Trabalho Final - ES101

Pedro Henrique Limeira da Cruz

March 14, 2023

UNICAMP

1 Revisão de Dinâmica

1.1 Cinética Plana de Corpos Rígidos

1.1.1 Introdução

A cinética de corpos rígidos trata das relações entre as forças externas sobre um corpo e seu movimento resultante (que é composto pela rotação e translação). Para a abordagem a seguir, o corpo apresenta um **CG** (Centro de Massa / Centro de gravidade), de maneira que todas as forças que atuam sobre o corpo atuam sobre ele.

No Total, para caracterizar totalmente o movimento de um corpo em um plano são necessárias 3 equações, sendo elas:

1. Somatório de Forças no Eixo X
2. Somatório de Forças no Eixo Y
3. Somatório de Momentos Gerais

Além disso, para analisarmos as formas e momentos supracitados, também é necessário (em primeiro lugar) a análise de *DCL* (Diagrama de Corpo Livre).

1.1.2 Equações Gerais do Movimento

Como havia sido dito anteriormente, para descrevermos por completo o movimento de um corpo em um plano é necessário 3 equações, sendo duas de forças e uma de momento. Sendo elas:

$$\sum \vec{F} = m \cdot \vec{\bar{a}} = \dot{\vec{G}}_{CG} \tag{1}$$

$$\sum \vec{M}_G = I \cdot \vec{\bar{\alpha}} = \dot{\vec{H}}_{CG} \tag{2}$$

Explorando mais as equações acima, temos que:

- $\bar{a}$: Aceleração linear do centro de massa;
- α: Aceleração angular do centro de massa;
- $\bar{I}$: Momento de inércia do corpo (i.e a medida de resistência à variação na velocidade de rotação devido à distribuição de massa em torno do CG)
- $\dot{\vec{G}}$: A variação no tempo da *Quantidade de Movimento Linear* no *CG*
- $\dot{\vec{H}}$: A variação no tempo da *Quantidade de Movimento Angular* no *CG*

É válido ressaltar, ainda, que a *Quantidade de Movimento Linear* e a *Quantidade de Movimento Angular* são grandezas vetoriais que é definida pelo produto entre a velocidade (linear e angular) com a inércia (i.e a massa e a momento de inércia). E são de suma importância pois tem relação direta com força e momento (como visto anteriormente).

1.1.3 Equação Alternativa do Momento

A fórmula 1 modela a soma de momentos somente quando estamos analisando o sistema tomando como referencial o centro de gravidade *CG*. Isso, entretanto, nem sempre é possível, tendo em vista a complexidade que algumas topologias assumem, o que tornaria inviável fazer sua análise. Há, todavia, uma forma alternativa de modelarmos o sistema, considerando um ponto P arbitrário, a uma distância d conhecida:

$$\sum \vec{M}_P = \bar{I} \cdot \alpha + m\bar{a}d \tag{3}$$

Onde a é a aceleração linear no centro de gravidade.

Ao analisarmos bem a equação, podemos observar que ela nada mais é do que o momento no próprio centro de gravidade, dado pela parcela $\bar{I}\alpha$, somado ao momento (também chamado de torque) que a força resultante ($\sum F = m\bar{a}$) gera no ponto P a uma distância d do CG em análise.

1.1.4 Sistemas de Corpos Interligados

Em casos mais complexos, a principal topologia que encontramos é a de corpos extensos interligados. Um clássico exemplo disso é o problema do carro com pêndulo, onde temos um carro (primeiro corpo) conectado a uma mola e a uma parede, que possui um pêndulo (segundo corpo) com seu pivô de rotação localizado no CG do carrinho.

Para problemas assim, temos a generalização das fórmulas, como sendo:

$$\sum \vec{F} = \sum m\vec{\bar{a}} \tag{4}$$

$$\sum \vec{M}_P = \sum \bar{I}\alpha + \sum m\vec{\bar{a}}d \tag{5}$$

A equação 5 pode, ainda, ser reescrita considerando a notação da *Teoria dos Eixos Paralelos*, que é dada por:

$$\begin{cases} \sum \vec{M}_P & = I_P\alpha \\ I_P & = \bar{I} + m\bar{r}^2 \end{cases} \tag{6}$$

Isso é verdade pois $m\alpha\bar{r}^2 = m(\alpha\bar{r})\bar{r} = m\bar{a}\bar{r}$, que podemos ver ser igual à equação 3

1.1.5 Aplicação

EXEMPLO 1 - O exemplo mais clássico para a aplicação de todos os conceitos vistos é o problema do carro com pêndulo, que é o que veremos agora:

No geral, iremos seguir os seguintes passos:

1. Diagrama de corpo livre: A primeira coisa que devemos fazer em qualquer problema de dinâmica e Vibrações é desenhar o DCL(Diagrama de corpo livre).
2. Listagem dos Dados conhecidos: Em seguida, é de suma importância listarmos todos os dados que possuímos sobre o problema.
3. Equações do Movimento: Nesse passo precisamos primeiramente identificar se estamos lidando com corpos interligados (e por conseguinte utilizaremos as equação 4 e 5), ou se estamos lidando com corpos simples (e então usaremos as equações 1, 2 e 3)

2 Introdução à Vibrações

Vibração é o movimento repetitivo, que pode ser:

- Desejado
- Não Desejado

Além disso, a vibração pode ser vista não somente como um movimento, mas também como a troca entre *energia potencial* (e.g potencial elástico, potencial gravitacional, etc) e *energia mecânica.*

3 Vibrações livres não Amortecidas - 1 DOF

Primeiramente, é importante entendermos que definimos os tipos de vibrações de acordo com certas características, sendo elas:

1. Graus de Liberdade: A depender do número de coordenadas que são necessários para a modelagem completa do movimento.
2. Amortecimento: A depender se há o amortecimento, i.e a dissipação de energia de alguma forma (e.g um amortecedor de fluidos, atrito, ...). E pode ser classificado como:

   Amortecido: Quando ocorre a dissipação de energia;

   Não-Amortecido: Quando não ocorre a dissipação de energia e, por conseguinte, o movimento não para.
3. Liberdade de Vibração: Que se refere à presença ou não de forças externas atuando no *sistema* [1].

[1] Importante ressaltar que a definição do sistema implica na sua classificação

Vibração Livre: Não há forças externas atuando no sistema;

Vibrações Não-Livres: Há forças externas.

4. Parâmetros Concentrados: Um sistema é dito de parâmetros concentrados quando os corpos que o integra são representados por corpos concentrados, e.g massas e molas.

3.1 Sistema Massa-Mola

Um sistema massa mola, como descrito na imagem abaixo, assim como o nome sugere, é composto por:

- Massa de valor m
- Mola de rigidez k
- Gravidade [2] g

Agora, para realizarmos a análise de vibrações desse problema, iremos seguir as seguintes etapas:

1. Definição de Coordenadas
2. Diagrama de Corpo Livre
3. Equações de Movimento

1º Passo - Definição de Coordenadas

Algo muito importante de se perceber quando estamos lidando com problemas com molas (principalmente aqueles de massa-mola na vertical) é que existem dois principais pontos de interesse de serem definidos no espaço, sendo eles:

- Posição sem deformação da mola: Isso é, posição no espaço onde a mola não exerce força alguma, devido ao fato de que a força elástica F_e é dada por $F_e = k\delta$
- Posição onde há equilíbrio entre a força elástica e as demais (principalmente força peso F_p)

Levando isso em consideração, o jeito mais fácil de lidar com esse dois pontos é criando dois eixos de coordenadas, cada um contendo seus respective zeros nesses ponto. Portanto, o primeiro passo que precisamos fazer é definir uma coordenada y a qual possui zero zero no ponto onde a mola **NÃO** está deformada, *i.e* ela está com seu tamanho normal. Em seguida, definimos nosso segundo eixo de coordenadas x contendo seu x_0 no ponto onde as forças peso e elástica se anulam.

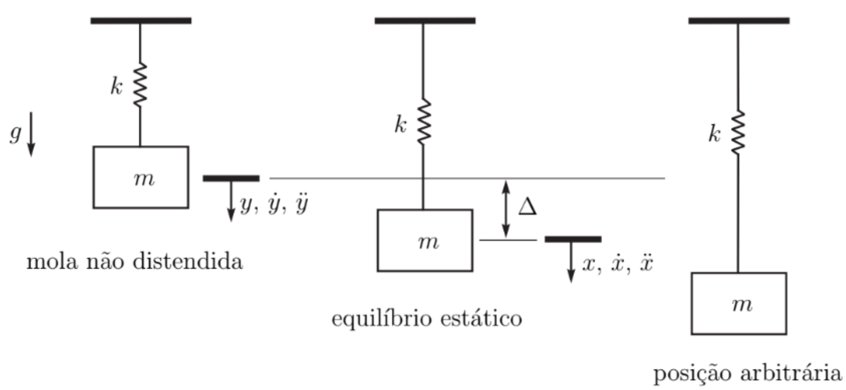


Figure 1: Coordenadas para o Problema Massa-Mola na Vertical

Esses dois eixos de coordenadas distintos, como veremos mais para frente, facilitam bastante os nosso cálculos de equação de movimento. A partir disso, já temos definidos todos os pontos de interesse, e podemos prosseguir para o diagrama de corpo livre *DCL*.

[2] Importante ressaltar que nesse sistema estamos incluindo a terra (e por conseguinte suas ações na massa, e por isso continua sendo um problema de *Vibração Livre*)

2º Passo - Diagrama de Corpo Livre *(DCL)*

Para fazermos o DLC, precisamos primeiro considerar o bloco em uma posição arbitrária. Como já definimos os dois eixos de referência para baixo, iremos considerar o bloco em um ponto tal que $x, y > 0$, para facilitar os cálculos.

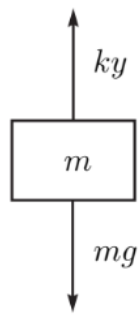


Figure 2: *DCL* básico do sistema massa-mola

A partir disso, podemos fazer o DCL, que possui algumas características, que possuem o acronym (em inglês) *B.R.E.A.D*:

- *Body* : Precisa representar o corpo que está sendo estudado, sem nenhuma outra coisa a sua volta (e.g sem paredes, pilastra, etc).
- *Reações*: A segunda etapa de um DCL é a representação das forças de reação (como no nossa caso a força elástica)
- *External / Body Forces*: A terceira etapa é a representação das forças externas ou do próprio corpo (como no nosso caso a força peso F_p).
- *Axis*: A quarta coisa que seu *D.C.L* precisa ter são os eixos de coordenadas.
- *Dimension*: A útlima coisa que precisa ser colocada é, quando de interesse, as dimensões do do corpo.

É importante ressaltar que a força elástica F_e é dada por $k \cdot y$, tendo em vista que o eixo de coordenadas $\vec{y}$ tem seu zero (i.e sua origem) no ponto em que a mola não possui deformação. Poderíamos ficar escrevendo que a mola está com uma deformação y_α ou qualquer outro nome, mas para termos menos trabalho usamos y como sendo o ponto na coordenada $\vec{y}$, e usaremos ainda mais para frente x para um ponto qualquer no eixo $\vec{x}$.

3º Passo - Equações de Movimento

Como já temos o diagrama de corpo livre, podemos modelar o movimento do bloco a partir das equações de movimento que vimos em dinâmica (eqs. 1, 2). Como o corpo não apresenta rotação (e nem momentos) iremos descrever somente a soma de forças do problema:

$$\sum \vec{F} = m \cdot \vec{a}$$
$$mg - ky = m \cdot \ddot{y}$$
$$0 = m\ddot{y} + ky - mg \tag{7}$$

Com isso temos a equação 7, que descreve o movimento da massa como uma Equação Diferencial Ordinária de Segundo grau Ordinária de Segundo grau. podemos, entretanto, simplificar essa equação considerando a relação entre a coordenada x, a coordenada y e a deformação da mola, como mostramos abaixo:

$$k\Delta = mg \tag{8}$$
$$y = \Delta + x \therefore \dot{y} = \dot{x}, \ddot{y} = \ddot{x} \tag{9}$$

Substituindo as equações acima na equação 7 temos:

$$m\ddot{x} + kx = 0 \tag{10}$$

E isso facilita as contas pois torna uma equação diferencial não homogênea em uma homogênea. Além disso, podemos verificar que o **peso oscila em torno do ponto de equilíbrio estático**. Ao sabermos disso, nós temos então a possibilidade de, nos próximos exercícios, partimos dessa última equação, considerando como nosso eixo de coordenadas tendo início no ponto de equilíbrio estático.

3.2 Molas Equivalentes

O exemplo da massa mola acima pode parecer irrealista, mas na realidade nós podemos simplificar diversos problemas do mundo real descrevendo certas estruturas através de sistemas de molas, como veremos a seguir.

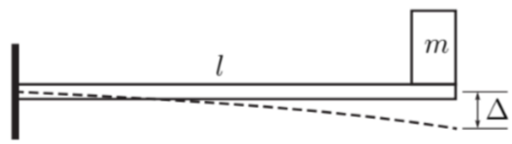
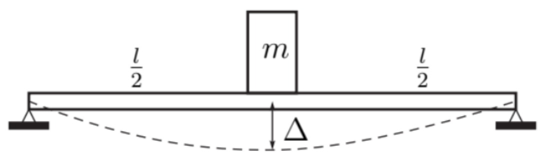
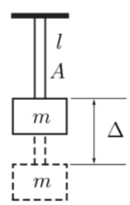
Sistema	Diagrama	Deformação	k Equivalente
Viga Engastada		$\Delta = \frac{Pl^3}{3EI}$	$k = \frac{P}{\Delta} = \frac{3EI}{l^3}$
Viga Bi-Apoiada		$\Delta = \frac{Pl^3}{48EI}$	$k = \frac{P}{\Delta} = \frac{48EI}{l^3}$
Barra em Solicitação Axial		$\Delta = \frac{Pl}{AE}$	$k = \frac{P}{\Delta} = \frac{AE}{l}$

Table 1: Molas Equivalentes

Onde:

- P: Força peso, $P = m \cdot g$
- Δ: Deflexão
- E: Módulo de Elasticidade
- I: Inércia da seção transversal

Além disso podemos, ainda, ter a associação de molas:

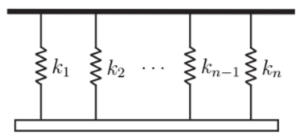
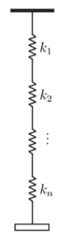
Topologia	Diagrama	Equação	Observação
Molas em Paralelos		$k = \sum_{i=1}^{n} k_i$	Temos que para molas em paralelo, todas tem o mesmo deslocamento
Molas Em Série		$k^{-1} = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{k_i}$	Temos que para molas em série, cada uma delas sofre a mesma força.

Table 2: k Resultante de associação de molas

3.3 Sistema Torcional

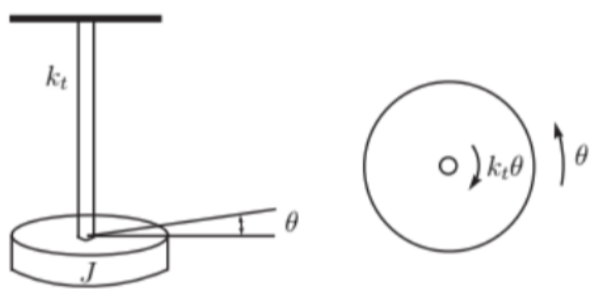


Figure 3: Sistema Torcional e DCL

Para introduzirmos um sistema torcinal de vibrações, iremos considerando um sistema de um disco, com um momento de inércia J, conectado a um eixo engastado (fixo e sem rotação livre) em uma das suas extremidades, com uma rigidez torcional [3] k_t, como mostrado pela figura acima.

Quando lidamos com problemas relacionados com rotação, a maioria esmagadora de vezes iremos usar o momento para equacionar o movimento vibracional. Após a análise de corpo livre e determinação da coordenada θ (necessária somente uma pois sistema apresenta somente um grau de liberdade), podemos aplicar a Lei de Newton no que tange momento e temos:

$$\sum M = J\ddot{\theta} \Rightarrow -k_t\theta = J\ddot{\theta}$$

Que pode ser escrita da seguinte forma:

$$\ddot{\theta} + \frac{k_t}{J}\theta = 0 \tag{11}$$

Podemos, então, verificar que, mesmo com uma topologia diferente, o sistema apresenta o mesmo comportamento (e mesma modelagem) do sistema massa mola, com a frequência natura sendo $\omega_n = \sqrt{k_t/J}$

[3] Similar à propriedade k de molas normais, mas representa a resistência à torção da mola equivalente, que nesse caso refere-se à viga engastada