Por lo tanto, se tiene:

$$\left[-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{d^2}{dx^2}+\frac{m}{2}\omega_c^2(x-x_0)^2+\frac{\hbar^2}{2m}(k_y^2+k_z^2)-\frac{m}{2}\omega_c^2x_0^2\right]\varphi(x)$$

$$=\mathcal{E}\,\varphi(x)$$

Defino: $\tilde{\mathcal{E}} \equiv \mathcal{E}+\frac{m}{2}\omega_c^2x_0^2-\frac{\hbar^2}{2m}(k_y^2+k_z^2)$

se tiene entonces el problema de valores propios

$$\left[-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{d^2}{dx^2}+\frac{m}{2}\omega_c^2(x-x_0)^2\right]\varphi(x)=\tilde{\mathcal{E}}\,\varphi(x)$$

correspondiente a un oscilador armónico unidimensional, cuyas soluciones son:

$$\varphi_n(x-x_0)=\left(\frac{\beta_c^2}{\pi}\right)^{1/4}\frac{1}{\sqrt{2^n n!}}\,e^{-\beta_c^2(x-x_0)^2/2}\,H_n(x-x_0)$$

y las auto-energías:

$$\tilde{\mathcal{E}}(n)=\hbar\omega_c(n+1/2),\qquad n\in\mathbb{Z}_0^+.$$

Luego, el espectro está dado por: $\left(\beta_c=\sqrt{\frac{m\omega_c}{\hbar}}\right)$

$$\mathcal{E}(n,k_y,k_z)=\tilde{\mathcal{E}}_{(n)}-\frac{m}{2}\omega_c^2x_0^2+\frac{\hbar^2}{2m}(k_y^2+k_z^2)$$

$$=\hbar\omega_c(n+1/2)-\frac{m}{2}\omega_c^2x_0^2+\frac{\hbar^2}{2m}(k_y^2+k_z^2)$$