Class Notes - Análise Linear de Sistemas

Pedro Henrique Limeira da Cruz

February 26, 2023

Contents

Introdução

Sistemas Lineares

$\hookrightarrow$ Estudamos sistemas lineares pois eles aparecem em diversos sistemas físicos (como circuitos, sistemas mecânicos, processamento de sinais, etc).

$\hookrightarrow$ Além disso, muitos sistemas, mesmo que não lineares, podem, em uma pequena faixa, serem tratados como lineares, para então aplicarmos as ferramentas/técnicas que serão abordadas nesse curso.

$\hookrightarrow$ No primeiro momento, a principal ferramenta que iremos utilizar para modelar tais sistemas do mundo real são Equações Diferenciais, que vimos em calculo 3.

Relembrando Equações Diferenciais Ordinárias

$\hookrightarrow$ Podemos interpretar equações diferencias como sendo equações onde, como resultado, teremos uma função, que descreve certo comportamento do sistema.

$\hookrightarrow$ Para facilitar o nosso estudo, nós categorizamos as equações diferenciais de acordo com certos parâmetros.

Linearidade

$\hookrightarrow$ Uma equação Diferencial pode ser Linear se e somente si:

1. A variável dependente e suas derivadas estiverem elevadas somente a 1.
2. Os coeficientes (que multiplicam a variável dependente e suas derivadas) forem compostos apenas da variável independente.

E o que é Variável dependente e Independente? Uma **variável dependente**, como o nome sugere, é aquela que está em função de outra variável, aqui no nosso caso, normalmente teremos sempre variáveis dependentes em **função do tempo**, que por sua vez é chamada de variável independente.

- **Exemplos**

$$x^5\frac{d^5y}{dx^5} + x^3\frac{d^3y}{dx^3} \rightarrow \text{É } \textit{Linear}$$

$$\boxed{y\frac{dy}{dx}} + \frac{dy}{dx} \rightarrow \textit{Não é Linear}$$

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} + \frac{g}{L}\boxed{\sin\theta} = 0 \rightarrow \textit{Não é Linear}$$

Homogeneidade

$\hookrightarrow$ No geral, EDOs tem a seguinte estrutura:

$$q(x)\frac{dy}{dx} + r(x)y = g(x)$$

$\hookrightarrow$ Dizemos que a EDO é homogênea si e somente si $g(x) = 0$, i.e se **não** houver componente sem a variável dependente.

Em Suma

$\hookrightarrow$ Após termo definido que, para o estudo de sistemas, iremos utilizar equações diferenciais, e suas diferentes categorizações, iremos introduzir diversos modelos de sistemas do mundo real e os diferentes tipos de EDO que são utilizados para descreve-los, além de técnicas para sua solução.

Sistemas de Primeira Ordem

Created: August 18, 2022 4:17 PM

Anotações de Aula

- SUMMARY

Introdução

↪ O primeiro tipo de sistema que iremos modelar são os chamados sistemas de primeira ordem, que nada mais são que sistemas que são descritos por equações diferencias ordinárias (EDO$_s$) de primeira ordem (como o próprio nome sugere), isso é, que a maior derivada presente (da variável dependente) é de primeira ordem.

Sistema de Primeira Ordem - Resistor e Capacitor

↪ O exemplo clássico de um sistema de primeira ordem é um circuito elétrico composto de fonte, resistor e capacitor, como mostrado na figura ao lado, em que queremos descrever o comportamento da tensão no capacitor (v_c) ao longo do tempo.

Sistemas de Primeira Ordem 4a92bccb8ec04b64bc28465836935415/Scree

Figure 1: Screen Shot 2022-08-18 at 5.03.46 PM.png

↪ Ao fazermos a análise de malha, temos que:

$$v_E = v_R + v_c$$

↪ Além disso, como não temos divisão de nós, temos que há somente uma corrente no circuito como um todo, levando isso em consideração, mais o fato de que a corrente de um capacitor é dado por:

$$i_c(t) = C\frac{d}{dt}v_c(t)$$

↪ Com isso, juntamente com a lei de ohm, podemos botar a equação de número 1 em função de v_c, o que queremos achar. Resultando em:

$$(RC)\dot{v_c} + v_c = v_E$$

↪ Resultando em uma EDO Linear de primeira ordem **não homogênea**, devido a componente v_E, que é chamada de **termo forçante**, ou também de **excitação** ou **entrada**.

Solução de Sistemas de Primeira Ordem

Solução Homogênea

↪ Uma das formas mais básicas de resolução de EDOs homogêneas é usando o o método onde se assume o formato da solução, e posteriormente substituímos na EDO para calcularmos os coeficientes.

↪ Sabemos que, no geral, a solução de uma EDO de primeiro grau padrão, dada por $\dot{y} + a_1 y = 0$ tem o seguinte forma:

$$y(x) = Ae^{\lambda x}$$

$\hookrightarrow$ Ao substituir na EDO original, como mostrado no exemplo abaixo, encontramos a Solução Geral. Posteriormente nós substituímos (na solução proposta, no nosso caso na eq de y(x) e NÃO na EDO novamente) os valores da condição inicial para acharmos os valores de A e λ, encontrando finalmente a solução da EDO.

IMPORTANTE: É de suma importância deixarmos o termo $\dot{y}$ com coeficiente 1. Se houver algo multiplicando ele basta multiplicarmos toda a EDO pelo seu inverso.

- **Exemplo**

`Sistemas de Primeira Ordem 4a92bccb8ec04b64bc28465836935415/Scree`

Figure 2: Screen Shot 2022-08-23 at 10.52.57 AM.png

Solução Não Homogênea

$\hookrightarrow$ Há diferentes formas de solucionar EDOs de primeira ordem não homogêneas, mas em Análise Linear de Sistemas, nesse primeiro momento, vamos ver as seguintes:

Método do Fator Integrante

- Nesse método nós temos, na EDO, nenhum coeficiente (i.e nada multiplicando) para a derivada da variável dependente, mais a soma de um fator dependente da variável dependente, como mostrado abaixo:

$$\frac{dy}{dx} + ay = g(x)$$

- A partir disso, temos que seguir os seguintes passos:
  1. Encontrar o Fator Integrante: Que é denotado por $\mu(x)$ e que é encontrado por:

  $$\mu(x) = \exp \int a \; dx$$

  2. Multiplicar Ambos os lados pelo fator integrante: Após multiplicarmos ambos os lados pelo nosso fator integrante temos, como resultado:

  $$\frac{d}{dx}\big(\mu(x) \cdot y(x)\big) = \mu(x)\big(g(x)\big)$$

  3. Integrar: A partir daqui podemos integrar de ambos os lados, que resultaria em:

  $$\mu(x) \cdot y(x)\Big|_{x_i}^{x_f} = \int_{x_i}^{x_f} \mu(x)g(x) \; dx$$

  4. Agora basta Isolar $y(x)$ no lado esquerdo, sendo que o lado direito vai depender do valor inicial de $y(0)$.

Método de Suposição

- Outro método bastante útil separa a solução de uma EDO não homogênea em duas partes:

$$y(t) = y_h(t) + y_p(t)$$

- Onde:

  - $y_h(t) \rightarrow$ Tem o formato da solução da EDO homogênea
  - $y_p(t) \rightarrow$ Pode assumir o formato de qualquer combinação linear da solução homogênea e o fator forçante (que é o que chamamos o termo não zero do lado direito da equação). Normalmente utilizamos o mesmo formato do fator forçante (e.g se for uma constante nós usamos uma constante, se for sin nós usamos sin, etc).

- Assim que determinamos a forma de cada componente nós substituímos, uma de cada vez, na EDO para acharmos alguns dos coeficientes.
- Após isso, nós substituímos a condição inicial dada na fórmula de $y(t) = y_h(t) + y_p(t)$ para acharmos os restantes dos coeficientes que não foram achados acima.

Nós usamos somente o FORMATO da solução homogênea, e não os valores que iríamos encontrar se desenvolver a EDO na sua forma homogênea.

Interpretação de Sistemas de Primeira Ordem

$\hookrightarrow$ Assim que resolvermos nossa EDO de primeiro grau nós teremos duas partes:

- **Resposta Homogênea do Sistema** $\rightarrow$ Parte que depende da condição inicial do nosso problema.
- **Resposta Forçada do Sistema** $\rightarrow$ Parte que não depende dos nossos valores iniciais.

$\hookrightarrow$ Além disso, poderemos analizar a resposta do nosso sistema no que tange seu comportamento no tempo:

- **Parte Transiente** $\rightarrow$ Dependente do tempo
- **Parte Permanente** $\rightarrow$ Não depende do tempo $\therefore$ se $t \rightarrow \infty$ a parte permanente vai representar nosso sistema

Sistemas de Segunda Ordem

Created: August 25, 2022 4:10 PM

Anotações de Aula

- SUMMARY

Introdução

$\hookrightarrow$ Vimos anteriormente sistemas físicos os quais eram modelados por equações diferenciais ordinárias de primeira ordem (os mais notórios circuitos elétricos RC).

$\hookrightarrow$ Iremos analizar, agora, sistemas físicos que necessitam de EDO$_s$ de **segunda ordem** para serem modelados, além de algumas técnicas para sua resolução e análise.

$\hookrightarrow$ Algo importante de ser dito é que iremos utilizar sistemas mecânicos como uma forma de exemplificação e motivação para sistemas de segunda ordem, mas que tais sistemas são estudados mais a fundo em outras matérias (principalmente Dinâmica e Sistemas de Vibrações).

Sistema de Segunda Ordem - Sistemas Mecânicos Translacionais

Componentes Mecânicos e suas Modelagens

$\hookrightarrow$ Antes de entrarmos na modelagem de sistemas como um todo, é de suma importância nos familiarizarmos com os principais componentes/modelos matemáticos utilizados em sistemas mecânicos.

Molas

Sistema de Mola Ideal

- O primeiro componente de um sistema mecânico que vamos analizar é a mola.

Sistemas de Segunda Ordem 7cce407b38fb4322a04efbceb4baea55/Screen

Figure 3: Sistema de Mola Ideal

- A mola apresenta duas principais características que precisam ser levadas em consideração quando a analisamos, sendo elas:
    1. **Rigidez** $k \rightarrow$ É uma característica Física da mola.
    2. **Posição da Mola sem carga** $\rightarrow$ O tamanho, a partir da ponta da mola (mas que também pode ser a partir de outro referencial) em que a mola está sem nenhuma deformação.
- A partir da lei de Hooke sabemos que a **forçada de restauração**, i.e a força de reação a uma certa deformação, é proporcional ao deslocamento de tal deformação x e a rigidez da mola em análise k, resultando em:

$$F = kx$$

Amortecedores Viscosos

Sistemas de Segunda Ordem 7cce407b38fb4322a04efbceb4baea55/Screen

Figure 4: Amortecedor Ideal

Amortecedor Ideal

- O segundo mecanismos que iremos analizar é o amortecedor viscoso.
- Análogo à mola, o amortecedor possui algumas propriedades que são importantes durante sua análise:
    1. **Coeficiente de Amortecimento** $c \rightarrow$ Característica física do amortecedor.
- Além do coeficiente de amortecimento, a força de resistência aplicada pelo amortecedor também é dependente da velocidade da massa, resultando na seguinte fórmula:

$$F = c\dot{x}$$

IMPORTANTE: A velocidade que precisa ser levada em consideração é a velocidade relativa entre o "êmbolo" e o "corpo" do amortecedor, no nosso exemplo acima como o corpo do amortecedor está ligado a parede $\therefore$ ele está parado, com velocidade 0. Se possuísse uma velocidade v, e o êmbolo tivesse uma velocidade V, com $V > v$ temos que ficaria $F = c(V - v)$

Massas

Princípio Fundamental da Dinâmica

- A última coisa que é importante de ser revisada é a massa, juntamente com a segunda lei de Newton, que nos diz que a força resultante F em um corpo de massa m (que podemos interpretar como sendo a **inércia do corpo**) irá resultar em uma aceleração a. Dada pela seguinte equação:

Sistemas de Segunda Ordem 7cce407b38fb4322a04efbceb4baea55/Screen

Figure 5: Princípio Fundamental da Dinâmica

$$F = ma$$

Sistema Massa Mola

↪ Supondo um sistema simples composto por uma massa pendurada a uma mola, como mostrado na imagem ao lado.

↪ Onde k representa a rigidez da mola e Δ representa o deslocamento em um certo momento t tendo como referência a posição natural da mola sem carga.

Sistemas de Segunda Ordem 7cce407b38fb4322a04efbceb4baea55/Screen

Figure 6: Sistema Massa Mola em um estante t

Sistema Massa Mola em um estante t

Sistemas de Segunda Ordem 7cce407b38fb4322a04efbceb4baea55/Screen

Figure 7: DCL do corpo em análise

DCL do corpo em análise

↪ O primeiro passo para qualquer análise mecânica é a realização do DCL (i.e diagrama de corpo livre), onde é feito um diagrama somente com os corpos de interesse, que em questão é a massa m. Além disso é incluindo no nosso diagrama todas as forças externas que são aplicadas (no nosso caso a força peso F_p e a força de restauração elástica F_e).

↪ Algo que é de suma importância de ser estabelecido, ao se fazer um DCL é o / os referenciais que são utilizados. Não há somente um referencial possível de ser escolhido, mas é imprescindível que tal referencial seja respeitado durante toda a análise.

↪ A partir do DCL, e do fato de que o corpo está em movimento com uma aceleração $\ddot{\Delta}$, temos pela 2º Lei de Newton:

$$mg - k\Delta = m\ddot{\Delta}$$

↪ Rearranjando a equação acima para facilitar nossa análise, temos:

$$\ddot{\Delta} + \frac{k}{m}\Delta = g$$

$\hookrightarrow$ Que é uma Equação Diferencial Ordinária Linear de Segundo Grau Não Homogênea.

$\hookrightarrow$ Além disso, em matérias de mecânica nós chamamos $\sqrt{k/x}$ de frequência natural do sistema, denotado pela letra ω_n, a qual representa a frequência de oscilação do sistema naturalmente (i.e caso não haja nenhuma força de dissipação/amortecimento). Com isso podemos reescrever a equação acima em função da frequência natural:

$$\ddot{\Delta} + \omega_n^2\Delta = g$$

$\hookrightarrow$ Com a modelagem do sistema feita, basta resolvermos a equação diferencial ordinária de segunda ordem, que veremos mais adiante.

Sistema Massa Mola Amortecedor

Sistemas de Segunda Ordem 7cce407b38fb4322a04efbceb4baea55/Screen

Figure 8: Screen Shot 2022-08-31 at 4.34.35 PM.png

$\hookrightarrow$ Para um sistema massa mola amortecedor, como o mostrado a cima, temos:

- Mola $\rightarrow$ Com força elástica de restauração proporcional ao deslocamento x.
- Amortecedor $\rightarrow$ Com força contrária ao movimento proporcional à derivada no tempo do deslocamento (i.e a velocidade) $\dot{x}$.

$\hookrightarrow$ Ao fazermos o DCL, considerando, pela lei de Newton, que a força resultante é igual à massa (m) vezes a aceleração resultante do sistema ($\ddot{x}$) temos a equação diferencial não homogênea que rege o comportamento do sistema:

$$m\ddot{x} + c\dot{x} + kx = p(t)$$

$\hookrightarrow$ Essa equação, entretanto, pode ser reescrita na forma padrão de uma equação diferencial de segundo grau, que nos proporcionará uma análise sobre o comportamento do sistema de forma mais direta:

$$\ddot{x}(t) + 2\zeta\omega_n\dot{x}(t) + \omega_n^2 x(t) = g(t)$$

$\hookrightarrow$ Onde:

- $\zeta = c/(2\sqrt{km}) \rightarrow$ Chamado de "Fator de Amortecimento" (ou damping factor).
- $\omega_n = \sqrt{k/m} \rightarrow$ Chamado de "Frequência Natural"
- $g(t) = p(t)/m \rightarrow$ Chamado de Fator Excitante/ Fator Forçante

Solução de Sistemas de Segunda Ordem

$\hookrightarrow$ A forma mais fácil de solucionar sistemas de segunda ordem é, analogamente ao de primeira ordem, partindo de um formato da solução desejada.

$\hookrightarrow$ Vimos que para sistemas de primeira ordem a forma desejada, para a homogênea, era:

$$y_h(x) = Ae^{\lambda t}$$

$\hookrightarrow$ E a forma para não homogênea era:

$$y = y_h + y_p$$

$\hookrightarrow$ Onde y_p é uma solução particular da mesma forma do fator excitante.

$\hookrightarrow$ Já para sistemas de segunda ordem teremos, até mesmo para de equações homogêneas, duas possíveis formas para nossa solução. Isso se deve ao fato de que, para cada caso, uma forma é mais útil para a análise linear da resposta do sistema.

$\hookrightarrow$ As formas depende se o fator de primeira ordem da EDO (i.e o valor de primeira derivada $\dot{x}$) é nulo ou não (se está presente ou não na EDO).

Solução Homogênea

Termo de Primeira Ordem Nulo

$\hookrightarrow$ Considerando uma equação diferencial de segunda ordem homogênea (homogênea pois o fator forçante é nulo), mas com o fator de primeira ordem (i.e $\dot{x}$) não presente na EDO, da forma:

$$\ddot{x} + \omega_n^2 x = 0$$

$\hookrightarrow$ E com as condições iniciais:

$$x(0) = x_0 \quad e \quad \dot{x}(0) = \dot{x}_0$$

$\hookrightarrow$ Vamos resolver analogamente a como resolvemos problemas homogêneos de sistemas de primeira ordem, assumindo um formato para a solução.

$\hookrightarrow$ No caso de sistemas homogêneos de segunda ordem, entretanto, assumimos a solução como tendo o formato:

$$x(t) = Z\cos(\omega_n t + \phi)$$

$\hookrightarrow$ Onde:

- $Z \rightarrow$ Amplitude das oscilações
- $\omega_n \rightarrow$ Frequência natural
- $\phi \rightarrow$ Ângulo de fase

$\hookrightarrow$ Sabendo o formato geral da solução nós:

1. **Substituímos na EDO**: Ao substituir na EDO nós vamos achar alguns dos fatores listados acima, resultando na Solução Geral da EDO (que será útil caso venhamos resolver a mesma EDO mas não homogênea).
2. **Substituímos os Valores Iniciais**: Sobrarão ainda duas variáveis não descobertas, para tal usamos as duas condições iniciais. No caso de sistemas de segunda ordem, ao utilizar os valores inicias, é muito comum precisar da identidade $\cos^2 + \sin^2 = 1$ para isolar as variáveis, então é importante lembrar.

Observação: Nós utilizamos o formato como sendo coseno, mas na realidade poderíamos resolver tomando como formato a exponencial (mas seria mais difícil pois envolveria números imaginários), levando em consideração a identidade de Euler.

- Exemplo

Termo de Primeira Ordem Não Nulo

↪ Para casos onde o termo de primeira ordem não é nulo, a primeira coisa que precisamos fazer é **botá-la no formato padrão**:

$$
(t) + 2\zeta\omega\_n\dot{x}(t) + \omega 2\_nx(t) = 0
$$

↪ Precisamos, então, **supor** que o **resultado da nossa EDO tem o formato**:

$$x(t) = e^{\lambda t}$$

↪ Ao **substituirmos** tal valor na nossa EDO encontraremos:

$$(\lambda^2)e^{\lambda t} + (2\zeta\omega_n\lambda)e^{\lambda t} + (\omega_n^2)e^{\lambda t} = 0$$

↪ Para facilitar nossa análise, isolamos e agrupamos $e^{\lambda t}$, resultando em:

$$(\lambda^2 + 2\zeta\omega_n\lambda + \omega_n^2)e^{\lambda t} = 0$$

↪ Como $e^{\lambda t}$ é uma exponencial e nunca pode ser zero, temos então que:

$$\lambda^2 + 2\zeta\omega_n\lambda + \omega_n^2 = 0$$

↪ Que nada mais é que uma equação de segundo grau, a qual, através de Bhaskara, teremos os **possíveis valores de lambda**:

$$\lambda_1 = -\zeta\omega_n + \omega_n\sqrt{\zeta^2 - 1} \qquad \lambda_2 = -\zeta\omega_n - \omega_n\sqrt{\zeta^2 - 1}$$

↪ A partir disso, podemos classificar nosso sistema a partir do valor do fator de amortecimento (damping factor) ζ, pois é o termo que rege o comportamento das raizes da equação de segundo grau vista acima:

- $\zeta < 1 \rightarrow$ Sistema sub-amortecido, com 2 raizes imaginárias
- $\zeta > 1 \rightarrow$ Sistema Super-amortecido, com 2 raizes reais
- $\zeta = 1 \rightarrow$ Sistema Criticamente Amortecido, com 1 raiz real

↪ E para cada casos acima teremos uma forma para a nossa EDO.

Observação: Na próxima parte iremos interpretar mais detalhadamente o comportamento do sistema para cada tipo de categoria do fator de amortecimento através de gráficos, etc. Então não se preocupe muito, no momento o importante é botar a EDO no formato descrito acima para podermos resolve-la.

Observação: Até agora, a substituição pelo formato geral $e^{\lambda t}$ é para acharmos os λ, é a partir de agora que iremos substituir novamente a função, que dependera do fator de amortecimento, na nossa EDO para acharmos finalmente a solução.

- **Sistema Super-Amortecido** $\zeta > 1$
  - A partir do calculo de λ_1 e λ_2, iremos assumir o formato da solução da nossa EDO como sendo:

    $$x(t) = Ae^{\lambda_1 t} + Be^{\lambda_2 t}$$

  - Substituímos então tal forma, com os valores de λ_1 e λ_2 calculados anteriormente, nos valores da condição inicial, que resultará em um sistema:

    $$

$$\begin{cases} x(0) & \rightarrow x_0 = A + B \\ \dot{x}(0) & \rightarrow \dot{x}_0 = A\lambda_1 + B\lambda_2 \end{cases} \Rightarrow$$

$\begin{bmatrix} x_0 \\ \dot{x}_0 \end{bmatrix}$

$=$

$\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ \lambda_1 & \lambda_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A \\ B \end{bmatrix}$

$$

- Utilizando a propriedade de matriz inversa $A^{-1}A = I$ na matriz que contem λ_1 e λ_2 (e no outro lado da equação para mater a igualdade), conseguimos isolar a matriz que contem A e B, que é o que queremos, resultando em:

$$\begin{bmatrix} A \\ B \end{bmatrix} = \frac{1}{\lambda_2 - \lambda_1} \begin{bmatrix} \lambda_2 & -1 \\ -\lambda_1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_0 \\ \dot{x}_0 \end{bmatrix}$$

- Resultando em:

$$A = \frac{\dot{x}_0 - \lambda_2 x_0}{\lambda_1 - \lambda_2} \quad e \quad B = \frac{-\dot{x}_0 - \lambda_1 x_0}{\lambda_1 - \lambda_2}$$

- **Sistema Sub-Amortecido** $\zeta < 1$
  - Como dito anteriormente, para $\zeta < 1$ teremos duas raizes imaginárias.
  - Para esse caso, temos que a solução terá o mesmo formato da solução para o sistema super-amortecido:

$$x(t) = Ae^{\lambda_1 t} + Be^{\lambda_2 t}$$

  - Com:$\begin{aligned}

\end{aligned}$

$$A = \frac{\dot{x}_0 + (\zeta\omega_n + j\omega_d)x_0}{2j\omega_d}$$
$$B = \frac{-\dot{x}_0 + (\zeta\omega_d - j\omega_n)x_0}{2j\omega_d}$$

  - Onde:

$$\omega_d = \omega_n\sqrt{1 - \zeta^2}$$

  - Chamada de Frequência Natural Amortecida
- **Sistema Criticamente-Amortecido** $\zeta = 1$
  - Para esse caso, as duas raizes são iguais, i.e:

$$\lambda_1 = \lambda_2 = -\omega_n$$

  - Tendo então, como solução geral:

$$x(t) = Ae^{\lambda t} + Bte^{\lambda t}$$

– Com:

$$A = x_0$$
$$B = \dot{x}_0 + \omega_n x_0$$

Solução Não Homogênea

$\hookrightarrow$ O procedimento para achar a solução de equações não homogêneas de segundo grau é o mesmo de primeiro grau, onde nós supomos que a solução é a soma da solução particular e homogênea:

$$x(t) = x_h(t) + x_p(t)$$

$\hookrightarrow$ Onde a forma homogênea foi dada na parte anterior, e a solução particular nós supomos o mesmo formato do termo excitante/forçante.

IMPORTANTE: É de suma importância lembrar que, ao calcular a homogênea, nós usamos a mesma forma geral da homogênea (até o ponto onde se calcula as raízes λ_1 e λ_2, mas não até onde se calcula A e B, pois eles serão calculados em conjunto com a solução particular, ao se substituir os valores inicias)

Interpretação de Sistemas de Segunda Ordem

$\hookrightarrow$ A forma mais direta de interpretarmos sistemas de segunda ordem é pelo valor de seu ζ, chamado de fator de amortecimento ou ainda damping factor.

$\hookrightarrow$ Ele nos permite analizar o comportamento do sistema na fase transiente até atingir o estado permanente.

$\hookrightarrow$ Quando um sistema é sub-amortecido, com $\zeta < 1$ ele demora a convergir a um valor por ter um overshoot muito grande, sendo que com $\zeta = 0$ ele tende a ficar oscilante indefinidamente.

$\hookrightarrow$ Já para sistemas super-amortecidos, com $\zeta > 1$, ele tende a um número sem "overshoot".

$\hookrightarrow$ Em contra partida, sistemas criticamente amortecidos, com $\zeta = 1$, há a presença de overshoting, mas não tanto quanto um sistema sub-amortecido.

`Sistemas de Segunda Ordem 7cce407b38fb4322a04efbceb4baea55/Screen`

Figure 9: Screen Shot 2022-09-01 at 4.15.29 PM.png

Transformada de Laplace

Created: September 8, 2022 3:41 PM

Anotações de Aula

- SUMMARY

Introdução

$\hookrightarrow$ A transformada de Laplace é uma ferramenta muito importante pois passa nossa função em análise do domínio dos números reais para o domínio dos números complexos, que pode ser interpretado como como a mudança do domínio do tempo t para o domínio da frequência.

$\hookrightarrow$ Além desse novo domínio de análise, as equações diferenciais se tornam problemas meramente algébricos e polinomiais, o que facilita a sua solução. Ademais, ao descrevermos nosso sistema no domínio de Laplace (denominado domínio s) seremos capazes de descrever nosso sistema através de Funções de Transferência (que são muito úteis na análise da resposta do nosso sistema para diferentes formas de entradas/termos forçantes).

$\hookrightarrow$ A transformada é dada pela seguinte integral:

$$\mathcal{L}\{f(t)\} = F(s) = \int_{0^-}^{\infty} f(t)e^{-st}dt$$

$\hookrightarrow$ Em que:

$$s = \underbrace{\sigma}_{real} + \overbrace{j\omega}^{Imaginário}$$

$\hookrightarrow$ Onde é importante salientar que a transformada acima é chamada de "transformada unilateral de Laplace", pois vai, nos limites de integração, de $0^- \to \infty$, e não de $-\infty \to \infty$.

Requisito de Existência

$\hookrightarrow$ O principal requisito de existência para a transformada de Laplace de uma função $f(t)$ é que haja uma ***abcissa de convergência***, i.e um ponto no plano s onde a integral que define a transformada converge, e não vá para infinito.

$\hookrightarrow$ Tal abcissa de convergência existe sempre que houver um σ que, para t tendendo a ∞, a função abaixo tende a ir para zero, e não a infinito:

$$\lim_{t\to\infty} |f(t)|e^{\sigma t} = 0$$

Em suma, antes de aplicar a transformada de Laplace é necessário averiguar se há um σ tal que o limite descrito acima tenda a zero, e não a infinito. Caso não houver a transformada de Laplace não pode ser aplicada.

Transformadas das Principais Funções

$\hookrightarrow$ Nos problemas que iremos analisar, encontraremos, de forma recorrente, algumas funções que por sua vez possuem transformadas de Laplace bem conhecidas.

$\hookrightarrow$ Iremos, nessa parte do Capítulo, derivar a partir das funções comuns suas Transformadas.

Função Exponencial

- Seja a função exponencial dada por:

$$f(t) = \begin{cases} Ae^{-\alpha t} & , t \geq 0 \\ 0 & , t < 0 \end{cases}$$

- Ao aplicarmos a definição da transformada de Laplace, como estamos calculando a Laplace Unilateral, logo só iremos analizar a partir de $t \geq 0$ temos:

  `$$`

  L{f(t)} = ∫ _{0⁻}{∞}$Ae^{\{-\alpha t\}e\{-st\}dt\$\$Apartirdeagoraprecisamos,antesdedarcontinuidadeeresolveraintegral,verificarseháaabcissadeconv}$
  tal que $\lim_{t\to\infty Ae^{-\alpha t}e^{-\sigma t}} = 0$:

$$
\begin{aligned}
\lim_{t\to\infty}\left(Ae^{-\alpha t}e^{-\sigma t}\right) &= \lim_{t\to\infty}\left(Ae^{-\alpha t+(-\sigma t)}\right)\\
&= \lim_{t\to\infty}\left(Ae^{-t(\alpha+\sigma)}\right)
\end{aligned}
$$

- Onde:

$$
\begin{aligned}
\lim_{t\to\infty}\left(Ae^{-t(\alpha+\sigma)}\right) = 0 &\iff (\alpha+\sigma) > 0\\
&\therefore \sigma = -\alpha
\end{aligned}
$$

- Pois, caso o parênteses que está presente na exponencial de negativo, juntamente com o sinal de negativo do t, ao invés de termos o t, que tende ao infinito, no denominador (e por conseguinte levando a zero o limite), teremos ele no numerador (o que resultará em uma indeterminação pois vai a ∞).
- A partir desse ponto, provamos que existe a abcissa de convergência $\therefore$ a existência da transformada de Laplace para a função em questão, podemos resolver a integral:

$$
\begin{aligned}
\mathcal{L}\{f(t)\} &= \int_{0^-}^{\infty} Ae^{-\alpha t}e^{-st}dt\\
&= \int_{0^-}^{\infty} Ae^{-t(\alpha+s)}dt\\
&= A\frac{-1}{(\alpha+s)}\left[\lim_{t\to\infty}\left(e^{-t(\alpha+s)}\right) - e^{0}\right]
\end{aligned}
$$

- No que tange o limite acima, como, ao provar a existência da abcissa de convergência, averiguamos a existência de um σ tal que $f(t)e^{-t\sigma} \to 0$ quando $t \to \infty$ e que, por definição, $s = \sigma + j\omega$, podemos decompor o limite acima deixando explicito o σ, e decompondo a parte imaginaria pela identidade de Euler em seno e cosseno, resultando em:

$$
\begin{aligned}
\lim_{t\to\infty}\left(e^{-t(\alpha+s)}\right) &= \lim_{t\to\infty}\left(e^{-t(\alpha+\sigma+j\omega)}\right)\\
&= \lim_{t\to\infty}\left(e^{-t(\alpha+\sigma)}\cdot e^{j\omega}\right) = \lim_{t\to\infty}(e^{-t(\alpha+\sigma)}\cdot e^{j\omega t})
\end{aligned}
$$

$$
= \lim_{t\to\infty}(\underbrace{e^{-t(\alpha+\sigma)}}_{0}\cdot(\cos(\omega t) - j\sin(\omega t)))
$$

$$
= 0
$$

- A partir desse ponto, provamos que o limite tende a zero logo temos:

$$
\mathcal{L}\{Ae^{-\alpha t}\} = +A\frac{1}{(\alpha+s)}
$$

- Por fim, é importante introduzir o conceito de Polo de uma função no plano S, que representa o valor de s para o qual a função vai para infinito, nesse caso temos um polo em $s = -\alpha$.

IMPORTANTE: Uma função de ordem n terá n polos, mesmo se forem repetidos é importante falar o valor do polo e ressaltar a multiplicidade (quantidade de vezes que o valor é polo)

Função Degrau

- Para a função degrau (também chamada de Heaviside Function), que é dada por:

$$f(t) = \begin{cases} 1 & ,t \geq 0 \\ 0 & ,t < 0 \end{cases}$$

-

Função Rampa

Função Impulso (Delta de Dirac)

Sistemas e Sinais Discretos

Created: October 5, 2022 4:18 PM

Anotações de Aula

- SUMMARY

Introdução

↪ Basicamente tudo hoje em dia gira em torno de sistemas digitais.

↪ Tais sistemas, entretanto, não intrinsecamente discretos, pois trabalham, em seus níveis mais fundamentais, com valores discretos (bits).

↪ Por isso é de suma importância conseguirmos analizar sistemas que são descritos por dados discretos.

Definição de Sinais Discretos

↪ É de suma importância saber que, no que tange sinais discretos, há majoritariamente dois tipos:

- Sinais Naturalmente Discretos
- Sinais contínuos Discretizados

Sinais Naturalmente Discretos

↪ Um exemplo de algo naturalmente discreto é o número de recém-nascidos, valor diário de determinada bolsa de valores, etc.

Sinais Contínuos Discretizados

↪ Na maioria das vezes, entretanto, estamos tentando medir/representar um fenômeno que é naturalmente contínuo em sistemas digitais (e.g um computador) em que ter infinitos pontos/medições continuamente (i.e sem um intervalo) é inviável.

↪ Nesses casos, onde temos um sinal contínuo $x(t)$, teremos uma taxa de amostragem $t = KT$, onde T é o tempo e K é um número real.

↪ Podemos, ainda, representar o sinal discreto como sendo $x(k)$, onde k representa o número da amostra (ou seja do dado coletado).

Principais Sinais

Impulso Unitário

$$\delta(k) = \begin{cases} 1 & ,se\ k = 0 \\ 0 & ,se\ k \neq 0 \end{cases}$$

Sistemas e Sinais Discretos c31f42a2f7bb4ad2ab76f18a4d431de6/Scre

Figure 10: Screen Shot 2022-10-05 at 4.33.13 PM.png

Degrau Unitário

$$\mu(k) = \begin{cases} 1 & , se\ k \geq 0 \\ 0 & , se\ k < 0 \end{cases}$$

Sistemas e Sinais Discretos c31f42a2f7bb4ad2ab76f18a4d431de6/Scre

Figure 11: Screen Shot 2022-10-05 at 4.34.22 PM.png

Sequência Exponencial

$$x(k) = a^k, \quad a \in$$

Sistemas e Sinais Discretos c31f42a2f7bb4ad2ab76f18a4d431de6/Scre

Figure 12: Screen Shot 2022-10-05 at 4.36.55 PM.png

↪ É importante ressaltar duas coisas:

- Diferentemente de sistemas contínuos, a sequência exponencial tem por base qualquer valor a, e não somente e.
- Além disso, podemos ver que a sequência pode tanto convergir (como a em azul, para $a = 0.6$) como pode divergir (como a em vermelho, para $a = -1.1$). A partir disso podemos dizer que, para $**a < 0$ a exponencial DIVERGE**.

Sequência Periódica

$$x(k) = x(k + P), \quad P \in \mathbb{Z}$$

- Dos sinais supracitados, as sequências periódicas são as mais peculiares em sinais discretos. Isso se dá pois não necessariamente todos os sinais contínuos periódicos continuam periódicos após a discretização, a depender da frequência e da taxa de amostragem (que não é objetivo dos nosso estudos para essa matéria).

Propriedades de Sinais Discretos

$\hookrightarrow$ Analogamente ao que foi visto durante os estudos de sinais contínuos, os sinais discretos também apresentam certas propriedades.

Convolução

- A convolução entre dois sinais, $x(k)$ e $y(k)$ é dada por:

$$y(k) * x(k) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} y(k-n)x(n) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(k-n)y(n)$$

Convolução com o Impulso

- A partir da definição de convolução acima, podemos dizer que um sinal $x(k)$ pode sempre ser reescrito como sendo sua convolução com o impulso, ou seja:

$$x(k) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n)\delta(k-n)$$

- Ao analisarmos o impulso, podemos ver que ele é $\delta(k-n) = 1 \iff k = n \therefore x(k) * \delta(k) = x(k)$

Energia de uma Sequência

- A energia de uma sequência é definida como sendo:

$$E = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(k)x^*(k) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} |x(k)|^2$$

- Onde $x^*(k)$ é o complexo conjugado de $x(k)$

Equações de Diferenças

Created: October 6, 2022 3:55 PM

Anotações de Aula

- SUMMARY

Introdução

$\hookrightarrow$ Analogamente aos sistemas contínuos, os quais podiam ser modelados matematicamente por equações diferenciais, os sistemas discretos também podem ser modelados, mas pelas chamadas equações de diferenças, que possuem o seguinte formato.

$$y(k+1) = f(k, y(k)), \quad y(0) = y_0, \quad k = 0, 1, 2, ...$$

Classificação de equações de Diferença

$\hookrightarrow$ Assim como as equações diferenciais (para os sistemas discretos) eram classificadas de acordo com o grau da derivada presente (e.g primeiro grau, segundo grau, etc) as equações de diferença também tem essa classificação. Elas, entretanto, são caracterizadas não pela ordem da derivada (já que não possuem derivada por ser discreto, e não contínua), mas sim pelo maior α presente em $y(k+\lambda)$.

$\hookrightarrow$ Na equação de número 1 podemos ver que $\lambda = 1$ logo dizemos que ela é uma equação de diferença de primeira ordem.

$\hookrightarrow$ Além disso, um problema de valor inicial necessita, para uma equação de ordem n, n valores iniciais.

$\hookrightarrow$ Podemos, ainda, classificar uma equação de diferença a partir do fato dela ser igual, ou não, a zero, isso é, se há ou não um termo forçante (análogo ao caso contínuo).

Equações de Diferença de Primeira Ordem

Equações Homogêneas

$\hookrightarrow$ Considerando a seguinte equação:

$$y(k+1) = ay(k), \quad y(0) = y_0$$

$\hookrightarrow$ **Primeiramente** nós re-arranjamos a equação acima para igualar a zero, resultando em:

$$y(k+1) - ay(k) = 0$$

$\hookrightarrow$ Em **seguindo lugar**, supomos que a solução é dada por:

$$y(k) = Ca^k$$

$\hookrightarrow$ Onde C é uma constante arbitrária a ser determinada, no **terceiro passo**, ao substituir os valores iniciais na solução proposta.

$\hookrightarrow$ Podemos ainda analizar a equação de diferença no que tange sua característica de convergência, que depende de a, como mostrado abaixo:

$$\lim_{k \to \infty} y(k) = \begin{cases} 0 & , se\ |a| < 1 \\ y_0 & , se\ \ a\ = 1 \\ \nexists & , se\ |a| > 1\ ou\ a = -1 \end{cases}$$

$\hookrightarrow$ A partir disso vemos que é assintoticamente estável $\iff$ $|a| < 0$.

$\hookrightarrow$ Podemos ver também que para $a = -1$ a solução dará $y(k) = \{y_0, -y_0, y_0, -y_0, ...\}$, que possui duas subsequências convergentes, uma para y_0 e outra para $-y_0$ (a depender da taxa de amostragem).

Equações Não Homogêneas

$\hookrightarrow$ Considerando a seguinte equação não homogênea de primeira ordem:

$$y(k+1) = ay(k) + x(k), \quad y(0) = y_0, \quad k \geq 0$$

$\hookrightarrow$ E supondo que temos como o termo forçante (i.e a entrada) um degrau:

$$x(k) = \begin{cases} b, & k \geq 0 \\ 0, & k < 0 \end{cases}$$

$\hookrightarrow$ Temos, análogo aos sistemas contínuos, que a solução final $y(k)$ será composta por duas partes:

$$y(k) = y_h + y_p$$

$\hookrightarrow$ Onde:

- $y_h \rightarrow$ Solução no mesmo **formato** da homogênea associada
- $y_p \rightarrow$ Solução particular

IMPORTANTE Ressaltar que y_h tem o mesmo formato, mas não podemos substituir os valores das condições iniciais para achar C, é somente o formato Ca^k.

$\hookrightarrow$ Como já temos o formato da homogênea, o **primeiro passo** é achar um formato da particular. Como temos que a entrada, para $k \geq 0$ é uma constate, iremos supor que nossa resposta forçada y_p também é uma constante β, que precisamos achar:

$$y_p = \beta$$

$\hookrightarrow$ O **segundo passo**, então, é substituir na EDO para achar o β, resultando em:

$$\begin{aligned} y(k+1) &= ay(k) + x(k) \\ \beta &= a\beta + b \\ \beta - a\beta &= b \\ \beta(1-a) &= b \end{aligned}$$

$$\beta = \frac{b}{1-a}$$

$\hookrightarrow$ Se observarmos, entretanto, tal valor de β não é valido para $a = 1$. Para tais casos precisamos supor que um formato diferente para a resposta forçada:

$$y_p(k) = k\beta$$

$\hookrightarrow$ Substituindo na EDO, então, y_p tendo o formato acima para os casos em que $a = 1$ temos:

$$y_p(k) = kb$$

$\hookrightarrow$ Sendo o b da entrada degrau.

$\hookrightarrow$ A partir disso o **terceiro passo** é montar a equação de y completa (tanto parte homogênea quanto parte forçada) e substituir os valores iniciais, a fim de achar os coeficientes restante (nesse caso específico o único que falta é C da parte homogênea, o que bate com o fato de termos somente uma condição inicial)