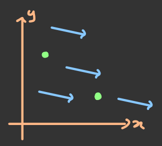
Antes do 27.02.2023

Pontos e Vetores

$\vec{v} = (2,1)$ ↳ - direção do eixo
- definem unidade

$P = (2,1)$



→ é o mesmo vetor

→ pontos diferentes

$P' = P + \vec{v}$

$P'' = P + k\vec{v}$

$0 \leq k \leq 1$ → os pontos variam entre P e P'

$\vec{v} = P' - P$

$P'' = P + k(P' - P)$

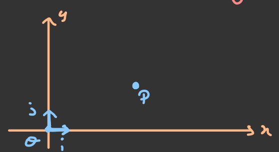
$P'' = \underbrace{(1-k)}_{\alpha_1}P + \underbrace{k}_{\alpha_2}P'$ ⇒ Interpolação Linear

$P = \alpha_1 P_1 + \alpha_2 P_2 + \ldots + \alpha_n P_n$ ⇒ Combinação afim

$0 \leq \alpha_i \leq 1$

$\sum \alpha_i = 1$

⇒ Coordenadas homogeneas



$P(2,1)$

$P = 2 \cdot \vec{i} + 1 \cdot \vec{j}$

$P = \theta + 2\vec{i} + 1 \cdot \vec{j}$ → ou seja, P parte da origem

$P\ (2, 1, \underline{1})$ ⇒ Em 2D, temos 3 coordenadas

duas vezes o i; 1 vez o j; 1 vez a origem

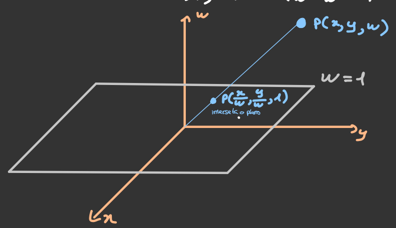
→ distingue entre ponto e vetor

$\vec{v}\ (2, 1, \underline{0})$

$\vec{v} = P_1 - P_2 = (\ldots, 1) - (\ldots, 1) = (\ldots, 0)$

$P_1 + P_2 = (1,2,1) + (2,1,1) = (3,3,2) = (1{,}5,\ 1{,}5,\ 1)$

$(x, y, w) \rightarrow \left(\frac{x}{w}, \frac{y}{w}, 1\right)$



⇒ Translação

$P_1 = P + \vec{v}$

$P_1 = (P_x + V_x, P_y + V_y, 1)$

$P_1 = \underbrace{P_x\vec{i} + P_y\vec{j} + \theta}_{P} + \underbrace{V_x\vec{i} + V_y\vec{j}}_{V}$, com $\overbrace{\theta + V_x\vec{i} + V_y\vec{j}}^{\theta'}$

$P_1 = P_x\vec{i} + P_y\vec{j} + \theta'$

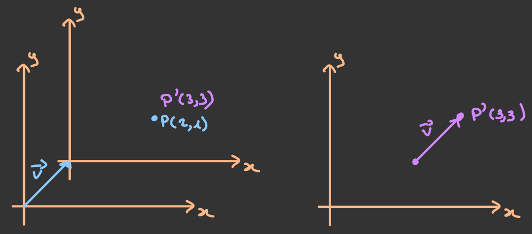
$P_1 = \begin{bmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \theta' \end{bmatrix} \begin{bmatrix} P_x \\ P_y \\ 1 \end{bmatrix}$

$\theta' = \underbrace{\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}}_{\theta} + V_x \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + V_y \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} V_x \\ V_y \\ 1 \end{bmatrix}$

$P_1 = \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} \vec{i} & \vec{j} & \vec{\theta}' \end{array} \\ \begin{bmatrix} 1 & 0 & V_x \\ 0 & 1 & V_y \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \end{array} \begin{bmatrix} P_x \\ P_y \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} P_x + V_x \\ P_y + V_y \\ 1 \end{bmatrix}$

Quando se aplica uma translação a um vetor, as suas coordenadas mudam? ⇒ Não muda

Aplicar a translação ao sistema de coordenadas



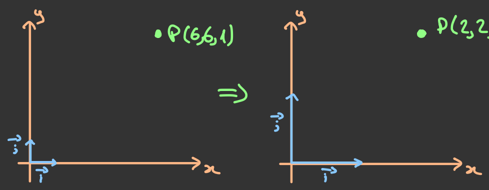
$$P_1 = \underbrace{T_{v_1} \, T_{v_2} \cdots T_{v_n}}_{T} \cdot P = T \cdot P$$ ⇒ Assim só 1 transformação é aplicada ao ponto

⇒ Escalas

$\cancel{P_1 = 3 \cdot P = (6,6,3) = (2,2,1)}$
↳ P(2,2,1)

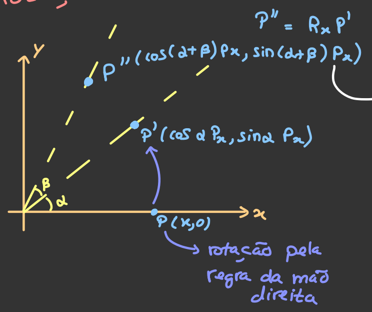
$$\Rightarrow \quad S = \begin{bmatrix} S_x & 0 & 0 \\ 0 & S_y & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad P_1 = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 \\ 6 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$S^{-1} = \begin{bmatrix} 1/S_x & 0 & 0 \\ 0 & 1/S_y & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$



27.02.2023

⇒ Rotação



$\Rightarrow \cos(\alpha+\beta) = \cos(\alpha)\cos(\beta) - \sin(\alpha)\sin(\beta)$

$\Rightarrow \sin(\alpha+\beta) = \sin(\alpha)\cos(\beta) + \sin(\beta)\cos(\alpha)$

$$P''_x = \cos(\alpha+\beta)\,P_x = \cos(\alpha)\cos(\beta)\,P_x - \sin(\alpha)\sin(\beta)\,P_x$$
$$= \cos(\beta)\,P'_x - \sin(\beta)\,P'_y$$

$$P''_y = \sin(\alpha+\beta)\,P_x = \sin(\alpha)\cos(\beta)\,P_x + \sin(\beta)\cos(\alpha)\,P_x$$
$$= \cos(\beta)\,P'_y + \sin(\beta)\,P'_x$$

⇓ passar para uma matriz

$$P'' = \begin{bmatrix} \cos\beta & -\sin\beta & 0 \\ \sin\beta & \cos\beta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} P'_x \\ P'_y \\ 1 \end{bmatrix}$$

⇒ Rotação no eixo z (3 dimensões)

$$R_{z,\alpha} = \begin{bmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha & 0 & 0 \\ \sin\alpha & \cos\alpha & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

⇒ Rotação no eixo y (3 dimensões)

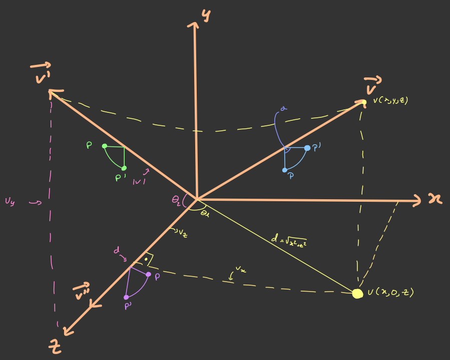
$$R_{y,\alpha} = \begin{array}{c} \begin{bmatrix} \cos\alpha & 0 & \sin\alpha & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -\sin\alpha & 0 & \cos\alpha & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \\ \begin{matrix} \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow \\ x & y & z & o \\ & & & \text{(origem)} \end{matrix} \end{array}$$

→ $\cos(\alpha) = \cos(-\alpha)$

→ $\sin(\alpha) = -\sin(\alpha)$

⇒ Rotação no eixo x (3 dimensões)

$$R_{x,\alpha} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\alpha & -\sin\alpha & 0 \\ 0 & \sin\alpha & \cos\alpha & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$



1. Escolher um eixo
2. Rodar o vetor

$P = R_{y,\theta_1} P$

$P = R_{x,\theta_2} P$

$P' = R_{z,\alpha} P$

$P' = R_{x,-\theta_2} P'$

$P' = R_{y,-\theta_1} P'$

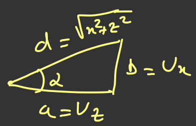
$$\Rightarrow P' = \underbrace{R_{y,-\theta_1} R_{x,-\theta_2} R_{z,\alpha} R_{x}\theta_2 R_{y}\theta_1}_{} P$$

↳ feito uma vez por frame

$P' = R_{v,\alpha} P$

↳ feita para cada ponto

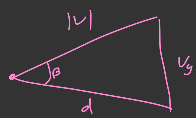
$$R_{y,-\theta_1} = \begin{bmatrix} \frac{v_z}{\sqrt{v_x^2+v_z^2}} & 0 & -\frac{v_x}{\sqrt{v_x^2+v_z^2}} & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ +\frac{v_x}{\sqrt{v_x^2+v_z^2}} & 0 & \frac{v_z}{\sqrt{v_x^2+v_z^2}} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$



$\cos(\alpha) = \frac{a}{d}$

$\sin(\alpha) = \frac{b}{d}$

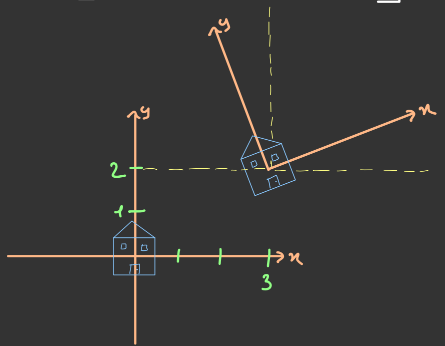
$$R_{x,\theta_2} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & d & -v_y & 0 \\ 0 & v_y & d & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$



$\cos(\beta) = \frac{d}{|v|}$

$\sin(\beta) = \frac{v_y}{|v|}$

$$M = \begin{array}{c} \begin{matrix} x & \quad y & \quad o \end{matrix} \\ \left[\begin{array}{cc|c} 0{,}707 & -0{,}707 & 3 \\ 0{,}707 & 0{,}707 & 2 \\ \hline 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \end{array}$$



translação $T = \left[\begin{array}{c|c} I_3 & t \\ \hline 0 & 1 \end{array}\right]$

escala $S = \left[\begin{array}{c|c} S & 0 \\ \hline 0 & 1 \end{array}\right]$

rotação $R = \left[\begin{array}{c|c} R & 0 \\ \hline 0 & 1 \end{array}\right]$

$M = \left[\begin{array}{c|c} RS & t \\ \hline 0 & 1 \end{array}\right]$

$$M\mathcal{B} = I \Rightarrow M = \left[\begin{array}{c|c} RS & t \\ \hline 0 & 1 \end{array}\right] \left[\begin{array}{c|c} A & B \\ \hline 0 & 1 \end{array}\right] = \left[\begin{array}{c|c} RS \times A & RS \times B + t \\ \hline 0 & 1 \end{array}\right]$$

↳ $A = RS^{-1}$ → se não aplicar escalas, a inversa é a transposta

↳ $B = RS^{-1} \cdot t$

↳ aplicar as escalas no final

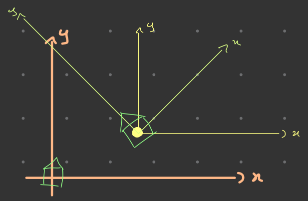
06.03.2023

$T = \left[\begin{array}{c|c} I & t \\ \hline 0 & 1 \end{array}\right]$ $\qquad T_1 \cdot T_2 = T_2 \cdot T_1$

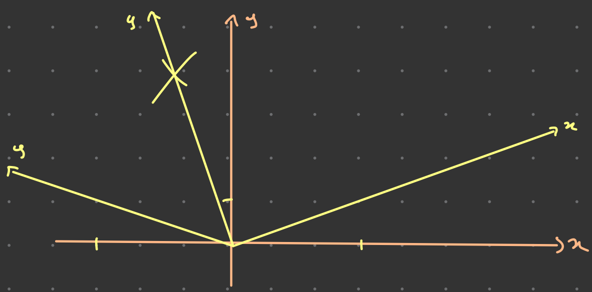
$S = \left[\begin{array}{c|c} S & 0 \\ \hline 0 & 1 \end{array}\right]$ $\qquad S_1 \cdot S_2 = S_2 \cdot S_1$

$R = \left[\begin{array}{c|c} R & 0 \\ \hline 0 & 1 \end{array}\right]$ $\qquad R_1 \cdot R_2 \neq R_2 \cdot R_1$

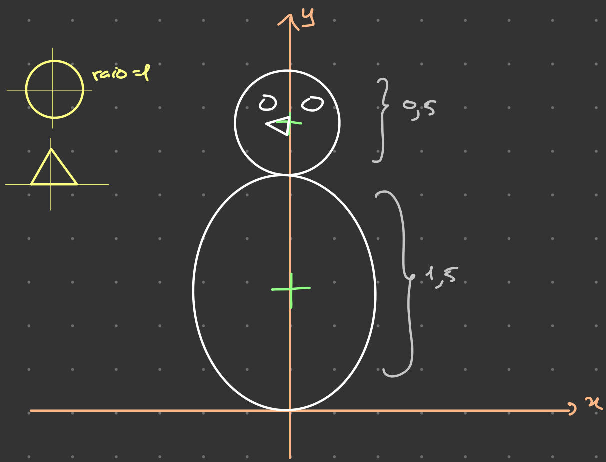
$$T = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad R = \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} x & y & \end{array} \\ \begin{bmatrix} \cos 45 & -\sin 45 & 0 \\ \sin 45 & \cos 45 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \end{array}$$



$$S = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad R = \begin{bmatrix} \cos 45 & -\sin 45 & 0 \\ \sin 45 & \cos 45 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad SR = \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} x & y & \theta \end{array} \\ \begin{bmatrix} 3\cos 45 & -3\sin 45 & 0 \\ \sin 45 & \cos 45 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \end{array}$$



=> A escala deve ser aplicada no fim



corpo
- translate (0, 0.75, 0) -> para subir os eixos das coordenadas
- Scale 0.75 -> pushMatrix();
- esfera
- scale 1/0.75 -> popMatrix(); -> antes de continuar, desfazer a escala

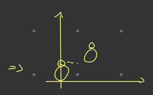
nariz
- translate (0, 1, 0) -> pushMatrix();
- rotate 90° 0,1,0
- cone
- rotate -90° 0,1,0 -> popMatrix(); -> desfazer a rotação

cabeça
- scale 0,25 -> pushMatrix();
- esfera
- scale 1/0.25 -> popMatrix(); -> desfazer a escala

olho
- translate 0.05, 0.05, 0.05
- Scale 0.05 -> pushMatrix();
- esfera
- scale 0.05 -> popMatrix();

-> evita arredondamentos e erros de arredondamento

```
void renderScene() {
        ⋮
    drawnSnowMan(); -> push
    translate(2,0,0); -> pop
    drawnSnowMan();
```

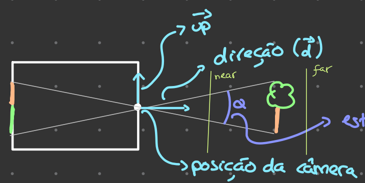


ou

na própria transformação fazer push e pop:

```
void drawnSnowMan(){
        push
          ⋮
        pop
}
```

=> colocar câmera:



=> parâmetros extrínsecos -> gluLookAt(p, la, up);

-> este ângulo controla o zoom -> α = field of view (fov) => depende da câmera

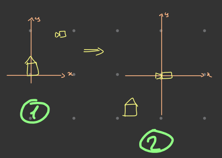
near -> não vejo o que está antes

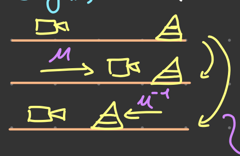
far -> não vejo o que está depois

=> parâmetros intrínsecos

-> Vemos o que está entre o near e o far => View frustum

=> a câmera passará a estar na origem -> os pontos vão fazer uma translação





=> a imagem tirada pela câmera é a mesma nestes dois casos

movimento inverso

1 => por a câmera no mundo => $M = TR$

$$T = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & P_x \\ 0 & 1 & 0 & P_y \\ 0 & 0 & 1 & P_z \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad R = \begin{array}{c} \begin{matrix} x & y & z & \end{matrix} \\ \begin{bmatrix} & & & 0 \\ & & & 0 \\ & & & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \end{array}$$

$$\vec{d} = la - p$$

$$z = \frac{-\vec{d}}{|\vec{d}|}$$

$$x = \frac{\vec{d} \times \vec{up}}{|\vec{d} \times \vec{up}|}$$

$$y = \vec{z} \times \vec{x}$$

2 => Temos que fazer a inversa => $(TR)^{-1} = R^{-1}T^{-1}$