

Resistência dos Materiais - I

Pedro Henrique Limeira da Cruz

May 30, 2023

Contents

1	Introdução e Definições	3
1.1	Modelos de Suporte e Vínculos	3
1.2	Equilíbrio Estático	3
1.3	Carregamentos Combinados	5
1.4	Equilíbrio Interno de Corpos	6
1.4.1	Convenção de Sinais	6
1.5	One Pager - Introdução e Definições	7
2	Método das Equações Diferenciais de Equilíbrio	8
2.1	Introdução e Equações Diferenciais	8
2.2	Condições de Contorno	9
2.3	Função de Singularidade	10
2.4	Método de Resolução - Equações Diferenciais de Equilíbrio	11
2.5	One Pager - Método das Equação Diferencias de Equilíbrio	12
3	Tensões e Deformações - Análise Infinitesimal	13
3.1	Estado de Tensões	13
3.2	Estado de Deformação	15
3.3	Equação Constitutiva	15
3.3.1	Modelagem	15
3.3.2	Propriedade dos Materiais Isotrópicos	17
3.3.3	Lei de Hook: Materiais Isotrópicos	18
4	Tensões e Deformações - Geometrias e Cargas Complexas	19
4.1	Momento de Inércia	19
4.2	Teoria Técnica: Barras	20
4.3	Teoria Técnica: Eixos	22

1 Introdução e Definições

A matéria de resistência dos materiais que iremos estudar nada mais é do que a análise de mecânica estática, só que, dessa vez, para corpos que se deformam. Levando isso em consideração, teremos primeiro que revisar alguns conceitos importantes de estática, sendo eles, de modo geral:

- Modelos de Suporte e Vínculos
- Equilíbrio Estático : cargas simples, combinadas, carregamentos distribuídos, ...

1.1 Modelos de Suporte e Vínculos

Como o nosso objetivo é modelar o sistema para aplicarmos os equacionamentos de estática (e mais para frente outros mais específicos de ResMat) precisamos, primeiro, ser capazes de identificar as forças que atuam sobre o corpo em análise. Por isso remos revisar as diferentes forças de reação que cada tipo de suporte gera em uma viga:

Nome	Exemplo	Representação	D.C.L	Descrição	Comentário
Roleta				<ul style="list-style-type: none"> •Resistente a forças em somente uma linha de direção •Reação de apoio: 1 incógnita 	Importante observar que a representação possui DUAS linhas horizontais abaixo do triângulo.
Pino				<ul style="list-style-type: none"> •Resistente a forças em duas linhas de ação •Reação de apoio: 2 incógnitas 	Importante observar que a representação possui somente UMA linha horizontal abaixo do triângulo.
Engaste				<ul style="list-style-type: none"> •Resiste a Forças e Momentos 	Até o momento é o único vínculo que resiste a momento.

Table 1: Principais Suportes e Vínculos - 2D

Tendo em vista que há diferentes suportes e vínculos, é importante entender o processo de escolha de vínculos durante análise de uma força/momento. Para tal, podemos nos perguntar:

1. **O apoio/vínculo impede algum movimento que será resultante da força sob análise?** Se a resposta for *não*, podemos simplesmente desconsiderar o vínculo na nossa modelagem. Se a resposta for *sim*, ele impede um movimento, podemos prosseguir para outras perguntas.
2. **O apoio/vínculo impede que a peça "gire" como resultado da força?** Se a resposta for *sim* isso significa que o suporte restringe tanto forças quanto *momentos*. Como temos somente um vínculo (o engaste) que tem essa característica, podemos usa-lo durante nossa modelagem. Se a resposta for não, ficamos entre um rolete e um pino.
3. **O apoio/vínculo impede a movimentação, que seria resultante da força, em mais de um eixo?** Se *sim*, temos um pino. Caso contrário teremos um rolete.

1.2 Equilíbrio Estático

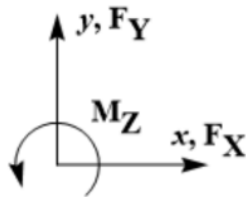
Como dito anteriormente, o ponto de partida de ResMat é a estática mecânica. Agora que já definimos os principais modelos de forças de reação, podemos descrever o equilíbrio estático (assim como foi feito durante o estudo de Estática).

O principal conceito que rege o equilíbrio estático é que o sistema não possui aceleração, logo há a conservação tanto da quantidade de movimento linear quanto angular, resultando nas respectivas equações:

$$\sum \vec{F} = 0 \Rightarrow \begin{cases} \sum F_x = 0 \\ \sum F_y = 0 \\ \sum F_z = 0 \end{cases}$$

$$\sum \vec{M} = 0 \Rightarrow \begin{cases} \sum M_x = 0 \\ \sum M_y = 0 \\ \sum M_z = 0 \end{cases}$$

Para problemas de sistemas planos, as equações se resumem à:



$$\begin{aligned} \sum F_x &= 0 \\ \sum F_y &= 0 \\ \sum M_z &= 0 \end{aligned}$$

A depender da topologia, no que tange equilíbrio estático, um sistema pode ser definido como:

- **Sistema Isostático:** As vinculações são suficientes para satisfazer o equilíbrio estático, número de incógnitas igual ao numero de equações.
- **Sistema Hiperestático:** As vinculações são em excesso para satisfazer o equilíbrio estático, número de incógnitas maior ao numero de equações.
- **Sistema Hipostático:** As vinculações não são suficientes para satisfazer o equilíbrio estático, número de incógnitas menor ao numero de equações.

1.3 Carregamentos Combinados

Já vimos anteriormente no caso de cargas combinadas que, a depender das forças que o corpo sofre (e resiste) nós iremos representar os suportes e vínculos de uma forma específica. Agora, nós iremos expandir esse assunto e descrever de forma detalhada os diferentes modelos que nós usamos para os corpos que sofrem essas forças e reações e descrever suas prioridades.

A parte mais fundamental para entender o porque há diferentes modelos para descrever os corpos que **são esbeltos** (*i.e* possuem comprimento muito maior que sua largura e altura) é:

Problemas de carregamento transversal, longitudinal e torsional são independentes

Isso nos diz que podem haver problemas de carregamentos combinados que sejam necessários 3 modelos distintos para serem modelados, cada um com um modelo específico para o corpo, como podemos ver abaixo:

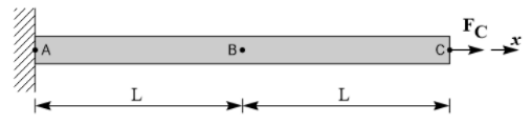
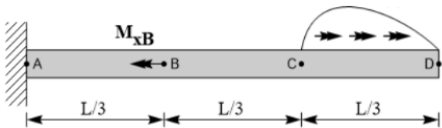
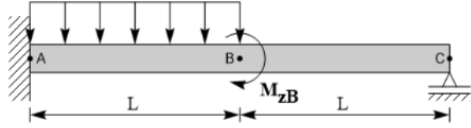
Nome	Exemplo	Descrição	Equação
Barra		Corpos sujeitos somente a car- gas logitudinais/axiais	$\sum F_x = 0$
Eixo		Corpos sujeitos somente a car- gas torcionais	$\sum M_x = 0$
Viga		Corpos sujeitos somente a car- gas transversais e/ou momen- tos fletores	$\sum M_z, F_y = 0$

Table 2: Tabela de Modelos para Corpos Esbeltos

1.4 Equilíbrio Interno de Corpos

Para começarmos a entrar no assunto de deformação dos corpos, é primeiro necessário entender que quando há o **equilíbrio estático de um corpo**, há também um **equilíbrio entre quaisquer duas partes internas** do corpo, que **sofrem esforços internos**, sendo eles:

- Esforços Axial $N_x(x)$
- Esforço Cortante $V_y(x)$
- Momento Fletor $M_z(x)$
- Momento Torsor $M_x(x)$

1.4.1 Convenção de Sinais

Quando estivermos lidando com a análise de esforços internos e deformações de corpos, nós iremos seguir a seguinte convenção de sinais:

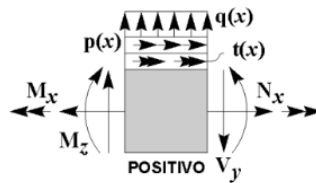


Figure 1: Convenção de Sinais para Esforços Internos

A partir dessa convenção e da análise dos momentos fletores M_z e esforços cortantes V_x conhecidos nós somos capazes de analisar a deformação de um corpo esbelto (*e.g* uma viga), como mostrado abaixo:

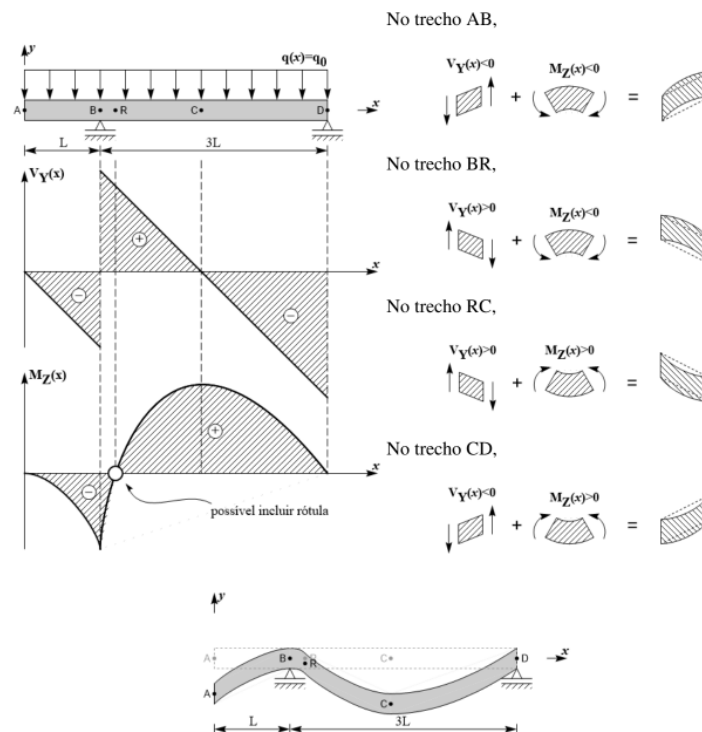


Figure 2: Exemplo de Análise de Forças Internas e Deformação

1.5 One Pager - Introdução e Definições

Modelo de Suportes:

Nome	Exemplo	Representação	D.C.L	Descrição	Comentário
Roleta				<ul style="list-style-type: none"> Resistente a forças em <i>so</i>mente <i>uma</i> linha de direção Reação de apoio: 1 incógnita 	Importante observar que a representação possui DUAS linhas horizontais abaixo do triângulo.
Pino				<ul style="list-style-type: none"> Resistente a forças em <i>duas</i> linhas de ação Reação de apoio: 2 incógnitas 	Importante observar que a representação possui <i>somente</i> UMA linha horizontal abaixo do triângulo.
Engaste				<ul style="list-style-type: none"> Resiste a Forças e Momentos 	Até o momento é o único vínculo que resiste a momento.

1. O apoio/vínculo impede algum movimento que será resultante da força sob análise? Se a resposta for *não*, podemos simplesmente desconsiderar o vínculo na nossa modelagem. Se a resposta for *sim*, ele impede um movimento, podemos prosseguir para outras perguntas.
2. O apoio/vínculo impede que a peça "gire" como resultado da força? Se a resposta for *sim* isso significa que o suporte restringe tanto forças quanto *momentos*. Como temos somente um vínculo (o engaste) que tem essa característica, podemos usa-lo durante nossa modelagem. Se a resposta for *não*, ficamos entre um rolete e um pino.
3. O apoio/vínculo impede a movimentação, que seria resultante da força, em mais de um eixo? Se *sim*, temos um pino. Caso contrário teremos um rolete.

Equilíbrio Estático e Definição:

$$\sum F_x = 0$$

$$\sum F_y = 0$$

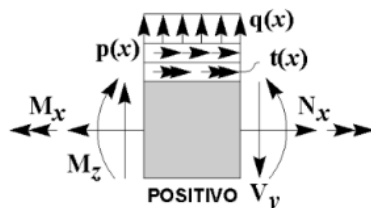
$$\sum M_z = 0$$

- **Sistema Isostático:** As vinculações são suficientes para satisfazer o equilíbrio estático, número de incógnitas igual ao número de equações.
- **Sistema Hiperestático:** As vinculações são em excesso para satisfazer o equilíbrio estático, número de incógnitas maior ao número de equações.
- **Sistema Hipostático:** As vinculações não são suficientes para satisfazer o equilíbrio estático, número de incógnitas menor ao número de equações.

Carregamentos Combinados e Modelos de Corpos Esbeltos:

Nome	Exemplo	Descrição	Equação
Barra		Corpos sujeitos somente a cargas longitudinais/axiais	$\sum F_x = 0$
Eixo		Corpos sujeitos somente a cargas torcionais	$\sum M_x = 0$
Viga		Corpos sujeitos somente a cargas transversais e/ou momentos fletores	$\sum M_z, F_y = 0$

Convenção De Sinais - Esforços Internos:



- Esforços Axial $N_x(x)$
- Esforço Cortante $V_y(x)$
- Momento Fletor $M_z(x)$
- Momento Torsor $M_x(x)$

2 Método das Equações Diferenciais de Equilíbrio

2.1 Introdução e Equações Diferenciais

Até o momento nós vimos que se tivermos o esforço cortante e o momento fletor para um corpo nós somos capazes de deduzir a deformação. Agora, entretanto, iremos ver como que nós calculamos esses valores para um corpo sofrendo carregamento. O nome do método para tal é o **Método das Equações Diferenciais**, onde nós relacionamos cada tipo de load externo (para barras, vigas e eixos) com as respectivas reações internas, em um cenário diferencial (para uma parte infinitesimal do corpo de cada vez, para todo o corpo), como mostrado na tabela abaixo:

Cenário	Equação	Descrição
Barras	$\frac{d}{dx}N_x(x) = -p(x)$	Onde $-p(x)$ é o carregamento longitudinal sendo sofrido
Eixos	$\frac{d}{dx}M_x(x) = -t(x)$	Onde $-t(x)$ é o momento axial sofrido
Vigas: Cortante	$\frac{d}{dx}V_y(x) = +q(x)$	Onde $+q(x)$ é o carregamento transversal sofrido
Vigas: Momento Fletor	$\frac{d^2}{dx^2}M_z = \frac{d}{dx}V_y(x) = +q(x)$	Onde $+q(x)$ é o carregamento transversal sofrido

Table 3: EDOs para principais modelos de corpos esbeltos

Relembrando, onde:

- Esforços Axial $N_x(x)$
- Esforço Cortante $V_y(x)$
- Momento Fletor $M_z(x)$
- Momento Torsor $M_x(x)$

2.2 Condições de Contorno

Se lembrarmos bem de calculo 3 e de equações diferenciais, todas as EDOs de grau n precisam de n pontos conhecidos para possam ser resolvidos, onde eles podem ser Pontos de Contorno ou Condições Iniciais. Para o nosso caso, iremos estudar problemas com condições de contorno.

Para ser considerado uma condição de contorno é necessário:

1. Estar Definida no Contorno do modelo
2. Ser Conhecida a Priori
3. Ser Relevante para o Problema

Indo além, para os nosso problemas, 99% das vezes as condições de contorno estarão em vínculos localizados nas extremidades do corpo sendo estudado (*e.g* em uma ponta de uma viga). Iremos abaixo **descrever as condições de contorno para os principais vínculos/apoios QUANDO PRESENTES NAS EXTREMIDADES DO CORPO**¹.

Vínculo	Equações	Observações
Extremidade Livre	$\sum M_x, M_z = 0$ $\sum N_x, V_y = 0$	Como uma extremidade livre não apresenta reação a força nem momento, se não for dito que há um valor diferente para tais, na extremidade em questão os valores serão zero.
Roleta	$\sum M_x, M_z = 0$ $\sum N_x = 0$	Como um rolete não apresenta reação a momento, se não for dito que há um valor diferente , na extremidade em questão o momento é zero (condição de contorno).
Pino	$\sum M_z = 0$	Como um rolete não apresenta reação a momento, se não for dito que há um valor diferente , na extremidade em questão o momento é zero (condição de contorno).

Table 4: Condições de Contorno para cada Vínculo

¹Como estamos lidando com análise no eixo x , somente os vínculos que estão localizados nas extremidades (em $x = 0$ ou $x = L$) são possíveis condições de contorno

2.3 Função de Singularidade

Até o momento vimos que podemos modelar os esforços e momentos interno de um corpo por equações diferenciais (como visto na tabela 3), e que para resolvê-las nós precisamos de condições de contorno (como visto na tabela 4). Antes de podermos resolver tais EDOs, entretanto, nós precisamos descrever os carregamentos externos que o corpo está sofrendo (que seriam os membros do lado direito das EDOs).

Para casos em que os carregamentos são contínuos tal tarefa é extremamente fácil, só igualar a EDO ao valor (ou equação contínua) para todo x . Para os casos em que os carregamentos não são contínuos, entretanto, isso não é tão simples.

Para tais cenários, nós usaremos as **Funções de Singularidade**, dados por:

$$\langle x - a \rangle^m = \begin{cases} 0 & x < a \\ (x - a)^m & x \geq a \end{cases} \quad (1)$$

Que apresenta os seguintes comportamentos, a depender do expoente m :

F. de Singularidade	Gráfico	Use Cases
$\langle x - a \rangle^0$		Usado mais durante análise de Vigas, quando há um carregamento de forças transversais para somente um intervalo da viga (<i>e.g</i> de $L/2 \leq x \leq L$). Podemos, ainda, subtrair dois com um shift para ter um intervalo entre a e b , como: $\langle x - a \rangle^0 - \langle x - b \rangle^0$
$\langle x - a \rangle^1$		Também usado mais para análise de carregamento de vigas, mas nesse caso a força é zero até certo ponto a e depois segue uma distribuição linear.
$\langle x - a \rangle^2$		Também usado mais para análise de carregamento de vigas, mas nesse caso a força é zero até certo ponto a e depois segue uma distribuição quadrática.
$\langle x - a \rangle^{-1}$		Usando bastante para representar forças pontuais durante análise de vigas, mas também usada para representar momentos durante análise de eixos.
$\langle x - a \rangle^{-2}$		Usado bastante durante análise de vigas para representar momentos fletores.

Table 5: Tabela de Função de singularidade

Além disso, é importante entendermos o comportamento das funções de singularidade em relação a integração:

$$\begin{aligned} \int \langle x - a \rangle^m dx &= \frac{\langle x - a \rangle^{m+1}}{m+1}, m \geq 0 \\ \int \langle x - a \rangle^{-1} dx &= \langle x - a \rangle^0 \\ \int \langle x - a \rangle^{-2} dx &= \langle x - a \rangle^{-1} \end{aligned}$$

2.4 Método de Resolução - Equações Diferenciais de Equilíbrio

Já vimos quais EDOs são aplicáveis para cada modelo, os possíveis valores de contorno e também como modelar as cargas externas sendo aplicadas, o que nos resta agora é saber como juntar todos esses dados em um problema para resolvê-lo. Para isso, nós vamos seguir 7 passos, como mostrado abaixo:

0. Separar Carregamentos externos que são separáveis em seus respectivos modelos (barra, eixo, viga).
1. Estabelecer uma convenção de sinais: A fim de padronizar, seguir a convenção da figura 1
2. Estabelecer uma equação diferencial: A partir da tabela 3
3. Descrever condições de Contorno e Restrição: Bom indicativo é começar pelos da tabela 4 + Comportamento de Rótulas
4. Integrar a equação diferencial: Como mostrado na subsection anterior
5. Determinar Constantes de Integração: Substituindo os valores de contorno (já que são os únicos pontos conhecidos)

Temos, ainda, algumas observações que podem ajudar a fazer os exercícios:

- Se há uma carga distribuída que é aplicada sobre um possível ponto de contorno (*e.g* como uma extremidade livre de um eixo engastado) por ela ser DISTRIBUÍDA, em um só ponto ela é igual a zero logo A CONDIÇÃO DE CONTORNO AINDA É VÁLIDA. Então se for uma extremidade livre, mesmo com um momento torsor distribuído sendo aplicado, no ponto ele é zero.
- Durante a modelagem dos valores de contorno, é importante ressaltar que eles seguem as convenções de sinais da figura 1, já para a modelagem da carga externa de momento fletor (não localizada nas extremidades) é positivo no sentido horário (como mostrado na imagem representativo da tabela das funções de singularidade).
- NÃO se bota no equacionamento de cargas os valores dos pontos de contorno.
- Quando for esboçar o gráfico lembrar que:
 - ☐ Quando for esboçar um intervalo, lembre de literalmente riscar partes que não são aplicáveis (para evitar que você calcule);
 - ☐ Antes de tentar esboçar um intervalo, simplifique o máximo possível (em função de x mesmo, é mais fácil);
 - ☐ Substitua o valor inicial do intervalo somente no final da análise da seção, para saber a partir de qual ponto a seção começa, mas simplifique a equação SEM substituir valores.

2.5 One Pager - Método das Equação Diferencias de Equilíbrio

Equações Diferenciais por Modelo de Corpo Esbelto:

Cenário	Equação	Descrição
Barras - Esforço Axial	$\frac{d}{dx} N_x(x) = -p(x)$	Onde $-p(x)$ é o carregamento longitudinal sendo sofrido
Eixos - Momento Torsor	$\frac{d}{dx} M_x(x) = -t(x)$	Onde $-t(x)$ é o momento axial sofrido
Vigaa - Esforço Cortante	$\frac{d}{dx} V_y(x) = +q(x)$	Onde $+q(x)$ é o carregamento transversal sofrido
Vigas - Momento Fletor	$\frac{d^2}{dx^2} M_z = \frac{d}{dx} V_y(x) = +q(x)$	Onde $+q(x)$ é o carregamento transversal sofrido

Condição de Contorno:

Vínculo	Equações	Observações
Extremidade Livre	$\sum M_x, M_z = 0$ $\sum N_x, V_y = 0$	Como uma extremidade livre não apresenta reação a força nem momento, se não for dito que há um valor diferente para tais, na extremidade em questão os valores serão zero.
Rolete	$\sum M_x, M_z = 0$ $\sum N_x = 0$	Como um rolete não apresenta reação a momento, se não for dito que há um valor diferente , na extremidade em questão o momento é zero (condição de contorno).
Pino	$\sum M_z = 0$	Como um rolete não apresenta reação a momento, se não for dito que há um valor diferente , na extremidade em questão o momento é zero (condição de contorno).

- ☐ Estar Definida no Contorno do modelo
- ☐ Ser Conhecida a Priori
- ☐ Ser Relevante para o Problema

Definição de Função de Singularidade:

F. de Singularidade	Gráfico	Use Cases
$\langle x - a \rangle^0$		Usado mais durante análise de Vigas, quando há um carregamento de forças transversais para somente um intervalo da viga (e.g de $L/2 \leq x \leq L$). Podemos, ainda, subtrair dois com um shift para ter um intervalo entre a e b, como: $\langle x - a \rangle^0 - \langle x - b \rangle^0$
$\langle x - a \rangle^1$		Também usado mais para análise de carregamento de vigas, mas nesse caso a força é zero até certo ponto a e depois segue uma distribuição linear.
$\langle x - a \rangle^2$		Também usado mais para análise de carregamento de vigas, mas nesse caso a força é zero até certo ponto a e depois segue uma distribuição quadrática.
$\langle x - a \rangle^{-1}$		Usando bastante para representar forças pontuais durante análise de vigas, mas também usada para representar momentos durante análise de eixos.
$\langle x - a \rangle^{-2}$		Usado bastante durante análise de vigas para representar momentos fletores.

Integração de Função de Singularidade:

$$\int \langle x - a \rangle^m dx = \frac{\langle x - a \rangle^{m+1}}{m + 1}, m \geq 0$$

$$\int \langle x - a \rangle^{-1} dx = \langle x - a \rangle^0$$

$$\int \langle x - a \rangle^{-2} dx = \langle x - a \rangle^{-1}$$

Passo a Passo:

0. Separar Carregamentos externos que são separáveis em seus respectivos modelos (barra, eixo, viga).
1. Estabelecer uma convenção de sinais: A fim de padronizar, seguir a convenção da figura 1
2. Estabelecer uma equação diferencial: A partir da tabela 3
3. Descrever condições de Contorno e Restrição: Bom indicativo é começar pelos da tabela 4 + Comportamento de Rótulas
4. Integrar a equação diferencial: Como mostrado na subsection anterior
5. Determinar Constantes de Integração: Substituindo os valores de contorno (já que são os únicos pontos conhecidos)

Check list:

- ☐ Não está esquecendo nenhuma força ?
- ☐ Modelou correto as forças de reação de cada suporte?
- ☐ Separou os tipos de load para cada modelo de corpo correto?
- ☐ Não adicionou forças de contorno na modelagem do load externo?
- ☐ Determinou as condições de contorno e de restrição necessárias?

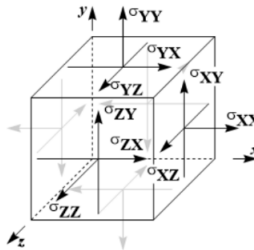
3 Tensões e Deformações - Análise Infinitesimal

A partir de agora, iremos analisar de forma mais detalhada as tensões que estão sendo aplicadas em um corpo e sua relação com a deformação sofrida resultante. Nesse primeiro momento, entretanto, iremos analisar faces infinitesimais, extrapolar para casos com corpos maiores mas extremamente simples (e.g cubos de madeira, ferro, etc) e com cargas e áreas contínuas e no próximo capítulo iremos analisar as tensões e deformações para eixos, barras e vigas com loads representados por equações de singularidade.

3.1 Estado de Tensões

Tensor de Tensões

Vimos que em um corpo, existem dois tipos de tensões, as **Tensões Normais** σ_{xx} , que como o próprio nome indica seu vetor estão orientados paralelo ao vetor normal da superfície, e as **Tensões de Cisalhamento** σ_{xy} , que representam as tensões "deslisantes" em um corpo. A fim de representar todas as tensões (tanto normais quanto de cisalhamento) presentes em *um ponto*, nós utilizamos um **Tensor de Tensões** (também chamado de Estado de tensões), que nada mais é que um tensor ² como mostrado abaixo:

$$\sigma = \begin{bmatrix} \sigma_{XX} & \sigma_{XY} & \sigma_{XZ} \\ \sigma_{YX} & \sigma_{YY} & \sigma_{YZ} \\ \sigma_{ZX} & \sigma_{ZY} & \sigma_{ZZ} \end{bmatrix}$$


Algo de suma importância de ser ressaltado é a **Simetria** do tensor de tensão, onde $\sigma_{ZX} = \sigma_{XZ}$, e assim por diante. Além disso, temos que a diagonal principal da matriz representa as tensões normais.

Tal tensor, pode ainda ser simplificado nso casos de *Estado plano de Tensões*, onde o tensor é reduzido para uma matriz 2×2 (um problema $2D$) quando as tensões com componentes z são nulas (e.g estudo de tensões em fuselagem e avião), como mostrado abaixo:

$$\sigma = \begin{bmatrix} \sigma_{XX} & \sigma_{XY} \\ \sigma_{YX} & \sigma_{YY} \end{bmatrix}$$


Uma observação importante de ser feita é que a tensão é dada por F/A para os casos onde as forças sendo aplicadas são uniformes, então as tensões de cisalhamento são dadas pelas forças paralela a face da superfície dividida pela área da superfície, e análogamente a tensão normal é a força normal à face sobre a área da face. Como podemos ver na imagem acima e descrito pela equação abaixo:

$$\sigma_{XX} = F_{N_X} / A_x$$

$$\sigma_{YY} = F_{N_Y} / A_y$$

.

.

.

²Um tensor é uma matriz que possui certas propriedades matemáticas, e.g mudança de coordenadas mantém significado físico

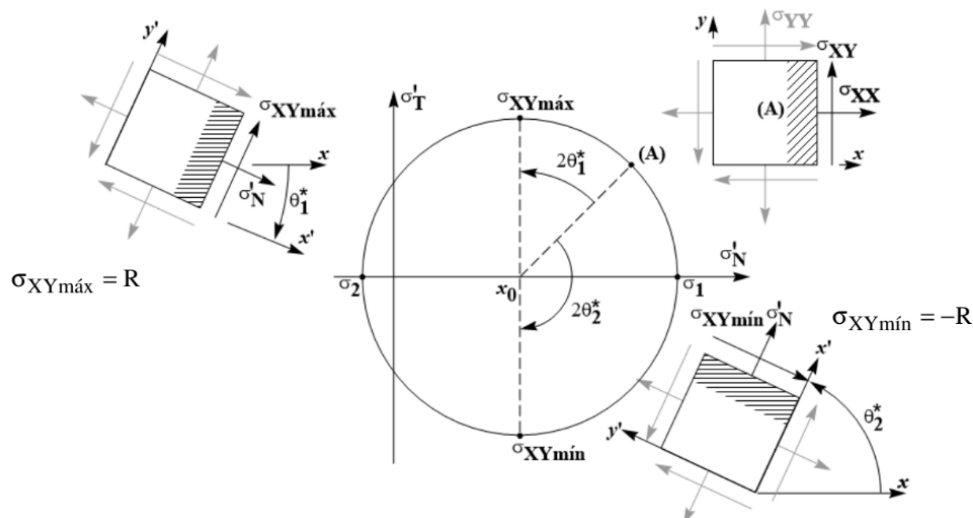
Círculo de Mohr

Acabamos de ver que para cada ponto em um corpo há um tensor de tensões que representa todas as tensões que um corpo está sofrendo. Como as tensões são cisalhantes e normais, o ângulo no qual estamos analisando o ponto influencia nos valores de cada tipo de tensão. Quando analisamos, entretanto, vemos que para um ponto qualquer, a análise dos valores das tensões normais e cisalhantes sob qualquer ângulo de análise ($0^\circ \leq \theta \leq 360^\circ$) caem sobre um círculo, chamado de **Círculo de Mohr**.

No círculo de Mohr nós temos no eixo x o valor das tensões normais e no eixo y o valor das tensões cisalhantes. Possuindo como centro e raio:

$$X_0 = \frac{\sigma_{XX} + \sigma_{YY}}{2}, R = \sqrt{\left(\frac{\sigma_{XX} - \sigma_{YY}}{2}\right)^2 + \sigma_{XY}^2}$$

Nós utilizamos esse círculo para calcular, a partir de uma orientação com as tensões conhecidas, os novos valores de tensões de cisalhamento e normais para qualquer nova orientação, pois existe uma relação entre o ângulo entre a nova orientação e a orientação original θ_{real} e o ângulo a ser analisado no círculo θ_{circ} , onde $\theta_{circ} = -2\theta_{real}$, isso é, para um ângulo θ_{real} entre a orientação de análise conhecida e a nova face de estudo, nós analisamos no círculo de Mohr um ponto que está a duas vezes θ_{real} , mas no sentido contrário, como podemos ver pela imagem abaixo:



Ser capaz de analisar os novos valores das tensões normais e de cisalhamento é importante pois certos materiais não são capazes de sustentar tensões normais de forma eficiente, o que pode levar a sua fadiga. Por isso denominamos a orientação com o maior valor de tensão normal ($\sigma_{n_{max}} = X_0 + R$) de **plano principal**. Além disso temos também os **Planos de Cisalhamento Máximo** que, como a origem do círculo está sempre no eixo x (eixo das tensões normais), possui o valor máximo de tensão de cisalhamento igual a R (igual ao raio do círculo).

Para facilitar a solução de problemas através do círculo de Mohr temos o seguinte passo a passo:

1. **Montar Tensor de Tensão:** Como dito anteriormente, somos capazes de ver cada componente da tensão a partir da relação F/A a partir das forças e áreas relacionadas.
2. **Cálculo de Centro:** Calcular o centro do círculo a partir das tensões normais.
3. **Cálculo de Raio:** Calcular o raio do círculo.
4. **Desenhar o Círculo:** Desenhar com os eixos corretos, com o centro e valores máximos e mínimos corretos.
5. **Localizar Ponto Conhecido:** A partir do tensor nós podemos representar a face x (utilizando a primeira linha do tensor) ou a face y (utilizando a segunda linha). A melhor escolha é aquela que facilita encontrar o ângulo alvo de análise.
6. **Desenhar Corpo a ser Analisado:** Nós fazemos o círculo a partir de uma posição conhecida (consideramos essa posição $\theta = 0$), e é necessário desenhar o corpo na nova posição a ser analisado para facilitar a identificação do ângulo do plano θ_{target} .
7. **Análise do Círculo:** Analisar o ponto $\theta_{circ} = -2\theta_{target}$.

3.2 Estado de Deformação

Deformações sofridas por estruturas podem ser descritas de diferentes formas, considerando somente deformações axiais, contínuas ou ainda angulares. A forma que iremos abordar é a mais generalista, chamada de **Estado Geral de Deformação**, que assim como o Estado geral de tensões é representado por um *tensor*, mostrado abaixo:

$$\varepsilon = \begin{bmatrix} \varepsilon_{XX} & \varepsilon_{XY} & \varepsilon_{XZ} \\ \varepsilon_{YX} & \varepsilon_{YY} & \varepsilon_{YZ} \\ \varepsilon_{ZX} & \varepsilon_{ZY} & \varepsilon_{ZZ} \end{bmatrix} \Rightarrow \varepsilon_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{du_i}{dx_j} + \frac{du_j}{dx_i} \right)$$

Onde, utilizando como exemplo ε_{XY} , temos $i = 1, j = 2$ e $\varepsilon_{XY} = 1/2 \left(\frac{du}{dy} + \frac{dv}{dx} \right)$. A partir desse exemplo podemos ver que estamos compondo o tensor com a soma das derivadas da deformação $\{u, v, w\}$, chamada de **campo de deslocamento**, em relação as coordenadas $\{x, y, z\}$. Logo quando falamos u_i estamos falando da i -ésima componente do campo de deslocamento e quando falamos x_j estamos falando a j -ésima coordenada (onde no nosso exemplo se temos $i = 1$ estamos falando da primeira componente (u) do campo de deslocamento, e com $j = 2$ estamos falando da segunda coordenada (y)).

Uma outra forma de calcular o estado de deformação, para o caso específico de **Deformação Térmica**, é:

$$\varepsilon_T = \alpha \Delta T$$

Onde temos α como o calor específico e ΔT a variação de temperatura. A partir disso, somos capazes de calcular a deformação total através da seguinte derivada (para o caso 2D de expansão térmica):

$$\delta = \int_0^L \varepsilon_T dx$$

3.3 Equação Constitutiva

3.3.1 Modelagem

A partir de agora iremos ligar as partes anteriores desse capítulo e investigar a relação entre as tensões sofridas por um corpo e sua deformação.

Tal relação, após inúmeros testes, foi descoberta ser dependente do material. De forma geral, a relação entre tensão e deformação é dada por:

$$\begin{Bmatrix} \sigma_{XX} \\ \sigma_{YY} \\ \sigma_{ZZ} \\ \sigma_{YZ} \\ \sigma_{XZ} \\ \sigma_{XY} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{13} & c_{14} & c_{15} & c_{16} \\ c_{21} & c_{22} & c_{23} & c_{24} & c_{25} & c_{26} \\ c_{31} & c_{32} & c_{33} & c_{34} & c_{35} & c_{36} \\ c_{41} & c_{42} & c_{43} & c_{44} & c_{45} & c_{46} \\ c_{51} & c_{52} & c_{53} & c_{54} & c_{55} & c_{56} \\ c_{61} & c_{62} & c_{63} & c_{64} & c_{65} & c_{66} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_{XX} \\ \varepsilon_{YY} \\ \varepsilon_{ZZ} \\ 2\varepsilon_{YZ} \\ 2\varepsilon_{XZ} \\ 2\varepsilon_{XY} \end{Bmatrix}$$

Onde a matriz $C \Rightarrow c_{ij}$ é composta por 36 propriedades do material em questão. Sendo que a depender do material e do seu tipo esse número pode ser menor devido a simetria entre outras coisas.

A partir disso, podemos classificar os diferentes materiais a depender do seu grau de simetria:

- Material Ansiotropico Geral
- Material Ortotrópico
- Material Transversalmente Isotrópico
- Material Isotrópico

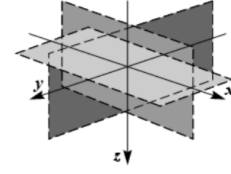
Ansiotropia Geral

Materias que possuem propriedades diferentes em todas as direções, mas que devido a existência de uma função de energia potencial tense que $c_{ij} = c_{ji}$

Material Ortotrópico

Materiais que possuem 3 eixos ortogonais de simetria, resultando na necessidade de 9 constantes independentes ($c_{11}, c_{12}, c_{13}, c_{22}, c_{23}, c_{33}, c_{44}, c_{55}, c_{66}$) para relacionar tensão e deformação. São descritos por:

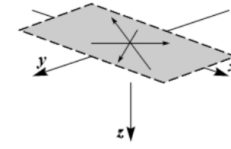
$$\begin{Bmatrix} \sigma_{XX} \\ \sigma_{YY} \\ \sigma_{ZZ} \\ \sigma_{YZ} \\ \sigma_{XZ} \\ \sigma_{XY} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{13} & 0 & 0 & 0 \\ c_{12} & c_{22} & c_{23} & 0 & 0 & 0 \\ c_{13} & c_{23} & c_{33} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & c_{44} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & c_{55} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & c_{66} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_{XX} \\ \varepsilon_{YY} \\ \varepsilon_{ZZ} \\ 2\varepsilon_{YZ} \\ 2\varepsilon_{XZ} \\ 2\varepsilon_{XY} \end{Bmatrix}$$



Material Transversalmente Isotrópicos

Materiais que possuem 1 plano de isotropoia, com a relação tensão-deformação sendo dada por 5 constantes independentes ($c_{11}, c_{12}, c_{13}, c_{33}, c_{44}$), com $c_{66} = (1/2)(c_{11} - c_{12})$. São descritos por:

$$\begin{Bmatrix} \sigma_{XX} \\ \sigma_{YY} \\ \sigma_{ZZ} \\ \sigma_{YZ} \\ \sigma_{XZ} \\ \sigma_{XY} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{13} & 0 & 0 & 0 \\ c_{12} & c_{11} & c_{13} & 0 & 0 & 0 \\ c_{13} & c_{13} & c_{33} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & c_{44} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & c_{44} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & c_{66} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_{XX} \\ \varepsilon_{YY} \\ \varepsilon_{ZZ} \\ 2\varepsilon_{YZ} \\ 2\varepsilon_{XZ} \\ 2\varepsilon_{XY} \end{Bmatrix}$$



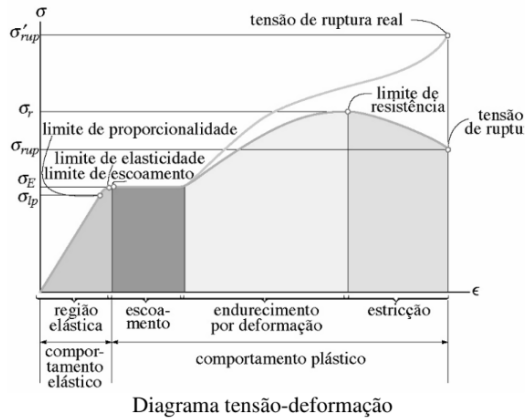
Material Isotrópico

Materiais que possuem as mesmas propriedades em todas as relações, com a relação tensão-deformação sendo dada por 2 constantes independentes (c_{11}, c_{12}), com $c_{44} = (1/2)(c_{11} - c_{12})$. São descritos por:

$$\begin{Bmatrix} \sigma_{XX} \\ \sigma_{YY} \\ \sigma_{ZZ} \\ \sigma_{YZ} \\ \sigma_{XZ} \\ \sigma_{XY} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{12} & 0 & 0 & 0 \\ c_{12} & c_{11} & c_{12} & 0 & 0 & 0 \\ c_{12} & c_{12} & c_{11} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & c_{44} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & c_{44} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & c_{44} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_{XX} \\ \varepsilon_{YY} \\ \varepsilon_{ZZ} \\ 2\varepsilon_{YZ} \\ 2\varepsilon_{XZ} \\ 2\varepsilon_{XY} \end{Bmatrix}$$

3.3.2 Propriedade dos Materiais Isotrópicos

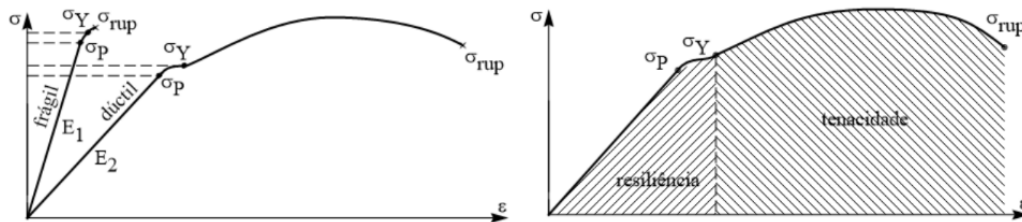
Os Materiais Isotrópicos (os quais a grande parte dos materiais de engenharia se enquadram) possuem um gráfico Tensão \times deformação característico, como mostrado abaixo:



Que possui os seguintes pontos importantes:

- **Modulo de Elasticidade - E :** inclinação da reta na parte elástica e primeira de duas propriedades indep. que definem materiais isotrópicos.
- **Limite de proporcionalidade - σ_P :** limite de tensão da parte linear da relação tensão e deformação.
- **Limite de Escoamento - σ_Y :** tensão a partir da qual ocorre deformação permanente.
- **Limite de Resistência - σ_U :** Tensão a partir que ocorre necking.
- **Tensão limite de ruptura - σ_{rup} :** Tensão de Ruptura do material.

Além disso, a partir desse gráfico somos capazes de classificar um material como sendo **Ductil** ou **Frágeis** (aqueles que possuem $T/R \approx 1$), além dos conceitos de **resiliência** e **tenacidade**, ilustrados abaixo:



Outra propriedade que pode ser utilizada para caracterizar o material é a chamada **Razão de Poisson**, que é dada por:

$$\nu = -\frac{\varepsilon_{XX}}{\varepsilon_{YY}}$$

Que possui a seguinte relação com o módulo de elasticidade E do material:

$$E = 2G(1 + \nu), \quad -1 \geq \nu \geq 0.5$$

Onde G é o módulo de cisalhamento.

3.3.3 Lei de Hook: Materiais Isotrópicos

Para materiais isotrópicos, somos capazes usar a seguinte lei de hook:

$$c_{11} = \frac{E(1-\nu)}{(1+\nu)(1-2\nu)} \quad e \quad c_{12} = \frac{E\nu}{(1+\nu)(1-2\nu)}$$

$$c_{44} = \frac{1}{2}(c_{11} - c_{12}) = \frac{1}{2} \left[\frac{E(1-\nu)}{(1+\nu)(1-2\nu)} - \frac{E\nu}{(1+\nu)(1-2\nu)} \right] = \frac{1}{2} \frac{E}{(1+\nu)(1-2\nu)} [(1-\nu) - \nu] = G$$

$$\begin{Bmatrix} \epsilon_{XX} \\ \epsilon_{YY} \\ \epsilon_{ZZ} \\ \epsilon_{YZ} \\ \epsilon_{XZ} \\ \epsilon_{XY} \end{Bmatrix} = \frac{1}{E} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -\nu & -\nu & & & \\ -\nu & 1 & -\nu & & & \\ -\nu & -\nu & 1 & & & \\ \hline & & & 1+\nu & 0 & 0 \\ & & & 0 & 1+\nu & 0 \\ & & & 0 & 0 & 1+\nu \end{array} \right] \begin{Bmatrix} \sigma_{XX} \\ \sigma_{YY} \\ \sigma_{ZZ} \\ \sigma_{YZ} \\ \sigma_{XZ} \\ \sigma_{XY} \end{Bmatrix}$$

$$\epsilon_{XX} = \frac{1}{E} \sigma_{XX} - \frac{\nu}{E} \sigma_{YY} - \frac{\nu}{E} \sigma_{ZZ}, \text{ etc.}$$

$$\epsilon_{YZ} = \frac{1+\nu}{E} \sigma_{YZ}, \text{ etc.}$$

4 Tensões e Deformações - Geometrias e Cargas Complexas

Anteriormente, nós fizemos a análise infinitesimal para cada ponto de um corpo no que tange as tensões e deformações, resultando em uma relação que dependia não somente do load sendo aplicado mas também do material. Pós isso, nós extrapolamos essa ideia para estruturas maiores, mas ainda simples (e.g cubos de madeira, etc), sendo submetidos a Loads simples e contínuos e suas faces.

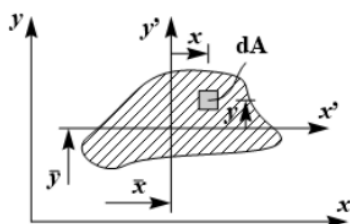
Iremos, agora, analisar as tensões e as deformações resultante em eixos, barras e vigas, para cargas mais complexas (representadas por funções de singularidade). Veremos ainda que para tais casos, não há somente a influência do tipo de material, mas há ainda uma **grande influência da geometria na deformação sofrida**. Para entendermos tal influência precisamos primeiro entender como calculamos o *momento de inércia* de diferentes corpos.

4.1 Momento de Inércia

Por definição, o momento de inércia representa a **dificuldade e resistência de um corpo à mudança de velocidade (e por conseguinte mede a resistência de se botar um corpo em movimento)** em *relação a um eixo específico*.

No cenário de resistência dos materiais, temos que tal dificuldade de se botar em movimento um corpo também contribui na **dificuldade de deformação**. Por isso é importante sabermos calculá-la.

Como dito acima, o momento de inércia depende de qual eixo estamos analisando, logo temos que, para o eixo x e eixo y , respectivamente, temos as seguintes fórmulas para o cálculo do momento de inércia:



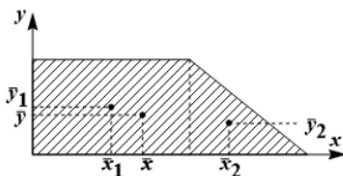
$$I'_{XX} = \int_A y^2 dA$$

$$I'_{YY} = \int_A x^2 dA$$

Onde o sistema de eixos tem por origem a **centroide**, no ponto (\bar{x}, \bar{y}) , que somos capazes de calcular por:

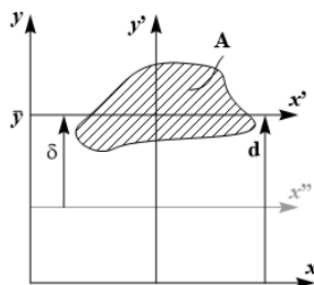
$$\bar{x} = \frac{1}{A} \int_A x dA = \frac{1}{A} \int_x \int_y x \cdot dy dx \quad e \quad \bar{y} = \frac{1}{A} \int_A y dA = \frac{1}{A} \int_x \int_y y \cdot dy dx$$

Ou podemos, ainda, simplificar para figuras compostas da seguinte forma:



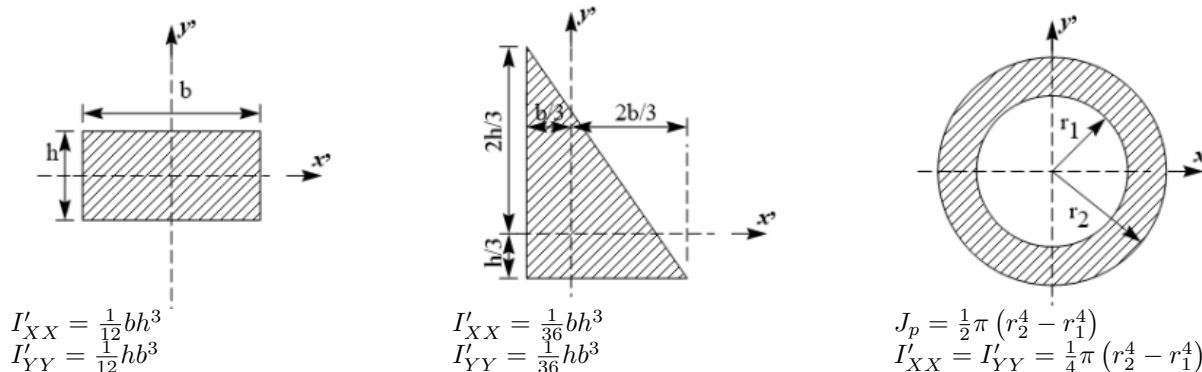
$$\bar{x} = \frac{\sum \bar{x}_i A_i}{\sum A_i} \quad e \quad \bar{y} = \frac{\sum \bar{y}_i A_i}{\sum A_i}$$

Outros momentos, entretanto, é interessante calcularmos o momento de inércia em relação a outro sistema de eixos. Para tal nós utilizamos o **Teorema de Eixos Paralelos**, dado por:



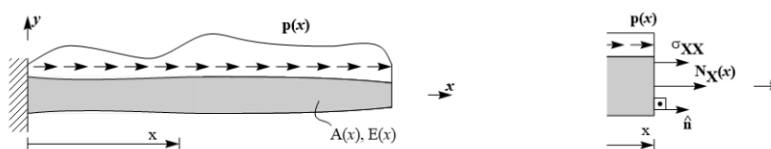
$$I''_{XX} = I'_{XX} + A\delta^2 \quad e \quad I_{XX} = I'_{XX} + Ad^2$$

Como certas figuras são recorrentes, seus momentos de inércia são tabelados:



Onde podemos observar que, para a maioria dos casos (tirando o polar), o momento de inércia cresce ao cubo da "altura", isso é, ao quadrado da medida perpendicular ao eixo sob análise. Exatamente por esse motivo que em construções, as vigas que sofrem contração (e por conseguinte são suscetíveis a "dobrar") são feitas com vigas em formato de I, pois ela diminui a massa mas aumenta o momento de inércia pois afasta massa do eixo em questão.

4.2 Teoria Técnica: Barras



O primeiro tipo de corpo mais complexo que iremos estudar a relação entre Tensão e Deformação será a Barra, que é um corpo esbelto que sofre somente carregamentos longitudinais (como exemplificado pela imagem acima). Para tais corpos a relação entre deformação e tensão é dada por:

$$\frac{d}{dx}N_X(x) = -p(x) = \frac{d}{dx}\left[E(X)A(X)\frac{d}{dx}u(x)\right]; \quad \sigma_{XX} = \frac{N_X(x)}{A(x)}$$

Ou ainda, para os casos de área e constante de elasticidade constantes:

$$\frac{d}{dx}N_X(x) = -p(x) = EA\frac{d^2}{dx^2}u(x)$$

Onde:

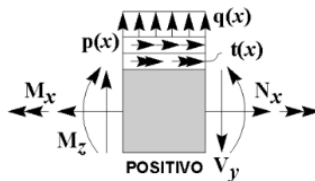
- $N_X(x)$: Esforço Axial na direção \hat{x} , em função da distância x .
- $p(x)$: Carregamento externo.
- A : Área da barra.
- E : Constante de elasticidade.
- $u(x)$: Deformação.

Conseguir analisar a deformação em barras é importante pois, até o momento, nós só conseguíamos analisar barras somente eram isoestática (i.e que não haviam vínculos de restrição a mais do que o necessário para manter o equilíbrio estático). Agora, entretanto, nós **conseguimos analisar até problemas hiperestáticos** (i.e que possuem vínculos de restrição a mais do que necessário), pois os **dados de deformação são considerados mais informação de contorno** para o problema diferencial.

Para a resolução de tais problemas deve ser feito os seguintes passos:

Passo 1 - Convenção de Sinais

A mesma convenção de sinais usada durante a análise de equilíbrio interno de corpos (fig 1) deve ser usada:



Passo 2 - Equação Diferencial

O próximo passo é determinar qual equação diferencial será usada como base para o problema em questão. De modo geral, quando estamos falando de **barra hiperestáticas**, ou quando queremos **analisar sua deformação** usamos a equação abaixo ³:

$$EA \frac{d^2}{dx^2} u(x) = -p(x)$$

Passo 3 - Condições de Contorno

Todas as condições de contorno pela tabela 4 ainda são válidas, mas agora com a adição das condições de contorno referente ao deslocamento, sendo o mais notório deles:

Barras Engastadas possuem **deformação zero na extremidade x' engastada**, $u(x') = 0$

Passo 4 - Equação do Carregamento

Descrever o carregamento externo através de funções de singularidade, como descrito pela tabela 5.

Passo 5 - Integração da Equação Diferencial

A partir da equação diferencial, nós integramos até chegar na sua forma mais simples:

$$EA \frac{d^2}{dx^2} u(x) = -p(x) \xrightarrow{\int} EA \frac{d}{dx} u(x) = N_X \xrightarrow{\int} EA u(x)$$

Onde é importante sempre lembrar de **botar as constantes de integração** a cada integral calculada.

Passo 6 - Constantes de Integração

A partir dos valores de contorno condições iniciais, calcular as constantes de integração achadas anteriormente.

Passo 7 - Equações Finais

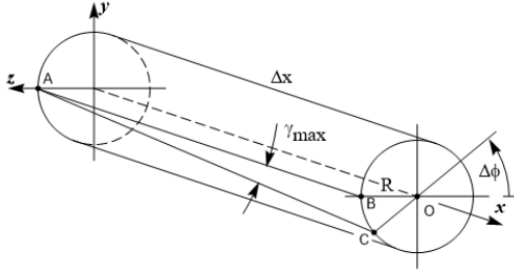
Obtendo as constantes, é preciso somente substituir elas nas equações para o $N_X(x)$ e $u(x)$ obtidas no passo 5 através das integrações.

³Lembrando que a equação a seguir pode ser usada somente quando o coeficiente de elasticidade e a área da barra forem constantes durante todo seu comprimento

4.3 Teoria Técnica: Eixos

De forma análoga à análise feita para barras, nós iremos analisar as tensões e as deformações que ocorrem em um eixo (*i.e* corpos que sofrem somente cargas torcionais).

Para o caso dos eixos, a equação diferencial usada é a que relaciona o coeficiente de cisalhamento⁴ G do material, o momento de inércia polar do corpo J_P , o ângulo de torção ϕ e o carregamento externo, como mostrado abaixo:



$$GJ_P \frac{d^2}{dx^2} \phi(x) = -t(x)$$

Para resolução de problemas de análise de eixos hiperestáticos, ou problemas de análise de deformação de eixos no geral, nós utilizamos os mesmo passos 7 descritos para Barras, com a única diferença sendo as fórmulas integradas que devemos usar no passo 5, sendo elas:

$$GJ_P \frac{d^2}{dx^2} \phi(x) = -t(x) \xrightarrow{\int} GJ_P \frac{d}{dx} \phi(x) = M_X(x) \xrightarrow{\int} GJ_P \phi(x)$$

Podendo, ainda, modelar a tensão de cisalhamento entre as faces do sólido, dada por:

$$\tau(x, r) = \sigma_{XY}(x, r) = \frac{r}{J_P} M_X(x)$$

Onde podemos, então calcular o "deslocamento máximo" da linha normal do eixo γ_{max} , que ocorre na borda mais externa do eixo ($r = R$):

$$\gamma_{max}(x) = R \frac{d}{dx} \phi(x) = \frac{1}{G} \tau_{max}(x)$$

⁴Usamos e analisamos o cisalhamento pois para a torção de eixos, podemos pensar que as faces infinitesimais do corpos são rotacionadas em relação a um mesmo eixo, causando um cisalhamento entre as faces