Trabalho Final - ES101

Pedro Henrique Limeira da Cruz

June 22, 2023

1 Revisão de Dinâmica

1.1 Cinética Plana de Corpos Rígidos

1.1.1 Introdução

A cinética de corpos rígidos trata das relações entre as forças externas sobre um corpo e seu movimento resultante (que é composto pela rotação e translação). Para a abordagem a seguir, o corpo apresenta um **CG** (Centro de Massa / Centro de gravidade), de maneira que todas as forças que atuam sobre o corpo atuam sobre ele.

No Total, para caracterizar totalmente o movimento de um corpo em um plano são necessárias 3 equações, sendo elas:

1. Somatório de Forças no Eixo X
2. Somatório de Forças no Eixo Y
3. Somatório de Momentos Gerais

Além disso, para analisarmos as formas e momentos supracitados, também é necessário (em primeiro lugar) a análise de *DCL* (Diagrama de Corpo Livre).

1.1.2 Equações Gerais do Movimento

Como havia sido dito anteriormente, para descrevermos por completo o movimento de um corpo em um plano é necessário 3 equações, sendo duas de forças e uma de momento. Sendo elas:

$$\sum \vec{F} = m \cdot \vec{\bar{a}} = \dot{\vec{G}}_{CG} \tag{1}$$

$$\sum \vec{M}_G = I \cdot \vec{\bar{\alpha}} = \dot{\vec{H}}_{CG} \tag{2}$$

Explorando mais as equações acima, temos que:

- $\bar{a}$: Aceleração linear do centro de massa;
- α: Aceleração angular do centro de massa;
- $\bar{I}$: Momento de inércia do corpo (i.e a medida de resistência à variação na velocidade de rotação devido à distribuição de massa em torno do CG)
- $\dot{\vec{G}}$: A variação no tempo da *Quantidade de Movimento Linear* no *CG*
- $\dot{\vec{H}}$: A variação no tempo da *Quantidade de Movimento Angular* no *CG*

É válido ressaltar, ainda, que a *Quantidade de Movimento Linear* e a *Quantidade de Movimento Angular* são grandezas vetoriais que é definida pelo produto entre a velocidade (linear e angular) com a inércia (i.e a massa e a momento de inércia). E são de suma importância pois tem relação direta com força e momento (como visto anteriormente).

1.1.3 Equação Alternativa do Momento

A fórmula 1 modela a soma de momentos somente quando estamos analisando o sistema tomando como referencial o centro de gravidade *CG*. Isso, entretanto, nem sempre é possível, tendo em vista a complexidade que algumas topologias assumem, o que tornaria inviável fazer sua análise. Há, todavia, uma forma alternativa de modelarmos o sistema, considerando um ponto P arbitrário, a uma distância d conhecida:

$$\sum \vec{M}_P = \bar{I} \cdot \alpha + m\bar{a}d \tag{3}$$

Onde a é a aceleração linear no centro de gravidade.

Ao analisarmos bem a equação, podemos observar que ela nada mais é do que o momento no próprio centro de gravidade, dado pela parcela $\bar{I}\alpha$, somado ao momento (também chamado de torque) que a força resultante ($\sum F = m\bar{a}$) gera no ponto P a uma distância d do CG em análise.

1.1.4 Sistemas de Corpos Interligados

Em casos mais complexos, a principal topologia que encontramos é a de corpos extensos interligados. Um clássico exemplo disso é o problema do carro com pêndulo, onde temos um carro (primeiro corpo) conectado a uma mola e a uma parede, que possui um pêndulo (segundo corpo) com seu pivô de rotação localizado no CG do carrinho.

Para problemas assim, temos a generalização das fórmulas, como sendo:

$$\sum \vec{F} = \sum m\vec{\bar{a}} \tag{4}$$

$$\sum \vec{M}_P = \sum \bar{I}\alpha + \sum m\vec{\bar{a}}d \tag{5}$$

A equação 5 pode, ainda, ser reescrita considerando a notação da *Teoria dos Eixos Paralelos*, que é dada por:

$$\begin{cases} \sum \vec{M}_P & = I_P\alpha \\ I_P & = \bar{I} + m\bar{r}^2 \end{cases} \tag{6}$$

Isso é verdade pois $m\alpha\bar{r}^2 = m(\alpha\bar{r})\bar{r} = m\bar{a}\bar{r}$, que podemos ver ser igual à equação 3

1.1.5 Aplicação

EXEMPLO 1 - O exemplo mais clássico para a aplicação de todos os conceitos vistos é o problema do carro com pêndulo, que é o que veremos agora:

No geral, iremos seguir os seguintes passos:

1. Diagrama de corpo livre: A primeira coisa que devemos fazer em qualquer problema de dinâmica e Vibrações é desenhar o DCL(Diagrama de corpo livre).
2. Listagem dos Dados conhecidos: Em seguida, é de suma importância listarmos todos os dados que possuímos sobre o problema.
3. Equações do Movimento: Nesse passo precisamos primeiramente identificar se estamos lidando com corpos interligados (e por conseguinte utilizaremos as equação 4 e 5), ou se estamos lidando com corpos simples (e então usaremos as equações 1, 2 e 3)

2 Introdução à Vibrações

Vibração é o movimento repetitivo, que pode ser:

- Desejado
- Não Desejado

Além disso, a vibração pode ser vista não somente como um movimento, mas também como a troca entre *energia potencial* (e.g potencial elástico, potencial gravitacional, etc) e *energia mecânica*.

3 Vibrações livres não Amortecidas - 1 DOF

Primeiramente, é importante entendermos que definimos os tipos de vibrações de acordo com certas características, sendo elas:

1. Graus de Liberdade: A depender do número de coordenadas que são necessários para a modelagem completa do movimento.
2. Amortecimento: A depender se há o amortecimento, i.e a dissipação de energia de alguma forma (e.g um amortecedor de fluidos, atrito, ...). E pode ser classificado como:

   Amortecido: Quando ocorre a dissipação de energia;

   Não-Amortecido: Quando não ocorre a dissipação de energia e, por conseguinte, o movimento não para.
3. Liberdade de Vibração: Que se refere à presença ou não de forças externas atuando no *sistema* [1].

[1] Importante ressaltar que a definição do sistema implica na sua classificação

Vibração Livre: Não há forças externas atuando no sistema;

Vibrações Não-Livres: Há forças externas.

4. Parâmetros Concentrados: Um sistema é dito de parâmetros concentrados quando os corpos que o integra são representados por corpos concentrados, e.g massas e molas.

3.1 Sistema Massa-Mola

Um sistema massa mola, como descrito na imagem abaixo, assim como o nome sugere, é composto por:

- Massa de valor m
- Mola de rigidez k
- Gravidade [2] g

Agora, para realizarmos a análise de vibrações desse problema, iremos seguir as seguintes etapas:

1. Definição de Coordenadas
2. Diagrama de Corpo Livre
3. Equações de Movimento

1º Passo - Definição de Coordenadas

Algo muito importante de se perceber quando estamos lidando com problemas com molas (principalmente aqueles de massa-mola na vertical) é que existem dois principais pontos de interesse de serem definidos no espaço, sendo eles:

- Posição sem deformação da mola: Isso é, posição no espaço onde a mola não exerce força alguma, devido ao fato de que a força elástica F_e é dada por $F_e = k\delta$
- Posição onde há equilíbrio entre a força elástica e as demais (principalmente força peso F_p)

Levando isso em consideração, o jeito mais fácil de lidar com esse dois pontos é criando dois eixos de coordenadas, cada um contendo seus respective zeros nesses ponto. Portanto, o primeiro passo que precisamos fazer é definir uma coordenada y a qual possui zero zero no ponto onde a mola **NÃO** está deformada, *i.e* ela está com seu tamanho normal. Em seguida, definimos nosso segundo eixo de coordenadas x contendo seu x_0 no ponto onde as forças peso e elástica se anulam.

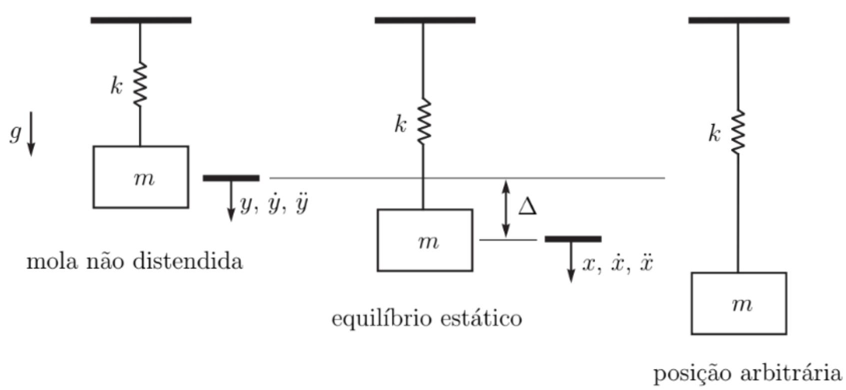


Figure 1: Coordenadas para o Problema Massa-Mola na Vertical

Esses dois eixos de coordenadas distintos, como veremos mais para frente, facilitam bastante os nosso cálculos de equação de movimento. A partir disso, já temos definidos todos os pontos de interesse, e podemos prosseguir para o diagrama de corpo livre *DCL*.

[2]Importante ressaltar que nesse sistema estamos incluindo a terra (e por conseguinte suas ações na massa, e por isso continua sendo um problema de *Vibração Livre*)

2º Passo - Diagrama de Corpo Livre *(DCL)*

Para fazermos o DLC, precisamos primeiro considerar o bloco em uma posição arbitrária. Como já definimos os dois eixos de referência para baixo, iremos considerar o bloco em um ponto tal que $x, y > 0$, para facilitar os cálculos.

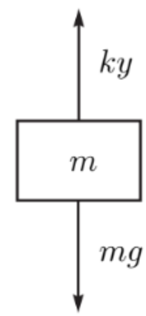


Figure 2: *DCL* básico do sistema massa-mola

A partir disso, podemos fazer o DCL, que possui algumas características, que possuem o acronym (em inglês) *B.R.E.A.D*:

- *Body* : Precisa representar o corpo que está sendo estudado, sem nenhuma outra coisa a sua volta (e.g sem paredes, pilastra, etc).
- *Reações*: A segunda etapa de um DCL é a representação das forças de reação (como no nossa caso a força elástica)
- *External / Body Forces*: A terceira etapa é a representação das forças externas ou do próprio corpo (como no nosso caso a força peso F_p).
- *Axis*: A quarta coisa que seu *D.C.L* precisa ter são os eixos de coordenadas.
- *Dimension*: A útlima coisa que precisa ser colocada é, quando de interesse, as dimensões do do corpo.

É importante ressaltar que a força elástica F_e é dada por $k \cdot y$, tendo em vista que o eixo de coordenadas $\vec{y}$ tem seu zero (i.e sua origem) no ponto em que a mola não possui deformação. Poderíamos ficar escrevendo que a mola está com uma deformação y_α ou qualquer outro nome, mas para termos menos trabalho usamos y como sendo o ponto na coordenada $\vec{y}$, e usaremos ainda mais para frente x para um ponto qualquer no eixo $\vec{x}$.

3º Passo - Equações de Movimento

Como já temos o diagrama de corpo livre, podemos modelar o movimento do bloco a partir das equações de movimento que vimos em dinâmica (eqs. 1, 2). Como o corpo não apresenta rotação (e nem momentos) iremos descrever somente a soma de forças do problema:

$$\sum \vec{F} = m \cdot \vec{a}$$
$$mg - ky = m \cdot \ddot{y}$$
$$0 = m\ddot{y} + ky - mg \tag{7}$$

Com isso temos a equação 7, que descreve o movimento da massa como uma Equação Diferencial Ordinária de Segundo grau Ordinária de Segundo grau. podemos, entretanto, simplificar essa equação considerando a relação entre a coordenada x, a coordenada y e a deformação da mola, como mostramos abaixo:

$$k\Delta = mg \tag{8}$$
$$y = \Delta + x \therefore \dot{y} = \dot{x}, \ddot{y} = \ddot{x} \tag{9}$$

Substituindo as equações acima na equação 7 temos:

$$m\ddot{x} + kx = 0 \tag{10}$$

E isso facilita as contas pois torna uma equação diferencial não homogênea em uma homogênea. Além disso, podemos verificar que o **peso oscila em torno do ponto de equilíbrio estático**. Ao sabermos disso, nós temos então a possibilidade de, nos próximos exercícios, partimos dessa última equação, considerando como nosso eixo de coordenadas tendo início no ponto de equilíbrio estático.

3.2 Molas Equivalentes

O exemplo da massa mola acima pode parecer irrealista, mas na realidade nós podemos simplificar diversos problemas do mundo real descrevendo certas estruturas através de sistemas de molas, como veremos a seguir.

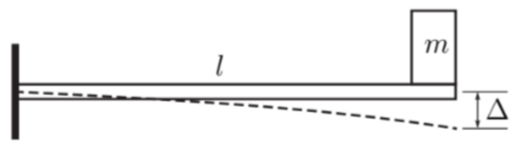
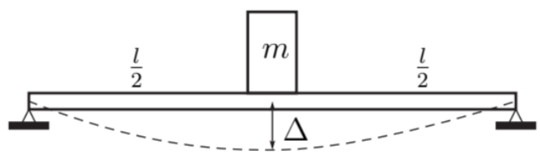
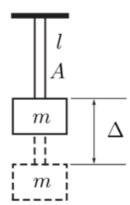
Sistema	Diagrama	Deformação	k Equivalente
Viga Engastada		$\Delta = \frac{Pl^3}{3EI}$	$k = \frac{P}{\Delta} = \frac{3EI}{l^3}$
Viga Bi-Apoiada		$\Delta = \frac{Pl^3}{48EI}$	$k = \frac{P}{\Delta} = \frac{48EI}{l^3}$
Barra em Solicitação Axial		$\Delta = \frac{Pl}{AE}$	$k = \frac{P}{\Delta} = \frac{AE}{l}$

Table 1: Molas Equivalentes

Onde:

- P: Força peso, $P = m \cdot g$
- Δ: Deflexão
- E: Módulo de Elasticidade
- I: Inércia da seção transversal

Além disso podemos, ainda, ter a associação de molas:

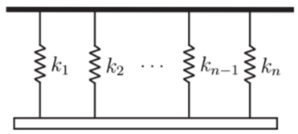
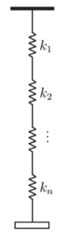
Topologia	Diagrama	Equação	Observação
Molas em Paralelos		$k = \sum_{i=1}^{n} k_i$	Temos que para molas em paralelo, todas tem o mesmo deslocamento
Molas Em Série		$k^{-1} = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{k_i}$	Temos que para molas em série, cada uma delas sofre a mesma força.

Table 2: k Resultante de associação de molas

3.3 Sistema Torcional

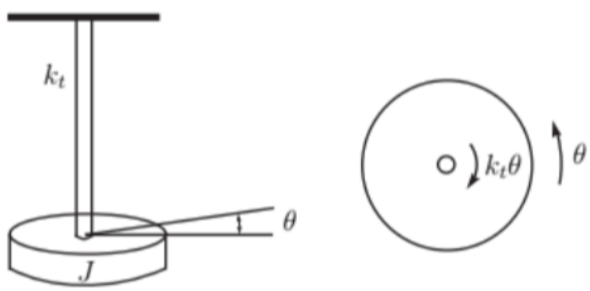


Figure 3: Sistema Torcional e DCL

Para introduzirmos um sistema torcinal de vibrações, iremos considerando um sistema de um disco, com um momento de inércia J, conectado a um eixo engastado (fixo e sem rotação livre) em uma das suas extremidades, com uma rigidez torcional [3] k_t, como mostrado pela figura acima.

Quando lidamos com problemas relacionados com rotação, a maioria esmagadora de vezes iremos usar o momento para equacionar o movimento vibracional. Após a análise de corpo livre e determinação da coordenada θ (necessária somente uma pois sistema apresenta somente um grau de liberdade), podemos aplicar a Lei de Newton no que tange momento e temos:

$$\sum M = J\ddot{\theta} \Rightarrow -k_t\theta = J\ddot{\theta}$$

Que pode ser escrita da seguinte forma:

$$\ddot{\theta} + \frac{k_t}{J}\theta = 0 \tag{11}$$

Podemos, então, verificar que, mesmo com uma topologia diferente, o sistema apresenta o mesmo comportamento (e mesma modelagem) do sistema massa mola, com a frequência natura sendo $\omega_n = \sqrt{k_t/J}$

[3] Similar à propriedade k de molas normais, mas representa a resistência à torção da mola equivalente, que nesse caso refere-se à viga engastada

4 Vibrações Livres de Sistemas de 1 *DOF* com Amortecimento

4.1 Introdução

Até o momento nós vimos situações onde não haviam forças dissipativas atuando sobre o sistema e, por conseguinte, o movimento de vibração continuava eternamente. Isso, entretanto, não condiz com a realidade, levando em consideração que há inúmeros mecanismos pelos quais um sistema perde energia. Vários deles, entretanto, podem ser modelados por um **amortecedor viscoso**, que é regido pela seguinte equação:

$$f_d = -c\dot{x} \tag{12}$$

Onde:

- c: Constante do amortecedor
- $\dot{x}$: A velocidade

O exemplo mais comum disso é uma massa-mola-amortecedor, como mostrado na figura abaixo:

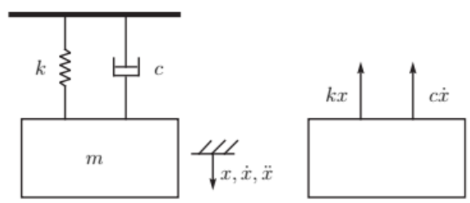


Figure 4: Sistema Massa-Mola-Amortecedor

Aplicando a Lei de Newton chegamos em:

$$\ddot{x} + \frac{c}{m}\dot{x} + \frac{k}{m}x = 0 \tag{13}$$

Rotineiramente, entretanto, quando temos um problema com amortecimento nós utilizamos a equação diferencial (que no nosso caso é a equação 13) da seguinte forma:

$$\ddot{x} + 2\zeta\omega_n\dot{x} + \omega_n^2 x = 0 \tag{14}$$

Onde:

- ζ: **Fator de Amortecimento**, parâmetro adimencional que fornece uma medida do amortecimento do sistema (que veremos de forma mais detalhada mais para frente)
- ω_n: Frequência Natural do sistema, dada por $\sqrt{k/m}$

IMPORTANTE: Em um sistema amortecido, o sistema ***NÃO*** oscila com a frequência natural ω_n, mas sim com uma frequência amortecida (também chamada de *damped frequency* ω_d, que iremos averiguar mais para frente como é calculada).

4.2 Classificação de Sistemas Amortecidos

Como vimos anteriormente, podemos modelar um sistema de 1 grau de liberdade amortecido pela equação 14, que tem como principal componente que descreve o seu amortecimento como sendo o ζ, chamado de fator de amortecimento.

Somos capazes de ver e entender a influência do fator de amortecimento ao analisarmos a equação diferencial característica 14, onde, durante a sua resolução (para o qual supomos o sistema com uma resposta $x = Ae^{\lambda t}$), seu polinômio característico[4] e suas raízes (que regem o comportamento exponencial da resposta) são dadas por:

$$\lambda^2 + 2\zeta\omega_n\lambda + \omega_n^2 = 0 \Rightarrow \lambda_{1,2} = -\zeta\omega_n \pm \omega_n\sqrt{\zeta^2 - 1}$$

A depender do valor de ζ temos que o sistema pode ser:

- $\zeta < 1$: Sub-amortecido
- $\zeta = 1$: Criticamente amortecido
- $\zeta > 1$: Super-amortecido

4.2.1 Sistema Sub-Amortecido

Dizemos que um sistema é sub-amortecido quando $\zeta < 1$, o que resulta na equação característica ter duas raízes imaginárias tal que:

$$\lambda_{1,2} = \sigma \pm j\omega_d \Rightarrow \begin{cases} \sigma = -\zeta\omega_n \\ \omega_d = \omega_n\sqrt{1 - \zeta^2} \end{cases} \tag{15}$$

Onde a parte imaginária da raiz é chamada de *frequência amortecida* ω_d.
Por fim, teremos como resposta do sistema:

$$x(t) = A_1e^{\lambda_1 t} + A_2e^{\lambda_2 t} = e^{-\zeta\omega_n t}(A_1e^{j\omega_d t} + A_2^{-j\omega_d t}) \tag{16}$$

Onde $A_{1,2}$ são constantes que somos capazes de achar a partir das duas condições iniciais.

4.2.2 Sistema Criticamente-Amortecido

Já para quando $\zeta = 1$, nós chamamos o sistema de criticamente amortecido, e sua equação característica tem duas raízes reais iguais:

$$\lambda_1 = \lambda_2 = -\zeta\omega_n = -\omega_n \tag{17}$$

Resultando em uma resposta que **não oscila** e que é descrita por:

$$x(t) = A_1e^{-\omega_n t} + A_2e^{-\omega_n t} \tag{18}$$

4.2.3 Sistema Super-Amortecido

E para o último caso, chamamos de super-amortecido quando $\zeta > 1$, resultando em:

$$\lambda_{1,2} = \omega_n\left(-\zeta \pm \sqrt{\zeta^2 - 1}\right) = \frac{-1}{\tau_{1,2}} \tag{19}$$

Resultando em uma resposta, que também não oscila, que é descrita por:

$$x(t) = A_1e^{\frac{-t}{\tau_1}} + A_2e^{\frac{-t}{\tau_2}} \tag{20}$$

[4]Importante rever essa parte de Calc III ou Anal, mas o polinômio característico é usado para achar o λ da exponencial que supomos ser a resposta do sistema

5 Vibrações Forçadas de Sistemas de 1 *DOF* sem Amortecimento - Excitação Harmônica

5.1 Equacionamento

Até o momento vimos sistemas onde não haviam excitações externas (i.e não havia uma força externa ao sistema agindo sobre ele), o que resultava em uma modelagem por *Equações Diferenciais Homogêneas.* Agora, entretanto, iremos estudar sistemas sem amortecimento que sofrem a ação de uma força periódica externa, chamada de excitação harmônica, que resultará em uma *Equação Diferencial Não Homogênea*, onde a resposta do sistema será composta por uma parte chamada de *resposta forçada* e outra chamada de *resposta homogênea.*

Para exemplificarmos, iremos analisar desde o começo o sistema abaixo:

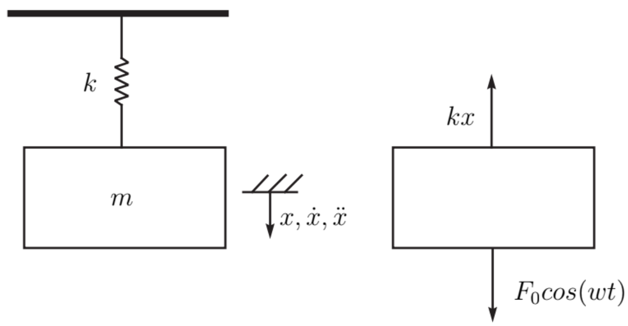


Figure 5: Sistema Massa Mola com Excitação Harmônica

Como sempre, iremos começar por determinar o sistema de coordenadas mais aplicável nesse problema. Pela figura 5 podemos ver que a coordenada maisé aplicávelé a **Coordenada X**, tendo como origem o *ponto de equilíbrio estático do sistema.* A escolha de tal origem facilita muito nossas contas pois podemos considerar a força elástica como sendo simplesmente kx e desconsiderar a força peso (pois o δ inicial de deformação serve para anular a força peso).

Depois disso, precisamos fazer o *DLC*, como mostrado no diagrama da esquerda da figura 5. Ressaltando novamente que a força peso é "accounted for" pela escolha da origem do sistema como sendo o ponto de equilíbrio estático.

Agora o que nos resta é fazer a equação de movimento. Como o problema é unidirecional e não apresenta momentos, poderemos usar somente o somatório de forças em x sendo igual a aceleração do corpo, como descrito pela equação abaixo:

$$\sum F_x = m \cdot \ddot{x}$$

Onde as forças que atuam em x são a força elástica e a força de excitação, resultando em:

$$m\ddot{x} = +F_0 \cos(\Omega t) - kx$$
$$\ddot{x} + \frac{k}{m}x = \frac{F_0}{m} \cos(\Omega t)$$
$$\ddot{x} + \omega_n^2 x = f_0 \cos(\Omega t)$$

Que é uma equação Diferencial Ordinária não Homogênea, e portanto terá uma solução composta por duas partes:

$$x = x_p + x_p$$

A partir daqui o objetivo é a solução dessa EDO. Se lembrarmos bem de Calculo 3, o primeiro passo é a solução da parte homogênea, que nada mais é do que pegar a EDO, consiera-lá homogênea (i.e desconsiderar que possui a força externa e iguala-la a zero) e resolver a EDO, supondo primeiramente que $x(t) = Ae^{\lambda t}$.

Após as contas, veremos que a solução fica sendo:

$$x_h(t) = B_1\cos(\omega_n t) + B_2\sin(\omega_n t), \begin{cases} B_1 = A_1 + A_2 \\ B_2 = j(A_1 + A_2) \end{cases}$$

Para facilitarmos a visualização da resposta não forçada, podemos utilsar a lei de seno da soma para botar a solução acima em um formato de seno com um shift :

$$X \cdot sin(\omega_n t + \phi) \Rightarrow X\big[\sin(\omega_n t)\cos(\phi) + \cos(\omega_n t)\sin(\phi)\big] \therefore \begin{cases} B_1 = X\sin(\phi) \\ B_2 = X\cos(\phi) \end{cases}$$

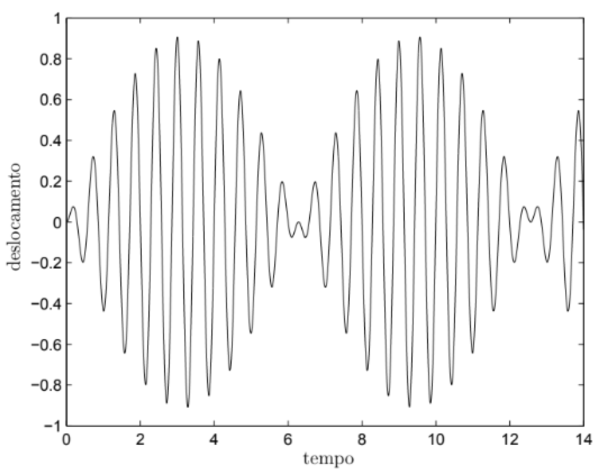
Igual dito anteriormente, isso facilita a visualização e análise da resposta, e a demonstração acima foi para provar matematicamente que se pode representar como sendo um seno com frequência natural mais shift. Mas **NÃO** é necessário voltar e achar $B_{1,2}$ nem $A_{1,2}$, se acharmos X e ϕ já descrevemos o problema.

Agora, então, só precisamos achar x_p, supondo uma solução no formato da entrada (logo iremos supor uma solução $x_p = C\cos(\Omega t)$), onde C é uma constante qualquer. Depois de supor essa solução e botar na EDO, iremos descobrir o valor de C e então o que nos resta é jutar as duas soluções $x_h + x_p$ e utilizar os valores inicias dados para achar as constantes X e ϕ (da parte homogênea da resposta).

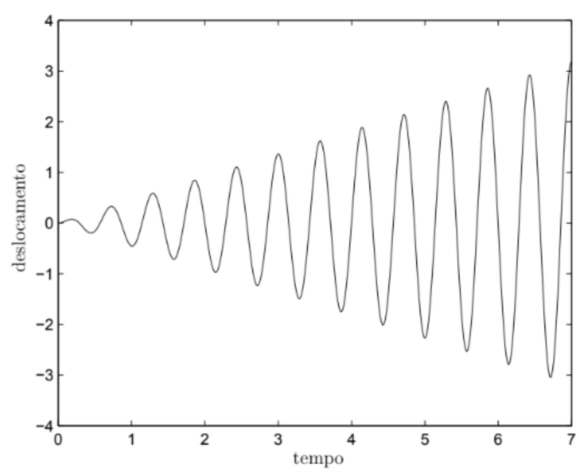
5.2 Análise da Resposta

Ao analisarmos a resposta, vemos que existem dois cenários importantes de serem ressaltados, sendo eles:

- Fenômeno de Batimento
- Fenômeno de Ressonância



(a) Fenômeno de Batimento



(b) Fenômeno de Ressonância

Figure 6: Fenômenos em Sistemas com Excitações Harmônicas

O Fenômeno de Batimento, como ilustrado na imagem acima, ocorre quando $\Omega \approx \omega_n$, *i.e*, quando a frequência da excitação externa é próxima da frequência natural do sistema.

Já o Fenômeno de Ressonância ocorre quando $\Omega \to \omega_n$, *i.e*, quando a frequência da excitação externa tende ao mesmo valor da frequência natural do sistema.

6 Vibrações Forçadas de Sistemas de 1 *DOF* com Amortecimento - Excitação Harmônica

Vimos, anteriormente, a resposta de um sistema sem amortecimento para uma entrada forçada (*i.e* que possui uma força externa agindo sobre o sistema). Iremos, agora, verificar a modelagem da resposta de um sistema que também possui **amortecimento viscoso**, dada por:

$$m\ddot{x} + c\dot{x} + kx = F_0 \sin(\Omega t) \Rightarrow \ddot{x} + 2\zeta\omega_n\dot{x} + \omega_n^2 x = f_0 \sin(\Omega t) \tag{21}$$

Onde:

- $\omega_n = \sqrt{k/m}$
- $\zeta = c/(2m\omega_n)$
- $f_0 = F_0/m$

Como estamos lidando com uma *equação diferencial não homogene* por ter o termo forçante. Para esse caso, temos que a resposta do sistema $x = x_p + x_h$, *i.e* ela divida em solução homogênea (também chamada de resposta não forçada do sistema) e da solução particular (também chamada de resposta forçada), que são dadas por:

$$x = x_h + x_p \begin{cases} x_h(t) = Ae^{-\zeta\omega_n t}\sin(\omega_d t + \phi) \\ x_p(t) = M\sin(\Omega t) + N\cos(\Omega t) \end{cases} \tag{22}$$

A partir disso, para descobrirmos os valores de M e N basta nós substituirmos x_p na equação diferencial dada pela equação 21 resultando em:

$$\begin{aligned} M &= \frac{(\omega_n^2 - \Omega^2)f_0}{(\omega_n^2 - \Omega^2)^2 + (2\zeta\omega_n\Omega)^2} = \frac{(1-r^2)f_0/\omega_n^2}{(1-r^2)^2 + (2\zeta r)^2} \\ N &= \frac{-2\zeta\omega_n\Omega f_0}{(\omega_n^2 - \omega^2)^2 + (2\zeta\omega_n\Omega)^2} = \frac{-2\zeta r f_0/\omega_n^2}{(1-r^2)^2 + (2\zeta r)^2} \end{aligned} \tag{23}$$

Onde temos que $r = \Omega/\omega_n$ é chamado de razão das frequências.

A partir disso, podemos, ainda, reescrever a resposta forçada (x_p) como sendo:

$$x_p(t) = X\sin(\Omega t - \theta) \tag{24}$$

Tal que:

- $X = \sqrt{M^2 + N^2}$
- $\tan\theta = (2\zeta r)/(1 - r^2)$

Tal forma é mais intuitiva de ser utilizada para visualizarmos (sem plotar) a resposta forçada do sistema. Ela nada mais é do que uma senoide (com uma certa amplitude X), com a mesma frequência Ω da força harmônica de entrada mas com um delay (*i.e* um shift θ).

Além disso, essa re-escrita nos ajuda a analisar algo chamado de **Fator de Amplificação**, denotado por MF, que é dado por[5]:

$$MF = \frac{Xk}{F_0} = \frac{X\omega_n^2}{f_0} = \frac{1}{\sqrt{(1-r^2)^2 + (2\zeta r)^2}} \tag{25}$$

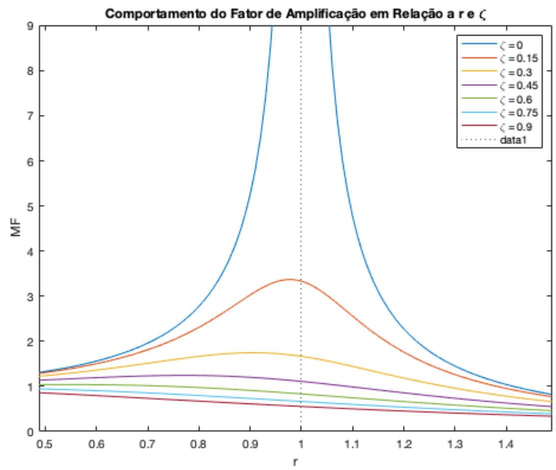
De tal forma que nós conseguimos analisar e determinar o comportamento da amplitude de saída em relação à razão entre Ω/ω_n e ainda, por conseguinte, o pico de resposta em frequência (dada pelo valor máximo de MF) que corresponde a **Resonância de um Sistema Forçado de 1DOF Amortecido**. Tal ponto de resonância pode ser obtido via experimentação ou ainda analiticamente, se tivermos o modelo matemático que rege nosso sistema,

[5] É importante apontar que MF é adimensional propositalmente, pois facilita a análize. A partir disso, se houver um outro sistema o qual você queira identificar o MF nós pegamos a equação que define X (a amplitude da resposta) e tentamos isolar (em função de X e outras coisas) o resto da função que dependa somente de r e ζ, que interferem na amplitude da oscilação e que também são adimencionais.

de tal forma que é obtido pela análise dos pontos críticos da função MF, dada pelos pontos onde a sua derivada é zero. Ao aplicarmos isso no exemplo em questão temos que:

$$MF_{max} = \frac{1}{2\zeta\sqrt{1-\zeta^2}}, \quad r_{pico} = \sqrt{1-2\zeta^2} < 1 \tag{26}$$

Podemos, ainda, estudar graficamente o comportamento do Fator de Amplificação em relação a razão de frequências e coeficiente de amortecimento ao plotarmos a equação 25 em função de r, como mostrado na imagem abaixo:



Onde Observamos que o ponto de máxima ocorre para $r < 1 \Rightarrow \Omega < \omega_n$. Além disso, em um cenário onde estamos analizando um *Bode Plot* da resposta em frequência é importante ressaltar que o momento onde ocorre a inversão da frequência de resposta, *i.e* ocorre um shift de 90° entre a frequência de excitação e de resposta, representa o ponto de $r = 1$, ou seja, $\Omega = \omega_n$. Isso nos ajuda a identificar o sistema quando temos somente a resposta em frequência do sistema em questão.

7 Desbalanceamento Rotativo

Como um exemplo de vibração forçada com amortecimento viscoso ecxitação harmônica é um problema de desbalanceamento rotativo, como modelado pelo sistema abaixo:

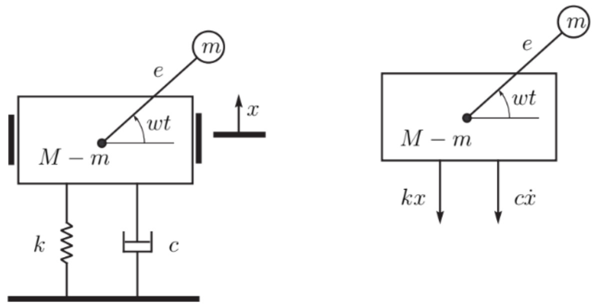


Figure 7: Modelagem de um Desbalanceamento Rotativo Com Amortecimento Viscoso

Esse sistema nós temos a seguinte modelagem[6], feita a partir do conceito de *Sistemas de Corpos Interligados*:

$$\sum F = \sum M\ddot{x} \Rightarrow M\ddot{x} + c\dot{x} + kx = me\Omega^2 \sin(\Omega t) \tag{27}$$

Onde teremos uma resposta senoidal para a solução particular também como sendo $X \sin(\Omega t - \theta)$ com a amplitude X dada por:

$$X = \frac{(me/M)r^2}{\sqrt{(1-r^2)^2 + (2\zeta r)^2}} \tag{28}$$

E o ângulo de fase sendo:

$$\tan(\theta) = \frac{2\zeta r}{1 - r^2} \tag{29}$$

Assim como vimos no capítulo anterior, podemos estudar a amplitude da resposta pela análise do *Fator De amplificação*, que para esse caso é dado por:

$$MF = \frac{X}{(me/M)} = \frac{r^2}{\sqrt{(1-r^2)^2 + (2\zeta r)^2}} \tag{30}$$

A partir do qual podemos ver que o ponto máximo do Fator De Amplificação ocorre quando:

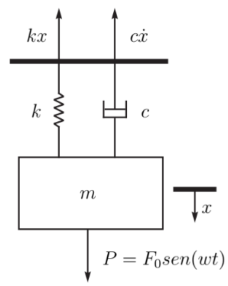
$$r = r_{pico} = \frac{1}{\sqrt{1 - 2\zeta^2}} > 1 \tag{31}$$

O que implica que, diferente do sistema com excitação harmônica amortecido simples visto na seção anterior, quando estamos lidando com um **desbalanceamento rotativo temos que a frequência da entrada forçante é maior que a frequência natural do sistema no ponto de ressonância**. O que é um indicativo de qual modelo usar quando estamos fazendo a identificação do sistema e temos a sua resposta em frequência (como um Bode Plot).

[6] É importante ressaltar que m é a massa que está desbalanceada, então se tiver 3 massas, mas duas delas estiverem radialmente opostas elas estariam balanceadas e teria somente uma das massas como desbalanceada. Além disso é importante ressaltar que M é a soma de TODAS as massas, menos a desbalanceada

8 Transmissibilidade

Considerando o sistema descrito abaixo, nosso objeto de estudo agora será determinar a força que chega ao suporte do sistema no cenário de **Regime Permanente**.



Ao fazermos o DCL e a soma das forças em x(que tem origem no ponto de eq. estático logo desconsideramos o peso) vemos que a força F aplicada sobre o suporte é:

$$F = \sum F_x = kx + c\dot{x} \tag{32}$$

Analisando em regime permanente (e por conseguinte analisando a resposta forçada do sistema) teremos:

$$F = kX\sin(\Omega t - \theta) + c\Omega X\cos(\Omega t - \theta), x(t) = X\sin(\Omega t - \theta) \tag{33}$$

Como estamos lidando com soma de cossenos e senos, podemos representar como sendo somente um seno e uma amplitude, o que facilitará nossas contas e nossas análises (principalmente de amplitude). Reescrevendo a função acima temos:

$$\begin{aligned} F &= \sqrt{(kX)^2 + (x\Omega X)^2}\sin(\Omega t - \theta - \beta) \\ &= \sqrt{(kX)^2 + (x\Omega X)^2}X\sin(\Omega t - \sigma) \end{aligned} \tag{34}$$

A partir disso, podemos analisar que a amplitude máxima (e por conseguinte a força máxima) sofrida pelo suporte do sistema é:

$$F_T = X\sqrt{k^2 + (c\Omega)^2} \tag{35}$$

Com isso, somos capazes de introduzir o conceito de **TRANSMISSIBILIDADE** TR, que é uma relação entre a amplitude da força máxima que chega no suporte do sistema e a amplitude da força aplicada no sistema como um todo:

$$TR = \frac{F_T}{F_0} = \frac{\sqrt{1 + (2\zeta r)^2}}{\sqrt{(1 - r^2)^2 + (2\zeta r)^2}} \tag{36}$$

Podemos, por fim, analisar o impacto da constante de amortecimento ζ e da razão das frequências r tal que, para o caso $r = 0$ temos o caso estático.

E podemos, então, observar que quanto menos amortecido, mais força chega no suporte pois gera uma **amplificação** da força de entrada, podendo quebrar o suporte se não projetado propriamente. Além disso, para qualquer configuração há uma frequência de excitação que resultará em uma Transmissiblidade máxima, que ocorre quando:

$$r_{pico} = \frac{\sqrt{-1 + \sqrt{1 + 0\zeta^2}}}{2\zeta} < 1 \tag{37}$$

Uma análise de transmissibilidade também pode ser feita para o caso de um desbalanceamento rotativo, dado por:

$$TR = \frac{F_T}{me\omega_n^2} = \frac{r^2\sqrt{1 + (2\zeta r)^2}}{\sqrt{(1 - r^2)^2 + (2\zeta r)^2}} \tag{38}$$

Que analogamente ao fator de amplificação, possui $r_{pico} > 1$, isso é, valor máximo de transmissibilidade rotativa para frequências de rotação maiores que a frequência natural de vibração do sistema.

9 Oscilação do Suporte

Até o momento vimos casos onde há excitação harmônica no formato de uma força sendo aplicada no sistema. Uma forma que também é extremamente comum de gerar vibrações em sistemas é onde ocorre a **Oscilação** do suporte no qual o sistema está fixado. Para tais casos, modelamos o sistema como demonstrado na figura 8.

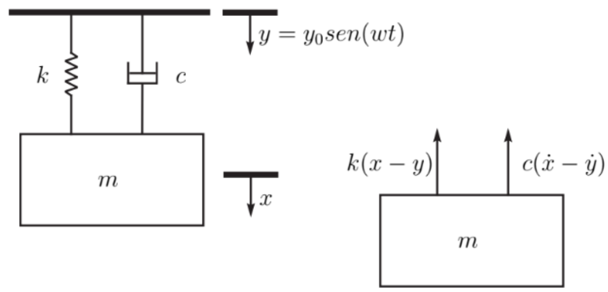


Figure 8: Modelo de um sistema com oscilação do suporte

Para casos como esse, é mais fácil estabelecermos duas coordenadas distintas, mas modelarmos (como veremos abaixo) com uma cordenada que representa a diferença entre as duas (como se fosse uma "coordenada relativa"). Ao fazermos isso temos:

$$m\ddot{x} + c\dot{x} + kx = y_0\sqrt{k^2 + (c\Omega)^2}\sin(\Omega t - \beta), \beta = \tan^{-1} -(c\Omega)/k = -2\zeta r \tag{39}$$

Cujo possui, como podemos ver acima, uma amplitude da força excitante sendo $F_0 = y_0\sqrt{k^2 + (c\Omega)^2}$. A partir do que podemos resolver a EDO e achar:

SOLUÇÃO EM REGIME:

$$x(t) = X\sin(\Omega t - \gamma)\begin{cases} X = \frac{y_0\sqrt{1+(2\zeta r)^2}}{\sqrt{(1-r^2)^2+(2\zeta r)^2}} \\ \gamma = \beta + \phi \\ \beta = \tan^{-1}(-c\Omega)/k = -2\zeta r \\ \phi = \tan^{-1} 2\zeta r/(1-r^2) \end{cases} \tag{40}$$

$$MF = X/y_0 \tag{41}$$

FORÇA TRANSMITIDA

$$F_T = y_0 k \frac{r^2\sqrt{1+(2\zeta r)^2}}{\sqrt{(1-r^2)^2+(2\zeta r)^2}} \tag{42}$$

$$TR = F_T/y_0 k \tag{43}$$

10 Análise Modal

10.1 Introdução

A análise modal é uma forma diferente de abordar o estudo dos modos de vibração para grandes sistemas e grandes máquinas, pois nos permite (como veremos mais para frente) analisar certas partes do sistema de forma mais direta e específica do que é possível para o método usado até agora.

É dividido entre o processo teórico (no qual é dividido entre análise no domínio do tempo e análise no domínio da frequência, *FRF*) e o processo experimental de análise de vibrações. A partir daqui iremos revisitar sistemas conhecidos, mas dessa vez utilizando a análise modal e RFR.

Processo de Análise Teórico

$$\overbrace{Modelo\ Espacial}^{[M],[C],[K]} \rightarrow \underbrace{Modos\ de\ Vib.}_{"Modelo\ Modal",\omega_n,\zeta,modos\ de\ vibrar} \rightarrow \overbrace{Niveis\ de\ resposta}^{Resposta\ em\ Freq.\ e\ Resposta\ ao\ impulso}$$

Processo de Análise Experimental

$$Propriedades\ e\ caracteristicas\ da\ resposta \rightarrow modos\ de\ vib. \rightarrow modelo\ estrutura$$

10.2 Sistema de 1DOF sem amortecimento

Modelo Modal:

$$m\ddot{x} + kx = 0; x(t) = e^{i\omega t}$$

Substituindo na equação diferencial temos:

$$m(-\omega^2 X e^{i\omega t}) + kXe^{i\omega t} = 0 \Rightarrow k - \omega^2 m = 0$$

- Uma frequência natural $\omega_n = \sqrt{k/m}$
- Um modo de vibrar

Análise de Resposta em Frequência:

- Excitação do tipo $f(t) = Fe^{i\Omega t}$, com uma solução do tipo $x(t) = Xe^{i\Omega t}$, resultando em:

$$(k - \Omega^2 m)Xe^{i\Omega t} = Fe^{i\Omega t} \Rightarrow \underbrace{\alpha(\Omega) = \frac{X}{F} = \frac{1}{k - \Omega^2 m}}_{Receptancia\ do\ Sistema} \quad (44)$$

10.3 Sistema com 1DOF Amortecido

Modelo Modal:

Para o movimento livre temos a seguinte EDO:

$$m\ddot{x} + x\dot{x} + kx = 0, x(t) = Xe^{\lambda t} \Rightarrow m\lambda^2 + c\lambda + k = 0 \therefore \begin{cases} \lambda_{1,2} = -\zeta\omega_n \pm i\omega_n\sqrt{1-\zeta^2} \\ \omega_n = \sqrt{\frac{k}{m}} \\ \zeta = \frac{c}{2\sqrt{km}} \end{cases}$$

Análise de Resposta em Frequência

$$m\ddot{x} + c\dot{x} + kx = f(t) = Fe^{i\Omega t}$$

Como estamos analisando a resposta em frequência, logo estamos interessado somente na resposta em regime permanente, temos que:

$$x(t) = Xe^{i\Omega t} \Rightarrow (-\Omega^2 m + i\Omega c + k)Xe^{i\Omega t} = Fe^{i\Omega t}$$

Resultando na seguinte receptância:

$$\alpha(\Omega) = \frac{X}{F} = \frac{1}{(k - \Omega^2 m) + i\Omega c} \tag{45}$$

O qual podemos observar que é complexo e possui o seguinte módulo e fáse:

$$|\alpha(\Omega) = \frac{1}{\sqrt{(k - \Omega^2)^2 + (\Omega c)^2}}| \tag{46}$$

$$\theta_\alpha = -tg^{-1}\left[\frac{-\Omega c}{k - \Omega^2 m}\right] \tag{47}$$

Tendo ainda as seguintes **formas alternativas para resposta em frequência**:

- $\alpha(\Omega)$: Receptância (deslocamento/força)
- $Y(\Omega)$: Mobilidade[7] (velocidade/força), onde $Y(\Omega) = i\Omega\alpha(\Omega)$, $|Y(\Omega)| = \Omega|\alpha(\Omega)|$ e $\theta_y = \theta_\alpha - 90°$
- $A(\Omega)$: Inertância (aceleração/força), onde $A(\Omega) = -\Omega^2\alpha(\omega)$

Podemos usar, também, as relações inversas para análise de resposta em frequência:

- Dynamic Stiffness (força/deslocamento)
- Impedância Mecânica (força/velocidade)
- Massa Aparente (força/aceleração)

10.4 Representação Gráfica da FRF

Como a FRF é uma função complexa, sua representação não é trivial, sendo as formas de visualização mais comuns sendo:

- Bode Plot: Que possui 2 gráficos, sendo eles Módulo x Ω e fase x Ω
- Diagrama de Nyquist: Parte real x Parte imaginária, frequência não explicita em um eixo
- Genérico: também com dois gráficos, sendo eles Parte Real x Ω e Parte Imaginária x Ω

[7]Como a mobilidade só é a derivada da receptância, podemos ver que no domínio da frequência derivar (i.e passar do deslocamento para a velocidade) basta multiplicar por $i\Omega$, análogo a como no plano s de Laplace bastava multiplicar por s

10.5 Análise de Assíntotas da FRF

A fim de estudarmos o comportamento da resposta em frequência de sistemas, principalmente nos casos onde a frequência de excitação é próxima da frequência natural do sistema, iremos analisar a receptância, mobilidade e inertância para um sistema de 1 DOF não amortecido:

Receptância

Como a receptância de um sistema de 1DOF não amortecido é dado por:

$$\alpha(\Omega) = \frac{1}{k - \Omega^2 m}$$

Temos os seguintes casos:

- **Para Baixas Frequências** ($\Omega \to 0$): $\alpha(\Omega) \approx 1/k$
- **Para Altas Frequências** ($\Omega \to +\infty$): $\alpha(\Omega) \approx 1/(-\Omega^2 m)$

Que, ao plotarmos, tem o seguinte comportamento:

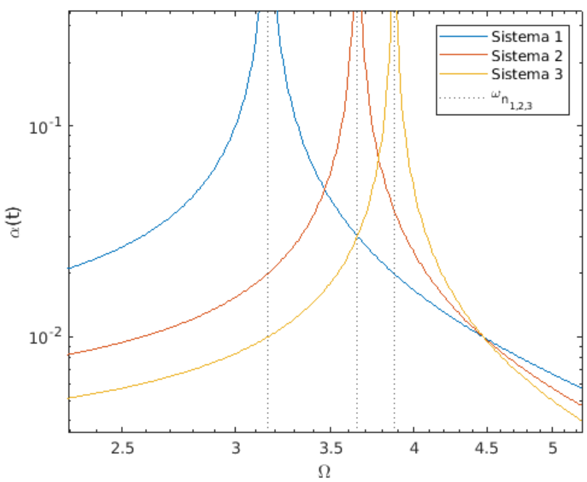


Figure 9: Receptância α em função de Ω para sistemas com diferentes frequências naturais

Mobilidade

Como a mobilidade é dada por:

$$y(\Omega) = \frac{i\Omega}{k - \Omega^2 m}$$

Temos:

- **Para Baixas Frequências ($\Omega \to 0$):** $y(\Omega) \approx i\Omega/k$
- **Para Altas Frequências ($\Omega \to +\infty$):** $y(\Omega) \approx -i/(\Omega m)$

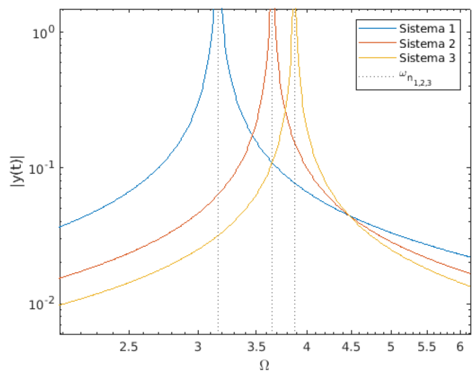


Figure 10: Mobilidade $|y(\Omega)|$ em função de Ω para sistemas com diferentes frequências naturais

Inertância

Como a inertância é dada por:

$$A(\Omega) = \frac{-\Omega^2}{k - \Omega^2 m}$$

Temos:

- **Para Baixas Frequências ($\Omega \to 0$):** $A(\Omega) \approx -\Omega^2/m$
- **Para Altas Frequências ($\Omega \to +\infty$):** $A(\Omega) \approx 1/m$

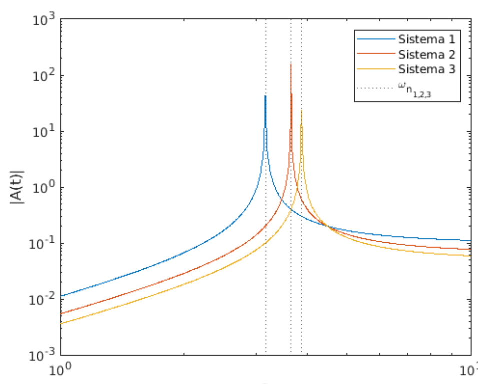


Figure 11: Inertância $|A(\Omega)|$ em função de Ω para sistemas com diferentes frequências naturais

10.6 Sistema de nDOF sem Amortecimento

A fim de exemplificarmos o método de análise modal para n graus de liberdade, iremos utilizar o modelo de $n = 2$ graus de liberdade, representado por dois carros, com uma mola entre eles, e com molas nas extremidades conectando as paredes, sendo submetidos a forças f_1 no primeiro carrinho e f_2 no segundo.

Para esse caso, iremos ter o seguinte sistema de EDOs que regem as leis de movimento, e sua respectiva forma matricial:

$$\left.\begin{aligned} m_1\ddot{x}_1 + (k_1 + k_2)x_1 - k_2x_2 = f_1 \\ m_2\ddot{x}_2 + (k_2 + k_3)x_2 - k_2x_1 = f_2 \end{aligned}\right\} \Rightarrow \underbrace{\begin{bmatrix} m_1 & 0 \\ 0 & m_2 \end{bmatrix}}_{[M]} \begin{Bmatrix} \ddot{x}_1 \\ \ddot{x}_2 \end{Bmatrix} + \underbrace{\begin{bmatrix} k_1 + k_2 & -k_2 \\ -k_2 & k_2 + k_3 \end{bmatrix}}_{[K]} \begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} f_1 \\ f_2 \end{Bmatrix}$$