

# Trabalho Final - ES101

Pedro Henrique Limeira da Cruz

March 23, 2023



# UNICAMP

Contents

**1 Introdução e Definições 3**

1.1 Modelos de Suporte e Vínculos . . . . . 3

1.2 Equilíbrio Estático . . . . . 3

1.3 Carregamentos Combinados . . . . . 5

1.4 Equilíbrio Interno de Corpos . . . . . 6

1.4.1 Convenção de Sinais . . . . . 6

**2 Método das Equações Diferenciais de Equilíbrio 7**

2.1 Introdução e Equações Diferenciais . . . . . 7

2.2 Condições de Contorno . . . . . 7

# 1 Introdução e Definições

A matéria de resistência dos materiais que iremos estudar nada mais é do que a análise de mecânica estática, só que, dessa vez, para corpos que se deformam. Levando isso em consideração, teremos primeiro que revisar alguns conceitos importantes de estática, sendo eles, de modo geral:

- Modelos de Suporte e Vínculos
- Equilíbrio Estático : cargas simples, combinadas, carregamentos distribuídos, ...

## 1.1 Modelos de Suporte e Vínculos

Como o nosso objetivo é modelar o sistema para aplicarmos os equacionamentos de estática (e mais para frente outros mais específicos de ResMat) precisamos, primeiro, ser capazes de identificar as forças que atuam sobre o corpo em análise. Por isso remos revisar as diferentes forças de reação que cada tipo de suporte gera em uma viga:

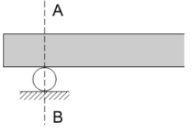
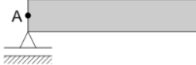
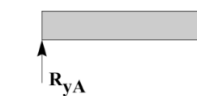
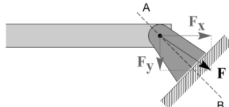

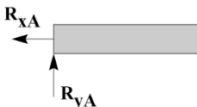


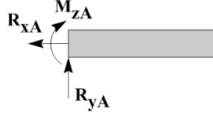
Nome	Exemplo	Representação	D.C.L	Descrição	Comentário
Roleta				<ul style="list-style-type: none"> <li>•Resistente a forças em somente uma linha de direção</li> <li>•Reação de apoio: 1 incógnita</li> </ul>	Importante observar que a representação possui DUAS linhas horizontais abaixo do triângulo.
Pino				<ul style="list-style-type: none"> <li>•Resistente a forças em duas linhas de ação</li> <li>•Reação de apoio: 2 incógnitas</li> </ul>	Importante observar que a representação possui somente UMA linha horizontal abaixo do triângulo.
Engaste				<ul style="list-style-type: none"> <li>•Resiste a Forças e Momentos</li> </ul>	Até o momento é o único vínculo que resiste a momento.

Table 1: Principais Suportes e Vínculos - 2D

Tendo em vista que há diferentes suportes e vínculos, é importante entender o processo de escolha de vínculos durante análise de uma força/momento. Para tal, podemos nos perguntar:

1. **O apoio/vínculo impede algum movimento que será resultante da força sob análise?** Se a resposta for *não*, podemos simplesmente desconsiderar o vínculo na nossa modelagem. Se a resposta for *sim*, ele impede um movimento, podemos prosseguir para outras perguntas.
2. **O apoio/vínculo impede que a peça "gire" como resultado da força?** Se a resposta for *sim* isso significa que o suporte restringe tanto forças quanto *momentos*. Como temos somente um vínculo (o engaste) que tem essa característica, podemos usa-lo durante nossa modelagem. Se a resposta for *não*, ficamos entre um rolete e um pino.
3. **O apoio/vínculo impede a movimentação, que seria resultante da força, em mais de um eixo?** Se *sim*, temos um pino. Caso contrário teremos um rolete.

## 1.2 Equilíbrio Estático

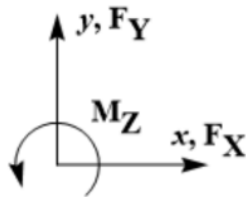
Como dito anteriormente, o ponto de partida de ResMat é a estática mecânica. Agora que já definimos os principais modelos de forças de reação, podemos descrever o equilíbrio estático (assim como foi feito durante o estudo de Estática).

O principal conceito que rege o equilíbrio estático é que o sistema não possui aceleração, logo há a conservação tanto da quantidade de movimento linear quanto angular, resultando nas respectivas equações:

$$\sum \vec{F} = 0 \Rightarrow \begin{cases} \sum F_x = 0 \\ \sum F_y = 0 \\ \sum F_z = 0 \end{cases}$$

$$\sum \vec{M} = 0 \Rightarrow \begin{cases} \sum M_x = 0 \\ \sum M_y = 0 \\ \sum M_z = 0 \end{cases}$$

Para problemas de sistemas planos, as equações se resumem à:



$$\begin{aligned} \sum F_x &= 0 \\ \sum F_y &= 0 \\ \sum M_z &= 0 \end{aligned}$$

A depender da topologia, no que tange equilíbrio estático, um sistema pode ser definido como:

- **Sistema Isostático:** As vinculações são suficientes para satisfazer o equilíbrio estático, número de incógnitas igual ao numero de equações.
- **Sistema Hiperestático:** As vinculações são em excesso para satisfazer o equilíbrio estático, número de incógnitas maior ao numero de equações.
- **Sistema Hipostático:** As vinculações não são suficientes para satisfazer o equilíbrio estático, número de incógnitas menor ao numero de equações.

1.3 Carregamentos Combinados

Já vimos anteriormente no caso de cargas combinadas que, a depender das forças que o corpo sofre (e resiste) nós iremos representar os suportes e vínculos de uma forma específica. Agora, nós iremos expandir esse assunto e descrever de forma detalhada os diferentes modelos que nós usamos para os corpos que sofrem essas forças e reações e descrever suas prioridades.

A parte mais fundamental para entender o porque há diferentes modelos para descrever os corpos que **são esbeltos** (*i.e* possuem comprimento muito maior que sua largura e altura) é:

Problemas de carregamento transversal, longitudinal e torsional são independentes

Isso nos diz que podem haver problemas de carregamentos combinados que sejam necessários 3 modelos distintos para serem modelados, cada um com um modelo específico para o corpo, como podemos ver abaixo:

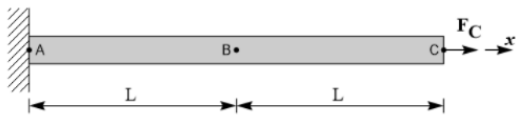
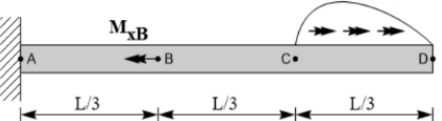
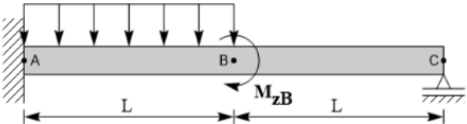
Nome	Exemplo	Descrição	Equação
Barra		Corpos sujeitos <b>somente a car- gas logitudinais/axiais</b>	$\sum F_x = 0$
Eixo		Corpos sujeitos <b>somente a car- gas torcionais</b>	$\sum M_x = 0$
Viga		Corpos sujeitos <b>somente a car- gas transversais e/ou momen- tos fletores</b>	$\sum M_z, F_y = 0$

Table 2: Tabela de Modelos para Corpos Esbeltos

## 1.4 Equilíbrio Interno de Corpos

Para começarmos a entrar no assunto de deformação dos corpos, é primeiro necessário entender que quando há o **equilíbrio estático de um corpo**, há também um **equilíbrio entre quaisquer duas partes internas** do corpo, que **sofrem esforços internos**, sendo eles:

- Esforços Axial  $N_x(x)$
- Esforço Cortante  $V_y(x)$
- Momento Fletor  $M_z(x)$
- Momento Torsor  $M_x(x)$

### 1.4.1 Convenção de Sinais

Quando estivermos lidando com a análise de esforços internos e deformações de corpos, nós iremos seguir a seguinte convenção de sinais:

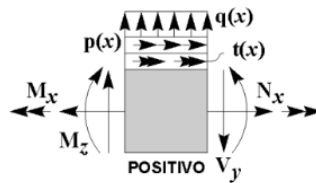


Figure 1: Convenção de Sinais para Esforços Internos

A partir dessa convenção e da análise dos momentos fletores  $M_z$  e esforços cortantes  $V_x$  conhecidos nós somos capazes de analisar a deformação de um corpo esbelto (*e.g* uma viga), como mostrado abaixo:

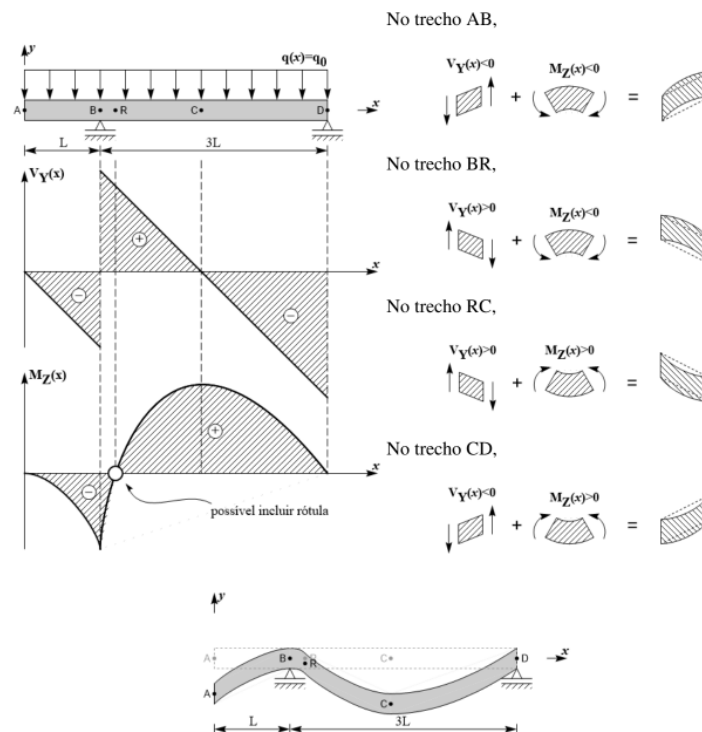


Figure 2: Exemplo de Análise de Forças Internas e Deformação

## 2 Método das Equações Diferenciais de Equilíbrio

### 2.1 Introdução e Equações Diferenciais

Até o momento nós vimos que se tivermos o esforço cortante e o momento fletor para um corpo nós somos capazes de deduzir a deformação. Agora, entretanto, iremos ver como que nós calculamos esses valores para um corpo sofrendo carregamento. O nome do método para tal é o **Método das Equações Diferenciais**, onde nós relacionamos cada tipo de load externo (para barras, vigas e eixos) com as respectivas reações internas, em um cenário diferencial (para uma parte infinitesimal do corpo de cada vez, para todo o corpo), como mostrado na tabela abaixo:

Cenário	Equação	Descrição
Barras	$\frac{d}{dx} N_x(x) = -p(x)$	Onde $-p(x)$ é o carregamento longitudinal sendo sofrido
Eixos	$\frac{d}{dx} M_x(x) = -t(x)$	Onde $-t(x)$ é o momento axial sofrido
Vigas: Cortante	$\frac{d}{dx} V_x(x) = +q(x)$	Onde $+q(x)$ é o carregamento transversal sofrido
Vigas: Momento Fletor	$\frac{d^2}{dx^2} M_z = \frac{d}{dx} V_y(x) = +q(x)$	Onde $+q(x)$ é o carregamento transversal sofrido

Table 3: EDOs para principais modelos de corpos esbeltos

Relembrando, onde:

- Esforços Axial  $N_x(x)$
- Esforço Cortante  $V_y(x)$
- Momento Fletor  $M_z(x)$
- Momento Torsor  $M_x(x)$

### 2.2 Condições de Contorno

Se lembrarmos bem de calculo 3 e de equações diferenciais, todas as EDOs de grau  $n$  precisam de  $n$  pontos conhecidos para possam ser resolvidos, onde eles podem ser Pontos de Contorno ou Condições Iniciais. Para o nosso caso, iremos estudar problemas com condições de contorno.

Para ser considerado uma condição de contorno é necessário:

1. Estar Definida no Contorno do modelo
2. Ser Conhecida a Priori
3. Ser Relevante para o Problema

Indo além, para os nosso problemas, 99% das vezes as condições de contorno estarão nas extremidades do corpo sendo estudado (*e.g* em uma ponta de uma viga). Iremos abaixo **descrever as condições de contorno para os principais vínculos/apoios QUANDO PRESENTES NAS EXTREMIDADES DO CORPO**.