Onde:

- $T$ : Temperatura em Kelvin
- $P$ : Pressão
- $\rho$ : Massa Específica
- $R$ : Constante universal dos gases (tabelada)

A partir da equação 7, e da equação 5, somos capazes de determinar uma expressão para a pressão em um gás ideal:

$$\begin{aligned} dp &= -\rho g dz \\ dp &= -\frac{p}{RT} g dz \\ \frac{1}{p} dp &= -\frac{1}{RT} g dz \\ \int_{p_0}^p \frac{1}{p} dp &= -\int_{z_0}^z \frac{1}{RT} g dz \\ \ln(p/p_0) &= -\frac{g}{RT} (z - z_0) \end{aligned} \quad (8)$$

## 1.4 One Pager - Estática de Fluidos

Uso	Equação	Descrição
Estática de Fluidos - Geral	$d\vec{F} = \vec{a} dm$	A segunda Lei de Newton em um formato infinitesimal, base para a análise de forças em Estática dos Fluidos.
Estática de Fluidos - Geral	$-\nabla p + \rho \vec{g} = 0$	A aplicação da segunda lei para um volume infinitesimal de um fluido estático apenas sob pressão e gravidade. OBS: $\nabla p$ representa o vetor gradiente nas três direções da pressão.
Variação de Pressão - Fluido Estático	$dp/dz = -\rho g_z \Rightarrow dp = -\rho g_z dz$	Aplicação específica da fórmula do volume apenas sob pressão, e gravidade somente no eixo $y$ , base para problemas para calcular variação de pressão a depender de $z$ (especialmente se $\rho$ depender de $z$ ou de $p$ como no exemplo de gases ideais)
Variação de Pressão - Fluido Estático	$\Delta p = \rho gh$	Variação de pressão para fluidos incompressíveis, estáticos.
Variação de Pressão - Gás Ideal	$p = \rho RT \Rightarrow \rho = p/RT$	Fórmula que relaciona pressão e massa específica $\rho$ dos gases ideais.
Variação de Pressão - Gás Ideal	$\ln(p/p_0) = -(g/RT)(z - z_0)$	Fórmula para variação da pressão em gases ideais, oriundo da integração da equação diferencial geral de variação pressão, em conjunto com a equação que expressa $\rho$ em função de $p$ para gases ideais acima.

## 2 Conceitos Fundamentais Dinâmica dos Fluidos

Agora que revemos os conceitos mais básicos de Estática dos Fluidos, iremos então explorar os principais conceitos de Dinâmica dos Fluidos, sendo o primeiro deles a ideia de campo de velocidade.

### 2.1 Campo de Velocidade

Algo muito importante de internalizarmos antes de falarmos sobre a velocidade de um líquido é que ele não é uma partícula, mas sim um conjunto "contínuo" de partículas, por isso chamamos um fluido de um "contínuo". Como resultado direto disso, temos que a velocidade de um certo volume de fluido pode depender não somente do tempo (como estamos mais acostumados com corpos rígidos), mas também pode depender da posição que está sendo analisada dentro de tal fluido, *i.e* a velocidade é um função da posição da partícula de análise como também do tempo:

$$\vec{V} = \vec{V}(x, y, z, t) = u\hat{i} + v\hat{j} + w\hat{k} \quad (9)$$

A partir disso, podemos agrupar os diferentes tipo de escoamento de fluidos em relação a:

- **Dimensões de Escoamento:**

↪ Escoamento Uni-Dimensional: O campo de velocidade, no que tange posição, muda em relação a somente uma coordenada.

↪ Escoamento Bi-Dimensional: O campo de velocidade, no que tange posição, muda em relação a duas coordenadas.

↪ Escoamento Tri-Dimensional: O campo de velocidade, no que tange posição, muda em relação a três coordenadas.

- **Variação no Tempo:**

↪ Regime Permanente: A velocidade nem a massa específica variam com o tempo.

↪ Regime Transiente: As propriedades do fluido podem variar em relação ao tempo.

### 2.2 Linhas de Caracterização

Para estudarmos o comportamento de um fluido, principalmente da sua interação com outros corpos e superfícies, nós usamos diferentes técnicas, chamadas de linhas de caracterização, sendo elas:

- **Linhas de Tempo**: Análise de Várias partículas adjacentes, em um determinado instante. Obtida via experimento.
- **Linhas de Trajetória**: Análise do caminho traçado por uma partícula em movimento. Obtida via experimento.
- **Linhas de Emissão**: Linha que traça todos os caminhos que partículas que passaram por um determinado ponto no espaço. Obtida via experimento.
- **Linhas de Corrente**: Linhas tangente à direção e velocidade de escoamento em cada ponto do campo. Obtida Matematicamente.

Sendo que é importante ressaltar que para regime permanente, todas coincidem.

A que mais vamos ver, por ser obtida matematicamente, é a linha de corrente, que é dada por:

$$\left. \frac{dy}{dx} \right|_{\text{linha de corrente}} = \frac{v}{u}, \quad \begin{cases} v = v_y \\ u = v_x \end{cases} \quad (10)$$

A partir disso somos capazes de isolar  $dx$  com tudo que depende de  $x$ , e  $dy$  com tudo que depende de  $y$  e integrar para acharmos uma equação que depende de  $x, y$  para a linha de corrente.

## 2.3 Tensão de Cisalhamento

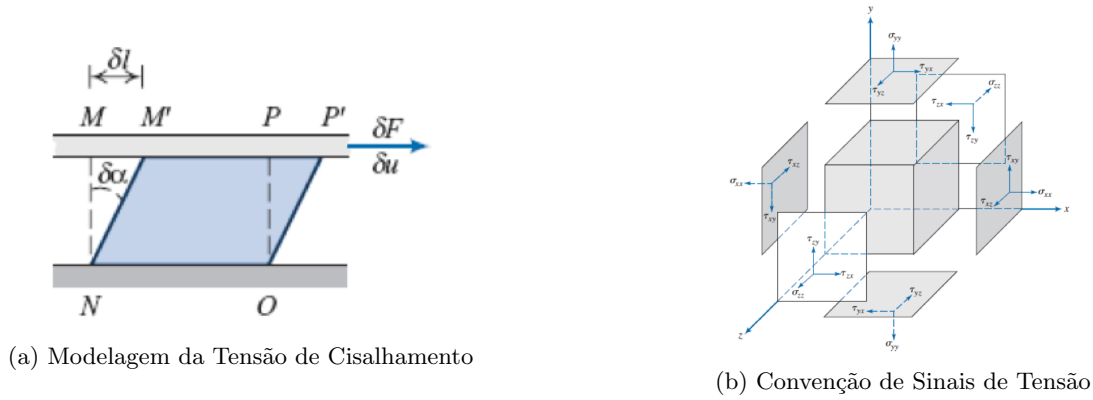


Figure 1: Modelos para Tensão

A tensão de cisalhamento é uma tensão oriunda da movimentação relativa entre as faces externas de um fluido. Tal tensão é de suma importância pois, juntamente com a **condição de não escorregamento** (*i.e* que o fluido, no ponto de contato com uma superfície, tem a mesma velocidade que tal superfície) nos possibilita calcular a força de resistência que o fluido faz ao deslocamento. Em primeiro lugar, a tensão de cisalhamento é dada por:

$$\tau_{yx} = \mu \frac{d}{dy} u, \begin{cases} \mu = \text{Viscosidade} \\ u = \text{Velocidade no eixo } x \end{cases} \quad (11)$$

A partir disso, sabemos que força nada mais é que:

$$F_{reaction} = \tau_{yx} \cdot A, \quad A = \text{Contact Area} \quad (12)$$

Algo importante de elaborarmos é a convenção de sinais para a tensão (e por conseguinte a força de reação). As tensões em um fluido seguem a convenção da imagem 1b. Isso implica, se estamos observando a tensão da superfície superior do fluido, e ela é positiva, temos que ela aponta para a direita, já se estamos observando a tensão da superfície inferior do fluido e é positiva, temos que ela aponta para a esquerda.



## 2.4 One Pager - Conceitos Fundamentais

### Principais Fórmulas

Nome	Equação	Descrição
Linha de Corrente	$\frac{dy}{dx})_{linha\ de\ corrente} = \frac{v}{u}, \begin{cases} v = v_y \\ u = v_x \end{cases}$	Calculo da linha de corrente, que é tangente a velocidade em um ponto $x, y$ . Podemos separar o que tem $x$ e $dx$ em um lado, $y$ e $dy$ do outro e integrar para achar uma função que depende de $xy$
Tensão de Cisalhamento	$\tau_{yx} = \mu \frac{d}{dy} u, \begin{cases} \mu = Viscosidade \\ u = Velocidade\ no\ eixo\ x \end{cases}$	Calculo da Tensão de cisalhamento, o resultado segue a convenção de sinais da imagem 1b.
Força de Resistência	$F_{reaction} = \tau_{yx} \cdot A, \quad A = Contact\ Area$	Calculo da força de resistência ao movimento relativo entre duas placas com líquido no meio.

### Principais Conceitos

- **Dimensões de Escoamento:**
  - ↪ Uni-Dimensional: A velocidade muda em relação a somente uma coordenada.
  - ↪ Bi-Dimensional: A velocidade muda em relação a duas coordenadas.
  - ↪ Tri-Dimensional: A velocidade muda em relação a três coordenadas.
- **Variação no Tempo:**
  - ↪ Regime Permanente: A velocidade nem a massa específica variam com o tempo.
  - ↪ Regime Transiente: As propriedades do fluido podem variar em relação ao tempo.
- **Princípio de Não Escorregamento:**O fluido, no ponto de contato com uma superfície, tem a mesma velocidade que tal superfície

$$\vec{V} = \vec{V}(x, y, z, t) = u\hat{i} + v\hat{j} + w\hat{k}$$

### Convenções

