

# EM461 - Mecânica dos Fluidos I

Pedro Henrique Limeira da Cruz

March 20, 2023



# UNICAMP

## Contents

<b>1</b>	<b>Estática dos Fluidos</b>	<b>3</b>
1.1	Equação Base - Estática de Fluidos . . . . .	3
1.2	Variação de Pressão em um Fluido Estático . . . . .	4
1.3	Variação de Pressão Em um Gás Ideal . . . . .	4

# 1 Estática dos Fluidos

Antes de começarmos nossos estudos sobre a mecânica dos fluidos em movimento, iremos revisar (ou para alguns introduzir) a estática de fluidos.

## 1.1 Equação Base - Estática de Fluidos

A equação mais básica da estática de fluidos é aquela que modela o campo de pressão em um fluido estático. A partir das experiências do dia-a-dia podemos verificar o principal aspecto sobre a pressão em uma coluna de fluido estático:

### A pressão Aumenta com a Profundidade

A partir disso, e com a intenção de modelarmos matematicamente o sistema, fazemos a análise mais básica de mecânica estática, a lei de Newton. Para esse caso, entretanto, como estamos falando de um fluido e não de um corpo concentrado, iremos aplicar a lei de newton em um cenário diferencial, para lidarmos com pequenas massas (ou pequenos volumes) do fluido, como mostra a equação 1:

$$d\vec{F}_{resultante} = \vec{a}dm \quad (1)$$

A partir disso, como temos nossa lei de newton básica (mas agora aplicada para o problemas diferencial de fluidos), podemos prosseguir e identificar as forças envolvidas.

A primeira força de campo que iremos ver e que atua nos problemas de estática de fluidos é a força oriunda da *gravidade*, quando analisamos um pequeno volume diferencial do fluido, dada por:

$$d\vec{F}_B = \vec{g}\rho dV \quad (2)$$

Onde:

- $\rho$ : Massa específica. Para problemas que estaremos analisando é constante em função tanto do tempo quanto posição.
- $V$ : Volume do elemento, dada em coordenadas cartesianas tal que  $dV = dx \, dy \, dz$
- $g$ : Aceleração da gravidade.

A segunda força que iremos analisar agora é a **única força de superfície** presente, tendo em vista que estamos abordado a estática de fluidos e, por conseguinte, não há a presença de tensão de cisalhamento, é a **força de pressão de superfície**  $p = p(x, y, z)$  (um vetor com três componentes), que varia conforme a posição dentro do fluido. Podemos entender essa pressão de superfície como sendo a **Pressão exercida pela coluna de fluido ao redor do volume diferencial sendo estudado**.

A partir disso, temos a Lei de Newton que governa o problema diferencial do fluido (dado pela equação 1) e temos que as únicas forças que atua no nosso problema são a força de pressão  $p(x, y, z)$  e a força peso do volume diferencial sob análise. Como estamos lidando com um problema de estática a somatória de todas as forças precisa ser zero, temos:

$$d\vec{F} = (-\nabla p + \rho\vec{g})dV \Rightarrow \frac{d\vec{F}}{dV} = -\nabla p + \rho\vec{g} \quad (3)$$

Onde temos então a equação final 3, que representa a força resultante por unidade de volume, que ao igualarmos a zero resulta em:

$$-\nabla p + \rho\vec{g} = 0 \quad (4)$$

Onde:

- $-\nabla p$ : Força de pressão resultante por unidade de volume em um ponto. Representado pelo vetor gradiente com uma componente  $x$  uma  $y$  e uma  $z$
- $\rho\vec{g}$ : Força de campo (gravitacional) por unidade de volume em um ponto

## 1.2 Variação de Pressão em um Fluido Estático

A seção anterior foi de suma importância por introduzir a modelagem matemática básica para a estática de fluidos, com a equação 4. A partir disso, podemos dissecar tal equação e relacionarmos o que sabemos na prática (que a pressão aumenta com a profundidade) com a modelagem.

Para tal, precisamos primeiro considerar que estamos lidando com um **líquido incompressível**, de tal forma que  $\rho = \text{const}$  e também que a gravidade é uma constante e aponta na direção  $z$  somente. A partir disso, precisamos analisar a equação 4 somente no eixo  $z$ , resultando em:

$$\begin{aligned} -\nabla p + \rho \vec{g} &= 0 \\ -\frac{\partial p}{\partial z} + \rho(-g_z) &= 0 \\ -\frac{dp}{dz} + \rho(-g_z) &= 0 \end{aligned} \tag{5}$$

$$\begin{aligned} dp &= +\rho g_z dz \\ \int_{p_0}^p dp &= \int_{z_0}^z \rho g_z dz \\ p - p_0 &= \rho g_z (z - z_0) \\ \Delta p &= \rho gh \end{aligned} \tag{6}$$

É importante ressaltar que, a equação 6 só é válida para:

- Fluido Estático
- A gravidade é a única força de campo
- O eixo  $z$  é vertical voltado para cima

Além disso, a equação 5 é importante para os casos em que o fluido não é incompressível (e por conseguinte a massa específica  $\rho$  pode variar com a pressão  $p$ ). Para esses casos, devemos partir nossas contas dessa equação e fazer a integral para o devido  $\rho = f(p)$ , como é nos casos dos gases ideais. Importante ressaltar que o sinal da gravidade é negativo pois o eixo  $z$  é positivo para cima, **se o eixo  $z$  for positivo para baixo o sinal da gravidade na equação 5 seria positivo.**

## 1.3 Variação de Pressão Em um Gás Ideal