

Métodos Numéricos

Aproximação dos Mínimos Quadrados

Teresa Monteiro

Departamento de Produção e Sistemas

Escola de Engenharia

Universidade do Minho

tm@dps.uminho.pt

Dada uma função definida num intervalo $[a, b] \in \mathbb{R}$ por uma tabela matemática com m pontos (m = tamanho da amostra)

| | | | | |
|-------|-------|-------|---------|-------|
| x_j | x_1 | x_2 | \dots | x_m |
| f_j | f_1 | f_2 | \dots | f_m |

$a \leq x_1 < x_2 < \dots < x_m \leq b$, ou por uma relação funcional $f(x)$, pretende-se calcular uma função aproximação simples, $M(x)$, que reflita, na generalidade, o comportamento dos dados.

Essa função $M(x)$ pode ser um polinómio de grau menor ou igual a n : $p_n(x)$.

O resíduo $r(x) = f(x) - M(x)$ mede a proximidade de $f(x)$ em relação a $M(x)$.

- Introdução
- Modelo Linear
 - a) Modelo polinomial
 - b) Modelo não polinomial
- Avaliação de modelos
- Exercícios de aplicação

No problema linear o objetivo é encontrar um modelo $M(x)$ do tipo

$$M(x) = c_0\Phi_0(x) + c_1\Phi_1(x) + \dots + c_n\Phi_n(x).$$

Notar que este modelo **é linear nos parâmetros** c_0, c_1, \dots, c_n .

As funções $\Phi_i, i = 0, \dots, n$ são conhecidas.

Objetivo: calcular $c_i, i = 0, \dots, n$ (**parâmetros do modelo**).

Considere-se o seguinte conjunto de m equações lineares nas $n + 1$ incógnitas (parâmetros do modelo) $c_i, i = 0, \dots, n$:

$$c_0\Phi_0(x_j) + c_1\Phi_1(x_j) + \dots + c_n\Phi_n(x_j) = f(x_j), \quad j = 1, \dots, m$$

- Se $m = n + 1$ tem-se a técnica de **interpolação**
- Se $m > (n + 1)$ o sistema tem mais equações do que incógnitas (é sobredeterminado) e o que se pretende é que as equações sejam verificadas aproximadamente.

Uma das técnicas para a resolução destes sistemas é a técnica dos **mínimos quadrados**.

Modelo dos Mínimos Quadrados

O objetivo é encontrar o modelo $M(x)$, que pode ser ou não um polinómio, de tal forma que se verifique:

$$\text{minimizar } \langle f - M(x), f - M(x) \rangle \Leftrightarrow \text{minimizar } S$$

S é o somatório do quadrado dos resíduos:

$$S = \sum_{j=1}^m [f(x_j) - M(x_j)]^2$$

Nota: Produto interno entre dois vetores

$$\left\langle \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ -4 \end{pmatrix} \right\rangle = 2 \times 3 + 1 \times (-4) = 2$$

Modelo Polinomial

Nesta secção vai aproximar-se a função $f(x)$ por um modelo polinomial, recorrendo a **polinómios ortogonais**.

O objetivo é calcular o seguinte polinómio (o modelo é um polinómio!):

$$p_n(x) = c_0P_0(x) + c_1P_1(x) + \dots + c_nP_n(x)$$

Para minimizar $S = \sum_{j=1}^m [f(x_j) - p_n(x_j)]^2$

$$\sum_{j=1}^m [f(x_j) - p_n(x_j)]^2 = \sum_{j=1}^m [f(x_j) - c_0P_0(x_j) - c_1P_1(x_j) - \dots - c_nP_n(x_j)]^2$$

vai derivar-se S em ordem aos parâmetros (c_0, c_1, \dots, c_n)

Modelo Polinomial

$$S = \sum_{j=1}^m [f(x_j) - c_0 P_0(x_j) - c_1 P_1(x_j) - \dots - c_n P_n(x_j)]^2$$

$$\min (S) \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{\partial S}{\partial c_0} = 0 \\ \frac{\partial S}{\partial c_1} = 0 \\ \vdots \\ \frac{\partial S}{\partial c_n} = 0 \end{cases}$$

$$\frac{\partial S}{\partial c_0} = -2 \sum_{j=1}^m (f_j - c_0 P_0(x_j) - c_1 P_1(x_j) - \dots - c_n P_n(x_j)) P_0(x_j) = 0$$

$$\frac{\partial S}{\partial c_1} = -2 \sum_{j=1}^m (f_j - c_0 P_0(x_j) - c_1 P_1(x_j) - \dots - c_n P_n(x_j)) P_1(x_j) = 0$$

$$\frac{\partial S}{\partial c_n} = -2 \sum_{j=1}^m (f_j - c_0 P_0(x_j) - c_1 P_1(x_j) - \dots - c_n P_n(x_j)) P_n(x_j) = 0$$

Sistema das equações normais - **linear** nos parâmetros

c_0, c_1, \dots, c_n .

$$\begin{pmatrix} \sum_{j=1}^m P_0^2(x_j) & \sum_{j=1}^m P_0(x_j)P_1(x_j) & \dots & \sum_{j=1}^m P_0(x_j)P_n(x_j) & | & \sum_{j=1}^m f_j P_0(x_j) \\ \sum_{j=1}^m P_1(x_j)P_0(x_j) & \sum_{j=1}^m P_1^2(x_j) & \dots & \sum_{j=1}^m P_1(x_j)P_n(x_j) & | & \sum_{j=1}^m f_j P_1(x_j) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & | & \vdots \\ \sum_{j=1}^m P_n(x_j)P_0(x_j) & \sum_{j=1}^m P_n(x_j)P_1(x_j) & \dots & \sum_{j=1}^m P_n^2(x_j) & | & \sum_{j=1}^m f_j P_n(x_j) \end{pmatrix}$$

Polinómios Ortogonais

Se os polinómios $P_i(x)$ forem ortogonais,
 $\langle P_i(x), P_k(x) \rangle = 0, i, k = 0, 1, \dots, n, i \neq k$:

$$\begin{pmatrix} \sum_{j=1}^m P_0^2(x_j) & & & \\ & \sum_{j=1}^m P_1^2(x_j) & & \\ & & \ddots & \\ & & & \sum_{j=1}^m P_n^2(x_j) \end{pmatrix} \begin{vmatrix} \sum_{j=1}^m f_j P_0(x_j) \\ \sum_{j=1}^m f_j P_1(x_j) \\ \vdots \\ \sum_{j=1}^m f_j P_n(x_j) \end{vmatrix}$$

$$c_i = \frac{\sum_{j=1}^m f_j P_i(x_j)}{\sum_{j=1}^m P_i(x_j)^2} \quad i = 0, \dots, n.$$

Polinómios Ortogonais

Para o cálculo dos P'_s utiliza-se a seguinte relação de recorrência que gera polinómios ortogonais:

$$P_{i+1}(x) = A_i(x - B_i)P_i(x) - C_iP_{i-1}(x), \quad i = 0, 1, \dots, n-1$$

$$P_0(x) = 1 \text{ e } P_{-1}(x) = 0 \text{ (por convenção)}$$

$$A_i = 1, \forall i$$

$$B_i = \frac{\sum_{j=1}^m x_j P_i(x_j) P_i(x_j)}{\sum_{j=1}^m P_i(x_j) P_i(x_j)}$$

$$C_0 = 0 \text{ e } C_i = \frac{\sum_{j=1}^m P_i(x_j) P_i(x_j)}{\sum_{j=1}^m P_{i-1}(x_j) P_{i-1}(x_j)}$$

Modelo não polinomial

No caso do modelo não ser um polinómio ele tem a forma:

$$M(x) = c_1\Phi_1(x) + c_2\Phi_2(x) + \dots + c_n\Phi_n(x).$$

A ideia é a mesma:

$$\min S \Leftrightarrow \min \sum_{j=1}^m [f(x_j) - M(x_j)]^2$$

$$\min \sum_{j=1}^m [f(x_j) - c_1\Phi_1(x_j) - c_2\Phi_2(x_j) - \dots - c_n\Phi_n(x_j)]^2$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial S}{\partial c_1} = 0 \\ \frac{\partial S}{\partial c_2} = 0 \\ \vdots \\ \frac{\partial S}{\partial c_n} = 0 \end{array} \right.$$

Modelo não polinomial

Obtém-se o seguinte **sistema de equações normais**, **linear** nas incógnitas c_1, c_2, \dots, c_n que são os parâmetros do modelo:

$$\frac{\partial S}{\partial c_1} = -2 \sum_{j=1}^m (f_j - c_1 \Phi_1(x_j) - c_2 \Phi_2(x_j) - \dots - c_n \Phi_n(x_j)) \Phi_1(x_j) = 0$$

$$\frac{\partial S}{\partial c_2} = -2 \sum_{j=1}^m (f_j - c_1 \Phi_1(x_j) - c_2 \Phi_2(x_j) - \dots - c_n \Phi_n(x_j)) \Phi_2(x_j) = 0$$

...

$$\frac{\partial S}{\partial c_n} = -2 \sum_{j=1}^m (f_j - c_1 \Phi_1(x_j) - c_2 \Phi_2(x_j) - \dots - c_n \Phi_n(x_j)) \Phi_n(x_j) = 0$$

Modelo não polinomial

$$\left(\begin{array}{cccc|c} \sum_{j=1}^m \phi_1^2(x_j) & \sum_{j=1}^m \phi_1 \phi_2(x_j) & \dots & \sum_{j=1}^m \phi_1(x_j) \phi_n(x_j) & \sum_{j=1}^m f_j \phi_1(x_j) \\ \sum_{j=1}^m \phi_2 \phi_1(x_j) & \sum_{j=1}^m \phi_2^2(x_j) & \dots & \sum_{j=1}^m \phi_2(x_j) \phi_n(x_j) & \sum_{j=1}^m f_j \phi_2(x_j) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \sum_{j=1}^m \phi_n(x_j) \phi_1(x_j) & \sum_{j=1}^m \phi_n(x_j) \phi_2(x_j) & \dots & \sum_{j=1}^m \phi_n^2(x_j) & \sum_{j=1}^m f_j \phi_n(x_j) \end{array} \right)$$

A matriz dos coeficientes é quadrada e simétrica e o sistema linear, cujas incógnitas são os parâmetros c_1, c_2, \dots, c_n - deve ser resolvido por um método direto e estável (EGPP).

Quando se constroem dois modelos $M_1(x)$ e $M_2(x)$ no sentido dos mínimos quadrados para aproximar um função $f(x)$, como decidir qual o melhor dos dois?

Calcula-se:

$$S_1 = \sum_{j=1}^m [f(x_j) - M_1(x_j)]^2$$

$$S_2 = \sum_{j=1}^m [f(x_j) - M_2(x_j)]^2$$

O melhor modelo é aquele que apresentar o menor somatório do quadrado do resíduo (menor S).

Exercício 1 (modelo polinomial)

Na tabela seguinte apresentam-se as vendas trimestrais de um produto que foi lançado no trimestre 1:

| Trimestre (x) | 1 | 2 | 3 | 4 |
|--------------------------|-----|----|------|------|
| Volume de vendas (V) | 1.5 | 11 | 15.5 | 12.5 |

Usando a técnica dos mínimos quadrados construa um modelo quadrático para aproximar o volume de vendas.

Resolução:

O modelo quadrático é do tipo

$$p_2(x) = c_0P_0(x) + c_1P_1(x) + c_2P_2(x)$$

Têm que ser calculados todos os valores:

$P_0(x)$, $P_1(x)$, $P_2(x)$, c_0 , c_1 , c_2 .

Tamanho da amostra $m = 4$.

A construção de uma tabela para calcular os somatórios envolvidos é bastante útil.

Exercício 1 (modelo polinomial)

Os P'_s são calculados através de

$$P_{i+1}(x) = A_i(x - B_i)P_i(x) - C_iP_{i-1}(x), \quad i = 0, 1, \dots, n-1$$

$$P_0(x) = 1$$

$$P_1(x) = (x - B_0) = (x - 2.5)$$

$$B_0 = \frac{\sum_{j=1}^4 x_j}{\sum_{j=1}^4 1} = \frac{10}{4} = 2.5$$

Exercício 1 (modelo polinomial)

| x_j | f_j | $P_1(x_j)$ | $P_1^2(x_j)$ | $x_j P_1^2(x_j)$ | $f_j P_1(x_j)$ | $P_2(x_j)$ | $P_2^2(x_j)$ |
|-----------|-------|------------|--------------|------------------|----------------|------------|--------------|
| 1 | 1.5 | -1.5 | 2.25 | 2.25 | -2.25 | 1 | 1 |
| 2 | 11 | -0.5 | 0.25 | 0.5 | -5.5 | -1 | 1 |
| 3 | 15.5 | 0.5 | 0.25 | 0.75 | 7.75 | -1 | 1 |
| 4 | 12.5 | 1.5 | 2.25 | 9 | 18.75 | 1 | 1 |
| \sum 10 | 40.5 | | 5 | 12.5 | 18.75 | | 4 |

Exercício 1 (modelo polinomial)

$$P_2(x) = (x - B_1)P_1(x) - C_1$$

$$B_1 = \frac{\sum_{j=1}^4 x_j P_1^2(x_j)}{\sum_{j=1}^4 P_1^2(x_j)} = \frac{12.5}{5} = 2.5$$

$$C_1 = \frac{\sum_{j=1}^4 P_1^2(x_j)}{\sum_{j=1}^4 P_0^2(x_j)} = \frac{5}{4} = 1.25$$

$$P_2(x) = (x - 2.5)^2 - 1.25$$

$$c_0 = \frac{\sum_{j=1}^4 f_j P_0(x_j)}{\sum_{j=1}^4 P_0^2(x_j)} = \frac{40.5}{4} = 10.125$$

$$c_1 = \frac{\sum_{j=1}^4 f_j P_1(x_j)}{\sum_{j=1}^4 P_1^2(x_j)} = \frac{18.75}{5} = 3.75$$

$$c_2 = \frac{\sum_{j=1}^4 f_j P_2(x_j)}{\sum_{j=1}^4 P_2^2(x_j)} = \frac{-12.5}{4} = -3.125$$

$$p_2(x) = 10.125 + 3.75(x - 2.5) - 3.125[(x - 2.5)^2 - 1.25]$$

Exercício 2 (modelo não polinomial)

Foram efetuadas várias medições do nível de água no Mar do Norte, $N(t)$, para diferentes valores de t conforme a seguinte tabela:

| | | | | |
|-----------------|-----|-----|-----|-----|
| t (horas) | 2 | 4 | 8 | 10 |
| $N(t)$ (metros) | 1.6 | 1.4 | 0.2 | 0.8 |

Aproxime a função $N(t)$, no sentido dos mínimos quadrados, por um modelo do tipo

$$M(t; c_1, c_2, c_3) = c_1 + c_2 \operatorname{sen}\left(\frac{2\pi t}{p}\right) + c_3 \cos\left(\frac{2\pi t}{p}\right)$$

(Nota: $p = 12$ horas representa uma aproximação da periodicidade do nível de água).

Exercício 2 (modelo não polinomial)

Resolução:

Mudança de variável: $t \rightarrow x$; cálculos em radianos.

O modelo é não polinomial do tipo:

$$M(x) = c_1\Phi_1(x) + c_2\Phi_2(x) + c_3\Phi_3(x)$$

em que $\Phi_1(x) = 1$, $\Phi_2(x) = \sin \frac{2\pi x}{12}$ e $\Phi_3(x) = \cos \frac{2\pi x}{12}$

Tamanho da amostra $m = 4$

Exercício 2 (modelo não polinomial)

O sistema das equações normais:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} \sum_{j=1}^4 \phi_1^2(x_j) & \sum_{j=1}^4 \phi_1(x_j)\phi_2(x_j) & \sum_{j=1}^4 \phi_1(x_j)\phi_3(x_j) & \sum_{j=1}^4 f_j \phi_1(x_j) \\ \sum_{j=1}^4 \phi_2(x_j)\phi_1(x_j) & \sum_{j=1}^4 \phi_2^2(x_j) & \sum_{j=1}^4 \phi_2(x_j)\phi_3(x_j) & \sum_{j=1}^4 f_j \phi_2(x_j) \\ \sum_{j=1}^4 \phi_3(x_j)\phi_1(x_j) & \sum_{j=1}^4 \phi_3(x_j)\phi_2(x_j) & \sum_{j=1}^4 \phi_3^2(x_j) & \sum_{j=1}^4 f_j \phi_3(x_j) \end{array} \right)$$

Exercício 2 (modelo não polinomial)

| x_j | f_j | $\text{sen}(\frac{2\pi x_j}{12})$ | $[\text{sen}(\frac{2\pi x_j}{12})]^2$ | $\cos(\frac{2\pi x_j}{12})$ | $[\cos(\frac{2\pi x_j}{12})]^2$ | $\text{sen}(\frac{2\pi x_j}{12}) \cos(\frac{2\pi x_j}{12})$ |
|---------------------------------------|-------|-----------------------------------|---------------------------------------|-----------------------------|---------------------------------|---|
| 2 | 1.6 | 0.86603 | 0.750 | 0.5 | 0.25 | 0.433015 |
| 4 | 1.4 | 0.86602 | 0.750 | -0.5 | 0.25 | -0.433015 |
| 8 | 0.2 | -0.86603 | 0.750 | -0.5 | 0.25 | 0.433015 |
| 10 | 0.8 | -0.86602 | 0.750 | 0.5 | 0.25 | -0.433015 |
| — | 4 | 0 | 3 | 0 | 1 | 0 |
| $f_j \text{sen}(\frac{2\pi x_j}{12})$ | | $f_j \cos(\frac{2\pi x_j}{12})$ | | | | |
| 1.385648 | | 0.8 | | | | |
| 1.21248 | | -0.7 | | | | |
| -0.173206 | | -0.1 | | | | |
| -0.692816 | | 0.4 | | | | |
| 1.732106 | | 0.4 | | | | |

Exercício 2 (modelo não polinomial)

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 4 & 0 & 0 & 4 \\ 0 & 3 & 0 & 1.732106 \\ 0 & 0 & 1 & 0.4 \end{array} \right]$$

Por EGPP:

$$c_1 = 1, c_2 = 0.57737, c_3 = 0.4$$

O modelo pretendido é então

$$M(x) = 1 + 0.57737 \operatorname{sen} \frac{2\pi x}{12} + 0.4 \cos \frac{2\pi x}{12}$$

Exercício 1

A resistência de um certo fio (de uma certa substância), $f(x)$, varia com o diâmetro desse fio, x . A partir de uma experiência registaram-se os seguintes valores:

| | | | | |
|----------|-----|-----|-----|-----|
| x_i | 1.5 | 2.0 | 3.0 | 4.0 |
| $f(x_i)$ | 4.9 | 3.3 | 2.0 | 1.5 |

Foram sugeridos os seguintes modelos para ajustar os valores de $f(x)$, no sentido dos mínimos quadrados:

- uma reta
- uma parábola

- Calcule a reta.
- Calcule a parábola.
- Estime o valor da resistência de um fio que tem de diâmetro 2.5, através da parábola calculada em b).

Resolução do Exercício 1

(a) Pretende determinar-se uma reta, que é um polinómio de grau 1 (modelo linear polinomial)

$$p_1(x) = c_0 P_0(x) + c_1 P_1(x)$$

Passo 1: Construir os polinómios ortogonais da sequência de polinómios ortogonais $P_0(x)$ e $P_1(x)$, sabendo que

$$P_0(x) = 1 \text{ e } P_{-1}(x) = 0$$

$$P_1(x) = (x - B_0)P_0(x) - C_0 P_{-1}(x) = x - B_0$$

$$B_0 = \frac{\sum_{j=1}^4 x_j P_0^2(x_j)}{\sum_{j=1}^4 P_0^2(x_j)} = \frac{\sum_{j=1}^4 x_j}{\sum_{j=1}^4 P_0^2(x_j)} = \frac{10.5}{4} = 2.625$$

$$P_1(x) = x - 2.625$$

Resolução do Exercício 1

Passo 2: Cálculo dos coeficientes do polinómio c_0 e c_1

$$c_0 = \frac{\sum_{j=1}^4 f_j P_0(x_j)}{\sum_{j=1}^4 P_0^2(x_j)} = \frac{\sum_{j=1}^4 f_j}{\sum_{j=1}^4 P_0^2(x_j)} = \frac{11.7}{4} = 2.925$$

$$c_1 = \frac{\sum_{j=1}^4 f_j P_1(x_j)}{\sum_{j=1}^4 P_1^2(x_j)}$$

Podemos construir uma tabela para auxiliar os cálculos:

| | x_j | f_j | $P_1(x_j)$ | $P_1^2(x_j)$ | $f_j P_1(x_j)$ |
|----------------------------|-------------|-------------|------------|---------------|----------------|
| | 1.5 | 4.9 | -1.125 | 1.265625 | -5.5125 |
| | 2.0 | 3.3 | -0.625 | 0.390625 | -2.0625 |
| | 3.0 | 2.0 | 0.375 | 0.140625 | 0.75 |
| | 4.0 | 1.5 | 1.375 | 1.890625 | 2.0625 |
| Σ | 10.5 | 11.7 | | 3.6875 | -4.7625 |

$$c_1 = \frac{-4.7625}{3.6875} = -1.291525$$

Resolução do Exercício 1

Passo 3: Construção do polinómio

$$p_1(x) = 2.925 - 1.291525(x - 2.625)$$

Resolução do Exercício 1

(b) Pretende determinar-se uma parábola, polinómio de grau 2 (modelo linear polinomial)

$$p_2(x) = c_0 P_0(x) + c_1 P_1(x) + c_2 P_2(x)$$

$$p_2(x) = \underbrace{c_0 P_0(x) + c_1 P_1(x)}_{p_1(x)} + c_2 P_2(x)$$

$$p_2(x) = p_1(x) + c_2 P_2(x)$$

Resolução do Exercício 1

Passo 1: Construir o polinómio ortogonal $P_2(x)$

$$P_2(x) = (x - B_1)P_1(x) - C_1P_0(x) = (x - B_1)P_1(x) - C_1$$

$$B_1 = \frac{\sum_{j=1}^4 x_j P_1^2(x_j)}{\sum_{j=1}^4 P_1^2(x_j)}$$

$$C_1 = \frac{\sum_{j=1}^4 P_1^2(x_j)}{\sum_{j=1}^4 P_0^2(x_j)}$$

Podemos construir uma tabela auxiliar:

| | x_j | f_j | $P_1(x_j)$ | $P_1^2(x_j)$ | $x_j P_1^2(x_j)$ |
|----------|-------------|-------------|------------|---------------|------------------|
| | 1.5 | 4.9 | -1.125 | 1.265625 | 1.898438 |
| | 2.0 | 3.3 | -0.625 | 0.390625 | 0.78125 |
| | 3.0 | 2.0 | 0.375 | 0.140625 | 0.421875 |
| | 4.0 | 1.5 | 1.375 | 1.890625 | 7.5625 |
| Σ | 10.5 | 11.7 | | 3.6875 | 10.664063 |

Resolução do Exercício 1

$$B_1 = \frac{10.6640625}{3.6875} = 2.891949$$

$$C_1 = \frac{3.6875}{4} = 0.921875$$

$$P_2(x) = (x - 2.891949)(x - 2.625) - 0.921875$$

Resolução do Exercício 1

Passo 2: Cálculo do coeficiente do polinómio c_2

$$c_2 = \frac{\sum_{j=1}^4 f_j P_2(x_j)}{\sum_{j=1}^4 P_2^2(x_j)}$$

Continuar a tabela auxiliar:

| | x_j | f_j | $P_1(x_j)$ | $P_1^2(x_j)$ | $x_j P_1^2(x_j)$ | $f_j P_1(x_j)$ | $P_2(x_j)$ | $P_2^2(x_j)$ |
|----------|-------------|-------------|------------|---------------|------------------|----------------|------------|-----------------|
| | 1.5 | 4.9 | -1.125 | 1.265625 | 1.898438 | -5.5125 | 0.644068 | 0.414824 |
| | 2.0 | 3.3 | -0.625 | 0.390625 | 0.78125 | -2.0625 | -0.364407 | 0.132792 |
| | 3.0 | 2.0 | 0.375 | 0.140625 | 0.421875 | 0.75 | -0.881356 | 0.776788 |
| | 4.0 | 1.5 | 1.375 | 1.890625 | 7.5625 | 2.0625 | 0.601695 | 0.362037 |
| Σ | 10.5 | 11.7 | | 3.6875 | 10.664063 | -4.7625 | | 1.686441 |

$$c_2 = \frac{1.093221}{1.686441} = 0.648241$$

Passo 3: Construção do polinómio

$$p_2(x) = 2.925 - 1.291525(x - 2.625) + 0.648241 [(x - 2.891949)(x - 2.625) - 0.921875]$$

Resolução do Exercício 1

(c) Pretende-se estimar o valor da resistência quando o diâmetro é 2.5, através da parábola calculada em (b).

Então, é só substituir $x = 2.5$ no polinómio $p_2(x)$:

$$p_2(2.5) = 2.5206$$

Exercício 1 (cont.)

A resistência de um certo fio (de uma certa substância), $f(x)$, varia com o diâmetro desse fio, x . A partir de uma experiência registaram-se os seguintes valores:

| | | | | |
|----------|-----|-----|-----|-----|
| x_i | 1.5 | 2.0 | 3.0 | 4.0 |
| $f(x_i)$ | 4.9 | 3.3 | 2.0 | 1.5 |

Foram sugeridos os seguintes modelos para ajustar os valores de $f(x)$, no sentido dos mínimos quadrados:

- uma reta
- uma parábola
- o modelo linear: $M(x, c_1, c_2) = \frac{c_1}{x} + c_2x$

- (a) Calcule a reta.
- (b) Calcule a parábola.
- (c) Calcule o modelo M .
- (d) Qual dos modelos escolheria? Justifique a sua escolha.

Resolução do Exercício 1 (cont.)

(c) Pretende determinar-se um modelo (modelo linear e não polinomial), no sentido dos mínimos quadrados, do tipo

$$M(x; c_1, c_2) = \frac{c_1}{x} + c_2 x$$

Passo 1: $n = 2$. Identificação das funções Φ_i :

$$\Phi_1(x) = \frac{1}{x}$$

$$\Phi_2(x) = x$$

Passo 2: Construir o sistema de equações normais

$$\begin{pmatrix} \sum_{i=1}^4 \Phi_1^2(x_j) & \sum_{i=1}^4 \Phi_2(x_j)\Phi_1(x_j) \\ \sum_{j=1}^4 \Phi_1(x_j)\Phi_2(x_j) & \sum_{j=1}^4 \Phi_2^2(x_j) \end{pmatrix} \begin{vmatrix} \sum_{i=1}^4 f_j \Phi_1(x_j) \\ \sum_{j=1}^4 f_j \Phi_2(x_j) \end{vmatrix}$$

Resolução do Exercício 1 (cont.)

Construir uma tabela auxiliar

| | x_j | f_j | $\Phi_1(x_j)$ | $\Phi_2(x_j)$ | $\Phi_1^2(x_j)$ | $\Phi_2^2(x_j)$ | $\Phi_1(x_j)\Phi_2(x_j)$ | $f_j\Phi_1(x_j)$ | $f_j\Phi_2(x_j)$ |
|----------|-------|-------|---------------|---------------|-----------------|-----------------|--------------------------|------------------|------------------|
| | 1.5 | 4.9 | 0.6667 | 1.5 | 0.4444 | 2.25 | 1.000001 | 3.2667 | 7.35 |
| | 2.0 | 3.3 | 0.5 | 2.0 | 0.25 | 4 | 1 | 1.65 | 6.6 |
| | 3.0 | 2.0 | 0.3333 | 3.0 | 0.1111 | 9 | 0.9999 | 0.6666 | 6 |
| | 4.0 | 1.5 | 0.25 | 4.0 | 0.0625 | 16 | 1 | 0.375 | 6 |
| Σ | | | | | 0.8681 | 31.25 | 4 | 5.9583 | 25.95 |

Passo 3: Resolver o sistema resultante por EGPP

$$\left(\begin{array}{cc|c} 0.868055 & 4 & 5.958334 \\ 4 & 31.25 & 25.95 \end{array} \right) \Rightarrow \begin{cases} c_1 = 7.405391 \\ c_2 = -0.117490 \end{cases}$$

Passo 4: Construir o modelo

$$M(x) = \frac{7.405391}{x} - 0.117490x$$

Resolução do Exercício 1 (cont.)

(d) Para saber qual dos modelos calculado anteriormente aproxima melhor os dados no sentido dos mínimos quadrados, deve ser calculada a soma do quadrado dos resíduos, para cada modelo (linear polinomial ou linear não polinomial), e selecionar o que tiver menor valor, ou seja,

$$\text{minimizar } \sum_{j=1}^m (f_j - \text{MODELO}_j)^2$$

Em que MODELO é qualquer um dos calculados anteriormente:

$$p_1(x) = 2.925 - 1.291525(x - 2.625)$$

$$p_2(x) = 2.925 - 1.291525(x - 2.625) + 0.648241 [(x - 2.891949)(x - 2.625) -$$

$$M(x) = \frac{7.405391}{x} - 0.117490x$$

Resolução do Exercício 1 (cont.)

Construir uma tabela auxiliar

| x_j | f_j | $p_1(x_j)$ | $p_2(x_j)$ | $M(x_j)$ | $(f_j - p_1(x_j))^2$ | $(f_j - p_2(x_j))^2$ | $(f_j - M(x_j))^2$ |
|----------|-------|------------|------------|----------|----------------------|----------------------|--------------------|
| 1.5 | 4.9 | 4.377966 | 4.795477 | 4.760683 | 0.272519391 | 0.010924977 | 0.01940913 |
| 2 | 3.3 | 3.732203 | 3.49598 | 3.4677 | 0.18679977 | 0.038408121 | 0.0281232 |
| 3 | 2 | 2.440678 | 1.869347 | 2.115967 | 0.19419707 | 0.017070276 | 0.01344826 |
| 4 | 1.5 | 1.149153 | 1.539196 | 1.38135 | 0.123093939 | 0.001536325 | 0.01407782 |
| Σ | | | | | 0.77661017 | 0.0679397 | 0.0750585 |

O modelo que aproxima melhor os dados no sentido dos mínimos quadrados é $p_2(x)$, uma vez que é o que apresenta menor soma do quadrado dos resíduos.