Universidade do Minho **LEI | MIEI**
Departamento de Matemática **2021/2022**

Elementos de Probabilidades e Teoria de Números

Elementos de Probabilidades - Formulário

Cap. I: Probabilidades

[Probabilidade - definição e propriedades] Uma probabilidade sobre o espaço amostral Ω é uma função que a cada acontecimento $A \subseteq \Omega$ associa um número real, $P(A)$, que satisfaz 3 axiomas:
i) $P(A) \geq 0$; ii) $P(\Omega) = 1$;
iii) $P(A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup \ldots) = P(A_1) + P(A_2) + P(A_3) + \ldots$, para quaisquer $A_1, A_2, A_3, \ldots$ disjuntos 2 a 2.

Propriedades:
i) $P(\overline{A}) = 1 - P(A)$
ii) Se $A \subseteq B$ então $P(A) \leq P(B)$
iii) $P(\emptyset) = 0$ e $0 \leq P(A) \leq 1$
iv) $P(B \cap \overline{A}) = P(B) - P(B \cap A)$
v) $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$
vi) [Fórmula de Poincaré]

$$P(A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_n) = \sum_{i=1}^{n} P(A_i) - \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=i+1}^{n} P(A_i \cap A_j) + \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=i+1}^{n} \sum_{k=j+1}^{n} P(A_i \cap A_j \cap A_k)$$
$$- \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=i+1}^{n} \sum_{k=j+1}^{n} \sum_{l=k+1}^{n} P(A_i \cap A_j \cap A_k \cap A_l) + \ldots + (-1)^{n+1} P(A_1 \cap A_2 \cap \ldots \cap A_n)$$

[Probabilidade condicionada - definição e propriedades] $P(A \mid B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$, com $P(B) > 0$.

Teorema da Probabilidade Total e Fórmula de Bayes: Se $A_1, A_2, \ldots$ formam uma partição de Ω e $P(A_i) > 0$, $i = 1, 2, \ldots$, então

$$P(B) = P(B \mid A_1)P(A_1) + P(B \mid A_2)P(A_2) + \ldots + P(B \mid A_n)P(A_n) + \ldots \quad \text{[TPT]}$$

Adicionalmente, se $P(B) > 0$,

$$P(A_i \mid B) = \frac{P(B \mid A_i)\, P(A_i)}{P(B \mid A_1)P(A_1) + P(B \mid A_2)P(A_2) + \ldots + P(B \mid A_n)P(A_n) + \ldots} \quad \text{[Bayes]}$$

Regra da Multiplicação: Se $P\left(\bigcap_{i=1}^{n-1} A_i\right) > 0$ então

$$P\left(\bigcap_{i=1}^{n} A_i\right) = P(A_1)P(A_2|A_1)P(A_3|A_1 \cap A_2) \ldots P\left(A_n \mid \bigcap_{i=1}^{n-1} A_i\right)$$

[Acontecimentos independentes - definição] Diz-se que n acontecimentos são independentes se, para quaisquer r desses acontecimentos, com $2 \leq r \leq n$, a probabilidade da intersecção dos r acontecimentos é igual ao produto das respectivas probabilidades.

Cap. II: Variáveis Aleatórias (v.a.)

[Discretas] X diz-se v.a. discreta se o seu contradomínio é um conjunto finito ou infinito numerável. É caracterizada pelo contradomínio, C_X, e pela função massa de probabilidade (f.m.p.)

$$X : \left\{ \begin{array}{cccc} x_1 & x_2 & x_3 & \ldots \\ P(X = x_1) & P(X = x_2) & P(X = x_3) & \ldots \end{array} \right. .$$

Para um qualquer $B \subseteq \mathbb{R}$, tem-se: $P(X \in B) = \sum_{x_i \in C_X \,:\, x_i \in B} P(X = x_i)$.

[Contínuas] X diz-se v.a. contínua se o seu contradomínio é infinito não numerável e é caracterizada por uma função densidade de probabilidade, f. Para $B \subseteq \mathbb{R}$, tem-se: $P(X \in B) = \int_B f(x)dx$.

Nota: $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é uma função densidade de probabilidade se $f(x) \geq 0$ e $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = 1$.

[Função de distribuição - definição e propriedades] A função de distribuição da v.a. X é

$$\begin{array}{rccl} F: & \mathbb{R} & \longrightarrow & [0,1] \\ & c & \mapsto & F(c)=P(X\leq c) \end{array}.$$

Propriedades: i) F é não decrescente e contínua à direita
ii) $\lim\limits_{c\to-\infty} F(c)=0$ e $\lim\limits_{c\to+\infty} F(c)=1$ iii) $P(a<X\leq b)=F(b)-F(a)$

[Valor médio e variância]: O valor médio da v.a. X, denotado por μ_X ou $E[X]$, é dado por

$$\mu_X=\sum_{x_i\in C_X} x_i P(X=x_i) \quad , \quad \mu_X=\int_{-\infty}^{+\infty} x f(x)dx.$$

(caso discreto) (caso contínuo)

A variância da v.a X, denotada por σ_X^2 ou $Var[X]$, é dada por $Var[X]=E[(X-\mu_X)^2]$.
Em particular, quando $E[X^2]$ existe, a variância reduz-se a $Var[X]=E[X^2]-(E[X])^2$, ou seja, a

$$Var[X]=\left[\sum_{x_i\in C_X} x_i^2 P(X=x_i)\right]-(E[X])^2 \quad , \quad Var[X]=\left[\int_{-\infty}^{+\infty} x^2 f(x)dx\right]-(E[X])^2.$$

(caso discreto) (caso contínuo)

[Quantil de ordem p]: Se X tem função de distribuição F, o quantil de ordem p, com $p\in]0,1[$, denota-se por χ_p, é dado por $\chi_p=\inf\{c\in\mathbb{R}: F(c)\geq p\}$.

[Variáveis independentes] Dadas $n\geq 2$ variáveis aleatórias, $X_1,X_2,\ldots,X_n$, estas dizem-se independentes se, para todos os $B_1,B_2,\ldots,B_n$ subconjuntos de $\mathbb{R}$,

$$P((X_1,X_2,\ldots,X_n)\in(B_1\times B_2\times\ldots\times B_n))=\prod_{i=1}^{n} P(X_i\in B_i)$$

[Propriedades do valor médio e variância] Para quaisquer X, $X_1,X_2,\ldots X_n$ v.a., tem-se

i) $E[aX+b]=aE[X]+b$ e $Var[aX+b]=a^2Var[X]$, quaisquer que sejam as constantes $a,b\in\mathbb{R}$
ii) $E[X_1+X_2+\ldots+X_n]=E[X_1]+E[X_2]+\ldots+E[X_n]$;
iii) Se as v.a. são independentes então $Var[X_1+X_2+\ldots+X_n]=Var[X_1]+Var[X_2]+\ldots+Var[X_n]$.

[Distribuição Binomial] Diz-se que X segue a distribuição Binomial com parâmetros n e p, com $n\in\mathbb{N}$ e $p\in]0,1[$, abrevia-se por $X\sim Bin(n,p)$, se X é discreta com $C_X=\{0,1,\ldots,n\}$ e f.m.p. dada por

$$P(X=k)=\binom{n}{k}p^k(1-p)^{n-k},\ k\in C_X. \quad \underline{\text{Nota}}: E[X]=np \text{ e } Var[X]=np(1-p).$$

[Distribuição de Poisson] Diz-se que X segue a distribuição de Poisson com parâmetro λ, com $\lambda\in\mathbb{R}^+$, abrevia-se por $X\sim Poisson(\lambda)$, se X é discreta com $C_X=\mathbb{N}_0$ e f.m.p. dada por

$$P(X=k)=e^{-\lambda}\frac{\lambda^k}{k!},\ k=0,1,2,3,\ldots. \quad \underline{\text{Nota}}: E[X]=Var[X]=\lambda.$$

[Distribuição Uniforme em $[a,b]$] Diz-se que X segue a distribuição Uniforme no intervalo $[a,b]$, abrevia-se por $X\sim U([a,b])$, se X é contínua e tem função densidade de probabilidade dada por

$$f(x)=\begin{cases} \frac{1}{b-a} & \text{se} \quad a\leq x\leq b \\ 0 & \text{se} \quad \text{caso contrário} \end{cases}.$$

A função de distribuição é $F_X(c)=\begin{cases} 0 & se \quad c<a \\ \frac{c-a}{b-a} & se \quad a\leq c\leq b \\ 1 & se \quad c>b \end{cases}$. Nota: $E[X]=\frac{a+b}{2}$ e $Var[X]=\frac{(b-a)^2}{12}$.

[Distribuição Exponencial] Diz-se que T segue a distribuição Exponencial com parâmetro λ, com $\lambda\in\mathbb{R}^+$, abrevia-se por $T\sim Exp(\lambda)$, se T é contínua e tem função densidade de probabilidade dada por

$$f(x)=\begin{cases} 0 & se \quad x<0 \\ \lambda e^{-\lambda x} & se \quad x\geq 0 \end{cases}.$$

A função de distribuição é $F_T(c)=\begin{cases} 0 & se \quad c<0 \\ 1-e^{-\lambda c} & se \quad c\geq 0 \end{cases}$. Nota: $E[T]=\frac{1}{\lambda}$ e $Var[T]=\frac{1}{\lambda^2}$.

[Distribuição Normal] Diz-se que X segue a distribuição Normal com parâmetros μ e σ^2, com $\mu \in \mathbb{R}$ e $\sigma > 0$, abrevia-se por $X \sim N(\mu, \sigma^2)$, se X é contínua e tem função densidade de probabilidade

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} exp\left\{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2\right\}, \ x \in \mathbb{R}. \quad \underline{\text{Nota}} : E[X] = \mu \text{ e } Var[X] = \sigma^2.$$

Propriedades da distribuição Normal:

i) Se $Z \sim N(0,1)$ então $\chi_p = \chi_{1-p}$ e $F_{N(0,1)}(-c) = 1 - F_{N(0,1)}(c)$, para todo $c \in \mathbb{R}$.

ii) Se $X \sim N(\mu, \sigma^2)$ então, para quaisquer contantes reais $a \neq 0$ e b, $aX + b \sim N(a\mu + b\,,\, a^2\sigma^2)$.

iii) Sejam $X_1, \ldots, X_n$ são v.a.'s independentes e tais que $X_i \sim N\left(\mu_i, \sigma_i^2\right)$, $i = 1, \ldots, n$. Então

$$Y = \sum_{i=1}^{n} a_i\, X_i \sim N\left(\sum_{i=1}^{n} a_i\, \mu_i\,,\, \sum_{i=1}^{n} a_i^2\, \sigma_i^2\right).$$

iv) [Teorema Limite Central] Sejam $X_1, X_2, \ldots$ v.a.'s i.i.d.'s, com valor médio μ e variância finita σ^2, e considere-se a v.a. $S_n = X_1 + X_2 + \ldots + X_n$. Então, a função de distribuição da v.a. $\frac{S_n - n\mu}{\sqrt{n\sigma^2}}$ converge, quando $n \to +\infty$, para a função de distribuição da $N(0,1)$, i.e.,

$$P\left(\frac{S_n - n\mu}{\sqrt{n\sigma^2}} \leq c\right) \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} F_{N(0,1)}(c), \ c \in \mathbb{R}.$$

Tabela da Distribuição Normal Reduzida

Z	0	0,01	0,02	0,03	0,04	0,05	0,06	0,07	0,08	0,09
0,0	0,0000	0,0040	0,0080	0,0120	0,0160	0,0199	0,0239	0,0279	0,0319	0,0359
0,1	0,0398	0,0438	0,0478	0,0517	0,0557	0,0596	0,0636	0,0675	0,0714	0,0753
0,2	0,0793	0,0832	0,0871	0,0910	0,0948	0,0987	0,1026	0,1064	0,1103	0,1141
0,3	0,1179	0,1217	0,1255	0,1293	0,1331	0,1368	0,1406	0,1443	0,1480	0,1517
0,4	0,1554	0,1591	0,1628	0,1664	0,1700	0,1736	0,1772	0,1808	0,1844	0,1879
0,5	0,1915	0,1950	0,1985	0,2019	0,2054	0,2088	0,2123	0,2157	0,2190	0,2224
0,6	0,2257	0,2291	0,2324	0,2357	0,2389	0,2422	0,2454	0,2486	0,2517	0,2549
0,7	0,2580	0,2611	0,2642	0,2673	0,2704	0,2734	0,2764	0,2794	0,2823	0,2852
0,8	0,2881	0,2910	0,2939	0,2967	0,2995	0,3023	0,3051	0,3078	0,3106	0,3133
0,9	0,3159	0,3186	0,3212	0,3238	0,3264	0,3289	0,3315	0,3340	0,3365	0,3389
1,0	0,3413	0,3438	0,3461	0,3485	0,3508	0,3531	0,3554	0,3577	0,3599	0,3621
1,1	0,3643	0,3665	0,3686	0,3708	0,3729	0,3749	0,3770	0,3790	0,3810	0,3830
1,2	0,3849	0,3869	0,3888	0,3907	0,3925	0,3944	0,3962	0,3980	0,3997	0,4015
1,3	0,4032	0,4049	0,4066	0,4082	0,4099	0,4115	0,4131	0,4147	0,4162	0,4177
1,4	0,4192	0,4207	0,4222	0,4236	0,4251	0,4265	0,4279	0,4292	0,4306	0,4319
1,5	0,4332	0,4345	0,4357	0,4370	0,4382	0,4394	0,4406	0,4418	0,4429	0,4441
1,6	0,4452	0,4463	0,4474	0,4484	0,4495	0,4505	0,4515	0,4525	0,4535	0,4545
1,7	0,4554	0,4564	0,4573	0,4582	0,4591	0,4599	0,4608	0,4616	0,4625	0,4633
1,8	0,4641	0,4649	0,4656	0,4664	0,4671	0,4678	0,4686	0,4693	0,4699	0,4706
1,9	0,4713	0,4719	0,4726	0,4732	0,4738	0,4744	0,4750	0,4756	0,4761	0,4767
2,0	0,4772	0,4778	0,4783	0,4788	0,4793	0,4798	0,4803	0,4808	0,4812	0,4817
2,1	0,4821	0,4826	0,4830	0,4834	0,4838	0,4842	0,4846	0,4850	0,4854	0,4857
2,2	0,4861	0,4864	0,4868	0,4871	0,4875	0,4878	0,4881	0,4884	0,4887	0,4890
2,3	0,4893	0,4896	0,4898	0,4901	0,4904	0,4906	0,4909	0,4911	0,4913	0,4916
2,4	0,4918	0,4920	0,4922	0,4925	0,4927	0,4929	0,4931	0,4932	0,4934	0,4936
2,5	0,4938	0,4940	0,4941	0,4943	0,4945	0,4946	0,4948	0,4949	0,4951	0,4952
2,6	0,4953	0,4955	0,4956	0,4957	0,4959	0,4960	0,4961	0,4962	0,4963	0,4964
2,7	0,4965	0,4966	0,4967	0,4968	0,4969	0,4970	0,4971	0,4972	0,4973	0,4974
2,8	0,4974	0,4975	0,4976	0,4977	0,4977	0,4978	0,4979	0,4979	0,4980	0,4981
2,9	0,4981	0,4982	0,4982	0,4983	0,4984	0,4984	0,4985	0,4985	0,4986	0,4986
3,0	0,4987	0,4987	0,4987	0,4988	0,4988	0,4989	0,4989	0,4989	0,4990	0,4990
3,1	0,4990	0,4991	0,4991	0,4991	0,4992	0,4992	0,4992	0,4992	0,4993	0,4993
3,2	0,4993	0,4993	0,4994	0,4994	0,4994	0,4994	0,4994	0,4995	0,4995	0,4995
3,3	0,4995	0,4995	0,4995	0,4996	0,4996	0,4996	0,4996	0,4996	0,4996	0,4997
3,4	0,4997	0,4997	0,4997	0,4997	0,4997	0,4997	0,4997	0,4997	0,4997	0,4998
3,5	0,4998	0,4998	0,4998	0,4998	0,4998	0,4998	0,4998	0,4998	0,4998	0,4998
3,6	0,4998	0,4998	0,4999	0,4999	0,4999	0,4999	0,4999	0,4999	0,4999	0,4999
3,7	0,4999	0,4999	0,4999	0,4999	0,4999	0,4999	0,4999	0,4999	0,4999	0,4999
3,8	0,4999	0,4999	0,4999	0,4999	0,4999	0,4999	0,4999	0,4999	0,4999	0,4999
3,9	0,5000	0,5000	0,5000	0,5000	0,5000	0,5000	0,5000	0,5000	0,5000	0,5000