Trabalho Final - ES101

Pedro Henrique Limeira da Cruz

March 23, 2023

UNICAMP

1 Revisão de Dinâmica

1.1 Cinética Plana de Corpos Rígidos

1.1.1 Introdução

A cinética de corpos rígidos trata das relações entre as forças externas sobre um corpo e seu movimento resultante (que é composto pela rotação e translação). Para a abordagem a seguir, o corpo apresenta um **CG** (Centro de Massa / Centro de gravidade), de maneira que todas as forças que atuam sobre o corpo atuam sobre ele.

No Total, para caracterizar totalmente o movimento de um corpo em um plano são necessárias 3 equações, sendo elas:

1. Somatório de Forças no Eixo X
2. Somatório de Forças no Eixo Y
3. Somatório de Momentos Gerais

Além disso, para analisarmos as formas e momentos supracitados, também é necessário (em primeiro lugar) a análise de *DCL* (Diagrama de Corpo Livre).

1.1.2 Equações Gerais do Movimento

Como havia sido dito anteriormente, para descrevermos por completo o movimento de um corpo em um plano é necessário 3 equações, sendo duas de forças e uma de momento. Sendo elas:

$$\sum \vec{F} = m \cdot \vec{\bar{a}} = \dot{\vec{G}}_{CG} \tag{1}$$

$$\sum \vec{M}_G = I \cdot \vec{\bar{\alpha}} = \dot{\vec{H}}_{CG} \tag{2}$$

Explorando mais as equações acima, temos que:

- $\bar{a}$: Aceleração linear do centro de massa;
- α: Aceleração angular do centro de massa;
- $\bar{I}$: Momento de inércia do corpo (i.e a medida de resistência à variação na velocidade de rotação devido à distribuição de massa em torno do CG)
- $\dot{\vec{G}}$: A variação no tempo da *Quantidade de Movimento Linear* no *CG*
- $\dot{\vec{H}}$: A variação no tempo da *Quantidade de Movimento Angular* no *CG*

É válido ressaltar, ainda, que a *Quantidade de Movimento Linear* e a *Quantidade de Movimento Angular* são grandezas vetoriais que é definida pelo produto entre a velocidade (linear e angular) com a inércia (i.e a massa e a momento de inércia). E são de suma importância pois tem relação direta com força e momento (como visto anteriormente).

1.1.3 Equação Alternativa do Momento

A fórmula 1 modela a soma de momentos somente quando estamos analisando o sistema tomando como referencial o centro de gravidade *CG*. Isso, entretanto, nem sempre é possível, tendo em vista a complexidade que algumas topologias assumem, o que tornaria inviável fazer sua análise. Há, todavia, uma forma alternativa de modelarmos o sistema, considerando um ponto P arbitrário, a uma distância d conhecida:

$$\sum \vec{M}_P = \bar{I} \cdot \alpha + m\bar{a}d \tag{3}$$

Onde a é a aceleração linear no centro de gravidade.

Ao analisarmos bem a equação, podemos observar que ela nada mais é do que o momento no próprio centro de gravidade, dado pela parcela $\bar{I}\alpha$, somado ao momento (também chamado de torque) que a força resultante ($\sum F = m\bar{a}$) gera no ponto P a uma distância d do CG em análise.

1.1.4 Sistemas de Corpos Interligados

Em casos mais complexos, a principal topologia que encontramos é a de corpos extensos interligados. Um clássico exemplo disso é o problema do carro com pêndulo, onde temos um carro (primeiro corpo) conectado a uma mola e a uma parede, que possui um pêndulo (segundo corpo) com seu pivô de rotação localizado no *CG* do carrinho.

Para problemas assim, temos a generalização das fórmulas, como sendo:

$$\sum \vec{F} = \sum m\vec{\bar{a}} \tag{4}$$

$$\sum \vec{M}_P = \sum \bar{I}\alpha + \sum m\vec{\bar{a}}d \tag{5}$$

A equação 5 pode, ainda, ser reescrita considerando a notação da *Teoria dos Eixos Paralelos*, que é dada por:

$$\begin{cases} \sum \vec{M}_P & = I_P\alpha \\ I_P & = \bar{I} + m\bar{r}^2 \end{cases} \tag{6}$$

Isso é verdade pois $m\alpha\bar{r}^2 = m(\alpha\bar{r})\bar{r} = m\bar{a}\bar{r}$, que podemos ver ser igual à equação 3

1.1.5 Aplicação

EXEMPLO 1 - O exemplo mais clássico para a aplicação de todos os conceitos vistos é o problema do carro com pêndulo, que é o que veremos agora:

No geral, iremos seguir os seguintes passos:

1. Diagrama de corpo livre: A primeira coisa que devemos fazer em qualquer problema de dinâmica e Vibrações é desenhar o *DCL*(Diagrama de corpo livre).
2. Listagem dos Dados conhecidos: Em seguida, é de suma importância listarmos todos os dados que possuímos sobre o problema.
3. Equações do Movimento: Nesse passo precisamos primeiramente identificar se estamos lidando com corpos interligados (e por conseguinte utilizaremos as equação 4 e 5), ou se estamos lidando com corpos simples (e então usaremos as equações 1, 2 e 3)

2 Introdução à Vibrações

Vibração é o movimento repetitivo, que pode ser:

- Desejado
- Não Desejado

Além disso, a vibração pode ser vista não somente como um movimento, mas também como a troca entre *energia potencial* (e.g potencial elástico, potencial gravitacional, etc) e *energia mecânica*.

3 Vibrações livres não Amortecidas - 1 DOF

Primeiramente, é importante entendermos que definimos os tipos de vibrações de acordo com certas características, sendo elas:

1. Graus de Liberdade: A depender do número de coordenadas que são necessários para a modelagem completa do movimento.
2. Amortecimento: A depender se há o amortecimento, i.e a dissipação de energia de alguma forma (e.g um amortecedor de fluidos, atrito, ...). E pode ser classificado como:

   Amortecido: Quando ocorre a dissipação de energia;

   Não-Amortecido: Quando não ocorre a dissipação de energia e, por conseguinte, o movimento não para.
3. Liberdade de Vibração: Que se refere à presença ou não de forças externas atuando no *sistema* [1].

[1]Importante ressaltar que a definição do sistema implica na sua classificação

Vibração Livre: Não há forças externas atuando no sistema;

Vibrações Não-Livres: Há forças externas.

4. Parâmetros Concentrados: Um sistema é dito de parâmetros concentrados quando os corpos que o integra são representados por corpos concentrados, e.g massas e molas.

3.1 Sistema Massa-Mola

Um sistema massa mola, como descrito na imagem abaixo, assim como o nome sugere, é composto por:

- Massa de valor m
- Mola de rigidez k
- Gravidade [2] g

Agora, para realizarmos a análise de vibrações desse problema, iremos seguir as seguintes etapas:

1. Definição de Coordenadas
2. Diagrama de Corpo Livre
3. Equações de Movimento

1º Passo - Definição de Coordenadas

Algo muito importante de se perceber quando estamos lidando com problemas com molas (principalmente aqueles de massa-mola na vertical) é que existem dois principais pontos de interesse de serem definidos no espaço, sendo eles:

- Posição sem deformação da mola: Isso é, posição no espaço onde a mola não exerce força alguma, devido ao fato de que a força elástica F_e é dada por $F_e = k\delta$
- Posição onde há equilíbrio entre a força elástica e as demais (principalmente força peso F_p)

Levando isso em consideração, o jeito mais fácil de lidar com esse dois pontos é criando dois eixos de coordenadas, cada um contendo seus respective zeros nesses ponto. Portanto, o primeiro passo que precisamos fazer é definir uma coordenada y a qual possui zero zero no ponto onde a mola **NÃO** está deformada, *i.e* ela está com seu tamanho normal. Em seguida, definimos nosso segundo eixo de coordenadas x contendo seu x_0 no ponto onde as forças peso e elástica se anulam.

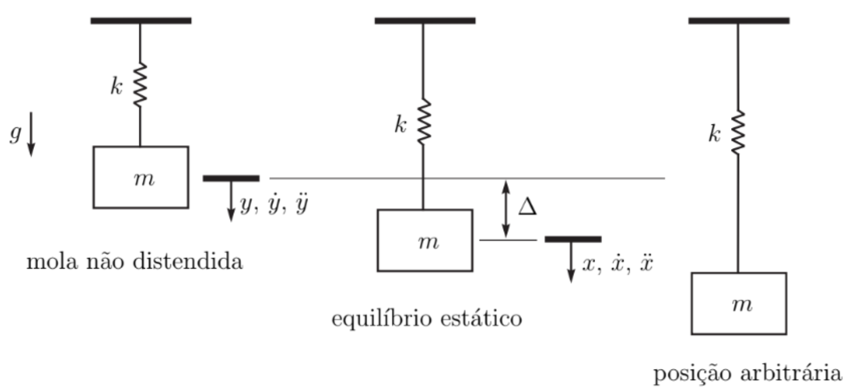


Figure 1: Coordenadas para o Problema Massa-Mola na Vertical

Esses dois eixos de coordenadas distintos, como veremos mais para frente, facilitam bastante os nosso cálculos de equação de movimento. A partir disso, já temos definidos todos os pontos de interesse, e podemos prosseguir para o diagrama de corpo livre *DCL*.

[2] Importante ressaltar que nesse sistema estamos incluindo a terra (e por conseguinte suas ações na massa, e por isso continua sendo um problema de *Vibração Livre*)

2º Passo - Diagrama de Corpo Livre *(DCL)*

Para fazermos o DLC, precisamos primeiro considerar o bloco em uma posição arbitrária. Como já definimos os dois eixos de referência para baixo, iremos considerar o bloco em um ponto tal que $x, y > 0$, para facilitar os cálculos.

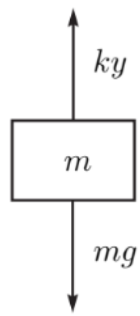


Figure 2: *DCL* básico do sistema massa-mola

A partir disso, podemos fazer o DCL, que possui algumas características, que possuem o acronym (em inglês) *B.R.E.A.D*:

- *Body* : Precisa representar o corpo que está sendo estudado, sem nenhuma outra coisa a sua volta (e.g sem paredes, pilastra, etc).
- *Reações*: A segunda etapa de um DCL é a representação das forças de reação (como no nossa caso a força elástica)
- *External / Body Forces*: A terceira etapa é a representação das forças externas ou do próprio corpo (como no nosso caso a força peso F_p).
- *Axis*: A quarta coisa que seu *D.C.L* precisa ter são os eixos de coordenadas.
- *Dimension*: A útlima coisa que precisa ser colocada é, quando de interesse, as dimensões do do corpo.

É importante ressaltar que a força elástica F_e é dada por $k \cdot y$, tendo em vista que o eixo de coordenadas $\vec{y}$ tem seu zero (i.e sua origem) no ponto em que a mola não possui deformação. Poderíamos ficar escrevendo que a mola está com uma deformação y_α ou qualquer outro nome, mas para termos menos trabalho usamos y como sendo o ponto na coordenada $\vec{y}$, e usaremos ainda mais para frente x para um ponto qualquer no eixo $\vec{x}$.

3º Passo - Equações de Movimento

Como já temos o diagrama de corpo livre, podemos modelar o movimento do bloco a partir das equações de movimento que vimos em dinâmica (eqs. 1, 2). Como o corpo não apresenta rotação (e nem momentos) iremos descrever somente a soma de forças do problema:

$$\sum \vec{F} = m \cdot \vec{a}$$
$$mg - ky = m \cdot \ddot{y}$$
$$0 = m\ddot{y} + ky - mg \tag{7}$$

Com isso temos a equação 7, que descreve o movimento da massa como uma Equação Diferencial Ordinária de Segundo grau Ordinária de Segundo grau. podemos, entretanto, simplificar essa equação considerando a relação entre a coordenada x, a coordenada y e a deformação da mola, como mostramos abaixo:

$$k\Delta = mg \tag{8}$$
$$y = \Delta + x \therefore \dot{y} = \dot{x}, \ddot{y} = \ddot{x} \tag{9}$$

Substituindo as equações acima na equação 7 temos:

$$m\ddot{x} + kx = 0 \tag{10}$$

E isso facilita as contas pois torna uma equação diferencial não homogênea em uma homogênea. Além disso, podemos verificar que o **peso oscila em torno do ponto de equilíbrio estático**. Ao sabermos disso, nós temos então a possibilidade de, nos próximos exercícios, partimos dessa última equação, considerando como nosso eixo de coordenadas tendo início no ponto de equilíbrio estático.

3.2 Molas Equivalentes

O exemplo da massa mola acima pode parecer irrealista, mas na realidade nós podemos simplificar diversos problemas do mundo real descrevendo certas estruturas através de sistemas de molas, como veremos a seguir.

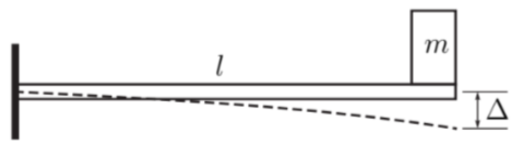
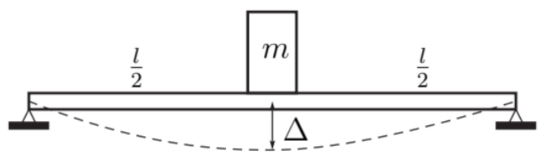
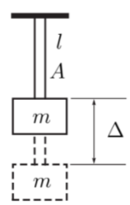
Sistema	Diagrama	Deformação	k Equivalente
Viga Engastada		$\Delta = \frac{Pl^3}{3EI}$	$k = \frac{P}{\Delta} = \frac{3EI}{l^3}$
Viga Bi-Apoiada		$\Delta = \frac{Pl^3}{48EI}$	$k = \frac{P}{\Delta} = \frac{48EI}{l^3}$
Barra em Solicitação Axial		$\Delta = \frac{Pl}{AE}$	$k = \frac{P}{\Delta} = \frac{AE}{l}$

Table 1: Molas Equivalentes

Onde:

- P: Força peso, $P = m \cdot g$
- Δ: Deflexão
- E: Módulo de Elasticidade
- I: Inércia da seção transversal

Além disso podemos, ainda, ter a associação de molas:

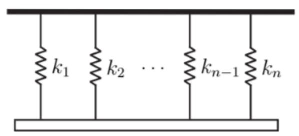
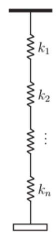
Topologia	Diagrama	Equação	Observação
Molas em Paralelos		$k = \sum_{i=1}^{n} k_i$	Temos que para molas em paralelo, todas tem o mesmo deslocamento
Molas Em Série		$k^{-1} = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{k_i}$	Temos que para molas em série, cada uma delas sofre a mesma força.

Table 2: k Resultante de associação de molas

3.3 Sistema Torcional

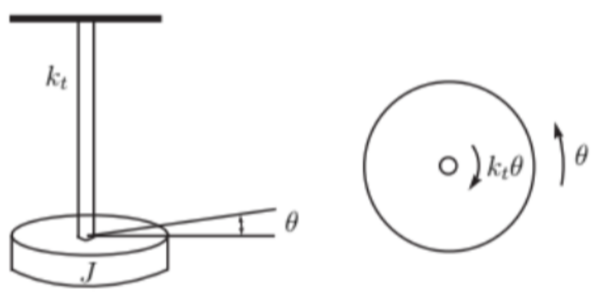


Figure 3: Sistema Torcional e DCL

Para introduzirmos um sistema torcinal de vibrações, iremos considerando um sistema de um disco, com um momento de inércia J, conectado a um eixo engastado (fixo e sem rotação livre) em uma das suas extremidades, com uma rigidez torcional [3] k_t, como mostrado pela figura acima.

Quando lidamos com problemas relacionados com rotação, a maioria esmagadora de vezes iremos usar o momento para equacionar o movimento vibracional. Após a análise de corpo livre e determinação da coordenada θ (necessária somente uma pois sistema apresenta somente um grau de liberdade), podemos aplicar a Lei de Newton no que tange momento e temos:

$$\sum M = J\ddot{\theta} \Rightarrow -k_t\theta = J\ddot{\theta}$$

Que pode ser escrita da seguinte forma:

$$\ddot{\theta} + \frac{k_t}{J}\theta = 0 \tag{11}$$

Podemos, então, verificar que, mesmo com uma topologia diferente, o sistema apresenta o mesmo comportamento (e mesma modelagem) do sistema massa mola, com a frequência natura sendo $\omega_n = \sqrt{k_t/J}$

[3] Similar à propriedade k de molas normais, mas representa a resistência à torção da mola equivalente, que nesse caso refere-se à viga engastada

4 Vibrações Livres de Sistemas de 1 *DOF* com Amortecimento

4.1 Introdução

Até o momento nós vimos situações onde não haviam forças dissipativas atuando sobre o sistema e, por conseguinte, o movimento de vibração continuava eternamente. Isso, entretanto, não condiz com a realidade, levando em consideração que há inúmeros mecanismos pelos quais um sistema perde energia. Vários deles, entretanto, podem ser modelados por um **amortecedor viscoso**, que é regido pela seguinte equação:

$$f_d = -c\dot{x} \tag{12}$$

Onde:

- c: Constante do amortecedor
- $\dot{x}$: A velocidade

O exemplo mais comum disso é uma massa-mola-amortecedor, como mostrado na figura abaixo:

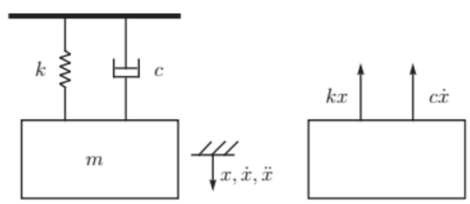


Figure 4: Sistema Massa-Mola-Amortecedor

Aplicando a Lei de Newton chegamos em:

$$\ddot{x} + \frac{c}{m}\dot{x} + \frac{k}{m}x = 0 \tag{13}$$

Rotineiramente, entretanto, quando temos um problema com amortecimento nós utilizamos a equação diferencial (que no nosso caso é a equação 13) da seguinte forma:

$$\ddot{x} + 2\zeta\omega_n\dot{x} + \omega_n^2 x = 0 \tag{14}$$

Onde:

- ζ: **Fator de Amortecimento**, parâmetro adimencional que fornece uma medida do amortecimento do sistema (que veremos de forma mais detalhada mais para frente)
- ω_n: Frequência Natural do sistema, dada por $\sqrt{k/m}$

IMPORTANTE: Em um sistema amortecido, o sistema ***NÃO*** oscila com a frequência natural ω_n, mas sim com uma frequência amortecida (também chamada de *damped frequency* ω_d, que iremos averiguar mais para frente como é calculada).

4.2 Classificação de Sistemas Amortecidos

Como vimos anteriormente, podemos modelar um sistema de 1 grau de liberdade amortecido pela equação 14, que tem como principal componente que descreve o seu amortecimento como sendo o ζ, chamado de fator de amortecimento.

Somos capazes de ver e entender a influência do fator de amortecimento ao analisarmos a equação diferencial característica 14, onde, durante a sua resolução (para o qual supomos o sistema com uma resposta $x = Ae^{\lambda t}$), seu polinômio característico[4] e suas raízes (que regem o comportamento exponencial da resposta) são dadas por:

$$\lambda^2 + 2\zeta\omega_n\lambda + \omega_n^2 = 0 \Rightarrow \lambda_{1,2} = -\zeta\omega_n \pm \omega_n\sqrt{\zeta^2 - 1}$$

A depender do valor de ζ temos que o sistema pode ser:

- $\zeta < 1$: Sub-amortecido
- $\zeta = 1$: Criticamente amortecido
- $\zeta > 1$: Super-amortecido

4.2.1 Sistema Sub-Amortecido

Dizemos que um sistema é sub-amortecido quando $\zeta < 1$, o que resulta na equação característica ter duas raízes imaginárias tal que:

$$\lambda_{1,2} = \sigma \pm j\omega_d \Rightarrow \begin{cases} \sigma = -\zeta\omega_n \\ \omega_d = \omega_n\sqrt{1 - \zeta^2} \end{cases} \tag{15}$$

Onde a parte imaginária da raiz é chamada de *frequência amortecida* ω_d.
Por fim, teremos como resposta do sistema:

$$x(t) = A_1e^{\lambda_1 t} + A_2e^{\lambda_2 t} = e^{-\zeta\omega_n t}(A_1e^{j\omega_d t} + A_2^{-j\omega_d t}) \tag{16}$$

Onde $A_{1,2}$ são constantes que somos capazes de achar a partir das duas condições iniciais.

4.2.2 Sistema Criticamente-Amortecido

Já para quando $\zeta = 1$, nós chamamos o sistema de criticamente amortecido, e sua equação característica tem duas raízes reais iguais:

$$\lambda_1 = \lambda_2 = -\zeta\omega_n = -\omega_n \tag{17}$$

Resultando em uma resposta que **não oscila** e que é descrita por:

$$x(t) = A_1e^{-\omega_n t} + A_2e^{-\omega_n t} \tag{18}$$

4.2.3 Sistema Super-Amortecido

E para o último caso, chamamos de super-amortecido quando $\zeta > 1$, resultando em:

$$\lambda_{1,2} = \omega_n\left(-\zeta \pm \sqrt{\zeta^2 - 1}\right) = \frac{-1}{\tau_{1,2}} \tag{19}$$

Resultando em uma resposta, que também não oscila, que é descrita por:

$$x(t) = A_1e^{\frac{-t}{\tau_1}} + A_2e^{\frac{-t}{\tau_2}} \tag{20}$$

[4]Importante rever essa parte de Calc III ou Anal, mas o polinômio característico é usado para achar o λ da exponencial que supomos ser a resposta do sistema

5 Vibrações Forçadas de Sistemas de 1 *DOF* sem Amortecimento

6 Vibrações Forçadas de Sistemas de 1 *DOF* com Amortecimento - Excitação Harmônica

Vimos, anteriormente, a resposta de um sistema sem amortecimento para uma entrada forçada (*i.e* que possui uma força externa agindo sobre o sistema). Iremos, agora, verificar a modelagem da resposta de um sistema que também possui **amortecimento viscoso**, dada por:

$$m\ddot{x} + c\dot{x} + kx = F_0 \sin(\Omega t) \Rightarrow \ddot{x} + 2\zeta\omega_n\dot{x} + \omega_n^2 x = f_0 \sin(\Omega t) \tag{21}$$

Onde:

- $\omega_n = \sqrt{k/m}$
- $\zeta = c/(2m\omega_n)$
- $f_0 = F_0/m$

Como estamos lidando com uma *equação diferencial não homogene* por ter o termo forçante. Para esse caso, temos que a resposta do sistema $x = x_p + x_h$, *i.e* ela divida em solução homogênea (também chamada de resposta não forçada do sistema) e da solução particular (também chamada de resposta forçada), que são dadas por:

$$x = x_h + x_p \begin{cases} x_h(t) = Ae^{-\zeta\omega_n t}\sin(\omega_d t + \phi) \\ x_p(t) = M\sin(\Omega t) + N\cos(\Omega t) \end{cases} \tag{22}$$

A partir disso, para descobrirmos os valores de M e N basta nós substituirmos x_p na equação diferencial dada pela equação 21 resultando em:

$$\begin{aligned} M &= \frac{(\omega_n^2 - \Omega^2)f_0}{(\omega_n^2 - \Omega^2)^2 + (2\zeta\omega_n\Omega)^2} = \frac{(1-r^2)f_0/\omega_n^2}{(1-r^2)^2 + (2\zeta r)^2} \\ N &= \frac{-2\zeta\omega_n\Omega f_0}{(\omega_n^2 - \omega^2)^2 + (2\zeta\omega_n\Omega)^2} = \frac{-2\zeta r f_0/\omega_n^2}{(1-r^2)^2 + (2\zeta r)^2} \end{aligned} \tag{23}$$

Onde temos que $r = \Omega/\omega_n$ é chamado de razão das frequências.

A partir disso, podemos, ainda, reescrever a resposta forçada (x_p) como sendo:

$$x_p(t) = X\sin(\Omega t - \theta) \tag{24}$$

Tal que:

- $X = \sqrt{M^2 + N^2}$
- $\tan\theta = (2\zeta r)/(1 - r^2)$

Fizemos essa re-escrita tal que possamos analizar algo chamado de *Fator de Amplificação*, denotado por MF, que é dado por[5]:

$$MF = \frac{Xk}{F_0} = \frac{X\omega_n^2}{f_0} = \frac{1}{\sqrt{(1-r^2)^2 + (2\zeta r)^2}} \tag{25}$$

De tal forma que nós conseguimos analisar e determinar a razão entre a amplitude de entrada e saída e ainda, por conseguinte, o pico de resposta em frequência (dada pelo valor máximo de MF) que corresponde a **Resonância de um Sistema Forçado de 1DOF Amortecido**. Tal ponto de resonância pode ser obtido via experimentação ou ainda analiticamente, se tivermos o modelo matemático que rege nosso sistema, de tal forma que é obtido pela análise dos pontos críticos da função MF, dada pelos pontos onde a sua derivada é zero. Ao aplicarmos isso no exemplo em questão temos que:

$$MF_{max} = \frac{1}{2\zeta\sqrt{1-\zeta^2}} \tag{26}$$

[5]É importante apontar que MF é adimensional propositalmente, pois facilita a análize. A partir disso, se houver um outro sistema o qual você queira identificar o MF nós pegamos a equação que define X (a amplitude da resposta) e tentamos isolar (em função de X e outras coisas) o resto da função que dependa somente de r e ζ, que interferem na amplitude da oscilação e que também são adimencionais.

7 Desbalanceamento Rotativo

Como um exemplo de vibração forçada com amortecimento viscoso ecxitação harmônica é um problema de desbalanceamento rotativo, como exemplificado pelo sistema abaixo:

INSERIR IMAGEM

Esse sistema nós temos a seguinte modelagem:

$$M\ddot{x} + c\dot{x} + kx = me\Omega^2 \sin(\Omega t) \tag{27}$$

Onde teremos uma resposta senoidal para a solução particular também como sendo $X \sin(\Omega t - \alpha)$ com a amplitude X dada por:

$$X = \frac{(me/M)r^2}{\sqrt{(1-r^2)^2 + (2\zeta r)^2}} \tag{28}$$

E o ângulo de fase sendo:

$$\tan(\theta) = \frac{2\zeta r}{1 - r^2} \tag{29}$$

8 Transmissibilidade

Considerando o sistema descrito abaixo, nosso objeto de estudo agora será determinar a força que chega ao suporte do sistema.

Ao fazermos o DCL e a soma das forças em x vemos que a força F aplicada sobre o suporte é:

$$F = kx + x\dot{x} \tag{30}$$

Analisando em regime permanente (e por conseguinte analisando a resposta forçada do sistema) teremos:

$$F = xK \sin(\Omega t - \theta) + c\Omega X \cos(\Omega t - \theta), x(t) = X \sin(\Omega t - \theta) \tag{31}$$

Como estamos lidando com soma de cossenos e senos, podemos representar como sendo somente um seno e uma amplitude, o que facilitará nossas contas e nossas análises (principalmente de amplitude). Reescrevendo a função acima temos:

$$\begin{aligned} F &= \sqrt{(kX)^2 + (x\Omega X)^2} \sin(\Omega t - \theta - \beta) \\ &= \sqrt{(kX)^2 + (x\Omega X)^2} X \sin(\Omega t = \sigma) \end{aligned} \tag{32}$$

A partir disso, podemos analisar que a amplitude máxima (e por conseguinte a força máxima) sofrida pelo suporte do sistema é:

$$F_T = X\sqrt{k^2 + (c\Omega)^2} \tag{33}$$

Com isso, somos capazes de introduzir o conceito de **TRANSMISSIBILIDADE** TR, que é uma relação entre a força máxima que chega no suporte do sistema e da força aplicada no sistema como um todo:

$$TR = \frac{F_T}{F_0} = \frac{\sqrt{1 + (2\zeta r)^2}}{\sqrt{(1-r^2)^2 + (2\zeta r)^2}} \tag{34}$$

Podemos, por fim, analisar o impacto da constante de amortecimento ζ e da razão das frequências r, como mostrado na imagem abaixo:

INSERIR IMAGEM

E podemos, então, observar que quanto menos amortecido, mais força chega no suporte pois gera uma **amplificação** da força de entrada, podendo quebrar o suporte se não projetado propriamente.