

Tópicos de Matemática Discreta

folha 7

3. Introdução à Teoria de Conjuntos

3.1. Considere o conjunto $A = \{1, -1, \frac{1}{4}, 2, 0, -\frac{1}{2}\}$. Indique todos os elementos de cada um dos conjuntos seguintes.

- (a) $\{a \in A \mid a^2 \in \mathbb{Z}\}$ (d) $\{a \in A \mid a \geq 0 \wedge \sqrt{a} \in A\}$
(b) $\{a^2 \in \mathbb{R} \mid a \in A \wedge a^2 \in A\}$ (e) $\{x \in \mathbb{R} \mid \exists a \in A \quad (a^2 \in A \wedge a \geq 0 \wedge x = \sqrt{a})\}$
(c) $\{b \in \mathbb{Z} \mid \exists a \in A \quad b = a^2\}$ (f) $\{b \in \mathbb{R} \mid \exists a \in A \quad b^2 = a\}$

3.2. Descreva, por compreensão, cada um dos conjuntos que se seguem:

- (a) $A = \{-1, 1\}$ (c) $B = \{3, 6, 9, 12, 15, \dots\}$
(b) $C = \{2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, \dots\}$ (d) $D = \{4, 9, 16, 25\}$

3.3. De entre os conjuntos que se seguem, indique aqueles que são iguais.

- (a) $\{x \in \mathbb{R} \mid x^2 - 3x + 2 = 0\}$, $\{1, 2\}$ e $\{n \in \mathbb{N} \mid 0 < n^2 \leq 4\}$ (c) \emptyset , $\{0\}$, $\{\emptyset\}$ e $\{\}$
(b) $\{r, t, s\}$, $\{s, t, r, s\}$, $\{t, s, t, s\}$ e $\{s, t, r, t\}$ (d) $\{1, \{-1\}\}$, $\{1, -1\}$ e $\{x \in \mathbb{R} \mid x^2 = 1\}$

3.4. Seja $A = \{5, 11, \{5, 11\}, \{0\}, \emptyset\}$. Diga, justificando, se cada uma das afirmações que se seguem é ou não verdadeira.

- (a) $5 \in A$ (b) $\{5\} \in A$ (c) $\{5, 11\} \in A$ (d) $A \subseteq \mathbb{R}$
(e) $\{5, 11\} \subseteq A$ (f) $0 \in A$ (g) $\emptyset \in A$ (h) $\{0, 5, 11\} \subseteq A$

3.5. Diga se é verdadeira ou falsa cada uma das afirmações seguintes:

- (a) $1 \in \{1\}$ (c) $\{1\} \in \{1\}$ (e) $\{1\} \in \{1, \{1\}\}$ (g) $\{1\} \subseteq \{\{1\}\}$
(b) $1 \in \{\{1\}\}$ (d) $\{1\} \in \{\{1\}\}$ (f) $\{1\} \subseteq \{1\}$ (h) $\{1, \{1\}\} \subseteq \{\{1\}\}$

3.6. Investigue a veracidade de cada uma das seguintes proposições.

- (a) $\emptyset \in \{\emptyset\}$ (b) $\emptyset \subseteq \{\emptyset\}$ (c) $\emptyset \notin \emptyset$ (d) $\emptyset \in \{\{\emptyset\}\}$

3.7. Considere que $A \subseteq B \subseteq C$. Considere ainda que $a \in A$, $b \in B$, $c \in C$ e que $d \notin A$, $e \notin B$ e $f \notin C$. Quais das afirmações seguintes são necessariamente verdadeiras?

- (a) $a \in C$ (b) $b \in A$ (c) $d \in B$ (d) $c \notin A$ (e) $e \notin A$ (f) $f \notin A$

3.8. Dê exemplos de conjuntos A e B tais que se tenha simultaneamente:

- (a) $A \subseteq B$ e $A \not\subseteq B$ (b) $A \not\subseteq B$ e $A \in B$ (c) $A \not\subseteq B$ e $A \notin B$ (d) $A \subseteq B$ e $A \in B$

3.9. Diga se são verdadeiras as seguintes afirmações:

- (a) $|\{1, \{2, 3\}, 4\}| = 4$ (b) $|\{\emptyset, 1\}| = 2$ (c) $|\{\mathbb{N}\}| = \aleph_0$ (d) $|\{\mathbb{N}\}| = \aleph_0$

Tópicos de Matemática Discreta

folha 8

3.10. Sejam $A = \{2, 4, 6, 8\}$, $B = \{x \in \mathbb{N} \mid \exists y \in \mathbb{N} \ x = 2y\}$ e $C = \{x^2 \mid x \in A\}$. Determine $A \cup C$, $A \cup B$, $C \cup B$, $A \cup A$, $A \cap B$, $B \cap B$, $B \cup C \cup A$, $C \setminus A$, $A \setminus B$ e $B \setminus A$.

3.11. Sejam A, B e C subconjuntos de um conjunto X . Prove que

- (a) $A \cup A = A$ (c) $A = (A \cap B) \cup (A \setminus B)$ (e) se $A \cup B = \emptyset$ então $A = \emptyset$ e $B = \emptyset$
(b) $A \setminus B \subseteq A$ (d) $A \cap (B \setminus C) = (A \cap B) \setminus C$ (f) $(A \cup B) \setminus (B \cap C) = (A \setminus B) \cup (A \setminus C) \cup (B \setminus C)$

3.12. Sejam A, B e C conjuntos. Mostre que se $A \cup B = A \cup C$ e $A \cap B = A \cap C$ então $B = C$.

3.13. Dê exemplos de conjuntos A, B e C para os quais se tenha, respetivamente:

- (a) $A \cup (B \setminus C) \neq (A \cup B) \setminus (A \cup C)$ (b) $A \setminus (B \cap C) \neq (A \setminus B) \cap (A \setminus C)$

3.14. Sejam A, B e C conjuntos. Diga, justificando, se é verdadeira ou falsa cada uma das afirmações seguintes.

- (a) Se $C \subseteq A \cup B$ então $C \subseteq A$ e $C \subseteq B$. (c) Se $C \subseteq A$ ou $C \subseteq B$ então $C \subseteq A \cap B$.
(b) Se $C \subseteq A$ ou $C \subseteq B$ então $C \subseteq A \cup B$. (d) Se $C \subseteq (A \cap B)$ então $C \subseteq A$ e $C \subseteq B$.

3.15. Sejam $A = \{1, 5, 7\}$ e $B = \{\emptyset, 7, \{1, 5, 7\}\}$. Indique $\mathcal{P}(A)$ e $\mathcal{P}(B)$ e diga, justificando, se $A \in \mathcal{P}(B)$, $A \in \mathcal{P}(\mathbb{N})$ e $\mathcal{P}(A) \subseteq \mathcal{P}(\mathbb{N})$.

3.16. Determine $\mathcal{P}(\mathcal{P}(\mathcal{P}(\emptyset)))$.

3.17. Sejam A, B e C conjuntos. Diga, justificando, se é verdadeira ou falsa cada uma das afirmações seguintes: (a) $\mathcal{P}(A \cap B) = \mathcal{P}(A) \cap \mathcal{P}(B)$; (b) $\mathcal{P}(A \cup B) = \mathcal{P}(A) \cup \mathcal{P}(B)$.

3.18. Considere os conjuntos $A = \{1, 2, 3\}$, $B = \{a, b\}$ e $C = \{5\}$. Determine $A \times C$, $C \times A$, $(A \times C) \setminus (C \times A)$, $A \times B \times C$, $A \times \emptyset \times C$, C^3 e $C^3 \times B$.

3.19. Sejam A, B e C conjuntos. Prove que $C \times (A \cup B) = (C \times A) \cup (C \times B)$.

3.20. Sejam A, B e C conjuntos tais que $A \neq B$ e $A \times C = B \times C$. Mostre que $C = \emptyset$.

3.21. Dê exemplo, ou justifique que não existe um exemplo, de conjuntos A, B e C tais que:

- (a) $\{1\} \in A$ e $\{1\} \subseteq A$ (d) $B = C$ e $A \cap B \neq A \cap C$ (g) $A \times (B \setminus C) = A \times C$ com $B, C \neq \emptyset$
(b) $A \cap \emptyset = A$ (e) $A \times B \subseteq B \times C$ e $A \not\subseteq B$ (h) $\mathcal{P}(A \cup B) = \mathcal{P}(A) \cup \mathcal{P}(B)$ com $A, B \neq \emptyset$
(c) $A \cap B = A \cap C$ e $B \neq C$ (f) $A \cup B = A \cup C$ e $B \neq C$ (i) $\mathcal{P}(A) \cap A \neq \emptyset$

3.22. Seja A um conjunto finito. Qual dos conjuntos $\mathcal{P}(A \times A)$ e $\mathcal{P}(A) \times \mathcal{P}(A)$ tem mais elementos?

3.23. Indique todas as partições de $\{1, 2, 3\}$. Repita o exercício com o conjunto $\{1, \{2\}, \mathbb{N}\}$.