



Investigação Operacional - Introdução

Investigação Operacional

J.M. Valério de Carvalho
vc@dps.uminho.pt

Departamento de Produção e Sistemas
Escola de Engenharia, Universidade do Minho

2 de outubro de 2020

- Definições de Investigação Operacional
- Metodologia da Investigação Operacional
- Programação Linear, uma área de Investigação Operacional
 - Programação Linear: modelos
 - Programação Linear: exemplos
 - Programação Linear: alguns marcos
- Investigação Operacional: algumas áreas de aplicação
- Objectivos de aprendizagem

O que é a Investigação Operacional (IO)?

Operations Research: The Science of Better[®] (*slogan da INFORMS*)

- A Investigação Operacional (IO) é uma disciplina que usa métodos analíticos para ajudar a encontrar as melhores decisões.

Origens da IO

- Há quem situe as origens da IO na II Guerra Mundial, quando equipas multidisciplinares estudaram problemas militares para encontrar as melhores decisões para utilizar recursos limitados, e.g.,
- a localização de radares ou o planeamento de operações logísticas.

Depois disso, hoje e no futuro

- Crescimento continuado, e alargado a muitas outras áreas.
- O *U.S. Bureau of Labor Statistics** prevê um crescimento de 25% do número de Analistas de IO na década 2019-2029, um valor muito superior à média.

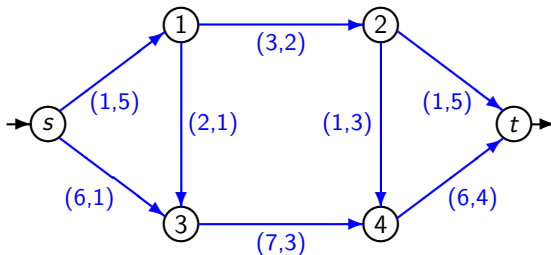
(*) <https://www.bls.gov/ooh/math/operations-research-analysts.htm#tab-1>

- A Investigação Operacional no sentido mais lato pode ser caracterizada como sendo a aplicação de métodos, técnicas e ferramentas científicas a problemas que envolvem a operação de sistemas, por forma a prover os responsáveis pelo controlo da operação com soluções óptimas para os problemas (*Churchman, Ackoff, Arnoff, 1957*).
- A Investigação Operacional pode ser descrita como uma abordagem científica da tomada de decisões que envolvem a operação de um sistema organizacional (*Hillier, Lieberman, 1974*).
- A Investigação Operacional é uma abordagem científica de resolução de problemas de gestão (*Wagner, 1975*).

Exemplo: Caminho mais curto com ou sem restrições

Objectivo:

- Determinar o caminho mais curto entre os vértices s e t , eventualmente obedecendo a outras restrições, como o tempo máximo de viagem.

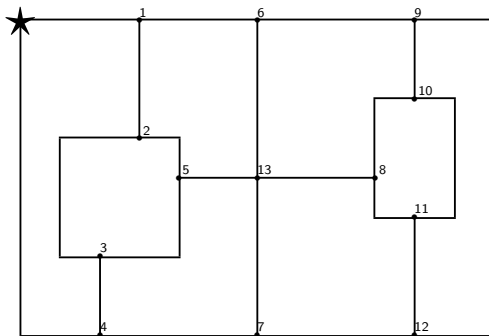


- Valores associados ao arco (i,j) , (d_{ij}, t_{ij}) , representam a distância e o tempo de travessia do arco.

Exemplo: Percurso que atravessa todas as linhas

Objectivo:

- Determinar o percurso dum drone, de modo a atravessar todas as linhas do mapa, minimizando a distância percorrida.



- Drone pode fazer ligações pelo ar (e.g., entre os vértices 13 e 1) para retomar o percurso.

Exemplo: Sudoku 2×2

Objectivo:

- Encontrar a forma de preencher todas as células com algarismos, de forma a que não haja repetição de nenhum algarismo nas linhas, nas colunas ou nos blocos.

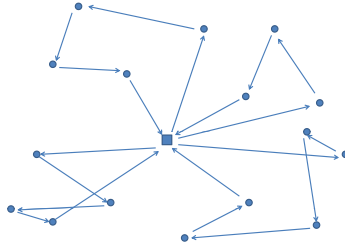
	1	4	
			2
1			
	3	2	

- Há inúmeras aplicações numa grande diversidade de puzzles.

Exemplo: Planeamento de rotas de uma frota de veículos

Objectivo:

- Encontrar o conjunto de rotas, todas começando e terminando no depósito, de um conjunto de veículos de distribuição, de modo a visitar todos os clientes, minimizando o custo.



- Rotas estão sujeitas a muitas restrições, e.g., a capacidade dos veículos, o tempo máximo de jornada laboral dos condutores, a janela temporal permitida para a visita ao cliente.

Como é um modelo de IO?

- Em geral, um modelo é uma representação de um sistema real que permite analisar e avaliar o seu comportamento.

Modelo de IO:

- No contexto da IO, em que o propósito é identificar as melhores decisões, o sistema é representado pela descrição do espaço de decisões admissíveis,

que é complementada por:

- uma medida de eficiência que serve para associar um valor a cada decisão admissível.

Metodologia da Investigação Operacional (IO)

- Definir o problema.
- Observar o sistema e recolher dados.
- Formular um modelo matemático do problema.
- Verificar e validar o modelo.
- Seleccionar uma decisão adequada.
- Implementar e avaliar.

Do sistema ao modelo de IO

Definição do problema:

- analisar o sistema, delimitar a área de actuação, *i.e.*,
- identificar o que podemos decidir e o que não podemos, e
- definir objectivos.

Observação do sistema e recolha de dados:

- conhecer as regras e como elas condicionam as decisões e
- estabelecer a forma de associar um valor a cada decisão.
- A recolha de dados complementa esta fase.

Modelo de Investigação Operacional (do tipo que vamos ver nesta UC)

- descreve o espaço de decisões (soluções) admissíveis e
- associa um valor a cada decisão, usando uma *medida de eficiência*,
- que permite identificar a(s) melhor(es) decisão(ões).

Programação Linear, uma área de Investigação Operacional

- A *Programação Linear (PL)* foi uma das áreas que estiveram na génese da Investigação Operacional,
- e é das que mais contribuem para a sua visibilidade.
- Está na base de muitas outras técnicas de IO.

Programação Linear

- programação é usado no sentido de planeamento, como em programação de actividades, e
 - as funções envolvidas nos modelos são lineares.
-
- A Programação Linear foi seleccionada como tópico para esta UC, porque ilustra bem o que é a IO.
-
- nota: a função $3x + 2y$ é linear; a função $3xy$ com o produto de duas variáveis não é linear.

Formulação de um modelo de Programação Linear

Definição: formular (Dicionário Porto Editora)

- Verbo transitivo
 - ① dar forma a nível mental a; conceber
 - ② expor com clareza; enunciar, exprimir
 - ③ estabelecer a fórmula de
 - ④ ...

Formular um modelo de Programação Linear significa...

- encontrar um forma de representar o problema do sistema real num modelo de Investigação Operacional envolvendo funções lineares.

Formular um modelo de Programação Linear envolve ...

... encontrar uma forma de:

- representar as decisões admissíveis através de *variáveis de decisão* (e.g., reais, inteiras, binárias),

de modo a que seja possível:

- exprimir as regras gerais de funcionamento e tudo o que condiciona as decisões admissíveis através de *restrições*, i.e., equações ou inequações que envolvem funções lineares dessas variáveis de decisão, e
- exprimir a forma de atribuir um valor a cada decisão admissível através de uma *função objectivo*, que também deve ser uma função linear das variáveis de decisão.

- Frequentemente, há formulações diferentes para o mesmo problema.

Programação Linear: elementos dos modelos

Variáveis de decisão:

- são incógnitas que associamos às decisões.
- e.g., x_1 - quantidade de produto 1 a fabricar numa semana.

Parâmetros:

- são dados do sistema que não podem ser alterados.
- e.g., volume de mão-de-obra disponível por semana.

Programação Linear: estrutura dos modelos

Restrições:

- definem o conjunto de decisões (soluções) admissíveis.
- Uma restrição exprime uma relação entre uma **função linear** das variáveis de decisão e uma constante (e.g., um parâmetro).
- e.g., $3x_1 + 2x_2 \leq 120$.

Função objectivo:

- (ou medida de eficiência) é uma **função linear** das variáveis de decisão que associa um valor a cada solução do conjunto de soluções admissíveis.
- e.g., a função $12x_1 + 10x_2$ associa um valor a cada solução (x_1, x_2) .

Fim em vista:

- determinar a(s) solução(ões) que optimiza(m) a função objectivo.
 - Maximizar lucro
 - Minimizar custo

Programação linear: forma geral do modelo

- Problema de optimização (ou maximização ou minimização) de uma função objectivo linear sujeita a restrições lineares:

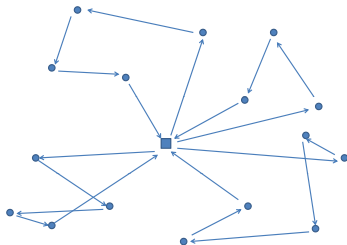
$$\begin{aligned} \{\max, \min\} z &= \sum_{j=1}^n c_j x_j \\ \text{sujeito a} \quad &\sum_{j=1}^n a_{ij} x_j \leq b_i, \forall i \in R_{\leq} \\ &\sum_{j=1}^n a_{ij} x_j \geq b_i, \forall i \in R_{\geq} \\ &\sum_{j=1}^n a_{ij} x_j = b_i, \forall i \in R_{=} \\ &x_j \geq 0, \forall j \end{aligned}$$

- z : função objectivo
- $x_1, \dots, x_j, \dots, x_n$: variáveis de decisão.
- $c_1, \dots, c_j, \dots, c_n$: coeficientes da função objectivo $\sum_{j=1}^n c_j x_j$.
- b_i : coeficiente do lado direito das restrições, indexado por i
- $x_j \geq 0$: restrições de não-negatividade, para todos os j .

No mundo real, os problemas são complexos

Planeamento de rotas de uma frota de veículos

- Dados:
 - um conjunto de veículos com capacidades e
 - um conjunto de clientes com procuras e janelas temporais de visita,
 - ...
- Objectivo: encontrar a solução (decisão) de custo mínimo, com
 - um conjunto de rotas, todas começando e terminando no depósito,
 - sendo cada cliente visitado por um único veículo.



- Que dados faltam? Qual o espaço de soluções admissíveis?

Programação Linear: modelo e resolução do modelo

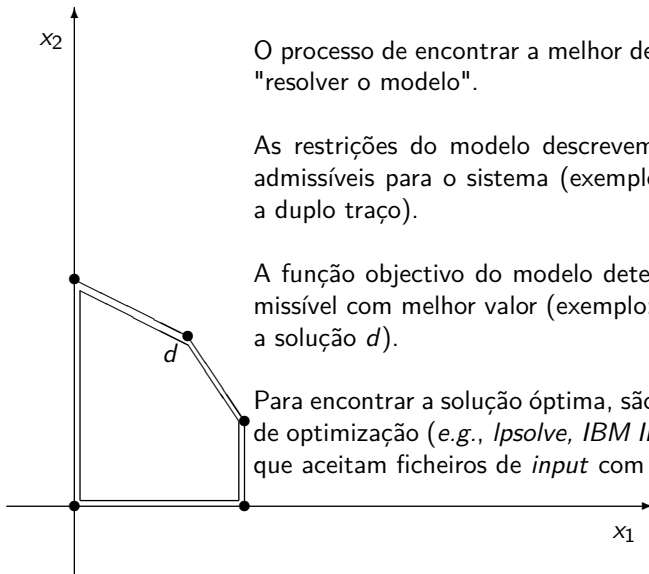
O processo de encontrar a melhor decisão designa-se por "resolver o modelo".

As restrições do modelo descrevem **todas** as soluções admissíveis para o sistema (exemplo: região delimitada a duplo traço).

A função objectivo do modelo determina a solução admissível com melhor valor (exemplo: a solução óptima é a solução d).

Para encontrar a solução óptima, são usadas ferramentas de optimização (e.g., *Ipsolve*, *IBM ILOG Cplex*, *Gurobi*), que aceitam ficheiros de *input* com formatos definidos.

[▶ Ver mais](#)



Solução óptima e implementação das decisões

Solução óptima

- O *output* das ferramentas de optimização, *i.e.*, a solução óptima, é:
 - uma lista com os valores óptimos das variáveis de decisão;
 - o valor óptimo da função objectivo.

Implementação das decisões

- A solução óptima deve ser traduzida num conjunto de acções no sistema real,
- o que serve para verificar e comprovar a validade do modelo.

Validação do modelo

- Pode ocorrer que se verifique nesta fase que houve restrições relevantes que não foram consideradas;
- se tal ocorrer, o modelo deve ser refinado, o que pode requerer várias iterações, até se atingir uma decisão implementável.

Programação linear: alguns marcos

- Gauss: Eliminação de Gauss para resolver um sistema de equações
 - Kantorovich (1930) : atribuição eficiente de recursos, e.g., modelos de planeamento industrial e modelos de corte (galardoado com o prémio Nobel (1975) juntamente com Tim Koopmans)
 - Dantzig (1947) : método Simplex
 - Khachian (1979) : método do elipsóide
 - Karmarkar (1984) : método de pontos interiores
-
- Simplex algorithm: one of the top ten algorithms of the 20th century (The Best of the 20th Century: Editors Name Top 10 Algorithms, Barry A. Cipra, from SIAM News, Volume 33, Number 4)

Investigação Operacional: alguns livros

Marcos

- Bellman (1957) Dynamic Programming
- Ford and Fulkerson (1962) Flows in Networks
- Dantzig (1963) Linear Programming and Extensions
- Nemhauser and Wolsey (1988) Integer and Combinatorial Optimization
- Ahuja, Magnanti, and Orlin (1993) Network Flows: Theory, Algorithms and Applications
- Applegate, Bixby, Chvátal, and Cook (2007) The Traveling Salesman Problem: A Computational Study

Didáticos, sobre IO em geral

- Hillier and Libermann (10a. edição em 2014) Introduction to Operations Research
- Taha (10a. edição em 2017) Operations Research: An Introduction
- Winston (4. edição em 2004) Operations Research: Applications and Algorithms

Investigação Operacional: algumas áreas de aplicação

- A Investigação Operacional é uma técnica de uso generalizado na indústria e nos serviços:
 - Logística e distribuição
 - Telecomunicações e redes de comunicação
 - Gestão da cadeia de abastecimento
 - Gestão de serviços de saúde
 - Planeamento da operação de companhias de transporte (aéreo, caminho de ferro, urbano)
 - Planeamento da produção
 - Gestão de projectos
 - Corte e empacotamento
 - Gestão de pessoal
 - Gestão de florestas
 - ...
- A sua utilização traduz-se em economias muito relevantes.

Objectivos de aprendizagem da Unidade Curricular

- R1. Conhecer a metodologia de Investigação Operacional.
- R2. Conhecer as técnicas e os métodos de Investigação Operacional apresentados na Unidade Curricular, e ser capaz de os aplicar na resolução de instâncias de pequena dimensão.
- R3. Desenvolver a capacidade de analisar sistemas complexos e de tomar melhores decisões através dum processo que envolve:
 - R3a) criar um modelo de descrição de um sistema;
 - R3b) utilizar programas computacionais adequados para obter uma solução para o modelo;
 - R3c) validar o modelo, interpretar a solução, e traduzi-la em recomendações para o sistema em análise.
- R4. Compreender a importância da avaliação das soluções, e ser capaz de realizar análises de sensibilidade.

Fim

(Alguns) solvers de programação matemática

CPLEX	https://www.ibm.com/analytics/cplex-optimizer
GUROBI	https://www.gurobi.com/
XPRESS-MP	http://www.dashoptimization.com
COIN CLP	http://www.coin-or.org
GLPK	http://www.gnu.org/software/glpk
LP SOLVE	https://sourceforge.net/projects/lpsolve/

Ver também:

- Software Survey: Linear Programming, Robert Fourer

<https://www.informs.org/ORMS-Today/Public-Articles/June-Volume-44-Number-3/Linear-Programming-Software-Survey>

(Algumas) linguagens de modelação

AMPL	A Modeling Language for Mathematical Programming	www.ampl.com	*
GAMS	General Algebraic Modeling System	www.gams.com	*
OPL	Optimization Programming Language	www.ilog.com	*
LINGO	Lingo	www.lindo.com	*
GNU-MP	GNU Mathematical Programming Language	www.gnu.org/software/glpk	+

(*) - comercial

(+) - livre

◀ Voltar