notas de álgebra linear

maria joana soares

setembro 2010

Conteúdo

1

Sistemas Lineares

1.1 Introdução

Um problema muito importante em diversas áreas das Ciências e Engenharia é o da resolução de sistemas de equações lineares, sobre o qual nos debruçaremos neste primeiro capítulo.

Comecemos por relembrar que uma equação linear nas variáveis (ou incógnitas) $x_1, x_2, \dots, x_n$ é uma equação que pode ser escrita na forma

$$a_1x_1 + a_2x_2 + \cdots + a_nx_n = b, \tag{1.1}$$

onde $a_1, a_2, \dots, a_n$ e b são números dados.[1] As constantes $a_1, a_2, \dots a_n$ são os *coeficientes* das incógnitas e b é o *termo independente*.

Exemplo 1.1. A equação

$$2x_1 + x_2 - x_3 = 5$$

é uma equação linear nas variáveis x_1, x_2 e x_3. As equações

$$2x_1x_2 + 5x_3 = 4$$

e

$$\cos x_1 + x_2 - x_3 = 3$$

não são lineares.

[1] Neste curso, se nada for dito em contrário, quando nos referirmos a números, entendemos números reais.

Uma solução da equação (1.1) é uma lista ordenada de n números (isto é, aquilo a que chamamos um n-uplo ordenado) $(s_1, s_2, \ldots, s_n)$ tais que as substituições $x_i = s_i$, $i = 1, \ldots, n$, transformam a equação numa proposição verdadeira, isto é, tais que

$$a_1 s_1 + a_2 s_2 + \ldots + a_n s_n = b.$$

Exemplo 1.2. Consideremos a equação

$$2x_1 + x_2 = 5.$$

Então, $(1, 1)$ não é solução dessa equação, uma vez que $2 \times 1 + 1 = 3 \neq 5$, mas $(1, 3)$ é solução, já que $2 \times 1 + 3 = 5$. De facto, qualquer que seja $k \in \mathbb{R}$, $(k, 5 - 2k)$ é solução desta equação. Vemos, assim, que a equação admite uma infinidade de soluções.

Um sistema de equações lineares é uma colecção finita de equações lineares (todas nas mesmas incógnitas) consideradas em conjunto:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \qquad\qquad \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases}, \tag{1.2}$$

onde a_{ij} e b_i são números dados. Os x_i's são as variáveis (ou incógnitas) que pretendemos determinar, a_{ij} é o coeficiente da incógnita x_j na i-ésima equação, sendo b_i o termo independente dessa mesma equação.

Uma solução do sistema é um n-uplo ordenado de números que é solução de todas as equações que constituem o sistema.

Para um sistema de equações lineares, existem três possibilidades, no que diz respeito às suas soluções:

- o sistema não admite solução; diz-se, neste caso, que é *impossível* ou *inconsistente*;
- o sistema admite uma e uma só solução, caso em que se diz *possível e determinado*;
- o sistema admite uma infinidade de soluções, dizendo-se, então, *possível e indeterminado*.

Pode provar-se que, se um sistema linear tem mais do que uma solução, então tem um número infinito de soluções, não sendo possível que um sistema tenha, por exemplo, exactamente duas soluções distintas.

Exemplo 1.3. O sistema

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = 2 \\ x_1 + x_2 = 4 \end{cases}$$

é um sistema impossível, uma vez que não existem dois números números cuja soma seja, simultaneamente, igual a 2 e a 4, ou seja, a exigência sobre as variáveis imposta por uma das equações é incompatível com a da outra equação. Considere-se agora o sistema

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = 2 \\ 2x_1 + 2x_2 = 4 \end{cases}.$$

Verificamos facilmente que a "informação" fornecida pela primeira equação é idêntica à da segunda, uma vez que, quaisquer que sejam os números s_1 e s_2, se tem

$$2s_1 + 2s_2 = 4 \iff 2(s_1 + s_2) = 4 \iff s_1 + s_2 = 2,$$

pelo que qualquer par de números é solução da primeira equação se e só se também for solução da segunda. Na prática, tudo se passa como se dispuséssemos apenas de uma equação nas duas incógnitas x_1 e x_2, a equação $x_1 + x_2 = 2$, sendo fácil de verificar que será solução dessa equação qualquer par da forma $(2 - k, k)$, com $k \in \mathbb{R}$. Este sistema é, portanto, possível e indeterminado. Finalmente, se considerarmos o sistema

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = 2 \\ 2x_2 = 4 \end{cases},$$

vemos que da segunda equação, $2x_2 = 4$, resulta que $x_2 = 2$; sendo $x_2 = 2$, ter-se-á, da primeira equação

$$x_1 + 2 = 2 \iff x_1 = 0.$$

Vemos, assim, que $(0, 2)$ é a única solução deste sistema, o qual é, portanto, possível e determinado.

Quando lidamos com sistemas de equações lineares, estamos geralmente interessados, numa primeira fase, em saber a qual das categorias acima referidas pertence o sistema: é o que chamamos *discutir o sistema*. Sendo o sistema possível, pretendemos geralmente, determinar a sua solução, caso seja determinado, ou descrever o conjunto de todas as suas soluções, caso ele seja indeterminado: trata-se de *resolver o sistema*.

1.2 Eliminação Gaussiana

Definição 1.1. Dois sistemas de equações lineares dizem-se *equivalentes* se e só se tiverem o mesmo conjunto de soluções.

O *método de eliminação de Gauss* (ou d*de eliminação Gaussiana*) é um processo sistemático de transformar um dado sistema num sistema *equivalente*, mas com uma forma que facilite a sua discussão e resolução.

O método baseia-se no uso das chamadas *operações elementares* de um sistema. Existem três tipos de operações elementares que podem ser efectuadas num sistema:

1. troca da ordem de equações;

2. multiplicação de uma equação por um número diferente de zero;

3. adição a uma equação de outra equação multiplicada por um número.

A importância das operações elementares de um sistema é estabelecida no seguinte teorema (cuja demonstração omitimos).

Teorema 1.1 (Princípio de Equivalência de Sistemas)**.** *Se, dado um sistema de equações lineares, efectuarmos sobre ele uma sequência finita de operações elementares, obtemos um sistema equivalente ao primeiro.*

Vejamos um exemplo muito simples de utilização de operações elementares para a redução de um sistema a uma forma adequada à sua resolução.

Exemplo 1.4. Consideremos o sistema

$$\left\{\begin{array}{rcrcrcr} 2x_1 & + & x_2 & + & x_3 & = & 1 \\ 6x_1 & + & 2x_2 & + & x_3 & = & -1 \\ -2x_1 & + & 2x_2 & + & x_3 & = & 7 \end{array}\right. .$$

Comecemos por tentar "eliminar" a incógnita x_1 das segunda e terceira equações, adicionando-lhes múltiplos adequados da primeira. Se adicionarmos à segunda equação a primeira multiplicada por -3 e adicionarmos a primeira equação à terceira, obtemos o seguinte sistema

$$\left\{\begin{array}{rcrcrcr} 2x_1 & + & x_2 & + & x_3 & = & 1 \\ & - & x_2 & - & 2x_3 & = & -4 \\ & & 3x_2 & + & 2x_3 & = & 8 \end{array}\right. .$$

O nosso próximo objectivo é eliminar a incógnita x_2 da terceira equação, adicionando-lhe um múltiplo da segunda equação. Para tal, bastar-nos-á adicionar à terceira equação a segunda multiplicada por 3, resultando no seguinte sistema:

$$\left\{\begin{array}{rcrcrcr} 2x_1 & + & x_2 & + & x_3 & = & 1 \\ & - & x_2 & - & 2x_3 & = & -4 \\ & & & - & 4x_3 & = & -4 \end{array}\right. .$$

Neste ponto, dizemos que o sistema foi *triangularizado* ou que tem a forma *triangular* (superior). Um sistema triangular superior resolve-se muito facilmente pelo chamado *método de substituição inversa*: da última equação (que envolve apenas a última incógnita) retira-se o valor da última incógnita; este valor é substituído na penúltima equação, sendo esta resolvida para obter o valor da penúltima incógnita; os valores destas incógnitas substituem-se então na equação anterior para retirar o valor da próxima incógnita, continuando-se, de forma análoga, até que todos os valores das incógnitas sejam encontrados. No nosso exemplo, da última equação

$$-4x_3 = -4$$

resulta $x_3 = 1$. Substituindo na segunda equação, vem

$$-x_2 - 2(1) = -4 \iff -x_2 = -4 + 2 \iff -x_2 = -2 \iff x_2 = 2.$$

Finalmente, substituindo os valores $x_2 = 2$ e $x_3 = 1$ na primeira equação, vem

$$2x_1 + 2 + 1 = 1 \iff 2x_1 = -2 \iff x_1 = -1.$$

Assim, vemos que o sistema dado é possível e determinado, sendo $(-1, 2, 1)$ a sua única solução.

1.2.1 Matriz simples e matriz ampliada de um sistema

Ao aplicarmos as operações elementares sobre um sistema verificamos que estas apenas afectam os coeficientes das incógnitas e os termos independentes, não havendo, portanto necessidade de escrever os símbolos "x_i"e "$=$"em cada passo. Por exemplo, se consideramos o seguinte sistema de equações

$$\left\{\begin{array}{rcrcrcr} 3x_1 & + & x_2 & - & x_3 & = & 4 \\ 5x_1 & & & + & 2x_3 & = & 5 \end{array}\right. ,$$

bastará apenas considerar o seguinte quadro de números

$$\begin{pmatrix} 3 & 1 & -1 & 4 \\ 5 & 0 & 2 & 5 \end{pmatrix}.$$

Um quadro rectangular de $m \times n$ números dispostos em m linhas e n colunas chama-se uma *matriz* de ordem $m \times n$.[2] Escreve-se, por vezes $A_{m\times n}$ para indicar que A é de ordem $m \times n$. Os números que formam esse quadro são chamados *elementos* da matriz. Se A é uma dada matriz, é usual usar a_{ij} para denotar os respectivos elementos: o primeiro índice indica a que linha pertence o elemento e o segundo refere-se à coluna em que se situa o elemento. No próximo capítulo, dedicar-nos-emos ao estudo pormenorizado de matrizes; neste capítulo, apenas nos interessam as matrizes associadas a sistemas. Os elementos da matriz aparecem rodeados, quer por parênteses curvos (como no exemplo acima), quer por parênteses rectos. Assim, uma forma alternativa de representar a matriz acima dada é a seguinte:

$$\begin{bmatrix} 3 & 1 & -1 & 4 \\ 5 & 0 & 2 & 5 \end{bmatrix}.$$

Dado um sistema

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases},$$

à matriz formada pelos coeficientes das incógnitas

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

chamamos *matriz simples do sistema* e à matriz

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} & b_2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} & b_m \end{pmatrix}$$

chamamos *matriz ampliada do sistema*. Se A designar a matriz simples do sistema e $\mathbf{b}$ for a matriz $m \times 1$ (uma matriz deste tipo é chamada uma matriz coluna) dos termos independentes, designamos a matriz ampliada do sistema por $(A\ \mathbf{b})$. Ao formar-se a matriz ampliada, é frequente separar-se, por uma linha vertical, a parte correspondente à matriz simples, da

[2]Lê-se "de ordem m por n."

coluna dos termos independentes, para destacar o papel especial desta última coluna, isto é, a matriz ampliada do sistema é escrita na forma

$$\left(\begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} & b_2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} & b_m \end{array}\right),$$

usando-se, então, a notação $(A|\mathbf{b})$ para a designar.

Às operações elementares de sistemas correspondem, naturalmente, operações nas linhas da matriz ampliada. Por exemplo, à multiplicação de uma equação por um número diferente de zero corresponde a multiplicação (de todos os elementos) da linha respectiva por esse número.

Operações Elementares sobre Linhas

Dada uma matriz, chamam-se operações elementares sobre as linhas dessa matriz, as seguintes operações:

Tipo O1 Troca de duas linhas.

Tipo O2 Multiplicação de uma linha por um número diferente de zero.

Tipo O3 Substituição de uma linha pela sua soma com uma outra linha multiplicada por um número.

Tendo em conta o princípio de equivalência de sistemas, podemos afirmar que:

"*Se* $(A|\mathbf{b})$ *é a matriz ampliada de um sistema e* $(E|\mathbf{c})$ *é uma matriz obtida de* $(A|\mathbf{b})$ *por uma sequência de operações elementares sobre linhas, então estas matrizes correspondem a sistemas equivalentes.*"

Definição 1.2. Uma matriz A diz-se *equivalente por linhas* a uma matriz B, se for possível converter A em B, usando um número finito de operações elementares sobre linhas. Note-se que, se A é uma matriz equivalente por linhas a B, também B é equivalente por linhas a A,[3] por isso poderemos simplesmente dizer que A e B são equivalentes por linhas. Escreve-se, então, $A \overset{\text{linhas}}{\sim} B$.

[3] Justifique esta afirmação!

1.2.2 Matrizes em escada

A ideia do método de eliminação de Gauss é transformar a matriz ampliada $(A|\mathbf{b})$ de um sistema dado, por equivalência de linhas, numa outra matriz $(E|\mathbf{c})$ que tenha uma forma especialmente adequada à discussão e resolução do sistema. Mais precisamente, a forma a que pretendemos chegar é a da chamada *matriz em escada*. Para descrever essa forma, introduzimos primeiramente as seguinte definição.

Definição 1.3. Seja A uma matriz. Um elemento a_{ik} situado na linha i e na coluna k da matriz é dito um *pivô*, se é o primeiro (a contar da esquerda) elemento não nulo da sua linha, isto é, se $a_{ik} \neq 0$ e $a_{ij} = 0$, para $j < k$. Uma linha nula, isto é, formada toda por zeros, não tem pivô.

Matriz em Escada

Diz-se que uma matriz é uma *matriz em escada* ou que *tem a forma em escada*, se forem satisfeitas as seguintes condições:

1. se uma linha da matriz for toda formada por zeros, então todas as linhas abaixo dela também são todas formadas por zeros, i.e. as (eventuais) linhas nulas da matriz ocupam a parte inferior da matriz;

2. se o pivô da linha i estiver na coluna k, então todos os elementos abaixo da posição i nas colunas $1, 2 \ldots, k$ são nulos.

Exemplo 1.5. A matriz

$$A = \begin{pmatrix} \boxed{4} & 2 & 0 & 1 & -1 & 3 & 5 & 1 \\ 0 & 0 & \boxed{2} & 1 & 3 & -2 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & \boxed{4} & 1 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \boxed{1} & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

é uma matriz em escada. Os pivôs são os elementos rodeados por um quadrado.

A matriz

$$B = \begin{pmatrix} \boxed{4} & 2 & 0 & 1 & -1 & 3 & 5 & 1 \\ 0 & 0 & \boxed{2} & 1 & 3 & -2 & 0 & 2 \\ 0 & \boxed{3} & 0 & 4 & 1 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \boxed{1} & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

não é uma matriz em escada, uma vez que o pivô da linha 2 está na coluna 3 e, na coluna 2 o elemento na linha 3 é não nulo. A matriz

$$C = \begin{pmatrix} \boxed{4} & 2 & 0 & 1 & -1 & 3 & 5 & 1 \\ 0 & 0 & \boxed{2} & 1 & 3 & -2 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & \boxed{4} & 1 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \boxed{1} & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

também não é uma matriz em escada, já que a linha 4 é nula, mas a linha 5 não.

Antes de descrevermos, de uma forma genérica, o método de eliminação de Gauss para a conversão de uma matriz (em geral, matriz ampliada de um sistema), usando operações elementares sobre linhas, numa matriz em escada, vejamos alguns exemplos simples.

Exemplo 1.6. Considere-se a seguinte matriz

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 1 \\ 2 & 4 & 3 & 3 \\ 3 & 7 & 1 & 5 \end{pmatrix}. \tag{1.3}$$

A redução à forma em escada pode efectuar-se com se indica abaixo

$$\begin{pmatrix} \boxed{1} & 2 & 1 & 1 \\ 2 & 4 & 3 & 3 \\ 3 & 7 & 1 & 5 \end{pmatrix} \xrightarrow[\substack{L_2-2L_1 \\ L_3-3L_1}]{} \begin{pmatrix} \boxed{1} & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -2 & 2 \end{pmatrix} \xrightarrow[L_2 \leftrightarrow L_3]{} \begin{pmatrix} \boxed{1} & 2 & 1 & 1 \\ 0 & \boxed{1} & -2 & 2 \\ 0 & 0 & \boxed{1} & 1 \end{pmatrix}.$$

Nota: A notação usada para indicar as operações executadas é a seguinte: $L_i + kL_j$ significa que a i-ésima linha é substituída pela sua soma com a linha j multiplicada por k e $L_i \leftrightarrow L_j$ indica a troca das linhas i e j.

Exemplo 1.7. Consideremos agora a seguinte matriz

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 3 & 3 \\ 2 & 4 & 0 & 4 & 4 \\ 1 & 2 & 3 & 5 & 5 \\ 4 & 8 & 0 & 8 & 8 \end{pmatrix} \tag{1.4}$$

e vejamos como podemos reduzi-la à forma em escada.

$$\begin{pmatrix} \boxed{1} & 2 & 1 & 3 & 3 \\ 2 & 4 & 0 & 4 & 4 \\ 1 & 2 & 3 & 5 & 5 \\ 4 & 8 & 0 & 8 & 8 \end{pmatrix} \xrightarrow[\substack{L_2-2L_1 \\ L_3-L_1 \\ L_4-4L_1}]{} \begin{pmatrix} \boxed{1} & 2 & 1 & 3 & 3 \\ 0 & 0 & \boxed{-2} & -2 & -2 \\ 0 & 0 & 2 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & -4 & -4 & -4 \end{pmatrix} \xrightarrow[\substack{L_3+L2 \\ L_4-2L_2}]{} \begin{pmatrix} \boxed{1} & 2 & 1 & 3 & 3 \\ 0 & 0 & \boxed{-2} & -2 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Exemplo 1.8. Considere-se agora a seguinte matriz, bastante idêntica à do exemplo anterior:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 3 & 3 \\ 2 & 4 & 0 & 4 & 4 \\ 1 & 2 & 3 & 5 & 5 \\ 4 & 8 & 0 & 8 & 6 \end{pmatrix}. \tag{1.5}$$

Temos, neste caso:

$$\begin{pmatrix} \boxed{1} & 2 & 1 & 3 & 3 \\ 2 & 4 & 0 & 4 & 4 \\ 1 & 2 & 3 & 5 & 5 \\ 4 & 8 & 0 & 8 & 6 \end{pmatrix} \xrightarrow[\substack{L_2-2L_1 \\ L_3-L_1 \\ L_4-4L_1}]{} \begin{pmatrix} \boxed{1} & 2 & 1 & 3 & 3 \\ 0 & 0 & \boxed{\text{-2}} & -2 & -2 \\ 0 & 0 & 2 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & -4 & -4 & -6 \end{pmatrix} \xrightarrow[\substack{L_3+L_2 \\ L_4-2L_2}]{} \begin{pmatrix} \boxed{1} & 2 & 1 & 3 & 3 \\ 0 & 0 & \boxed{\text{-2}} & -2 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 3-2 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow[L_3 \leftrightarrow L_4]{} \begin{pmatrix} \boxed{1} & 2 & 1 & 3 & 3 \\ 0 & 0 & \boxed{\text{-2}} & -2 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \boxed{\text{-2}} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Exemplo 1.9. Como último exemplo, consideremos a matriz

$$\begin{pmatrix} 0 & 5 & 1 & -8 \\ 0 & 3 & -3 & 6 \\ 4 & -8 & 12 & 0 \end{pmatrix}. \tag{1.6}$$

Temos, neste caso

$$\begin{pmatrix} 0 & 5 & 1 & -8 \\ 0 & 3 & -3 & 6 \\ 4 & -8 & 12 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow[L_1 \leftrightarrow L_3]{} \begin{pmatrix} \boxed{4} & -8 & 12 & 0 \\ 0 & \boxed{3} & -3 & 6 \\ 0 & 5 & 1 & -8 \end{pmatrix} \xrightarrow[L_3-\frac{5}{3}L_2]{} \begin{pmatrix} \boxed{4} & -8 & 12 & 0 \\ 0 & \boxed{3} & -3 & 6 \\ 0 & 0 & \boxed{6} & -18 \end{pmatrix}.$$

Se estudarmos com cuidado cada um dos exemplos anteriores, não é difícil de concluir que o método que usámos – Método de Eliminação de Gauss – seguiu os passos descritos no quadro seguinte.

Método de Eliminação de Gauss
(Conversão de uma matriz numa matriz em escada)

Para reduzir uma matriz $A_{m\times n}$ à forma em escada, podemos seguir o seguinte método:

Passo 1

- começando da esquerda para a direita, procuramos a primeira coluna que contenha um elemento não nulo;
- se não existir tal coluna, A é a matriz nula e está, portanto, já na forma em escada, pelo que não haverá nada a fazer;
- caso contrário, suponhamos que tal coluna é a coluna j; com eventual troca de linhas, colocamos na posição $(1, j)$ um elemento não nulo;
- adicionando múltiplos convenientes da linha 1 às linhas $2, \ldots, m$, anulamos todos os elementos da coluna j situados abaixo da posição 1.

Passo 2

- começando da esquerda para a direita, procuramos a primeira coluna que contenha um elemento não nulo na posição 2 ou abaixo dela;
- se tal coluna não existir, o processo está concluído;
- caso contrário, sendo p essa coluna, por eventual troca de linhas, colocamos na posição $(2, p)$ um elemento não nulo;
- adicionando múltiplos convenientes da linha 2 às linhas $3, \ldots, m$, anulamos todos os elementos da coluna p situados abaixo da posição 2.

...

O processo repete-se, de modo análogo, até que não haja mais linhas ou colunas.

1.2.3 Característica de uma matriz

Uma vez que há alguma flexibilidade na escolha das operações elementares por linhas usadas para converter uma dada matriz A numa outra matriz E com a forma em escada (nomeadamente, na escolha do elemento a colocar na posição de pivô, quando efectuamos troca de linhas), as entradas de E não estão definidas de forma única, a partir de A. No entanto, pode provar-se que a forma de E é única, no sentido em que *as posições dos pivôs em E estão univocamente determinadas pelas entradas da matriz A.* Isto significa, em particular, que o número de pivôs (que é igual ao número de linhas não nulas de E) também é univocamente determinado pela matriz A. Este número é chamado *característica* da matriz A e, como veremos posteriormente, é um número muito importante associado a uma matriz.

Característica de uma Matriz

Suponhamos que uma dada matriz A de ordem $m \times n$ é convertida, por operações elementares sobre linhas, numa matriz em escada E. A característica de A, que designaremos por car(A), é definida como

$$\begin{aligned} \text{car}(A) &= \text{número de pivôs de } E \\ &= \text{número de linhas não nulas de } E \\ &= \text{número de colunas básicas de } A, \end{aligned}$$

onde as *colunas básicas* (também referidas como *colunas principais*) de A são as colunas de A correspondentes às colunas de E que contêm os pivôs.

Retomando os Exemplos 1.6 – 1.9 vemos que: a matriz (1.3) do Exemplo 1.6 tem característica 3, sendo as suas 3 primeiras colunas, colunas principais; a matriz (1.14) do Exemplo 1.7 tem característica 2, sendo as suas colunas 1 e 3 as colunas principais; a matriz (1.5) do Exemplo 1.8 tem característica 3 e as suas colunas principais são as colunas 1, 3 e 5; finalmente, a matriz (1.6) considerada no Exemplo 1.9 tem característica 3 e as suas colunas principais são as colunas 1,2 e 3.

1.3 Resolução de sistemas com matriz em escada

Agora que já sabemos como transformar uma matriz dada numa matriz em escada, por meio de operações elementares sobre as suas linhas, vejamos como usar esse conhecimento para discutir e resolver um sistema.

Exemplo 1.10. Consideremos o sistema

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + x_3 = 1 \\ 2x_2 + 4x_2 + 3x_3 = 3 \\ 3x_1 + 7x_2 + x_3 = 5 \end{cases}.$$

A matriz ampliada deste sistema é a matriz

$$(A|\mathbf{b}) = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 1 \\ 2 & 4 & 3 & 3 \\ 3 & 7 & 1 & 5 \end{array}\right)$$

que é precisamente a matriz (1.3) considerada no Exemplo 1.6 na pg. 9. Já vimos que essa matriz é equivalente por linhas à seguinte matriz em escada:

$$(E|\mathbf{c}) = \left(\begin{array}{ccc|c} \boxed{1} & 2 & 1 & 1 \\ 0 & \boxed{1} & -2 & 2 \\ 0 & 0 & \boxed{1} & 1 \end{array}\right),$$

a qual corresponde ao seguinte sistema (equivalente ao sistema dado):

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + x_3 = 1 \\ \quad\; x_2 - 2x_3 = 2 \\ \qquad\quad\;\; x_3 = 1 \end{cases}.$$

É imediato concluir que, neste caso, vai ser possível encontrar uma e uma única solução para este sistema, por substituição inversa. A última equação diz-nos que $x_3 = 1$; substituindo este valor na segunda equação e resolvendo a equação resultante, vem $x_2 - 2(1) = 2$, de onde se obtém $x_2 = 4$; substituindo os valores de $x_2 = 4$ e $x_3 = 1$ na primeira equação, resulta $x_1 + 2(4) + 1 = 1$, de onde se retira o valor da variável x_1, $x_1 = -8$. Assim, o sistema dado é possível e determinado e a sua solução é $(-8, 4, 1)$.

Observe-se que, neste caso, se tem:

- car(A) = número de pivôs de $E = 3$
- car$(A|\mathbf{b})$ = número de pivôs de $(E|\mathbf{c}) = 3$
- número de incógnitas = número de colunas de $A = 3$.

Exemplo 1.11. Consideremos agora o seguinte sistema, cuja matriz ampliada é a matriz do Exemplo 1.8 na pg. 10:

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + x_3 + 3x_4 = 3 \\ 2x_1 + 4x_2 + 4x_4 = 4 \\ x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 5x_5 = 5 \\ 4x_1 + 8x_2 + 8x_4 = 6 \end{cases}.$$

Retomando o Exemplo 1.8, vemos que a matriz ampliada deste sistema pode ser convertida na seguinte matriz em escada:

$$\left(\begin{array}{cccc|c} \boxed{1} & 2 & 1 & 3 & 3 \\ 0 & 0 & \boxed{-2} & -2 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \boxed{-2} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right).$$

A terceira linha desta matriz ampliada corresponde à equação

$$0x_1 + 0x_2 + 0x_3 + 0x_4 = -2,$$

a qual é, naturalmente, uma equação sem solução; assim, o sistema dado é impossível.

Note-se que, neste caso se tem:

- car$(A) = 2$
- car$(A|\mathbf{b}) = 3$.

Exemplo 1.12. Como último exemplo, considere-se o sistema nas variáveis x_1, x_2, x_3 e x_4, cuja matriz ampliada é a matriz do Exemplo 1.7 na pg. 9. Neste caso, após a redução à forma em escada, tem-se a seguinte matriz ampliada:

$$\left(\begin{array}{cccc|c} \boxed{1} & 2 & 1 & 3 & 3 \\ 0 & 0 & \boxed{-2} & -2 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right).$$

Não há agora nenhuma equação da forma $0x_1+0x_2+0x_3+0x_4 = k$ com $k \neq 0$, ou seja, não encontramos nenhuma equação sem solução; além disso, embora dispuséssemos, inicialmente, de 4 equações para determinar o valor das 4 variáveis, vemos que, na realidade, há apenas 2 equações com "informação relevante", pois duas delas foram transformadas numa identidade $0 = 0$, ou seja, o sistema dado é equivalente ao seguinte sistema *reduzido*:

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + x_3 + 3x_3 = 3 \\ \qquad\qquad -2x_3 - 2x_4 = -2 \end{cases}.$$

Vemos, então, que não vai ser possível determinar univocamente o valor das 4 variáveis: duas delas vão ser *livres* ou *independentes* (isto é, vão poder tomar valores arbitrários), e as outras duas, ditas *principais* ou *dependentes*, irão tomar valores que dependem dos valores atribuídos às variáveis livres; por outras palavras, as variáveis dependentes vão ser função das variáveis livres. Note-se, que, neste caso se tem:

- car$(A) = 2$
- car$(A|\mathbf{b}) = 2$
- número de variáveis $= 4$

- número de variáveis livres$= 4 - 2 =$número de variáveis$-$ car(A).

Vamos considerar como variáveis principais aquelas que correspondem às colunas principais, ou, dito de outro modo, aquelas que estão associadas aos pivôs;[4] neste caso, serão principais as variáveis x_1 e x_3, sendo as variáveis x_2 e x_4 livres; atribuindo valores arbitrários a x_2 e x_4 isto é, considerando $x_2 = \alpha$ e $x_4 = \beta$, $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, e substituindo esses valores nas duas primeiras equações, tem-se

$$\begin{cases} x_1 + 2\alpha + x_3 + 3\beta = 3 \\ \qquad -2x_3 - 2\beta = -2 \\ \qquad\qquad x_2 = \alpha \\ \qquad\qquad x_4 = \beta \end{cases}.$$

Passando para o lado direito das equações os termos com α e β, vem

$$\begin{cases} x_1 + x_3 = 3 - 2\alpha - 3\beta \\ \quad -2x_3 = -2 + 2\beta \\ \qquad x_2 = \alpha \\ \qquad x_4 = \beta \end{cases}$$

e as duas primeiras equações deste sistema estão prontas a ser resolvidas por substituição inversa:

$$-2x_3 = -2 + 2\beta \iff x_3 = -\frac{1}{2}(-2 + 2\beta) \iff x_3 = 1 - \beta;$$

substituindo a expressão de x_3 na primeira equação e resolvendo em ordem a x_1 virá:

$$x_1 + (1 - \beta) = 3 - 2\alpha - 3\beta \iff x_1 = 2 - 2\alpha - 2\beta$$

Vemos, então, que o conjunto de soluções do sistema dado é o conjunto

$$\{(2 - 2\alpha - 2\beta, \alpha, 1 - \beta, \beta) : \alpha, \beta \in \mathbb{R}\}.$$

Soluções particulares do sistema poderão ser encontradas atribuindo valores específicos a α e a β. Por exemplo, uma solução possível do sistema será $(0, 1, 1, 0)$, a qual corresponde à escolha $\alpha = 1$, $\beta = 0$.

Os exemplos que acabámos de considerar incluem cada um dos casos que nos podem surgir quando pretendemos discutir e resolver um sistema linear.

[4] Isto não é estritamente necessário, mas, neste curso, por uma questão de simplicidade, seguiremos sempre esta metodologia.

Descrevemos, de seguida, o procedimento sistemático que devemos adoptar quando pretendermos discutir e, sendo possível, resolver, um sistema de equações lineares, com base no uso do processo de eliminação de Gauss.

Discussão e Resolução de um Sistema

(Redução à forma em escada por eliminação de Gauss + substituição inversa)

Seja dado um sistema de m equações lineares em n incógnitas e seja $(A|\mathbf{b})$ a respectiva matriz ampliada.

1. Para discutir esse sistema, podemos proceder do seguinte modo:
   - convertemos a matriz ampliada do sistema numa matriz em escada $(E|\mathbf{c})$;
   - se car$(A) <$ car$(A|\mathbf{b})$, concluímos que o sistema é impossível;
   - se car$(A) =$ car$(A|\mathbf{b})$, concluímos que o sistema é possível; nesse caso, ele será *determinado*, se tivermos car$(A) = n$ e *indeterminado*, se car$(A) < n$; neste último caso, o seu *grau de indeterminação* (ou seja, o número de variáveis livres) é dado por $n -$ car(A).
2. Se car$(A) =$ car$(A|\mathbf{b}) = r$ e pretendermos resolver o sistema, podemos proceder do seguinte modo:
   - se $r = n$ (caso em que o sistema é determinado), usamos o método de substituição inversa, determinando o valor das incógnitas da última para a primeira;
   - se $r < n$:
     - identificamos as r colunas de E com pivôs e consideramos as respectivas variáveis como variáveis principais, sendo as restantes $n-r$ variáveis, variáveis livres;
     - supondo que as variáveis principais são as variáveis $x_{p_1}, \ldots, x_{p_r}$ e que $x_{\ell_1}, \ldots, x_{\ell_{n-r}}$ são as variáveis livres, fazemos $x_{\ell_1} = \alpha_1, x_{\ell_2} = \alpha_2, \ldots, x_{\ell_{n-r}} = \alpha_{n-r}$, com $\alpha_i \in \mathbb{R}$.
     - substituímos as expressões acima nas primeiras r equações do sistema em escada, passamos esses termos para o lado direito das equações e resolvemos o sistema correspondente, em ordem às r variáveis principais, por substituição inversa; os valores das variáveis principais $x_{p_1}, \ldots, x_{p_r}$ virão dados em função de $\alpha_1, \ldots, \alpha_{n-r}$.

1.4 Método de Gauss-Jordan

O método de resolver sistemas descrito na secção anterior foi baseado na redução da matriz ampliada do sistema a uma matriz em escada. É possível, usando apenas operações elementares sobre linhas, converter uma matriz numa forma ainda mais simplificada, a chamada *forma em escada reduzida*.

Matriz em Escada Reduzida

Diz-se que uma matriz é uma *matriz em escada reduzida* ou que *tem a forma em escada reduzida*, se forem satisfeitas as seguintes condições:

1. a matriz tem a forma em escada;
2. os pivôs são todos iguais a 1;
3. as colunas que contêm um pivô têm todos os elementos, à excepção do pivô, iguais a zero.

Exemplo 1.13. A matriz

$$A = \begin{pmatrix} \boxed{1} & 2 & 0 & 0 & 1 & 4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \boxed{1} & 0 & 2 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \boxed{1} & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \boxed{1} & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

tem a forma em escada reduzida, mas a matriz B abaixo, sendo embora muito idêntica a A, não é uma matriz em escada reduzida (porquê?).

$$B = \begin{pmatrix} \boxed{1} & 2 & 0 & 0 & 1 & 4 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \boxed{1} & 0 & 2 & 1 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \boxed{1} & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \boxed{1} & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

A matriz

$$C = \begin{pmatrix} \boxed{1} & 2 & 0 & 0 & 1 & 4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \boxed{2} & 0 & 2 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \boxed{1} & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \boxed{1} & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

também não é uma matriz em escada reduzida.

Vejamos um exemplo da redução à forma em escada reduzida de uma matriz A, usando operações elementares sobre linhas.

Exemplo 1.14. Consideremos a matriz já usada no Exemplo 1.8 na pg. 10:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 3 & 3 \\ 2 & 4 & 0 & 4 & 4 \\ 1 & 2 & 3 & 5 & 5 \\ 2 & 4 & 0 & 4 & 4 \end{pmatrix}.$$

Tem-se

$$\begin{pmatrix} \boxed{1} & 2 & 1 & 3 & 3 \\ 2 & 4 & 0 & 4 & 4 \\ 1 & 2 & 3 & 5 & 5 \\ 2 & 4 & 0 & 4 & 7 \end{pmatrix} \xrightarrow[\substack{L_2-2L_1 \\ L_3-L_1 \\ L_4-2L_1}]{} \begin{pmatrix} \boxed{1} & 2 & 1 & 3 & 3 \\ 0 & 0 & -2 & -2 & -2 \\ 0 & 0 & 2 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & -2 & -2 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow[-\frac{1}{2}L_2]{} \begin{pmatrix} \boxed{1} & 2 & 1 & 3 & 3 \\ 0 & 0 & \boxed{1} & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & -2 & -2 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow[\substack{L_3-2L_2 \\ L_4+2L_2 \\ L_1-L_2}]{} \begin{pmatrix} \boxed{1} & 2 & 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & \boxed{1} & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \xrightarrow[L_4 \leftrightarrow L_3]{} \begin{pmatrix} \boxed{1} & 2 & 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & \boxed{1} & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow[\frac{1}{3}L_3]{} \begin{pmatrix} \boxed{1} & 2 & 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & \boxed{1} & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \boxed{1} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow[\substack{L_2-L_3 \\ L_1-2L_3}]{} \begin{pmatrix} \boxed{1} & 2 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & \boxed{1} & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \boxed{1} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

O processo que seguimos no exemplo anterior para reduzir uma matriz à forma em escada reduzida é chamado *método de Gauss-Jordan* e pode ser descrito do seguinte modo.

Método de Gauss-Jordan

(Redução de uma matriz à forma em escada reduzida)

Para reduzir uma dada matriz $A_{m\times n}$ à forma em escada reduzida, podemos usar o seguinte processo:

Passo 1

- movendo-nos da esquerda para a direita, procuramos a primeira coluna que contenha um elemento não nulo na posição 1 ou abaixo dela;
- se tal coluna não existir, o processo está concluído;
- caso contrário, suponhamos que tal coluna é a coluna j; com eventual troca de linhas, colocamos na posição $(1, j)$ um elemento não nulo, o qual será o pivô da linha 1;
- multiplicamos a linha 1 pelo inverso do seu pivô, para que o pivô fique igual a 1; este procedimento é desnecessário, naturalmente, se o pivô for já igual a 1;
- adicionando a linha 1 multiplicada por números convenientes a todas as outras linhas, anulamos os elementos da coluna j, situados abaixo da posição 1;

Passo 2

- movendo-nos da esquerda para a direita, procuramos a primeira coluna que contenha um elemento não nulo na posição 2 ou abaixo dela;
- se tal coluna não existir, o processo está concluído;
- caso contrário, suponhamos que tal coluna é a coluna p; com eventual troca de linhas, colocamos na posição $(2, p)$ um elemento não nulo, o qual será o pivô da linha 2;
- multiplicamos a linha 2 pelo inverso do seu pivô, para que o pivô fique igual a 1; este procedimento é desnecessário, naturalmente, se o pivô for já igual a 1;
- adicionando a linha 2 multiplicada por números convenientes a todas as outras linhas, anulamos os elementos da coluna 2, situados quer abaixo quer acima da posição 2.

...

O processo repete-se, de modo análogo, até que não haja mais linhas ou colunas.

Observação importante: Pode provar-se que, quando convertemos uma dada matriz A na forma em escada reduzida, usando operações elementares sobre linhas (mesmo que não sigamos exactamente o algoritmo acima proposto), a matriz a que chegaremos será sempre a mesma, isto é, para além de ter sempre a mesma forma (como se passa na simples redução à forma em escada) tem os elementos nas diversas posições univocamente determinados. Por outras palavras, existe uma única matriz em escada reduzida, produzida a partir de A por operações elementares sobre linhas, ou seja, equivalente por linhas à matriz A. Neste curso, reservaremos a notação E_A para designar tal matriz.

É fácil de ver (justifique!) que, se A for uma matriz em que o número de linhas (m) é gual ao número de colunas (n) – caso em que A se diz *quadrada de ordem* n – e se essa matriz tiver característica igual a n, a respectiva matriz em escada será a seguinte matriz:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix}.$$

Naturalmente, o recíproco é também verdadeiro, isto é, se A for uma matriz cuja respectiva matriz em escada seja a matriz anterior, então $\text{car}(A) = n$.

Uma matriz como a anterior, quadrada de ordem n, em que os elementos situados nas posições (i, i) são todos iguais a 1 e os restantes elementos são todos zero, chama-se *matriz identidade de ordem* n e denota-se por I_n (ou apenas por I, se a ordem se deduzir pelo contexto). Resumindo, tem-se o resultado seguinte.

Sendo A quadrada de ordem n, tem-se

$$\text{car}(A) = n \iff E_A = I_n.$$

Vejamos agora como resolver um sistema de equações, fazendo uso do método de Gauss-Jordan para reduzir a sua matriz ampliada à forma em escada reduzida.

Exemplo 1.15. Como primeiro exemplo, consideremos o sistema

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 + 2x_3 = 0 \\ \quad x_1 - x_2 - x_3 = 2 \\ 3x_1 - x_2 - x_3 = 4 \end{cases}.$$

A sua matriz ampliada é a seguinte:

$$(A|\mathbf{b}) = \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & 2 & 0 \\ 1 & -1 & -1 & 2 \\ 3 & -1 & -1 & 4 \end{array}\right).$$

Convertamos, então, esta matriz na forma em escada reduzida:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & 2 & 0 \\ 1 & -1 & -1 & 2 \\ 3 & -1 & -1 & 4 \end{array}\right) \xrightarrow[\frac{1}{2}L_1]{} \left(\begin{array}{ccc|c} \boxed{1} & \frac{1}{2} & 1 & 0 \\ 1 & -1 & -1 & 2 \\ 3 & -1 & -1 & 4 \end{array}\right) \xrightarrow[\substack{L_2-L_1 \\ L_3-3L_1}]{} \left(\begin{array}{ccc|c} \boxed{1} & \frac{1}{2} & 1 & 0 \\ 0 & -\frac{3}{2} & -2 & 2 \\ 0 & -\frac{5}{2} & -4 & 4 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow[-\frac{2}{3}L_2]{} \left(\begin{array}{ccc|c} \boxed{1} & \frac{1}{2} & 1 & 0 \\ 0 & \boxed{1} & \frac{4}{3} & -\frac{4}{3} \\ 0 & -\frac{5}{2} & -4 & 4 \end{array}\right) \xrightarrow[\substack{L_3+\frac{5}{2}L_2 \\ L_1-\frac{1}{2}L_2}]{} \left(\begin{array}{ccc|c} \boxed{1} & 0 & \frac{1}{3} & \frac{2}{3} \\ 0 & \boxed{1} & \frac{4}{3} & -\frac{4}{3} \\ 0 & 0 & -\frac{2}{3} & \frac{2}{3} \end{array}\right) \xrightarrow[-\frac{3}{2}L_3]{} \left(\begin{array}{ccc|c} \boxed{1} & 0 & \frac{1}{3} & \frac{2}{3} \\ 0 & \boxed{1} & \frac{4}{3} & -\frac{4}{3} \\ 0 & 0 & \boxed{1} & -1 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow[\substack{L_2-\frac{4}{3}L_3 \\ L_1-\frac{1}{3}L_3}]{} \left(\begin{array}{ccc|c} \boxed{1} & 0 & 0 & 1 \\ 0 & \boxed{1} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \boxed{1} & -1 \end{array}\right) = E_{(A|\mathbf{b})}.$$

Vemos, então, que o sistema dado é equivalente ao sistema

$$\begin{cases} x_1 = 1 \\ x_2 = 0 \\ x_3 = -1 \end{cases},$$

o qual é, obviamente, possível e determinado, com solução $(1, 0, -1)$.

Exemplo 1.16. Seja agora dado o sistema

$$\begin{cases} x_1 - x_2 - x_3 = 1 \\ 2x_1 + x_2 - 5x_3 = 2 \\ -x_1 + x_2 = -1 \end{cases},$$

ao qual corresponde a seguinte matriz ampliada

$$(A|\mathbf{b}) = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & -5 & 2 \\ -1 & 2 & 0 & -1 \end{array}\right).$$

Tem-se, então

$$\left(\begin{array}{ccc|c} \boxed{1} & -1 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & -5 & 2 \\ -1 & 2 & 0 & -1 \end{array}\right) \xrightarrow[\substack{L_2-2L_1 \\ L_3+L_1}]{} \left(\begin{array}{ccc|c} \boxed{1} & -1 & -1 & 1 \\ 0 & 3 & -3 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow[\frac{1}{3}L_2]{} \left(\begin{array}{ccc|c} \boxed{1} & -1 & -1 & 1 \\ 0 & \boxed{1} & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow[\substack{L_3-L_2 \\ L_1+L_2}]{} \left(\begin{array}{ccc|c} \boxed{1} & 0 & -2 & 1 \\ 0 & \boxed{1} & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) = E_{(A|\mathbf{b})}.$$

Neste caso, obtém-se o seguinte sistema, equivalente ao dado:

$$\begin{cases} x_1 - 2x_3 = 1 \\ \quad x_2 - x_3 = 0 \end{cases}.$$

A análise da matriz $E_{(A|\mathbf{b})}$ mostra-nos que o sistema é possível, e *simplesmente indeterminado* (isto é, com grau de indeterminação igual a 1); as variáveis principais são x_1 e x_2, sendo x_3 variável livre. Fazendo $x_3 = \alpha$ ($\alpha \in \mathbb{R}$), substituindo nas equações do sistema reduzido e passando os termos com α para o lado direito do sistema, vem

$$\begin{cases} x_1 = 1 + 2\alpha \\ x_2 = \alpha \\ x_3 = \alpha \end{cases}.$$

Concluímos então que

$$\{(1 + 2\alpha, \alpha, \alpha) : \alpha \in \mathbb{R}\}$$

é o conjunto de todas as soluções do sistema.

Se efectuarmos uma contagem no número de operações envolvidas na resolução de <u>um</u> sistema por redução à forma em escada, usando eliminação de Gauss, seguida de substituição inversa, e o compararmos com o número de operações envolvidas na aplicação do método de Gauss-Jordan, baseado na redução à forma em escada reduzia, poderemos concluir que o primeiro método é (em geral) mais eficiente. No entanto, se pretendermos resolver <u>vários</u> sistemas que tenham em comum a mesma matriz simples (isto é, que difiram apenas nos termos independentes), o método de Gauss-Jordan poderá ser competitivo, se resolvermos os vários sistemas <u>em simultâneo</u>. Vejamos um exemplo da aplicação do método de Gauss-Jordan à resolução simultânea de vários sistemas com a mesma matriz simples.

Exemplo 1.17. Considerem-se os seguintes três sistemas, com a mesma matriz de coeficientes:

$$S_1 \equiv \begin{cases} 4x - 8y + 5z = 1 \\ 4x - 7y + 4z = 0 \\ 3x - 4y + 2z = 0 \end{cases}, \quad S_2 \equiv \begin{cases} 4x - 8y + 5z = 0 \\ 4x - 7y + 4z = 1 \\ 3x - 4y + 2z = 0 \end{cases}, \quad S_3 \equiv \begin{cases} 4x - 8y + 5z = 0 \\ 4x - 7y + 4z = 0 \\ 3x - 4y + 2z = 1 \end{cases}.$$

Em vez de consideramos um sistema de cada vez, formemos uma matriz ampliada da forma

$$(A|\mathbf{b_1}|\mathbf{b_2}|\mathbf{b_3})$$

onde $\mathbf{b_1}$, $\mathbf{b_2}$ e $\mathbf{b_3}$ são as colunas com os lados direitos dos sistemas S_1, S_2 e S_3 respectivamente e usemos o processo de Gauss-Jordan aplicado a essa matriz:

$$\left(\begin{array}{ccc|c|c|c} 4 & -8 & 5 & 1 & 0 & 0 \\ 4 & -7 & 4 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & -4 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow[\frac{1}{4}L_1]{} \left(\begin{array}{ccc|c|c|c} \boxed{1} & -2 & \frac{5}{4} & \frac{1}{4} & 0 & 0 \\ 4 & -7 & 4 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & -4 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow[\substack{L_2-4L_1 \\ L_3-3L_1}]{} \left(\begin{array}{ccc|c|c|c} \boxed{1} & -2 & \frac{5}{4} & \frac{1}{4} & 0 & 0 \\ 0 & \boxed{1} & -1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & -\frac{7}{4} & -\frac{3}{4} & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow[\substack{L_3-2L_2 \\ L_1+2L_2}]{} \left(\begin{array}{ccc|c|c|c} \boxed{1} & 0 & -\frac{3}{4} & -\frac{7}{4} & 2 & 0 \\ 0 & \boxed{1} & -1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{4} & \frac{5}{4} & -2 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow[4L_3]{} \left(\begin{array}{ccc|c|c|c} \boxed{1} & 0 & -\frac{3}{4} & -\frac{7}{4} & 2 & 0 \\ 0 & \boxed{1} & -1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \boxed{1} & 5 & -8 & 4 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow[\substack{L_2+L_3 \\ L_1+\frac{3}{4}L_3}]{} \left(\begin{array}{ccc|c|c|c} \boxed{1} & 0 & 0 & 2 & -4 & 3 \\ 0 & \boxed{1} & 0 & 4 & -7 & 4 \\ 0 & 0 & \boxed{1} & 5 & -8 & 4 \end{array}\right).$$

As soluções dos três sistemas lêem-se, de imediato, da matriz obtida: elas são $(2, 4, 5)$ para o sistema S_1, $(-4, -7, -8)$ para o sistema S_2 e $(3, 4, 4)$ para o sistema S_3.

1.5 Sistemas homogéneos

Um sistema linear diz-se *homogéneo* se for da forma

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = 0 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = 0 \\ \qquad \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = 0 \end{cases}, \tag{1.7}$$

isto é, se os termos independentes de todas as equações forem iguais a zero. É imediato concluir que $x_1 = 0, x_2 = 0, \ldots, x_n = 0$, satisfazem todas as equações do sistema homogéneo (1.7) ou seja, que ele é sempre possível, admitindo (pelo menos) a solução $(0, 0, \ldots, 0)$, dita solução *nula* ou *trivial*. Uma outra forma de vermos que o sistema é sempre possível é a seguinte. Sendo $(A|\mathbf{0})$ a matriz ampliada do sistema (onde usamos a notação $\mathbf{0}$ para designar uma coluna toda formada por zeros) e analisando em que consistem as operações elementares sobre linhas de uma matriz, é imediato concluir que, ao convertermos a matriz $(A|\mathbf{0})$ numa matriz em escada, a última coluna nula manter-se-á sempre nula ao longo de todo o processo, pelo que, no final, teremos uma matriz da forma $(E|\mathbf{0})$. Isto significa que o número de pivôs de E é igual ao número de pivôs de $(E|\mathbf{0})$, ou dito de outro modo, que a característica da matriz simples coincide com a característica da matriz ampliada, condição que, como sabemos, nos garante que o sistema é possível.

Para sabermos se o sistema é determinado ou indeterminado, teremos, como para qualquer outro sistema, de comparar a característica da matriz A com o número de incógnitas. Se car$(A) = n$, o sistema será determinado, sendo a sua única solução o n-uplo $(0, 0, \ldots, 0)$. Se car$(A) < n$, o sistema será indeterminado, podendo resolver-se como habitualmente (identificando as variáveis principais e as variáveis livres e resolvendo o sistema em ordem às variáveis principais, em função dos valores das variáveis livres).

Em resumo, tem-se o resultado contido no quadro seguinte.

Um sistema homogéneo com matriz simples $A_{m\times n}$ é sempre possível, sendo determinado se e só se car$(A) = n$.

Nota: Uma vez que a coluna dos termos independentes de um sistema homogéneo se mantém sempre nula ao longo de todo o processo de eliminação Gaussiana, quando resolvemos um sistema deste tipo é usual fazer a eliminação apenas da matriz simples do sistema, omitindo a coluna dos termos independentes.

Exemplo 1.18. Considere-se o seguinte sistema homogéneo

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 - 2x_3 = 0 \\ 4x_1 + 8x_2 - 5x_3 = 0 \\ 3x_1 + x_2 - 6x_3 = 0 \end{cases}.$$

A matriz simples deste sistema é

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 4 & 8 & -5 \\ 3 & 1 & -6 \end{pmatrix}.$$

Usando eliminação de Gauss, convertamos A na forma em escada:

$$\begin{pmatrix} \boxed{1} & 2 & -2 \\ 4 & 8 & -5 \\ 3 & 1 & -6 \end{pmatrix} \xrightarrow[\substack{L_2-4L_1 \\ L_3-3L_1}]{} \begin{pmatrix} \boxed{1} & 2 & -2 \\ 0 & 0 & 3 \\ 0 & -5 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow[L_2 \leftrightarrow L_3]{} \begin{pmatrix} \boxed{1} & 2 & -2 \\ 0 & \boxed{-5} & 0 \\ 0 & 0 & \boxed{3} \end{pmatrix}.$$

Vemos, então, que car$(A) = 3 =$número de incógnitas, pelo que o sistema dado é determinado com única solução $(0, 0, 0)$.

Exemplo 1.19. Consideremos o sistema

$$\begin{cases} x_1 - x_2 + 2x_3 = 0 \\ 3x_1 + x_2 - 2x_3 = 0 \end{cases}.$$

Temos

$$A = \begin{pmatrix} \boxed{1} & -1 & 2 \\ 3 & 1 & -2 \end{pmatrix} \xrightarrow[L_2 - 3L_1]{} \begin{pmatrix} \boxed{1} & -1 & 2 \\ 0 & \boxed{4} & -8 \end{pmatrix}.$$

Como car(A) = 2 e temos três incógnitas, o sistema é simplesmente indeterminado. As variáveis principais são x_1 e x_2 e a variável livre é x_3. Fazendo $x_3 = \alpha$ $(\alpha \in \mathbb{R})$ e substituindo nas equações do sistema correspondente à última matriz obtida acima, vem

$$\begin{cases} x_1 - x_2 + 2\alpha = 0 \\ 4x_2 - 8\alpha = 0 \\ x_3 = \alpha \end{cases}.$$

Tem-se, então

$$4x_2 - 8\alpha = 0 \iff 4x_2 = 8\alpha \iff x_2 = 2\alpha.$$

Substituindo na primeira equação e resolvendo-a em ordem a x_1, virá

$$x_1 - 2\alpha + 2\alpha = 0 \iff x_1 = 0.$$

Assim, o sistema dado tem o seguinte conjunto de soluções

$$\{(0, 2\alpha, \alpha) : \alpha \in \mathbb{R}\}.$$

1.5.1 Sistemas com matriz quadrada

Pela sua especial importância, salientamos, no quadro seguinte, alguns resultados para o caso particular de sistemas em que o número de equações é igual ao número de incógnitas (ou seja, em que a matriz do sistema é uma matriz quadrada). Deixamos ao cuidado do aluno justificar cada uma das afirmações, que são simples aplicação de resultados já estudados.

Sistemas com Matrizes Quadradas

Considere-se um sistema de n equações lineares em n incógnitas com matriz simples A e coluna dos termos independentes $\mathbf{b}$. Então, o sistema é possível e determinado se e só se se verificar qualquer uma das condições seguintes (equivalentes):

- car$(A) = n$;
- $E_A = I_n$;
- o sistema homogéneo correspondente (isto é, o sistema homogéneo com A com matriz simples) tiver apenas a solução nula.

1.6 Exercícios

Exercício 1.1. Identifique quais das seguintes matrizes são matrizes em escada. Para as que o forem, indique quais os pivôs.

$$\text{(a)} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 5 \\ 0 & 0 & 3 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 0 \end{pmatrix}; \quad \text{(b)} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -4 \\ 0 & 0 & 2 & -2 & 3 \end{pmatrix}; \quad \text{(c)} \begin{pmatrix} 2 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix};$$

$$\text{(d)} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}; \quad \text{(e)} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}; \quad \text{(f)} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Exercício 1.2. Converta cada uma das matrizes dadas na forma em escada, usando o método de eliminação de Gauss. Indique, então, qual a característica de cada uma das matrizes e quais são as suas colunas principais.

$$\text{(a)} \begin{pmatrix} 0 & 5 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 2 \\ 1 & 6 & 4 & 2 \end{pmatrix}; \quad \text{(b)} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 & 1 \\ 2 & 5 & 7 & 2 \\ 3 & 6 & 6 & 0 \end{pmatrix}; \quad \text{(c)} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 3 & 1 \\ 2 & 4 & -1 & 3 & 8 \\ 1 & 2 & 3 & 5 & 7 \\ 2 & 4 & 2 & 6 & 2 \\ 3 & 6 & 1 & 7 & -3 \end{pmatrix};$$

(d) $\begin{pmatrix} 0 & 5 & 10 & 25 \\ 2 & 6 & 4 & 0 \\ 0 & 3 & 4 & 0 \end{pmatrix}$; (e) $\begin{pmatrix} -3 & 0 & -6 \\ 6 & 4 & 24 \\ -15 & -12 & -66 \end{pmatrix}$; (f) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 6 & 8 \\ 2 & 6 & 0 \\ 1 & 2 & 5 \\ 3 & 8 & 6 \end{pmatrix}$.

Exercício 1.3. ([Mey00, p.46]) Seja $(E|\mathbf{c})$ for a matriz ampliada de um sistema.

(a) Se E tiver a forma em escada, poderemos concluir que $(E|\mathbf{c})$ também tem essa forma?

(b) Se $(E|\mathbf{c})$ tiver a forma em escada, podemos concluir que E também tem essa forma?

Exercício 1.4. ([Mey00, p.46]) Considere uma matriz A de ordem $m \times n$. Justifique as seguintes afirmações:

(a) car$(A) \leq$ min$\{m, n\}$.

(b) Se uma das linhas de A é nula, então car$(A) < m$.

(c) Se uma das linhas de A é um múltiplo de outra linha, então car$(A) < m$.

(d) Se uma das colunas de A é formada toda por zeros, então car$(A) < n$.

Exercício 1.5. Para cada um dos sistemas seguintes, forme a respectiva matriz ampliada e reduza-a à forma em escada; indique qual a característica da matriz simples e qual a característica da matriz ampliada do sistema e, tendo em conta essa informação, classifique o sistema (possível/impossível; sendo possível, determinado/indeterminado); se o sistema for possível, resolva-o.

(a) $\begin{cases} x_1 - x_2 - 2x_3 = -6 \\ 3x_1 + x_2 - 2x_3 = -6 \\ -2x_1 - 2x_2 + x_3 = 2 \end{cases}$; (b) $\begin{cases} x_1 - x_2 - 2x_3 = -1 \\ -2x_1 + x_2 + x_3 = 2 \\ 3x_1 + 2x_2 + 9x_3 = 4 \end{cases}$; (c) $\begin{cases} x_1 + 2x_3 = 1 \\ 2x_1 + x_2 + 3x_3 = 1 \\ 2x_1 - x_2 + 5x_3 = 3 \end{cases}$;

(d) $\begin{cases} x - 2y = -1 \\ 4x + y = 14 \\ 3x - 4y = 1 \end{cases}$; (e) $\begin{cases} x - y + 3z = 4 \\ 2x - 2y + z = 3 \\ -x + y + z = 0 \end{cases}$; (f) $\begin{cases} x_1 + 2x_2 + x_3 + 2x_4 = 3 \\ 2x_1 + 4x_2 + x_3 + 3x_4 = 4 \\ 3x_1 + 6x_2 + x_3 + 4x_3 = 5 \end{cases}$;

(g) $\begin{cases} x - y + z = 1 \\ x - y - z = 2 \\ x + y - z = 3 \\ x + y + z = 4 \end{cases}$; (h) $\begin{cases} x - y + z = 1 \\ x - y - z = 2 \\ x + y - z = 3 \\ x + y + z = 2 \end{cases}$.

Exercício 1.6. Discuta, em função dos valores da constante $k \in \mathbb{R}$, os seguintes sistemas de equações e resolva-os para os valores de k que os tornam possíveis:

(a) $\begin{cases} x + y = k \\ 3x - ky = 2 \end{cases}$; (b) $\begin{cases} x + y + z = k \\ kx + y + 2z = 2 \\ x + ky + z = 4 \end{cases}$; (c) $\begin{cases} x_1 - 2x_2 + 3x_3 = 1 \\ 2x_1 + kx_2 + 6x_3 = 6 \\ -x_1 + 3x_2 + (k-3)x_3 = 0 \end{cases}$.

Exercício 1.7. Discuta, em função dos valores dos parâmetros a e b, o seguinte sistema de equações lineares e resolva-o para o caso $a = 4$, $b = 6$.

$$\begin{cases} x - 2y + 3z = 4 \\ 2x - 3y + az = 5 \\ 3x - 4y + 5z = b \end{cases}.$$

Exercício 1.8. Diga quais das seguintes matrizes são matrizes em escada reduzida e, para as que não forem, reduza-as a essa forma, usando o método de Gauss-Jordan.

(a) $\begin{pmatrix} 1 & 4 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$; (b) $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 3 \\ 1 & 2 & 4 \end{pmatrix}$; (c) $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$;

(d) $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$; (e) $\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ -6 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

Exercício 1.9. Determine $\alpha \in \mathbb{R}$ de modo que a característica da seguinte matriz seja igual a 2:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & \alpha \\ \alpha & \alpha - 1 & \alpha + 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Exercício 1.10. Use o método de Gauss-Jordan para resolver, em simultâneo, três sistemas de equações S_1,S_2 e S_3 cuja matriz simples seja

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 4 \\ -1 & -2 & 0 \end{pmatrix}$$

e cujos lados direitos, sejam, respectivamente

$$\mathbf{b}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \ \mathbf{b}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} \text{ e } \mathbf{b}_3 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Exercício 1.11. Resolva os seguintes sistemas homogéneos:

(a) $\begin{cases} -3x + y + z + w = 0 \\ x + y - 3z + w = 0 \\ x + y + z - 3w = 0 \end{cases}$; (b) $\begin{cases} 2x + y - 3z = 0 \\ 3x - y + 5z = 0 \\ 4x + y + 3z = 0 \end{cases}$.

Exercício 1.12. ([Mey00, p.12]) Determine ângulos α, β e γ, com $0 \leq \alpha < 2\pi$, $0 \leq \beta < 2\pi$ e $0 \leq \gamma < \pi$ tais que

$$\begin{cases} 2\,\text{sen}\,\alpha - \cos\beta + 3\tan\gamma = 3 \\ 4\,\text{sen}\,\alpha + 2\cos\beta - 2\tan\gamma = 2 \\ 6\,\text{sen}\,\alpha - 3\cos\beta + \tan\gamma = 9 \end{cases}.$$

2

Matrizes

2.1 Conceitos básicos

No capítulo anterior já falámos de matrizes, mas apenas vendo estas como uma ferramenta útil para a discussão e resolução de sistemas de equações lineares. No presente capítulo, vamos estudar esses objectos matemáticos com um pouco mais de profundidade. Para que este capítulo fique mais auto-contido, repetiremos algumas das definições já introduzidas no Capítulo 1.

Definição 2.1. Uma *matriz de ordem (ou tipo)* $m \times n$ é simplesmente um quadro rectangular de $m \times n$ números dispostos em m linhas e n colunas. Esses números, ditos *elementos* ou *entradas* da matriz, são representados ou entre parênteses curvos (sendo esta a notação que adoptaremos neste curso) ou entre parênteses rectos.

Nota: A não ser que algo seja dito em contrário, assumimos que os números que constituem a matriz são números reais, isto é, trabalharemos, essencialmente, com as chamadas *matrizes reais*; por vezes, no entanto, consideraremos *matrizes complexas*, ou seja, formadas por números complexos.[1]

O conjunto das matrizes de ordem $m \times n$ de elementos reais será denotado por $\mathbb{R}^{m \times n}$ e o conjunto das matrizes, da mesma ordem, de elementos complexos será designado por $\mathbb{C}^{m \times n}$.

É prática comum usar letras latinas maiúsculas, tais como $A, B, M, N, \ldots$ para denotar matrizes e usar a letra minúscula correspondente, com dois índices, para denotar os respectivos

[1] É possível definir matrizes com números pertencentes a outro tipo de conjuntos, mas tal está fora do âmbito deste curso.

elementos: o primeiro índice indica a que linha pertence o elemento e o segundo refere-se à coluna em que se situa o elemento. Por exemplo,

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}.$$

Também se escreve, em notação abreviada, $A = (a_{ij})_{m\times n}$ ou apenas $A = (a_{ij})$ se o tipo da matriz se deduzir pelo contexto. Se quisermos apenas indicar que A é uma matriz do tipo $m \times n$, escrevemos $A_{m\times n}$. Por vezes, é útil usar a notação $(A)_{ij}$ para designar o elemento situado na linha i e na coluna j da matriz A. Tal elemento é referido como o elemento de A na posição (i, j), ou apenas por elemento (i, j) de A.

Uma *submatriz* de uma dada matriz A é uma matriz obtida de A eliminando alguma(s) das suas linhas e/ou colunas. Por exemplo, se

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 & 1 \\ 4 & 2 & 3 & 0 \\ -1 & 3 & 7 & 1 \end{pmatrix},$$

então

$$B = \begin{pmatrix} 4 & 3 & 0 \\ -1 & 7 & 1 \end{pmatrix}$$

é a submatriz de A obtida eliminado a sua primeira linha e a sua segunda coluna.

Definição 2.2. Seja A uma matriz de ordem $m \times n$.

- Se $m = n$, A diz-se uma matriz *quadrada*, dizendo-se rectangular se $m \neq n$. Quando A é uma matriz quadrada de ordem $n \times n$, é usual dizermos apenas que A é quadrada de ordem n.

- Se $m = 1$, A diz-se uma *matriz linha* ou *vector linha*, e se $n = 1$, A diz-se uma *matriz coluna* ou *vector coluna*. Estas matrizes são, geralmente, denotadas por letras minúsculas e em negrito, por exemplo, $\mathbf{b}, \mathbf{u}, \mathbf{v}, \ldots$ Também é usual, no caso de matrizes linha ou coluna, identificar os seus elementos apenas com um índice, por exemplo:

$$\mathbf{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}, \qquad \mathbf{u} = (u_1\ u_2\ \ldots u_n).$$

Dada uma matriz quadrada $A = (a_{ij})$ de ordem n, dizemos que os elementos $a_{11}, a_{22}, \ldots, a_{nn}$ constituem a *diagonal principal* de A, por vezes referida apenas como diagonal de A:

$$\begin{pmatrix} \underline{a_{11}} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & \underline{a_{22}} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & \underline{a_{nn}} \end{pmatrix}$$

Os elementos $a_{1n}, a_{2,n-1}, \ldots, a_{n1}$ formam a chamada *diagonal secundária* de A.

Definição 2.3 (Matrizes triangulares; matriz diagonal)**.** Uma matriz quadrada $A = (a_{ij})$ diz-se:

- *triangular inferior*, se os elementos situados acima da diagonal principal são todos nulos, i.e. se $a_{ij} = 0$ quando $i < j$;
- *triangular superior*, se os elementos situados abaixo da diagonal principal são todos nulos, i.e. se $a_{ij} = 0$ quando $i > j$;
- *diagonal*, se os elementos situados fora da diagonal principal são todos nulos, i.e. se $a_{ij} = 0$ quando $i \neq j$.

Um caso especialmente importante de uma matriz diagonal é o da matriz identidade de ordem n, I_n, já introduzida no Capítulo 1. Trata-se, como vimos, de uma matriz quadrada de ordem n, diagonal, com todos os elementos diagonais iguais a 1.

Definição 2.4 (Matriz nula)**.** A matriz de ordem $m \times n$ cujos elementos são todos iguais a zero é chamada *matriz nula* e designada pelo símbolo $\mathbf{0}_{m\times n}$ ou, por vezes, simplesmente por $\mathbf{0}$, se a ordem for deduzida pelo contexto.

Exemplo 2.1. Considerem-se as matrizes

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 5 \\ 0 & 2 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 7 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & -2 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \\ 2 & 1 & 3 & 4 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$
$$D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad E = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Então:

- A é triangular superior.
- B é triangular inferior.
- C é, simultaneamente, triangular superior, triangular inferior e diagonal, o mesmo acontecendo a D e a E.
- D é a matriz identidade de ordem 3.
- E é a matriz nula de ordem 3.

Definição 2.5 (Igualdade de matrizes)**.** Duas matrizes $A = (a_{ij})$ e $B = (b_{ij})$ são *iguais* se e só se forem da mesma ordem e os elementos nas posições correspondentes forem iguais, isto é, $a_{ij} = b_{ij}$ para cada escolha de i e j. Se A e B são iguais, escrevemos, como habitualmente $A = B$, escrevendo $A \neq B$ se elas não forem iguais.

Note-se que, de acordo com a definição anterior, se tem, por exemplo,

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 0 \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix},$$

embora os elementos que formam esses dois vectores sejam os mesmos.

2.2 Operações com matrizes

Agora que já conhecemos os principais conceitos básicos de matrizes, vamos aprender a "operar" com elas, isto é, vamos introduzir operações entre matrizes e estudar as suas propriedades.

2.2.1 Adição de matrizes

Definição 2.6 (Adição de matrizes)**.** Se $A = (a_{ij})$ e $B = (b_{ij})$ são duas matrizes da mesma ordem, a *soma* de A e B é uma matriz da mesma ordem, que denotaremos por $A+B$, obtida adicionando as entradas correspondentes. Isto é

$$(A + B)_{ij} = a_{ij} + b_{ij}; \quad \text{para cada } i \text{ e cada } j.$$

Exemplo 2.2. Por exemplo, tem-se:

$$\begin{pmatrix} -2 & 3 & 1 \\ 1 & 5 & -4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 3 & -2 & 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 2 \\ 4 & 3 & 2 \end{pmatrix}.$$

Definição 2.7 (Simétrica de uma matriz)**.** Dada uma matriz $A = (a_{ij})$, define-se *matriz simétrica de* A, e denota-se por $-A$, como sendo a matriz obtida considerando os simétricos de cada um dos elementos de A, isto é:

$$(-A)_{ij} = -a_{ij}, \quad \text{para cada } i \text{ e cada } j. \tag{2.1}$$

Usaremos a notação, $A - B$ para designar a matriz $A + (-B)$.

Exemplo 2.3. Se

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -1 & -1 & -1 \\ 2 & 0 & 4 \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 3 & 3 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

então

$$-A = \begin{pmatrix} -1 & -2 & -3 \\ 1 & 1 & 1 \\ -2 & 0 & -4 \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad A - B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -4 & -4 & -4 \\ 3 & 0 & 3 \end{pmatrix}.$$

Propriedades da Adição de Matrizes

Para quaisquer matrizes A, B, C da mesma ordem, tem-se:

Comutatividade: $A + B = B + A$

Associatividade: $(A + B) + C = A + (B + C)$

Elemento Neutro: $A + \mathbf{0} = \mathbf{0} + A = A$

Elemento Simétrico : $A + (-A) = (-A) + A = \mathbf{0}$.

As propriedades anteriores são uma consequência imediata das definições da adição de matrizes, simétrica de uma matriz, matriz nula e das propriedades usuais da adição de números reais; a título de exemplo, demonstramos a comutatividade, ficando as restantes demonstrações ao cuidado dos alunos.

Comecemos por notar que, se $A = (a_{ij})$ e $B = (b_{ij})$ são duas matrizes $m \times n$, então, de acordo com a definição de soma de matrizes, ambas as matrizes $A + B$ e $B + A$ são também dessa mesma ordem. Além disso, tem-se:

$$(A + B)_{ij} \underset{①}{=} a_{ij} + b_{ij} \underset{②}{=} b_{ij} + a_{ij} \underset{③}{=} (B + A)_{ij}.$$

A justificação de cada uma das passagens ① − ③ é a seguinte:

① Definição de $A+B$.

② Comutatividade da adição de números reais.

③ Definição de $B+A$.

Podemos, portanto concluir, tendo em conta a definição de igualdade de matrizes, que $A+B=B+A$, como pretendíamos demonstrar. □

Nota: A associatividade da adição permite-nos escrever $A+B+C$, sem qualquer ambiguidade.

2.2.2 Multiplicação escalar

Definição 2.8 (Multiplicação Escalar)**.** Sejam $A=(a_{ij})$ uma matriz e α um número (usualmente designado por *escalar*). A multiplicação do escalar α pela matriz A é uma matriz da mesma ordem que A, designada por αA, e obtida multiplicando todos os elementos de A por α, isto é,

$$(\alpha A)_{ij}=\alpha a_{ij}, \quad \text{para cada } i \text{ e cada } j.$$

A operação de multiplicação de uma matriz por um escalar é designada simplesmente por *multiplicação escalar*.

Exemplo 2.4.

$$3\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 3 & 4 & 1 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 3 & 6 & -3 \\ 9 & 12 & 3 \\ -3 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Propriedades da Multiplicação Escalar

Para quaisquer matrizes $A=(a_{ij})$ e $B=(b_{ij})$ da mesma ordem e quaisquer escalares α,β, tem-se:

Distributividade (em relação à adição de matrizes): $\alpha(A+B)=\alpha A+\alpha B$

Distributividade (em relação à adição de escalares): $(\alpha+\beta)A=\alpha A+\beta A$

Associatividade Mista: $(\alpha\beta)\,A=\alpha\,(\beta A)$

Elemento Identidade : $1A=A$

Elmemento Absorvente : $0A=\mathbf{0}$

Demonstraremos a primeira das propriedades, ficando as restantes como exercício.

Tendo em conta a definição de adição de matrizes e de multiplicação de uma matriz por um escalar, é imediato concluir que $\alpha(A+B)$ e $\alpha A + \alpha B$ são matrizes da mesma ordem. Além disso, temos

$$(\alpha(A+B))_{ij} \underset{①}{=} \alpha(A+B)_{ij} \underset{②}{=} \alpha\,(a_{ij}+b_{ij}) \underset{③}{=} \alpha a_{ij} + \alpha b_{ij} \underset{④}{=} (\alpha A)_{ij} + (\alpha B)_{ij} \underset{⑤}{=} (\alpha A + \alpha B)_{ij}$$

① Definição de multiplicação de uma matriz por um escalar.

② Definição de adição de matrizes.

③ Distributividade da multiplicação em relação à adição (em $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$).

④ Definição de multiplicação de uma matriz por um escalar.

⑤ Definição de adição de matrizes.

Concluímos, portanto, que $\alpha(A+B) = \alpha A + \alpha B$.

2.2.3 Transposição e transconjugação

Definição 2.9 (Transposta de uma Matriz)**.** Seja A uma matriz de ordem $m \times n$. Define-se *transposta de* A, e designa-se por A^{T}, como sendo a matriz de ordem $n \times m$ obtida de A trocando as suas linhas com as colunas. Por outras palavras, se $A = (a_{ij})$, então

$$(A^{\mathsf{T}})_{ij} = a_{ji}.$$

Exemplo 2.5. Sendo

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 4 \\ 2 & -1 & 2 \\ 0 & 5 & -3 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

tem-se

$$A^{\mathsf{T}} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 \\ 3 & -1 & 5 & 0 \\ 4 & 2 & -3 & 1 \end{pmatrix}.$$

Segue-se uma lista de propriedades da transposição, cuja demonstração fica a cargo dos alunos.

Propriedades da Transposição
Para quaisquer matrizes $A = (a_{ij})$ e $B = (b_{ij})$ da mesma ordem e qualquer escalar α, tem-se: • $(A^{\mathsf{T}})^{\mathsf{T}} = A$ • $(A + B)^{\mathsf{T}} = A^{\mathsf{T}} + B^{\mathsf{T}}$ • $(\alpha A)^{\mathsf{T}} = \alpha A^{\mathsf{T}}$

Definição 2.10 (Matriz simétrica; matriz anti-simétrica)**.** Seja A uma matriz quadrada de ordem n. Então:

- A diz-se *simétrica*, se $A = A^{\mathsf{T}}$, isto é, se $a_{ij} = a_{ji}$.
- A diz-se *anti-simétrica* se $A^{\mathsf{T}} = -A$, isto é, se $a_{ij} = -a_{ji}$.

Numa matriz simétrica, os elementos situados simetricamente em relação à diagonal principal são iguais (e numa matriz anti-simétrica, são simétricos, sendo os da diagonal nulos).

Exemplo 2.6. A matriz

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 4 \\ 2 & 0 & 3 & 1 \\ -1 & 3 & 5 & 7 \\ 4 & 1 & 7 & 9 \end{pmatrix}$$

é uma matriz simétrica e a matriz

$$B = \begin{pmatrix} 0 & 2 & -1 & 6 \\ -2 & 0 & 3 & 1 \\ 1 & -3 & 0 & -7 \\ -6 & -1 & 7 & 0 \end{pmatrix}$$

é anti-simétrica.

As noções que daremos a seguir aplicam-se a matrizes complexas.[2]

Definição 2.11 (Conjugada e transconjugada de uma matriz)**.** Seja $A = (a_{ij}) \in \mathbb{C}^{m \times n}$.

- A matriz *conjugada* de A, denotada por $\overline{A}$, é a matriz obtida de A substituindo cada um dos seus elementos pelo seu conjugado.[3] Tem-se, então $(\overline{A})_{ij} = \overline{a_{ij}}$.

[2]Como $\mathbb{R} \subset \mathbb{C}$, uma matriz $A \in \mathbb{C}^{m \times n}$ pode, eventualmente, ser formada apenas por números reais.

[3]Relembre que, se $z = x + ix \in \mathbb{C}$, o seu conjugado, $\overline{z}$, é dado por $\overline{z} = x - iy$.

- A *transconjugada* de A, denotada por A^*, é a matriz transposta da conjugada de A, isto é, $A^* = (\overline{A})^\mathsf{T}$. Tem-se, portanto $(A^*)_{ij} = \overline{a_{ji}}$.

Definição 2.12 (Matriz hermiteana e matriz anti-hermiteana)**.** Seja A uma matriz quadrada de ordem n com elementos em $\mathbb{C}$. Então:

- A diz-se *hermiteana* ou *hermítica*, se $A = A^*$, isto é, se $a_{ij} = \overline{a_{ji}}$.
- A diz-se *anti-hermiteana* ou *anti-hermítica*, se $A = -A^*$, isto é, se $a_{ij} = -\overline{a_{ji}}$.

Exemplo 2.7. A matriz

$$\begin{pmatrix} 3 & 2+3i & 1-i \\ 2-3i & -5 & 4 \\ 1+i & 4 & 1 \end{pmatrix}$$

é hermítica. A matriz

$$\begin{pmatrix} 0 & 2+3i & -i \\ -2+3i & 0 & 4 \\ -i & -4 & 0 \end{pmatrix}$$

é anti-hermítica.

A transconjugação goza das seguintes propriedades, análogas à da transposição.

Propriedades da Transconjugação

Para quaisquer matrizes $A = (a_{ij}), B = (b_{ij}) \in \mathbb{C}^{m \times n}$ e qualquer escalar $\alpha \in \mathbb{C}$, tem-se:

- $(A^*)^* = A$
- $(A + B)^* = A^* + B^*$
- $(\alpha A)^* = \overline{\alpha} A^*$

2.2.4 Produto de matrizes

As operações de adição de matrizes e de multiplicação de uma matriz por um escalar são, de certa forma, muito naturais, isto é, "são aquilo que seria de esperar". O mesmo não se passa, contudo, com o produto de matrizes, sobre o qual nos debruçaremos nesta secção.[4].

Começamos por introduzir a seguinte definição.

[4] A razão de definirmos o produto de uma forma um pouco "estranha"será compreendida mais à frente!

Definição 2.13 (Matrizes encadeadas)**.** Duas matrizes A e B (dadas por esta ordem) dizem-se *encadeadas*, se o número de colunas de A for igual ao número de linhas de B. Assim, $A_{m\times n}$ e $B_{p\times q}$ são encadeadas se e só se $n = p$.

Definição 2.14 (Produto de matrizes)**.** Sejam $A_{m\times p}$ e $B_{p\times n}$ duas matrizes encadeadas. Então o produto da matriz A pela matriz B (por esta ordem) é uma matriz de ordem $m\times n$, denotada por AB, e cujo elemento na posição (i, j) $(i = 1, \ldots, m; j = 1, \ldots, n)$ é definido pela fórmula

$$(AB)_{ij} = a_{i1}b_{1j} + a_{i2}b_{2j} + \cdots + a_{ip}b_{pj}. \tag{2.2}$$

Note que para formar o elemento da linha i, coluna j, da matriz produto AB, se utilizam os elementos da linha i da matriz A e os elementos da coluna j da matriz B; os elementos "correspondentes" são multiplicados e somam-se os produtos resultantes.

Exemplo 2.8. Sejam

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 3 & 0 \\ -1 & 1 & 4 & 2 \end{pmatrix}.$$

Como A é uma matriz 2×3 e B é uma matriz 3×4, é possível formar a matriz produto $C = AB$, a qual vai ser uma matriz de ordem 2×4. Para encontrar, por exemplo, o elemento situado na linha 2 e na coluna 3 de $C = AB$, seleccionamos a linha 2 de A,

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

e a coluna 3 de B:

$$\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}.$$

Se multiplicarmos os elementos correspondentes (primeiro com primeiro, segundo com segundo e terceiro com terceiro) e somarmos os produtos obtidos, vem

$$c_{23} = 1 \times 2 + 1 \times 3 + (-1) \times 4 = 2 + 3 - 4 = 1.$$

Determine os restantes elementos da matriz AB e confira o seu resultado:

$$AB = \begin{pmatrix} 2 & 6 & 20 & 7 \\ 4 & 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

Exemplo 2.9.

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 2 & 0 & -2 \\ 3 & 0 & -3 \end{pmatrix}.$$

O produto de um vector coluna $m \times 1$ por um vector linha $1 \times n$ resulta numa matriz $m \times n$. Em particular, o produto de um vector $n \times 1$ por um vector $1 \times n$ resulta numa matriz quadrada de ordem n.

Exemplo 2.10.

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 6 \\ 9 \\ 12 \end{pmatrix} = 3 \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}.$$

O produto de um vector coluna $\mathbf{u}$ por uma matriz 1×1 com elemento k resulta num vector coluna igual ao produto do escalar k por $\mathbf{u}$. De modo análogo se vê que o produto de uma matriz 1×1 com elemento k por um vector linha $\mathbf{v}$ resulta num vector linha igual ao produto do escalar k pelo vector $\mathbf{v}$.

Exemplo 2.11.

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \end{pmatrix}.$$

O produto de um vector linha $1 \times n$ por um vector coluna $n \times 1$ origina uma matriz 1×1, a qual é, usualmente, identificada com o número que a constitui, isto é, é usual escrevermos

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} = -2.$$

Exemplo 2.12.

$$\begin{pmatrix} 5 & 6 \\ 7 & 8 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 23 & 34 \\ 31 & 46 \end{pmatrix}$$

e

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 5 & 6 \\ 7 & 8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 19 & 22 \\ 43 & 50 \end{pmatrix}.$$

O produto de matrizes **não** é comutativo. Mesmo que AB e BA estejam definidas e sejam matrizes da mesma ordem, não se tem, necessariamente, $AB = BA$.

Exemplo 2.13.

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Se $AB = \mathbf{0}$, **não** podemos concluir que $A = \mathbf{0}$ ou $B = \mathbf{0}$.

Exemplo 2.14. Sejam

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 2 \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad C = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}.$$

Então, tem-se

$$AB = \begin{pmatrix} 4 & 4 \\ 4 & 4 \end{pmatrix} = AC,$$

mas $B \neq C$.

Se A, B e C são matrizes dadas, tais que $AB = AC$, **não** podemos concluir que $B = C$ (mesmo que tenhamos $A \neq \mathbf{0}$).

Acabámos de constatar, através de exemplos, que algumas das propriedades usuais do produto de números, por exemplo, a comutatividade, a lei do anulamento do produto e a chamada lei do corte, não se "estendem" para o produto de matrizes. No entanto, são válidas algumas propriedades, que listamos de seguida.

Propriedades do Produto de Matrizes

Dadas matrizes A, B e C e um escalar α, têm-se as sguintes igualdades, desde que as operações envolvidas estejam definidas:

Associatividade: $(AB)C = A(BC)$

Distributividade à Esquerda: $(A + B)C = AC + BC$

Distributividade à Direita: $A(B + C) = AB + AC$

Elemento Identidade : $AI = I$ e $IA = A$.

Elemento Absorvente: $A\mathbf{0} = \mathbf{0}$ e $\mathbf{0}A = \mathbf{0}$.

Ordem Inversa da Transposta do Produto: $(AB)^\mathsf{T} = B^\mathsf{T} A^\mathsf{T}$

Ordem Inversa da Transconjugada do Produto: $(AB)^* = B^* A^*$.

Associatividade Mista: $\alpha(AB) = (\alpha A)B = A(\alpha B)$

As demonstrações destas propriedades seguem o esquema usual já usado para demonstrar outras propriedades de operações com matrizes. Uma vez que se pretende estabelecer uma igualdade entre matrizes, teremos, primeiramente de mostrar que as matrizes em causa são da mesma ordem, provando, depois, que os elementos correspondentes são iguais. A título de exemplo, provemos que, sendo A uma matriz de tipo $m \times p$ e B uma matriz de tipo $p \times n$ (para que faça sentido efectuar o produto AB), se tem

$$(AB)^{\mathsf{T}} = B^{\mathsf{T}} A^{\mathsf{T}}.$$

Sendo A de tipo $m \times p$ e B de tipo $p \times n$, a matriz AB será uma matriz do tipo $m \times n$ e, portanto, $(AB)^{\mathsf{T}}$ será do tipo $n \times m$. Mas, sendo A de tipo $m \times p$, A^{T} será do tipo $p \times m$; do mesmo modo, uma vez que B é do tipo $p \times n$, B^{T} será do tipo $n \times p$. Então, a matriz $B^{\mathsf{T}} A^{\mathsf{T}}$ será, tal como $(AB)^{\mathsf{T}}$, uma matriz do tipo $n \times m$. Vejamos agora que os elementos destas matrizes situados em posições correspondentes, são iguais. Tem-se

$$\begin{aligned} ((AB)^{\mathsf{T}})_{ij} = (AB)_{ji} &= \sum_{k=1}^{p} a_{jk} b_{ki} = \sum_{k=1}^{p} b_{ki} a_{jk} \\ &= \sum_{k=1}^{p} (B^{\mathsf{T}})_{ik} (A^{\mathsf{T}})_{kj} = (B^{\mathsf{T}} A^{\mathsf{T}})_{ij}, \end{aligned}$$

o que conclui a demonstração. (Justifique as diversas passagens!) $\square$

Nota: Tal como no caso da adição, a associatividade do produto de matrizes permite-nos escrever ABC sem ambiguidade.

Produto de matrizes fraccionadas em blocos

Para efectuar o produto de duas matrizes, pode ser muito útil, em certos casos, utilizar um método que consiste em considerar uma ou ambas as matrizes "fraccionadas" em sub-matrizes – que, neste contexto, são vulgarmente designadas por *blocos* – tal como se descreve a seguir.

Produto de Matrizes Fraccionadas

Suponhamos que duas matrizes A e B estão fraccionadas em blocos como se indica abaixo:[a]

$$A = \left(\begin{array}{c|c|c|c} A_{11} & A_{12} & \cdots & A_{1r} \\ \hline A_{21} & A_{22} & \ldots & A_{2r} \\ \hline \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \hline A_{s1} & A_{s2} & \cdots & A_{sr} \end{array}\right), \quad B = \left(\begin{array}{c|c|c|c} B_{11} & B_{12} & \cdots & B_{1t} \\ \hline B_{21} & B_{22} & \ldots & B_{2t} \\ \hline \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \hline B_{r1} & B_{r2} & \cdots & B_{rt} \end{array}\right).$$

Note-se que o número de "colunas de blocos"de A é igual ao "número de linhas de blocos"de B, que os blocos que formam cada linha de blocos têm todos o mesmo número de linhas e que os blocos que formam cada coluna de blocos têm todos o mesmo número de colunas; suponhamos, além disso, que o número de linhas de cada bolco A_{ik} é igual ao número de colunas de cada bloco B_{kj}. Então, o produto AB pode formar-se combinando os blocos exactamente da mesma forma como combinamos os escalares no produto usual. Isto é, o bloco na posição (i, j) de AB pode ser obtido usando a seguinte fórmula

$$A_{i1}B_{1j} + A_{i2}B_{2j} + \cdots + A_{ir}B_{rj}.$$

[a]As linhas horizontais e verticais da matriz são linhas "imaginárias"que nos ajudam a ver o fraccionamneto da matriz.

O resultado anterior decorre facilmente da forma como se efectua o produto de matrizes.

Exemplo 2.15. Considerem-se as seguintes matrizes fraccionadas

$$A = \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 3 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 1 \\ \hline 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{array}\right) = \left(\begin{array}{c|c} C & I \\ \hline I & \mathbf{0} \end{array}\right), \quad B = \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ \hline 1 & 3 & 1 & 3 \\ 2 & 1 & 2 & 1 \end{array}\right) = \left(\begin{array}{c|c} I & \mathbf{0} \\ \hline C & C \end{array}\right),$$

onde $C = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$, I é a matriz identidade de ordem 2 e $\mathbf{0}$ a matriz nula de ordem 2. Então, usando a multiplicação por blocos, o produto pode calcular-se muito facilmente:

$$AB = \left(\begin{array}{c|c} C & I \\ \hline I & \mathbf{0} \end{array}\right)\left(\begin{array}{c|c} I & \mathbf{0} \\ \hline C & C \end{array}\right) = \left(\begin{array}{c|c} 2C & C \\ \hline I & \mathbf{0} \end{array}\right) = \left(\begin{array}{cc|cc} 2 & 6 & 1 & 3 \\ 4 & 2 & 2 & 1 \\ \hline 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{array}\right),$$

uma vez que

$$CI + IC = C + C = 2C, \;\; C\mathbf{0} + IC = \mathbf{0} + C = C, \;\; I\,I + \mathbf{0}C = I + \mathbf{0} = I, \;\; I\mathbf{0} + \mathbf{0}C = \mathbf{0} + \mathbf{0} = \mathbf{0}.$$

O produto com matrizes fraccionadas em blocos é também usado, com frequência, para estabelecer certos resultados.

Exemplo 2.16. Consideremos o produto de duas matrizes $A_{m\times p}$ e $B_{p\times n}$. Fraccionemos A nos m blocos que são as suas linhas (blocos do tipo $1\times p$), que designaremos por $\mathbf{l}_1(A), \mathbf{l}_2(A), \ldots, \mathbf{l}_m(A)$ e deixemos B por fraccionar, ou, dito de outro modo, consideremos B como um único bloco, de tipo $p \times n$. Tem-se, então[5]

$$AB = \begin{pmatrix} \mathbf{l}_1(A) \\ \mathbf{l}_2(A) \\ \vdots \\ \mathbf{l}_m(A) \end{pmatrix} B = \begin{pmatrix} \mathbf{l}_1(A)\, B \\ \mathbf{l}_2(A)\, B \\ \vdots \\ \mathbf{l}_m(A)\, B \end{pmatrix}.$$

Se designarmos por $\mathbf{l}_1(AB), \ldots, \mathbf{l}_m(AB)$ as m linhas da matriz produto AB, podemos, de imediato concluir que

$$\mathbf{l}_i(AB) = \mathbf{l}_i(A)\, B,$$

ou seja, que:

> para obtermos uma determinada linha i do produto AB, teremos apenas de multiplicar a linha i da matriz A pela matriz B, não sendo, portanto, necessário calcular toda a matriz AB.

De modo análogo, se designarmos por $\mathbf{c}_1(B), \ldots, \mathbf{c}_n(B)$ as colunas da matriz B, tem-se

$$AB = A\Big(\mathbf{c}_1(B)\ \ \mathbf{c}_2(B)\ \ \cdots\ \ \mathbf{c}_n(B)\Big) = \Big(A\,\mathbf{c}_1(B)\ \ A\,\mathbf{c}_2(B)\ \ \cdots\ \ A\,\mathbf{c}_n(B)\Big)$$

o que mostra que, sendo $\mathbf{c}_j(AB)$ a coluna j da matriz AB, se tem

$$\mathbf{c}_j(AB) = A\,\mathbf{c}_j(B).$$

Assim, tem-se:

> para obtermos uma dada coluna j da matriz produto AB, bastará multiplicar A pela coluna j de B.

Notação: De futuro, sendo A uma determinada matriz $m \times n$, usaremos a notação $\mathbf{a}_j$ (a letra minúscula correspondente à letra usada para a matriz, em negrito, indexada por j) para designar a sua j-ésima coluna. Assim,

$$A = \Big(\mathbf{a}_1\ \mathbf{a}_2\ \cdots\ \mathbf{a}_n\Big)$$

será o fraccionamento de A nas suas colunas. Uma excepção à regra referida é o caso da matriz identidade de ordem n, I, cujas colunas são, geralmente, designadas por $\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_n$.

---

[5] Neste caso não julgámos necessário separar as linhas da matriz por linhas horizontais, sendo claro qual é o fraccionamento.

Seja A uma matriz $m \times n$ e seja $\mathbf{c}$ uma matriz coluna $n \times 1$. Então o produto $A\mathbf{c}$ pode ser obtido do seguinte modo, usando o fraccionamento de A nas suas n colunas e o fraccionamento de $\mathbf{c}$ nas suas linhas (cada uma apenas com um elemento)

$$A\mathbf{c} = \begin{pmatrix} \mathbf{a}_1 & \mathbf{a}_2 & \cdots & \mathbf{a}_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \vdots \\ c_n \end{pmatrix} = c_1\mathbf{a}_1 + c_2\mathbf{a}_2 + \cdots + c_n\mathbf{a}_n. \tag{2.3}$$

Definição 2.15. Dadas m matrizes $X_1, \ldots, X_m$ (todas do mesmo tipo), uma *combinação linear* dessas matrizes é uma matriz da forma $\alpha_1 X_1 + \alpha_2 X_2 + \ldots + \alpha_m X_m$, com $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_m$ escalares dados. Os escalares $\alpha_1, \ldots, \alpha_m$ são chamados os *coeficientes* da combinação linear.

Tem-se, então, o resultado enunciado no quadro seguinte.

O produto de uma matriz A por um vector coluna $\mathbf{c}$ é igual a uma combinação linear das colunas de A, tendo por coeficientes os elementos de $\mathbf{c}$.

2.2.5 Sistemas lineares de novo

A multiplicação de matrizes vai permitir-nos uma representação conveniente para sistemas lineares. Consideremos novamente um sistema de m equações lineares em n variáveis $x_1, \ldots, x_n$:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \qquad\qquad \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases}. \tag{2.4}$$

Estas equações podem expressar-se como uma igualdade entre dois vectores coluna

$$\begin{pmatrix} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix},$$

ou ainda, tendo em conta a forma como se define o produto de matrizes, como a seguinte *equação matricial*

$$\underbrace{\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}}_{A} \underbrace{\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}}_{\mathbf{x}} = \underbrace{\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}}_{\mathbf{b}}, \tag{2.5}$$

a qual pode escrever-se na forma compacta

$$A\mathbf{x} = \mathbf{b} \tag{2.6}$$

onde A é a matriz do sistema, $\mathbf{x}$ é o vector coluna das incógnitas e $\mathbf{b}$ é o vector coluna dos termos independentes.

Dissemos, no Capítulo 1, que uma solução do sistema (2.4) é um n-uplo $(s_1, s_2, \ldots, s_n)$ que satisfaz simultaneamente todas as equações do sistema, isto é, que verifica

$$\begin{cases} a_{11}s_1 + a_{12}s_2 + \cdots + a_{1n}s_n = b_1 \\ a_{21}s_1 + a_{22}s_2 + \cdots + a_{2n}s_n = b_2 \\ \vdots \\ a_{m1}s_1 + a_{m2}s_2 + \cdots + a_{mn}s_n = b_m \end{cases},$$

ou seja, é tal que $A\mathbf{s} = \mathbf{b}$, onde $\mathbf{s}$ é o vector coluna $\mathbf{s} = \begin{pmatrix} s_1 \\ s_2 \\ \vdots \\ s_n \end{pmatrix}$. Neste contexto, faz, portanto, mais sentido considerar a solução do sistema, não como o n-uplo $(s_1, \ldots, s_n)$, mas sim como o vector coluna $\mathbf{s}$ tal que $A\mathbf{s} = \mathbf{b}$.

Neste curso, referir-nos-emos às soluções de sistemas, quer na forma de n-uplos ordenados, quer na forma de vectores coluna com n elementos, conforme seja mais conveniente.

Vimos, então, que um sistema de m equações lineares em n incógnitas, $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$, tem solução se e só se existir um vector coluna $\mathbf{s}$ tal que $A\mathbf{s} = \mathbf{b}$. Fraccionando a matriz A nas suas n colunas $\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_n$ e fraccionando $\mathbf{s}$ nas suas n linhas, vem

$$A\mathbf{s} = \mathbf{b} \iff \begin{pmatrix} \mathbf{a}_1 & \mathbf{a}_2 & \cdots & \mathbf{a}_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} s_1 \\ s_2 \\ \vdots \\ s_n \end{pmatrix} = \mathbf{b}$$
$$\iff s_1\mathbf{a}_1 + s_2\mathbf{a}_2 + \cdots + s_n\mathbf{a}_n = \mathbf{b}.$$

Temos, assim, o resultado seguinte.

O sistema $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ tem solução se e só se $\mathbf{b}$ for uma combinação linear das colunas de A.

2.3 Matrizes invertíveis

Definição 2.16 (Matriz invertível)**.** Uma matriz A, quadrada de ordem n, diz-se *invertível* ou *não singular*, se existir uma matriz C, quadrada de ordem n, tal que

$$AC = CA = I_n.$$

[6] Uma matriz que não seja invertível, diz-se *não invertível* ou *singular*.

O seguinte resultado mostra que a matriz C (se existir) é única.

Teorema 2.1. *Seja A uma matriz quadrada de ordem n. Então existe, no máximo, uma matriz C, quadrada de ordem n, tal que $AC = CA = I_n$.*

Dem: Sejam C_1 e C_2 matrizes quadradas de ordem n tais que $AC_1 = C_1A = I_n$ e $AC_2 = C_2A = I_n$. Então, temos

$$C_1 = C_1I_n = C_1(AC_2) = (C_1A)C_2 = I_nC_2 = C_2,$$

o que mostra que existe apenas uma matriz satisfazendo as condições exigidas. □

Definição 2.17 (Inversa de uma matriz)**.** Sendo A uma matriz invertível, à (única) matriz C que satisfaz $AC = CA = I$ chamamos *matriz inversa* de A. Esta matriz é designada pelo símbolo A^{-1}.

[6] Note-se que a exigência de que C seja quadrada de ordem n é redundante, pois tal decorre necessariamente do facto de ambos os produtos AC e CA estarem definidos.

Exemplo 2.17. A matriz $A = \begin{pmatrix} 6 & 5 \\ 5 & 4 \end{pmatrix}$ é invertível, sendo $A^{-1} = \begin{pmatrix} -4 & 5 \\ 5 & -6 \end{pmatrix}$. Com efeito, temos

$$\begin{pmatrix} 6 & 5 \\ 5 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -4 & 5 \\ 5 & -6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 & 5 \\ 5 & -6 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 6 & 5 \\ 5 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

A matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$ não tem inversa. De facto, sendo $C = \begin{pmatrix} x & y \\ z & w \end{pmatrix}$ uma matriz de ordem 2, vamos ver que nunca será possível ter-se $AC = I_2$. Com efeito,

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x & y \\ z & w \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} x + z = 1 \\ 2x + 2z = 0 \\ y + w = 0 \\ 2y + 2w = 1 \end{cases},$$

que é um sistema obviamente impossível.

Propriedades da Inversão de Matrizes

Se A e B são matrizes quadradas de ordem n, invertíveis, então são válidas as seguintes propriedades.

1. A^{-1} é invertível e $(A^{-1})^{-1} = A$.
2. Para qualquer $\alpha \neq 0$, a matriz αA é invertível e tem-se $(\alpha A)^{-1} = \frac{1}{\alpha}A^{-1}$.
3. A matriz produto AB é invertível e tem-se $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$.
4. A matriz A^{T} é invertível e $(A^{\mathsf{T}})^{-1} = (A^{-1})^{\mathsf{T}}$.
5. A matriz A^* é invertível e $(A^*)^{-1} = (A^{-1})^*$

Dem:

1. A Propriedade 1. é uma consequência imediata da definição de inversa de uma matriz.
2. Temos de mostrar que $(\frac{1}{\alpha}A^{-1})(\alpha A) = (\alpha A)(\frac{1}{\alpha}A^{-1}) = I_n$.

   Mas, tem-se

   $$(\frac{1}{\alpha}A^{-1})(\alpha A) = \frac{1}{\alpha}(A^{-1}(\alpha A)) = A^{-1}(\frac{1}{\alpha}(\alpha A)) = A^{-1}((\frac{1}{\alpha}\alpha)A) = A^{-1}(1A) = A^{-1}A = I_n.$$

   De modo análogo se prova que $(\alpha A)(\frac{1}{\alpha}A^{-1}) = I_n$.

3. Para provar a Propriedade 3, note-se que temos

$$(B^{-1}A^{-1})(AB) = B^{-1}(A^{-1}A)B = B^{-1}I_nB = B^{-1}B = I_n.$$

   De modo análogo se mostra que $(AB)(B^{-1}A^{-1}) = I_n$, o que prova que AB tem inversa, sendo esta a matriz $B^{-1}A^{-1}$.

4. Para estabelecer a Propriedade 4., basta notar que

$$(A^{-1})^{\mathsf{T}} A^{\mathsf{T}} = (AA^{-1})^{\mathsf{T}} = (I_n)^{\mathsf{T}} = I_n$$

   e que

$$A^{\mathsf{T}}(A^{-1})^{\mathsf{T}} = (A^{-1}A)^{\mathsf{T}} = (I_n)^{\mathsf{T}} = I_n.$$

5. A demonstração para o caso da transconjugada é totalmente análoga à demonstração anterior. $\square$

O teorema seguinte estabelece um critério muito útil para saber se uma dada matriz é ou não invertível.

Teorema 2.2. *Uma matriz A, quadrada de ordem n, é invertível se e só se* car$(A) = n$.

Dem: $\Longrightarrow$)

Seja A invertível. Então, existe uma matriz C tal que $AC = I$. Vejamos que esta matriz C é única.[7] Sejam C_1 e C_2 matrizes tais que $AC_1 = I$ e $AC_2 = I$. Então, segue-se que $AC_1 = AC_2$. Como, por hipótese, existe A^{-1}, multiplicando ambos os membros da igualdade anterior por A^{-1}, vem $A^{-1}AC_1 = A^{-1}AC_2$ ou seja, vem $IC_1 = IC_2$ ou ainda, $C_1 = C_2$.

Designando as colunas de C por $\mathbf{c}_1, \ldots, \mathbf{c}_n$ e por $\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_n$ as colunas da matriz identidade (seguindo a convenção usual), a igualdade $AC = I$ pode escrever-se como

$$A\begin{pmatrix}\mathbf{c}_1 & \mathbf{c}_2 & \cdots & \mathbf{c}_n\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\mathbf{e}_1 & \mathbf{e}_2 & \cdots & \mathbf{e}_n\end{pmatrix},$$

ou ainda, como

$$\begin{pmatrix}A\mathbf{c}_1 & A\mathbf{c}_2 & \cdots & A\mathbf{c}_n\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\mathbf{e}_1 & \mathbf{e}_2 & \cdots & \mathbf{e}_n\end{pmatrix}.$$

[7] Sabemos que existe uma única matriz que satisfaz simultaneamente $AC = I$ e $CA = I$, mas é necessário mostrar que também só existe uma matriz C que satisfaz apenas a condição $AC = I$.

A unicidade da matriz C tal que $AC = I$ e a igualdade anterior mostram que cada um dos sistemas $A\mathbf{x}_j = \mathbf{e}_j$ admite uma e uma só solução. Como vimos no Capítulo 1, isto implica que terá de ser car$(A) = n$.

$\Longleftarrow$) Suponhamos agora que car$(A) = n$ e provemos que A tem inversa. Novamente, usando os resultados que conhecemos para sistemas de equações lineares, o facto de termos car$(A) = n$ garante-nos que haverá solução (única) para cada um dos sistemas $A\mathbf{x}_j = \mathbf{e}_j, j = 12, \ldots, n$, ou seja, será possível encontrar uma (e uma só) matriz C tal que $AC = I$. Essa matriz terá como colunas cada uma das soluções dos sistemas $A\mathbf{x}_j = \mathbf{e}_j$. Não podemos, de imediato concluir que C é a inversa de A, porque ainda não mostrámos que essa matriz C também satisfaz $CA = I$. Vamos ver que tal terá também de acontecer.

Suponhamos que não, isto é, suponhamos que $CA \neq I$ e designemos por B a matriz $CA - I$, isto é, seja $B = CA - I$. Então, $B \neq \mathbf{0}$ e além disso, tem-se

$$AB = A(CA - I) = (AC)A - A = IA - A = A - A = \mathbf{0}.$$

Fraccionando B em colunas e fazendo o mesmo para a matriz nula, vemos que a equação anterior nos diz que

$$A\Big(\mathbf{b}_1\ \mathbf{b}_2\ \cdots\ \mathbf{b}_n\Big) = \Big(A\mathbf{b}_1\ A\mathbf{b}_2\ \cdots\ A\mathbf{b}_n\Big) = \Big(\mathbf{0}\ \mathbf{0}\ \cdots\ \mathbf{0}\Big).$$

Mas, se B é uma matriz não nula, ela terá (pelo menos) uma coluna não nula. Isto significa que teremos, para um certo j, $A\mathbf{b}_j = \mathbf{0}$, com $\mathbf{b}_j \neq \mathbf{0}$, ou seja, que o sistema homogéneo $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$ terá uma solução para além da solução trivial. Como sabemos, isto não é possível quando car$(A) = n$.

Vemos, portanto, que não poderá ser $CA - I \neq \mathbf{0}$, ou seja que teremos de ter $CA = I$, tal como pretendíamos mostrar. $\square$

Proposição 2.1. *Se A é uma matriz quadrada de ordem n e C é uma matriz quadrada da mesma ordem e tal que $AC = I$, então também $CA = I$, ou seja, A é invertível e $A^{-1} = C$.*

Dem: Comecemos por observar que $AC = I$ implica que C é invertível. De facto, se C não fosse invertível, seria car$(C) < n$, o que implicaria que o sistema homogéneo $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$ teria solução não nula, i.e., existiria um vector $\mathbf{u} \neq \mathbf{0}$ e tal que $C\mathbf{u} = \mathbf{0}$. Mas, se assim fosse, viria

$$\mathbf{u} = I\mathbf{u} = AC\mathbf{u} = A(C\mathbf{u}) = A\mathbf{0} = \mathbf{0},$$

o que contradiz o facto de ser $\mathbf{u} \neq 0$.

Sabendo que C é invertível e sendo C^{-1} a sua inversa, podemos escrever

$$AC = I \Longrightarrow ACC^{-1} = C^{-1} \Longrightarrow AI = C^{-1} \Longrightarrow A = C^{-1} \Longrightarrow CA = I.$$

$\square$

O resultado da proposição anterior é muito útil porque nos diz que, para mostrar que C é a inversa de uma dada matriz quadrada A, não teremos que mostrar que $AC = I$ e $CA = I$, bastando apenas verificar uma das igualdades.

Pelo que acabámos de ver, tem-se que é possível adoptar o procedimento descrito no quadro abaixo para calcular a inversa de uma dada matriz invertível.

Cálculo da Inversa
(Método de Gauss-Jordan)

Para determinar as diversas colunas da inversa de uma dada matriz quadrada A (invertível), bastará resolver, em simultâneo, n sistemas de equações, todos com A como matriz simples e cujos lados direitos sejam, respectivamente, as diversas colunas da matriz identidade.
Tal sistema poderá ser resolvido pelo método de Gauss-Jordan, convertendo a matriz ampliada

$$\Big(A \,|\, \mathbf{e}_1\, \mathbf{e}_2\, \cdots \mathbf{e}_n \Big)$$

na forma em escada reduzida

$$\Big(I_n \,|\, \mathbf{c}_1\, \mathbf{c}_2\, \cdots \mathbf{c}_n \Big).$$

As diversas colunas da inversa serão simplesmente as colunas $\mathbf{c}_1, \mathbf{c}_2, \cdots, \mathbf{c}_n$.
De uma forma compacta, fácil de lembrar:

$$(\, A \,|\, I \,) \xrightarrow{\text{Gauss-Jordan}} (\, I \,|\, A^{-1} \,).$$

Naturalmente, se ao tentarmos aplicar o método anterior, virmos que a matriz do lado esquerdo, A, não pode ser convertida na matriz identidade, teremos de concluir que $\text{car}(A) < n$ e que A não tem inversa.

2.4 Exercícios

Exercício 2.1. Sendo

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ -2 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ -3 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & -1 \end{pmatrix},$$

calcule:

(a) $2A$ (b) $A+B$ (c) $3A-2B$

(d) $3A^{\mathsf{T}}-2B^{\mathsf{T}}$ (e) AB (f) BA

(g) $(AB)^{\mathsf{T}}$ (h) $B^{\mathsf{T}}A^{\mathsf{T}}$ (i) A^2.

Nota: Sendo A uma matriz quadrada, A^2 designa a matriz AA. De modo análogo, A^k ($k \in \mathbb{N}$) designa o produto de k matrizes iguais a A.

Exercício 2.2. Considere as matrizes

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}.$$

Calcule:

(a) $(A+B)^2$; (b) $A^2 + 2AB + B^2$; (c) $A^2 + AB + BA + B^2$.

Exercício 2.3. Sejam

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -4 & 6 & 1 \\ 2 & 1 & 4 & -2 & 2 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 2 \\ -3 & 2 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 4 & 1 & 5 & 4 \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 3 & 5 \\ 2 & 1 & 0 & 4 & 3 \\ 1 & 0 & 1 & 3 & 7 \\ -3 & 2 & 1 & 9 & 1 \\ 2 & 0 & 1 & 6 & 6 \end{pmatrix}.$$

Calcule:

(a) a terceira linha da matriz AB;

(b) a segunda coluna da matriz AB;

(c) a matriz $A\mathbf{e}_2$, onde $\mathbf{e}_2$ designa a segunda coluna da matriz identidade (neste caso, de ordem 5);

(d) a matriz $\mathbf{e}_2^{\mathsf{T}}A$ onde $\mathbf{e}_2$ é a matriz referida na alínea anterior.

Exercício 2.4. Seja A uma matriz de ordem $m \times n$ e sejam $\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_n$ as diversas colunas da matriz identidade de ordem n. A que é igual o produto $A\mathbf{e}_j$ ($j = 1, 2, \ldots, n$)?

Exercício 2.5. Sejam $A, B \in \mathbb{R}^{m \times n}$. Prove que:

(a) se $A\mathbf{x} = B\mathbf{x}$ para todo o vector $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^{n\times 1}$, então $A = B$;

(b) se $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$ para todo o vector $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^{n\times 1}$, então A é a matriz nula.

Exercício 2.6. Sejam

$$D = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad D' = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix}.$$

Calcule:

(a) $D\,D'$; (b) $D\,A$; (c) $A\,D$.

Exercício 2.7. (a) Mostre que se $D = (d_{ij})$ e $D' = (d'_{ij})$ são duas matrizes diagonais da mesma ordem, então DD' também é diagonal, isto é, $(DD')_{ij} = 0$, se $i \neq j$ e que, além disso, $(DD')_{ii} = d_{ii}d'_{ii}$.

(b) Prove que o produto de uma matriz diagonal $D = (d_{ij})$ de ordem n por uma matriz A de ordem $n \times m$ resulta numa matriz obtida de A multiplicando cada uma das suas linhas pelo elemento diagonal da linha correspondente de D, i.e.

$$(DA)_{ij} = d_{ii}a_{ij}.$$

Sendo B uma matriz $m \times n$, a que é igual o produto BD?

Exercício 2.8. Sejam A e B duas matrizes quadradas de ordem n. Prove que:

(a) se A e B são simétricas (anti-simétricas), então a matriz $A + B$ é simétrica (anti-simétrica);

(b) se A é simétrica (anti-simétrica), então A matriz αA é simétrica (anti-simétrica), para qualquer escalar α;

(c) A matriz $A + A^{\mathsf{T}}$ é simétrica e a matriz $A - A^{\mathsf{T}}$ é anti-simétrica;

(d) a matriz A pode decompor-se na soma de uma matriz simétrica com uma matriz anti-simétrica;

(e) sendo A e B simétricas, a matriz AB é simétrica se e só se $AB = BA$;

(f) se A é simétrica e invertível, a sua inversa também é simétrica.

Exercício 2.9. Seja

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 1 \\ 1 & 3 & 3 & 2 \\ 2 & 4 & 3 & 3 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

(a) Mostre que

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & 2 & -3 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ -2 & 3 & -2 & 3 \end{pmatrix}.$$

(b) Baseando-se apenas na informação fornecida pela alínea anterior, diga:

(i) qual é a característica de A;

(ii) se $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$ é uma possível solução do sistema homogéneo $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$;

(iii) qual é a inversa da matriz A^T;

(iv) qual é a inversa de $2A$.

Exercício 2.10. Nas alíneas seguintes, determine se as matrizes consideradas têm inversa e, em caso afirmativo, calcule-a, usando o método de Gauss-Jordan.

(a) $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 5 \end{pmatrix}$; (b) $B = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}$; (c) $C = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 3 \\ -1 & -2 & 0 \\ 2 & 2 & 3 \end{pmatrix}$;

(d) $D = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Exercício 2.11. Mostre que, seja qual for o valor do escalar $k \in \mathbb{R}$, a matriz

$$A_k = \begin{pmatrix} 1 & k & 0 & 0 \\ 0 & 1 & k & 0 \\ 0 & 0 & 1 & k \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

é invertível e determine a sua inversa.

Exercício 2.12. Seja A uma matriz quadrada de ordem n. Mostre que:

(a) sendo $\mathbf{b}$ um vector coluna $n \times 1$, o sistema $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ tem uma e uma só solução se e só se A for invertível, sendo a solução dada por $\mathbf{x} = A^{-1}\mathbf{b}$;

(b) sendo B uma matriz de ordem $n \times p$, então existe uma e uma só matriz X de ordem $n \times p$ tal que $AX = B$ se e só se A for invertível, sendo $X = A^{-1}B$.

Exercício 2.13. (a) Uma matriz quadrada A diz-se *idempotente*, se $A^2 = A$. Mostre que, se A é idempotente, então $A^k = A$, para qualquer $k \in \mathbb{N}$.

(b) Mostre que a matriz

$$B = \begin{pmatrix} 1/3 & 1/3 & 1/3 \\ 1/3 & 1/3 & 1/3 \\ 1/3 & 1/3 & 1/3 \end{pmatrix}$$

é idempotente.

(c) Seja

$$A = \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1/3 & 1/3 & 1/3 \\ 0 & 1 & 0 & 1/3 & 1/3 & 1/3 \\ 0 & 0 & 1 & 1/3 & 1/3 & 1/3 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 1/3 & 1/3 & 1/3 \\ 0 & 0 & 0 & 1/3 & 1/3 & 1/3 \\ 0 & 0 & 0 & 1/3 & 1/3 & 1/3 \end{array}\right).$$

Calcule A^2 e A^3, usando o fraccionamento indicado para A. A que será igual a matriz A^{300}?

Exercício 2.14. (a) Mostre que, sendo $A_{r\times r}$, e $B_{s\times s}$ matrizes invertíveis, se tem

$$\left(\begin{array}{c|c} A & \mathbf{0}_{r\times s} \\ \hline \mathbf{0}_{s\times r} & B \end{array}\right)^{-1} = \left(\begin{array}{c|c} A^{-1} & \mathbf{0}_{r\times s} \\ \hline \mathbf{0}_{s\times r} & B^{-1} \end{array}\right).$$

(b) Calcule a inversa da seguinte matriz

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 4 \end{pmatrix}.$$

Exercício 2.15. Seja A uma matriz quadrada de ordem n. Justifique cada uma das afirmações seguintes:

(a) se A tem uma linha de zeros, então A é singular;

(b) se A tem duas linhas iguais, então A é singular;

(c) se uma linha de A é um múltiplo de outra linha, então A é singular.

Poderá tirar conclusões idênticas, se as afirmações forem relativas a colunas (em vez de linhas) de A?

Sugestão: Note que A é invertível se e só se A^{T} também é invertível.

Exercício 2.16. Mostre que se D é uma matriz diagonal de ordem n com elementos diagonais $d_{ii} \neq 0; i = 1, \ldots, n$, então D é invertível e D^{-1} é a matriz diagonal de elementos diagonais iguais a $1/d_{ii}; i = 1, 2, \ldots, n$.

3

Determinantes

3.1 Conceitos básicos

Neste capítulo, vamos ver que é possível associar um número a uma matriz quadrada – o chamado *determinante* da matriz – o qual (para além de outras aplicações importantes) nos vai fornecer um critério para saber se essa matriz é ou não invertível.

Antes de introduzirmos o conceito de determinante, precisamos de algumas definições.

Definição 3.1 (Permutação)**.** Sendo $n \in \mathbb{N}$, uma permutação do conjunto $\{1, 2, \ldots, n\}$ é uma aplicação bijectiva deste conjunto nele próprio. O conjunto de todas as permutações de $\{1, 2, \ldots, n\}$ é designado por S_n.

Uma permutação $\sigma \in S_n$ é frequentemente representada na forma

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \cdots & n \\ \sigma_1 & \sigma_2 & \cdots & \sigma_n \end{pmatrix},$$

ou, mais simplesmente, como

$$\sigma = (\sigma_1, \sigma_2, \cdots, \sigma_n)$$

onde $\sigma_1 = \sigma(1), \sigma_2 = \sigma(2), \ldots, \sigma_n = \sigma(n)$.

Por exemplo,

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 4 & 5 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

ou

$$(2, 4, 5, 1, 3)$$

representam a mesma permutação.

Como a permutação se identifica com o n-uplo ordenado $(\sigma_1, \ldots, \sigma_n)$, costumamos referir-nos a $\sigma_1, \ldots, \sigma_n$ como elementos da permutação.

Definição 3.2. Dizemos que dois elementos σ_i e σ_j de uma permutação $\sigma = (\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_n)$ estão em *inversão*, se estão fora da ordem natural, isto é, se $i < j$ e $\sigma_i > \sigma_j$. O *número de inversões* de uma permutação, designado por $\nu(\sigma)$, é o número total de pares de números que estão em inversão nessa permutação.

Por exemplo, relativamente à permutação anterior, 2 e 1, 4 e 1, 4 e 3 , 5 e 1 e 5 e 3 estão em inversão e portanto, o número de inversões dessa permutação é 5.

Definição 3.3. Diz-se que uma permutação é *par*, se o seu número de inversões for par e diremos que ela é *ímpar*, se esse número for ímpar.

A permutação considerada acima é, portanto, uma permutação ímpar. O número

$$\text{sgn}(\sigma) := (-1)^{\nu(\sigma)} = \begin{cases} 1, & \text{se } \sigma \text{ é par} \\ -1, & \text{se } \sigma \text{ é ímpar,} \end{cases}$$

é chamado *sinal* da permutação σ.

É fácil de mostrar (tal pode ser feito por indução sobre n) que o número total de permutações do conjunto $\{1, 2, \ldots, n\}$, isto é, o número de elementos de S_n, é igual a $n!$.

Estamos agora em condições de introduzir a definição de determinante de uma matriz quadrada.

Determinante de uma matriz

Seja $A = (a_{ij})$ uma matriz quadrada de ordem n. O *determinante* de A, designado por $\det A$ ou $|A|$, é o número dado por

$$\det A = \sum_{\sigma \in S_n} \text{sgn}(\sigma)\, a_{1\sigma(1)}\, a_{2\sigma(2)} \cdots a_{n\sigma(n)}. \tag{3.1}$$

Exemplo 3.1. Caso $n = 1$. Se $A = (a_{11})$ é uma matriz 1×1, então, usando a fórmula (3.1), vemos que

$$\det(a_{11}) = a_{11}, \tag{3.2}$$

uma vez que existe uma única permutação $\sigma \in S_1$, que é a permutação $\sigma = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, a qual é, naturalmente, par.

Nota: Neste caso, não é conveniente usarmos a notação $|a_{11}|$ para o determinante, para não se confundir com o módulo.

Caso $n = 2$. Existem duas permutações possíveis do conjunto $\{1, 2\}$,

$$\sigma_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad \sigma_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

A primeira é uma permutação par e a segunda é ímpar. Então, temos

$$\begin{aligned} \det \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} &= \operatorname{sgn}(\sigma_1) a_{1\sigma_1(1)} a_{2\sigma_1(2)} + \operatorname{sgn}(\sigma_2) a_{1\sigma_2(1)} a_{2\sigma_2(2)} \\ &= a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}. \end{aligned} \tag{3.3}$$

Caso $n = 3$. Para $n = 3$, temos $3! = 6$ permutações do conjunto $\{1, 2, 3\}$, a saber:

$$\sigma_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}, \qquad \sigma_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}, \qquad \sigma_3 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix},$$

$$\sigma_4 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}, \qquad \sigma_5 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}, \qquad \sigma_6 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}.$$

As permutações σ_1, σ_2 e σ_3 são pares e as permutações σ_4, σ_5 e σ_6 são ímpares. Então, tem-se

$$\begin{aligned} \det \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} &= a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - \\ &\quad - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{11}a_{23}a_{32} \\ &= \underbrace{\left(a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32}\right)}_{\mathcal{A}} - \\ &\quad - \underbrace{\left(a_{13}a_{22}a_{31} + a_{12}a_{21}a_{33} + a_{11}a_{23}a_{32}\right)}_{\mathcal{S}} \end{aligned} \tag{3.4}$$

Cada uma das três parcelas de $\mathcal{A}$ é obtida com os produtos dos elementos assinalados abaixo:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & * & * \\ * & a_{22} & * \\ * & * & a_{33} \end{pmatrix}, \qquad \begin{pmatrix} * & a_{12} & * \\ * & * & a_{23} \\ a_{31} & * & * \end{pmatrix}, \qquad \begin{pmatrix} * & * & a_{13} \\ a_{21} & * & * \\ * & a_{32} & * \end{pmatrix}$$

De modo análogo, tem-se para $\mathcal{S}$:

$$\begin{pmatrix} * & * & a_{13} \\ * & a_{22} & * \\ a_{31} & * & * \end{pmatrix}, \qquad \begin{pmatrix} * & a_{12} & * \\ a_{21} & * & * \\ * & * & a_{33} \end{pmatrix}, \qquad \begin{pmatrix} a_{11} & * & * \\ * & * & a_{23} \\ * & a_{32} & * \end{pmatrix}$$

Com base nas figuras acima, podemos enunciar o modo de calcular um determinante de uma matriz de ordem 3, na forma de uma regra, espécie de mnemónica, conhecida por *regra de Sarrus*.

Regra de Sarrus

(Cálculo do determinante de uma matriz de ordem 3)

O determinante de uma matriz de ordem 3 é uma diferença de duas parcelas $\mathcal{A}$ e $\mathcal{S}$, em que cada uma delas - aditivo $\mathcal{A}$ e subtractivo $\mathcal{S}$ - é soma de três parcelas obtidas como produtos de três elementos de A; os elementos usados no aditivo são os da diagonal de A e os que estão nos vértices dos triângulos cuja base é paralela a essa diagonal; os elementos usados no subtractivo são os da diagonal secundária e os dos vértices dos triângulos de base paralela a essa diagonal.

Vejamos um exemplo da aplicação da regra de Sarrus. Consideremos a matriz quadrada de ordem 3:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & 3 \\ 5 & 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

Temos

$$\mathcal{A} = 1 \times (-1) \times 1 + 2 \times 3 \times 5 + 0 \times 2 \times 1 = -1 + 30 + 0 = 29,$$

$$\mathcal{S} = 1 \times (-1) \times 5 + 2 \times 3 \times 1 + 0 \times 2 \times 1 = -5 + 6 + 0 = 1.$$

Então,

$$\det A = \mathcal{A} - \mathcal{S} = 29 - 1 = 28.$$

Quando n cresce, $n!$ cresce muito rapidamente. Sendo este o número de elementos de S_n, a fórmula (3.1) que define o determinante de uma matriz A de ordem n torna-se de difícil utilização, mesmo quando n não é muito grande. No entanto, o determinante goza de algumas propriedades que nos vão ajudar a calculá-lo de forma mais simples. Vamos, então, estudar algumas das propriedades dos determinantes.

Nota: Com um certo abuso de linguagem, falaremos muitas vezes, em linhas, colunas e ordem de um determinante, querendo referir-nos, naturalmente, às linhas, colunas e ordem da respectiva matriz.

Nota: Nas proposições seguintes, A designa sempre uma matriz quadrada de ordem n e $\mathbf{l}_1, \mathbf{l}_2, \ldots, \mathbf{l}_n$ as suas linhas.

Proposição 3.1. *Se multiplicarmos uma linha de A por um número α, o determinante vem multiplicado por α.*

Dem: Seja $A = (a_{ij})$ e suponhamos que $B = (b_{ij})$ se obtém de A multiplicando uma determinada linha k, arbitrária, mas fixada, por α. Isto significa que, para $i, j = 1, 2, \ldots, n$, se tem $b_{ij} = a_{ij}$, se $i \neq k$, e $b_{kj} = \alpha a_{kj}$. Então, usando a definição de determinante, vem

$$\begin{aligned}
\det B &= \sum_{\sigma \in S_n} \operatorname{sgn}(\sigma) b_{1\sigma(1)} \ldots b_{k\sigma(k)} \ldots b_{n\sigma(n)} \\
&= \sum_{\sigma \in S_n} \operatorname{sgn}(\sigma) a_{1\sigma(1)} \ldots \alpha a_{k\sigma(k)} \ldots a_{n\sigma(n)} \\
&= \alpha \sum_{\sigma \in S_n} \operatorname{sgn}(\sigma) a_{1\sigma(1)} \ldots a_{k\sigma(k)} \ldots a_{n\sigma(n)} \\
&= \alpha \det A,
\end{aligned}$$

como pretendíamos mostrar. □

Exemplo 3.2. Sejam $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}$ e $B = \begin{pmatrix} 5 & 10 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}$. Note-se que B se obtém de A multiplicando a sua primeira linha pelo número 5. Calculemos $\det A$ e $\det B$ através da definição e vejamos que, de facto $\det(B) = 5\det(A)$. Tem-se:

$$\det A = 1 \times 3 - 4 \times 2 = 3 - 8 = -5$$

e

$$\det B = 5 \times 3 - 4 \times 10 = 5(1 \times 3 - 4 \times 2) = 5 \times (-5) = 5 \det A.$$

Como consequência imediata da proposição anterior, obtêm-se os seguintes corolários.

Corolário 3.1. *Se A tem uma linha toda de zeros, então* $\det A = 0$.

Corolário 3.2. *Se A é uma matriz quadrada de ordem n e α é um escalar, então*

$$\det(\alpha A) = \alpha^n \det A.$$

Proposição 3.2. *Suponhamos que um dada linha k de A ($1 \leq k \leq n$) se decompõe na forma*

$$\mathbf{l}_k = \begin{pmatrix} a_{k1} & \ldots & a_{kn} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a'_{k1} & \ldots & a'_{kn} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a''_{k1} & \ldots & a''_{kn} \end{pmatrix} = \mathbf{l}'_k + \mathbf{l}''_k.$$

Então,

$$\det A = \det \begin{pmatrix} \mathbf{l}_1 \\ \vdots \\ \mathbf{l}'_k + \mathbf{l}''_k \\ \vdots \\ \mathbf{l}_n \end{pmatrix} = \det \begin{pmatrix} \mathbf{l}_1 \\ \vdots \\ \mathbf{l}'_k \\ \vdots \\ \mathbf{l}_n \end{pmatrix} + \det \begin{pmatrix} \mathbf{l}_1 \\ \vdots \\ \mathbf{l}''_k \\ \vdots \\ \mathbf{l}_n \end{pmatrix}.$$

Dem: A demonstração é análoga à demonstração da Proposição 3.1 e é deixada ao cuidado dos alunos.

Proposição 3.3. *Se B se obtém de A por troca de duas das suas linhas, então*

$$\det B = -\det A.$$

Dizemos, informalmente, que a troca de linhas troca o sinal do determinante.

Dem: ver, e.g. [Mey00, p.463]. □

Corolário 3.3. *Se A tem duas linhas iguais, então* $\det A = 0$.

Dem: Suponhamos que $\mathbf{l}_k = \mathbf{l}_j$ para k e j fixos ($1 \leq k < j \leq n$). Então, tem-se

$$\det A = \det \begin{pmatrix} \mathbf{l}_1 \\ \vdots \\ \mathbf{l}_k \\ \vdots \\ \mathbf{l}_j \\ \vdots \\ \mathbf{l}_n \end{pmatrix} \underset{(\mathbf{l}_k = \mathbf{l}_j)}{=} \det \begin{pmatrix} \mathbf{l}_1 \\ \vdots \\ \mathbf{l}_k \\ \vdots \\ \mathbf{l}_k \\ \vdots \\ \mathbf{l}_n \end{pmatrix} \underset{(\text{Troca linhas } k \text{ e } j)}{=} -\det \begin{pmatrix} \mathbf{l}_1 \\ \vdots \\ \mathbf{l}_k \\ \vdots \\ \mathbf{l}_k \\ \vdots \\ \mathbf{l}_n \end{pmatrix}$$

$$\underset{(\mathbf{l}_k = \mathbf{l}_j)}{=} -\det \begin{pmatrix} \mathbf{l}_1 \\ \vdots \\ \mathbf{l}_k \\ \vdots \\ \mathbf{l}_j \\ \vdots \\ \mathbf{l}_n \end{pmatrix} = -\det A,$$

o que implica que $\det A = 0$, como queríamos provar. □

Proposição 3.4. *Se A tem duas linhas proporcionais, então* $\det A = 0$.

Dem: Este resultado segue-se facilmente da Proposição 3.1 e do Corolário 3.3. Com efeito, suponhamos que $\mathbf{l}_j = \alpha \mathbf{l}_k$ para k e j fixos ($1 \leq k < j \leq n$). Então

$$\det A = \det \begin{pmatrix} \mathbf{l}_1 \\ \vdots \\ \mathbf{l}_k \\ \vdots \\ \mathbf{l}_j \\ \vdots \\ \mathbf{l}_n \end{pmatrix} = \det \begin{pmatrix} \mathbf{l}_1 \\ \vdots \\ \mathbf{l}_k \\ \vdots \\ \alpha\mathbf{l}_k \\ \vdots \\ \mathbf{l}_n \end{pmatrix} = \alpha \det \begin{pmatrix} \mathbf{l}_1 \\ \vdots \\ \mathbf{l}_k \\ \vdots \\ \mathbf{l}_k \\ \vdots \\ \mathbf{l}_n \end{pmatrix} = \alpha 0 = 0.$$

□

Proposição 3.5. *O determinante de uma matriz não se altera quando se adiciona a uma linha dessa matriz outra linha multiplicada por um escalar.*

Dem: Suponhamos que a linha j de A é substituída pela sua soma com a linha k multiplicada por α (com $k < j$, sem perda de generalidade). Então, tem-se

$$\det \begin{pmatrix} \mathbf{l}_1 \\ \vdots \\ \mathbf{l}_k \\ \vdots \\ \mathbf{l}_j + \alpha\mathbf{l}_k \\ \vdots \\ \mathbf{l}_n \end{pmatrix} = \det \begin{pmatrix} \mathbf{l}_1 \\ \vdots \\ \mathbf{l}_k \\ \vdots \\ \mathbf{l}_j \\ \vdots \\ \mathbf{l}_n \end{pmatrix} + \det \begin{pmatrix} \mathbf{l}_1 \\ \vdots \\ \mathbf{l}_k \\ \vdots \\ \alpha\mathbf{l}_k \\ \vdots \\ \mathbf{l}_n \end{pmatrix} = \det \begin{pmatrix} \mathbf{l}_1 \\ \vdots \\ \mathbf{l}_k \\ \vdots \\ \mathbf{l}_j \\ \vdots \\ \mathbf{l}_n \end{pmatrix} + 0 = \det \begin{pmatrix} \mathbf{l}_1 \\ \vdots \\ \mathbf{l}_k \\ \vdots \\ \mathbf{l}_j \\ \vdots \\ \mathbf{l}_n \end{pmatrix}.$$

Justifique todas as passagens. □

Teorema 3.1. *Se A é uma matriz quadrada, então*

$$\det A = \det A^{\mathsf{T}}.$$

Dem: ver, e.g.[Mey00, p.463]. □

O teorema anterior é muito importante porque nos garante que todas as propriedades de determinantes que se estabeleçam para linhas são também válidas para colunas. Assim, por exemplo, em analogia com o resultado da Proposição 3.3, podemos afirmar que: "*O determinante muda de sinal quando se trocam duas das suas colunas.*"

De agora em diante, referir-nos-emos a *filas* de uma matriz para designar linhas ou colunas dessa matriz.

3.2 Determinantes de algumas matrizes especiais

Para certo tipo de matrizes, o determinante é muito fácil de calcular.

Teorema 3.2 (Determinante de uma matriz triangular)**.** *O determinante de uma matriz triangular é igual ao produto dos seus elementos diagonais.*

Dem: Consideremos o caso em que a matriz é triangular inferior, i.e. seja A da forma

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}.$$

Analisemos os diversos termos $a_{1\sigma(1)}a_{2\sigma(2)}\ldots a_{n\sigma(n)}$ envolvidos na expansão do determinante, dada por (3.1), quando σ percorre o conjunto S_n. Comecemos por notar que qualquer termo que corresponda a uma permutação σ para a qual seja $\sigma(1) \neq 1$ será nulo, uma vez que envolve um elemento acima da diagonal; sendo $\sigma(1) = 1$ (o que significa que $\sigma(2)$ só poderá, então, tomar valores de 2 a n, porque σ é uma permutação do conjunto $\{1, 2, \ldots n\}$), se $\sigma(2) \neq 2$, também o termo será nulo; e assim sucessivamente, de modo que podemos concluir que o único termo, na expansão do determinante, que não é necessariamente nulo é o termo $a_{11}\ldots a_{nn}$; como este termo está associado a uma permutação par, concluímos que $\det A = a_{11}\ldots a_{nn}$, como pretendíamos mostrar.

A demonstração para o caso em que a matriz é triangular superior é totalmente análoga.□

Exemplo 3.3. Calculemos o determinante da matriz

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 5 \\ 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

usando a regra de Sarrus e confirmemos que $\det(A) = 3 \times 2 \times 2 = 12$.

Tem-se, com a notação usual,

$$\mathcal{A} = 3 \times 2 \times 2 + 1 \times 2 \times \mathbf{0} + \mathbf{0} \times \mathbf{0} \times 5 = 12$$

e

$$\mathcal{S} = \mathbf{0} \times 2 \times 5 + \mathbf{0} \times 2 \times 3 + \mathbf{0} \times 1 \times 2 = 0,$$

pelo que

$$\det A = \mathcal{A} - \mathcal{S} = 12 - 0 = 12.$$

Vemos que, à excepção de $a_{11}a_{22}a_{33}$, cada termo $a_{1\sigma(1)}a_{2\sigma(2)}a_{3\sigma(3)}$ contém sempre (pelo menos) um elemento situado abaixo da diagonal (esses elementos estão salientados a negrito), sendo portanto nulo.

Corolário 3.4. *Se D é uma matriz diagonal, de elementos diagonais $d_{11}, \ldots, d_{nn}$, então*

$$\det D = d_{11}d_{22}\cdots d_{nn}.$$

Dem: Basta notar que uma matriz diagonal é também triangular. □

3.3 Determinantes e operações elementares

3.3.1 Determinante, característica e invertibilidade

As proposições 3.1 e 3.3 mostram-nos que duas das operações elementares sobre linhas – troca de linhas e multiplicação de uma linha por um escalar não nulo (operações de Tipo O1 e O2, respectivamente) – afectam o determinante da respectiva matriz, tendo como efeito multiplicá-lo por um número diferente de zero (o número pelo qual multiplicamos a linha, no caso de uma operação do tipo O2, ou o número -1, para uma operação de tipo O1). Por outro lado, a Proposição 3.5 garante-nos que o terceiro tipo de operação elementar (Tipo O3) – adição a uma linha de outra linha multiplicada por um número – não altera o valor do determinante.

Até agora falámos apenas em operações elementares sobre as linhas de uma matriz, tendo estas surgido associadas a operações sobre equações de sistemas lineares.

No entanto, quando trabalhamos com matrizes não necessariamente ligadas a sistemas de equações, faz também sentido definir operações elementares sobre as suas colunas, de um modo totalmente análogo ao que fizemos para linhas. Ou seja, podemos falar em *troca de colunas, multiplicação de uma coluna por um escalar não nulo e substituição de uma coluna pela sua soma com outra coluna multiplicada por um escalar.*

Nota: É preciso ter em atenção, no entanto, que, se efectuarmos operações elementares sobre as colunas da matriz ampliada de um sistema, o sistema resultante não será equivalente ao sistema inicial.

Tendo em conta o Teorema 3.1, é imediato concluir que as operações elementares sobre colunas afectam o valor do determinante do mesmo modo que as correspondentes operações sobre linhas.

Temos, pois, o resultado contido no quadro seguinte.

Se B se obtém de A por uma sequência de operações elementares sobre as suas filas, então

$$\det B = k \det A,$$

para um certo $k \neq 0$. Em particular, tem-se

$$\det B = 0 \iff \det A = 0.$$

Como consequência imediata do resultado enunciado acima, têm-se os seguintes resultados importantes.

Determinante e Característica / Determinante e Invertibilidade

Seja A uma matriz quadrada de ordem n. Então, tem-se

- $$\det A \neq 0 \iff \text{car}(A) = n, \tag{3.5}$$

  ou, de forma equivalente,

  $$\det A = 0 \iff \text{car}(A) < n. \tag{3.6}$$

- $$A \text{ é invertível} \iff \det A \neq 0, \tag{3.7}$$

  ou, de modo equivalente,

  $$A \text{ é singular} \iff \det A = 0. \tag{3.8}$$

Dem: Para demonstrar (3.6), recordemos que A pode ser sempre convertida na forma em escada reduzida por uma sequência de operações elementares, ou seja, tem-se

$$\det A = 0 \iff \det E_A = 0.$$

Mas, porque A é quadrada, a matriz em escada reduzida E_A é uma matriz triangular, pelo que o seu determinante será igual a zero se e só se houver (pelo menos) um elemento nulo na diagonal, ou seja, se e só se o número de pivôs de E_A for inferior a n. Como o número de pivôs é a característica de A, o resultado está estabelecido.

Os resultados (3.7)-(3.8) seguem-se de (3.5)-(3.6), usando a caracterização de invertibilidade de uma matriz em termos da sua característica (Teorema 2.2 na pg. 50).

3.3.2 Cálculo de determinantes usando operações elementares

Exemplo 3.4. Vamos ver um exemplo de, como usando operações elementares e tendo o cuidado de fazer os "ajustes necessários" quando usarmos operações de Tipo O1 ou de Tipo O2, podemos simplificar o cálculo de um determinante de uma matriz, neste caso de ordem 4, convertendo-a na forma triangular e calculando o determinante da matriz final usando o Teorema 3.2. Seja

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 2 & 1 \\ -1 & 2 & 1 & 3 \\ 1 & -4 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 3 & 3 \end{pmatrix}.$$

Então, tem-se

$$\begin{vmatrix} 1 & -2 & 2 & 1 \\ -1 & 2 & 1 & 3 \\ 1 & -4 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 3 & 3 \end{vmatrix} \underset{(\text{O3})}{=} \begin{vmatrix} 1 & -2 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 3 & 4 \\ 0 & -2 & 0 & 2 \\ 0 & 3 & 1 & 2 \end{vmatrix} \underset{(\text{O1})}{=} - \begin{vmatrix} 1 & -2 & 2 & 1 \\ 0 & -2 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 3 & 4 \\ 0 & 3 & 1 & 2 \end{vmatrix}$$

$$\underset{(\text{O2})}{=} -(-2) \begin{vmatrix} 1 & -2 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 3 & 4 \\ 0 & 3 & 1 & 2 \end{vmatrix} \underset{(\text{O3})}{=} 2 \begin{vmatrix} 1 & -2 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 5 \end{vmatrix}$$

$$\underset{(\text{O1})}{=} -2 \begin{vmatrix} 1 & -2 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 5 \\ 0 & 0 & 3 & 4 \end{vmatrix} \underset{(\text{O3})}{=} -2 \begin{vmatrix} 1 & -2 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & -11 \end{vmatrix}$$

$$\underset{(\text{Teor. 3.2})}{=} -2(1 \times 1 \times 1 \times (-11)) = 22.$$

Um procedimento análogo ao do exemplo anterior pode adoptar-se, em geral, para calcular determinantes cuja ordem seja superior a 3 (ou mesmo superior a 2, se não gostarmos da regra de Sarrus!).

3.4 Teorema de Laplace

Acabámos de ver um processo de calcular determinantes, especialmente útil quando a matriz em causa tem uma ordem "grande". O chamado *Teorema de Laplace* fornece-nos um processo alternativo de cálculo de tais determinantes, mostrando-nos como um determinante de ordem

n se pode calcular à custa de (no máximo) n determinantes de ordem $n-1$. O teorema pode ser aplicado sucessivamente até que os determinantes obtidos tenham uma ordem "razoável"(2 ou 3, por exemplo).

Antes de enunciar esse importante teorema, introduzamos algumas definições.

Definição 3.4. Seja A uma matriz quadrada de ordem n. O *menor do elemento* a_{ij} $(1 \leq i, j \leq n)$ é o determinante da submatriz obtida de A suprimindo-lhe a linha i e a coluna j, isto é, a linha e a coluna a que pertence a_{ij}. O menor de a_{ij} é denotado por M_{ij}.

Nota: Naturalmente, os menores só estão definidos para matrizes de ordem $n \geq 2$. Até ao final deste capítulo, e para evitar repetir essa informação, assumimos que temos sempre $n \geq 2$.

Definição 3.5. Chama-se *complemento algébrico do elemento* a_{ij} ao produto do seu menor por $(-1)^{i+j}$. O complemento algébrico de a_{ij} é denotado por A_{ij}, isto é, tem-se

$$A_{ij} = (-1)^{i+j} M_{ij}.$$

Teorema de Laplace

Teorema 3.3. *O determinante de uma matriz é igual à soma dos produtos que se obtêm multiplicando os elementos de uma sua fila pelos respectivos complementos algébricos, isto é, tem-se, para* $i, j = 1, \ldots, n$*:*

$$\det A = a_{i1}A_{i1} + a_{i2}A_{i2} + \cdots + a_{in}A_{in} \tag{3.9}$$

e

$$\det A = a_{1j}A_{1j} + a_{2j}A_{2j} + \cdots + a_{nj}A_{nj}. \tag{3.10}$$

Dem: Ver, e.g., [Agu73, pp.132]. □

Exemplo 3.5. Seja

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 2 \\ 5 & 1 & 2 & 4 \\ 3 & 7 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & -1 & 4 \end{pmatrix}.$$

Para calcularmos o determinante de uma matriz usando o Teorema de Laplace, é conveniente escolher a linha ou coluna dessa matriz que tenha o maior número de zeros. Neste caso, vamos fazer a expansão em termos da primeira linha. Temos

$$\det A = 2(-1)^{1+4} \begin{vmatrix} 5 & 1 & 2 \\ 3 & 7 & 1 \\ 0 & 2 & -1 \end{vmatrix} = (-2) \begin{vmatrix} 5 & 1 & 2 \\ 3 & 7 & 1 \\ 0 & 2 & -1 \end{vmatrix}.$$

Aplicando novamente o Teorema de Laplace, ao longo da terceira linha do determinante de ordem 3 obtido, e calculando os determinantes de ordem 2 que daí resultam, usando a fórmula (3.3), vem

$$\begin{vmatrix} 5 & 1 & 2 \\ 3 & 7 & 1 \\ 0 & 2 & -1 \end{vmatrix} = 2(-1)^{3+2}\begin{vmatrix} 5 & 2 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} + (-1)(-1)^{3+3}\begin{vmatrix} 5 & 1 \\ 3 & 7 \end{vmatrix} = (-2)(5-6)-(35-3) = 2-32 = -30$$

Então, tem-se, $\det A = (-2)(-30) = 60$.

O seguinte teorema é uma consequência simples do Teorema de Laplace.

Teorema 3.4. *Seja A uma matriz quadrada de ordem n. Então, a soma dos produtos dos elementos de uma dada fila pelos complementos algébricos dos elementos homólogos de outra fila paralela é igual a zero. Isto é, tem-se, para $i, j = 1, \ldots, n$:*

$$a_{i1}A_{j1} + a_{i2}A_{j2} + \cdots + a_{in}A_{jn} = 0; \text{ se } i \neq j, \tag{3.11}$$

e

$$a_{1k}A_{1p} + a_{2k}A_{2p} + \cdots + a_{nk}A_{np} = 0; \text{ se } k \neq p. \tag{3.12}$$

Dem: Para estabelecer (3.11) basta notar que a expressão

$$a_{i1}A_{j1} + a_{i2}A_{j2} + \cdots + a_{in}A_{jn}$$

é igual à expansão, usando o Teorema de Laplace ao longo da linha j, de uma matriz obtida de A substituindo a linha j por uma linha igual à linha i, ou seja, de uma matriz com duas linhas iguais. Como sabemos, esse determinante é igual a zero, o que estabelece o resultado. A demonstração de (3.12) é totalmente análoga.

Combinando os resultados (3.9) e (3.11) podemos escrever

$$a_{i1}A_{j1} + a_{i2}A_{j2} + \cdots + a_{in}A_{jn} = \begin{cases} \det A, & \text{se } i = j, \\ 0, & \text{se } i \neq j \end{cases} \tag{3.13}$$

ou, de uma forma mais compacta, como

$$a_{i1}A_{j1} + a_{i2}A_{j2} + \cdots + a_{in}A_{jn} = \delta_{ij} \det A,$$

onde δ_{ij}, chamado *símbolo de Kronecker*, é definido como

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{se } i = j \\ 0, & \text{se } i \neq j. \end{cases}$$

De modo análogo, os resultados (3.10) e (3.12) escrevem-se como

$$a_{1k}A_{1p} + a_{2k}A_{2p} + \cdots + a_{nk}A_{np} = \delta_{kp} \det A.$$

Definição 3.6 (Matriz adjunta de uma matriz)**.** Dada uma certa matriz A, quadrada de ordem n, chama-se *matriz adjunta de* A à matriz cujo elemento na posição (i, j) é o complemento algébrico do elemento a_{ji} (elemento de A na posição (j, i)!). A matriz adjunta de A denota-se por $\operatorname{adj} A$. Tem-se, assim

$$\operatorname{adj} A = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & \cdots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \cdots & A_{n2} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ A_{1n} & A_{2n} & \cdots & A_{nn} \end{pmatrix}. \tag{3.14}$$

O teorema seguinte fornece-nos um novo processo de calcular a inversa de uma dada matriz invertível A.

Teorema 3.5. *Dada A quadrada de ordem n, tem-se:*

1.

$$A \operatorname{adj} A = (\det A)I_n; \tag{3.15}$$

2. se A é invertível, então

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A} \operatorname{adj} A. \tag{3.16}$$

Dem:

1. Usando o resultado (3.13), vemos que

$$A \operatorname{adj} A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & \cdots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \cdots & A_{n2} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ A_{1n} & A_{2n} & \cdots & A_{nn} \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \det A & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \det A & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \det A \end{pmatrix} = (\det A)I_n,$$

o que estabelece o resultado (3.15).

2. Se A é invertível, sabemos que $\det A \neq 0$. Então, multiplicando ambos os membros de (3.15) por $\frac{1}{\det A}$, vem
$$A \frac{1}{\det A} \operatorname{adj} A = I_n,$$
o que mostra que $A^{-1} = \frac{1}{\det A} \operatorname{adj} A$.

□

Nota: Embora não tenhamos definido a "divisão" de uma matriz por um escalar, é muito frequente escrevermos $\frac{\operatorname{adj} A}{\det A}$ com o significado $\frac{1}{\det A} \operatorname{adj}(A)$ e dizer, então, de um modo informal que "*A inversa de uma matriz (invertível) se pode obter dividindo a adjunta pelo determinante*".

3.5 Determinante do produto de matrizes

Embora não demonstremos o próximo teorema, ele é bastante importante e útil.

Teorema 3.6 (Determinante do produto de matrizes)**.** *Se A e B são matrizes quadradas da mesma ordem, então*
$$\det(AB) = \det A \det B.$$

Dem: Veja, e.g. [Mey00, p.467].

Nota: O Exercício 3.2 do final do capítulo mostra que um resultado do mesmo tipo não é válido para a soma de matrizes.

Corolário 3.5. *Se A é invertível, então*
$$\det(A^{-1}) = \frac{1}{\det A}.$$

Dem: Como $AA^{-1} = I$, podemos concluir que $\det(AA^{-1}) = \det I = 1$ (recorde-se que I é diagonal, com todos os elementos diagonais iguais a 1 e tenha em atenção o resultado do Corolário 3.4 na pg. 67); usando o resultado do teorema anterior, vem $\det A \det(A^{-1}) = 1$ e o resultado pretendido segue-se, de imediato. □

3.6 Exercícios

Exercício 3.1. Calcule o determinante de cada uma das seguintes matrizes:

(a) $\begin{pmatrix} 3 & -2 \\ -2 & 3 \end{pmatrix}$; (b) $\begin{pmatrix} \cos\theta & -\operatorname{sen}\theta \\ \operatorname{sen}\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$ $(\theta \in \mathbb{R})$; (c) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 3 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & 4 \end{pmatrix}$.

Exercício 3.2. Sejam

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 5 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

Calcule $\det A + \det B$ e $\det(A + B)$ e compare os resultados.

Exercício 3.3. Calcule o determinante das seguintes matrizes, fazendo uso de operações elementares:

(a) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 3 & 5 \\ 2 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}$; (b) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & -1 & 1 \\ 3 & -1 & 0 & 2 \\ -2 & 1 & 3 & 4 \end{pmatrix}$.

Exercício 3.4. ([CPS09, p.136]) Seja

$$A = \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix}$$

e suponha que $\det A = k$. Indique, em função de k, o valor de cada um dos seguintes determinantes:

(a) $\begin{vmatrix} d & e & f \\ g & h & i \\ a & b & c \end{vmatrix}$; (b) $\begin{vmatrix} 3a & 3b & 3c \\ -d & -e & -f \\ 4g & 4h & 4i \end{vmatrix}$; (c) $\begin{vmatrix} a+g & b+h & c+i \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix}$;

(d) $\begin{vmatrix} -3a & -3b & -3c \\ d & e & f \\ g-4d & h-4e & i-4f \end{vmatrix}$; (e) $\begin{vmatrix} b & e & h \\ a & d & g \\ c & f & i \end{vmatrix}$.

Exercício 3.5. ([CPS09, p.160]) Os números 20604, 53227, 25755, 20927 e 78421 são divisíveis por 17. Justifique que o mesmo sucede ao determinante

$$\begin{vmatrix} 2 & 0 & 6 & 0 & 4 \\ 5 & 3 & 2 & 2 & 7 \\ 2 & 5 & 7 & 5 & 5 \\ 2 & 0 & 9 & 2 & 7 \\ 7 & 8 & 4 & 2 & 1 \end{vmatrix},$$

sem calcular o seu valor.

Exercício 3.6. Calcule os seguintes determinantes, usando o Teorema de Laplace:

(a) $\begin{vmatrix} 1 & 3 & 0 & 1 \\ 2 & -1 & 0 & 2 \\ 3 & 2 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 4 \end{vmatrix}$; (b) $\begin{vmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 4 & -1 & 0 & 1 \\ 5 & 2 & 1 & -2 \\ 7 & 1 & 0 & 1 \end{vmatrix}$; (c) $\begin{vmatrix} 0 & 0 & 4 & 0 \\ 2 & 3 & 3 & 5 \\ 2 & 3 & -2 & 5 \\ 4 & 9 & -2 & 7 \end{vmatrix}$.

Exercício 3.7. Para cada uma das seguintes matrizes, calcule: (i) $\det A$; (ii) $\operatorname{adj} A$; (iii) A^{-1}.

(a) $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 4 \end{pmatrix}$; (b) $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$; (c) $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 0 \end{pmatrix}$.

Exercício 3.8. Sendo A e B matrizes quadradas de ordem 3, tais que $\det A = 3$ e $\det B = 5$, diga quanto vale:

(a) $\det(AB)$; (b) $\det(2A)$; (c) $\det(A^{-1}B)$.

Exercício 3.9. Suponha que uma dada matriz A se pode decompor num produto da forma $A = LU$, onde

$$L = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \ell_{21} & 1 & 0 \\ \ell_{31} & \ell_{32} & 1 \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad U = \begin{pmatrix} u_{11} & u_{12} & u_{13} \\ 0 & u_{22} & u_{23} \\ 0 & 0 & u_{33} \end{pmatrix}.$$

Determine a expressão do determinante de A.

Exercício 3.10. Seja A uma matriz quadrada de ordem 3 e suponha que $\det A = 2$. Diga se as afirmações seguintes são verdadeiras ou falsas, justificando convenientemente:

(a) $\operatorname{car}(A) = 2$;

(b) é possível encontrar uma matriz X, quadrada de ordem 3, tal que

$$AX = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 2 \end{pmatrix};$$

(c) $E_A = I_3$.

Exercício 3.11. Seja $A_{n\times n}$ invertível. Mostre que:

(a) a matriz $\operatorname{adj} A$ também invertível, sendo $(\operatorname{adj} A)^{-1} = \frac{1}{\det A} A = \det(A^{-1})A$;

(b) $\operatorname{adj} A = \operatorname{adj}(A^{-1})$;

(c) $\det(\operatorname{adj} A) = (\det A)^{n-1}$.

Exercício 3.12. **Regra de Cramer**

Seja $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ um sistema de n equações lineares em n incógnitas $x_1, \ldots, x_n$. Mostre que se A é invertível (ou seja, equivalentemente, se o sistema é possível e determinado), então a solução do sistema vem dada por

$$x_i = \frac{\det \tilde{A}_i}{\det A}; i = 1, 2, \ldots, n,$$

onde $\tilde{A}_i$ designa a matriz obtida de A substituindo a sua coluna i pela coluna dos termos independentes $\mathbf{b}$.

Sugestão: Comece por relembrar que, de acordo com o Exercício 2. 12 na pg. 55,

$$\mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$

é solução do sistema $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ se e só se $\mathbf{x} = A^{-1}\mathbf{b}$ e use, depois, a expressão de A^{-1} em termos da adjunta de A.

Exercício 3.13. Para os sistemas seguintes, comece por verificar que a matriz do sistema é invertível e determine, então, a solução do sistema, usando a regra de Cramer.

(a) $\begin{cases} x_1 + 2x_2 + x_3 = 5 \\ 2x_1 + 2x_2 + x_3 = 6 \\ x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 9 \end{cases}$; (b) $\begin{cases} x_1 + x_2 = 0 \\ x_2 + x_3 - 2x_4 = 1 \\ x_1 + 2x_3 + x_4 = 0 \\ x_1 + x_2 + x_4 = 0 \end{cases}$.

Exercício 3.14. Considere o sistema

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 - x_3 = 6 \\ x_1 - x_2 - x_3 = 2 \\ x_1 + x_2 + 3x_3 = 0 \end{cases}$$

e seja A a sua matriz simples.

(a) Calcule $\det A$.

(b) Justifique que o sistema é possível e determinado e determine o valor da incógnita x_1 (sem resolver totalmente o sistema).

(c) Justifique que A é invertível e determine o elemento na posição $(2, 3)$ da matriz A^{-1}, sem calcular A^{-1}.

4

Espaços Vectoriais

4.1 O espaço vectorial $\mathbb{R}^n$

Dado $n \in \mathbb{N}$, considere-se o conjunto de todos os n-uplos ordenados de elementos reais, isto é, o conjunto de elementos da forma $\mathbf{x} = (x_1, \ldots, x_n)$ com $x_i \in \mathbb{R}$. Designamos este conjunto por $\mathbb{R}^n$. Note-se que dois n-uplos $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ e $\mathbf{y} = (y_1, y_2, \ldots, y_n)$ são considerados iguais se e só se $x_1 = y_1$, $x_2 = y_2$, …, $x_n = y_n$, isto é, por exemplo $(1, 2, 3) \neq (2, 1, 3)$.

Dados dois elementos $\mathbf{x} = (x_1, \ldots, x_n)$ e $\mathbf{y} = (x_1, \ldots, x_n)$ em $\mathbb{R}^n$, chamamos *soma de* $\mathbf{x}$ *e* $\mathbf{y}$ ao elemento de $\mathbb{R}^n$, que denotaremos por $\mathbf{x} + \mathbf{y}$, obtido somando as componentes correspondentes de $\mathbf{x}$ e $\mathbf{y}$, isto é:

$$\mathbf{x} + \mathbf{y} = (x_1, \ldots, x_n) + (y_1, \ldots, y_n) = (x_1 + y_1, \ldots, x_n + y_n).$$

Dados $\alpha \in \mathbb{R}$ e $\mathbf{x} = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$, chamamos *produto do escalar* α *por* $\mathbf{x}$ ao elemento de $\mathbb{R}^n$, que designamos por $\alpha\mathbf{x}$, dado por $(\alpha x_1, \ldots, \alpha x_n)$.

Temos, assim duas operações: uma, que chamaremos de *adição*, que a cada par de elementos $\mathbf{x}$ e $\mathbf{y}$ de $\mathbb{R}^n$ associa um novo elemento de $\mathbb{R}^n$, dado pela sua soma $\mathbf{x} + \mathbf{y}$, e outra, que chamaremos de *multiplicação escalar*, que a cada escalar α e a cada elemento $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ associa o elemento obtido como produto do escalar α por $\mathbf{x}$, $\alpha\mathbf{x}$.

Designamos por $\mathbf{0}_n$ ou, mais simplesmente por $\mathbf{0}$, o elemento de $\mathbb{R}^n$ com todas as componentes nulas, isto é, $\mathbf{0} = (0, 0, \ldots, 0, 0)$.

Sendo $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ um determinado elemento de $\mathbb{R}^n$, denotaremos por $-\mathbf{x}$ o elemento obtido substituindo cada componente de $\mathbf{x}$ pelo seu simétrico, i.e.

$$-\mathbf{x} = -(x_1, \ldots, x_n) = (-x_1, \ldots, -x_n).$$

Usando as propriedades conhecidas para a adição e para a multiplicação de números reais, vemos facilmente que a adição e multiplicação escalar acima definidas gozam das seguintes propriedades:

- a adição é comutativa: $\forall \mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^n, \quad \mathbf{x} + \mathbf{y} = \mathbf{y} + \mathbf{x}$.
- a adição é associativa: $\forall \mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z} \in \mathbb{R}^n, \quad (\mathbf{x} + \mathbf{y}) + \mathbf{z} = \mathbf{x} + (\mathbf{y} + \mathbf{z})$.
- o elemento $\mathbf{0} = (0, \ldots, 0)$ é *neutro* para a adição, isto é, dado qualquer $\mathbf{x} = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$, tem-se $(x_1, \ldots, x_n) + (0, \ldots, 0) = (0, \ldots, 0) + (x_1, \ldots, x_n) = (x_1, \ldots, x_n)$, ou seja, tem-se $\mathbf{x} + \mathbf{0} = \mathbf{0} + \mathbf{x} = \mathbf{x}$.
- dado um elemento qualquer $\mathbf{x} = (x_1, \ldots, x_n)$ de $\mathbb{R}^n$, o elemento $-\mathbf{x} = (-x_1, \ldots, -x_n)$ satisfaz $(x_1, \ldots, x_n) + (-x_1, \ldots, x_n) = (-x_1, \ldots, -x_n) + (x_1, \ldots, x_n) = (0, \ldots, 0)$, ou seja, tem-se $\mathbf{x} + (-\mathbf{x}) = (-\mathbf{x}) + \mathbf{x} = \mathbf{0}$.
- a multiplicação escalar é distributiva em relação à adição em $\mathbb{R}$: $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}, \ \forall \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n, \quad (\alpha + \beta)\mathbf{x} = \alpha\mathbf{x} + \beta\mathbf{x}$.
- a multiplicação escalar é distributiva em relação à adição em $\mathbb{R}^n$: $\forall \alpha \in \mathbb{R}, \ \forall \mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^n, \quad \alpha(\mathbf{x} + \mathbf{y}) = \alpha\mathbf{x} + \alpha\mathbf{y}$.
- a multiplicação escalar satisfaz a associatividade mista: $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}, \forall \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n, \quad \alpha(\beta\mathbf{x}) = (\alpha\beta)\mathbf{x}$.
- $\forall \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n, \quad 1\mathbf{x} = \mathbf{x}$.

4.2 Definição de espaço vectorial

Porque a adição e a multiplicação escalar consideradas satisfazem todas as propriedades listadas acima, dizemos que $\mathbb{R}^n$ constitui um *espaço vectorial real* (ou um *espaço vectorial sobre* $\mathbb{R}$) para essas operações.

Mais precisamente, tem-se a seguinte definição.

Definição 4.1 (Espaço vectorial real)**.** Seja V um conjunto não vazio. Suponhamos definidas duas operações:

- uma, que chamamos *adição*, que associa a cada par $(\mathbf{u}, \mathbf{v})$ de elementos de V, um e um só elemento de V, representado por $\mathbf{u} + \mathbf{v}$;

- outra, que chamamos *multiplicação escalar*, que associa a cada número $\alpha \in \mathbb{R}$ e a cada elemento $\mathbf{v}$ em V, um e um só elemento de V, denotado por $\alpha\mathbf{v}$.

Dizemos que V, com estas duas operações, é um *espaço vectorial real* ou um *espaço vectorial sobre* $\mathbb{R}$, se as operações satisfizerem as seguintes propriedades:

A1 A adição é comutativa: $\forall \mathbf{u}, \mathbf{v} \in V, \quad \mathbf{u} + \mathbf{v} = \mathbf{v} + \mathbf{u}$.

A2 A adição é associativa: $\forall \mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w} \in V, \quad (\mathbf{u} + \mathbf{v}) + \mathbf{w} = \mathbf{u} + (\mathbf{v} + \mathbf{w})$.

A3 Existe elemento neutro para a adição em V: $\exists \mathbf{z} \in V \, \forall \mathbf{v} \in V, \quad \mathbf{z} + \mathbf{v} = \mathbf{v} + \mathbf{z} = \mathbf{v}$.

A4 Todo o elemento de V tem simétrico (ou oposto) para a adição: $\forall \mathbf{v} \in V \; \exists \mathbf{v}' \in V$: $\mathbf{v} + \mathbf{v}' = \mathbf{v}' + \mathbf{v} = \mathbf{z}$.

M1 A multiplicação escalar é distributiva relativamente à adição em $\mathbb{R}$:
$\forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}, \; \forall \mathbf{v} \in V, \quad (\alpha + \beta)\mathbf{v} = \alpha\mathbf{v} + \beta\mathbf{v}$.

M2 A multiplicação escalar é distributiva em relação à adição em V: $\forall \alpha \in \mathbb{R}, \; \forall \mathbf{u}, \mathbf{v} \in V, \quad \alpha(\mathbf{u} + \mathbf{v}) = \alpha\mathbf{u} + \alpha\mathbf{v}$.

M3 A multiplicação escalar satisfaz a associatividade mista: $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}, \forall \mathbf{v} \in V \quad \alpha(\beta\mathbf{v}) = (\alpha\beta)\mathbf{v}$.

M4 $\forall \mathbf{v} \in V, \quad 1\mathbf{v} = \mathbf{v}$.

Se, na definição anterior, consideramos os escalares α, β como pertencendo a $\mathbb{C}$, obtemos a definição de *espaço vectorial complexo* ou *espaço vectorial sobre* $\mathbb{C}$.

Neste curso, estamos especialmente interessados em trabalhar com espaços vectoriais reais. Assim, se nada for dito em contrário, os espaços vectoriais considerados serão sempre espaços vectoriais reais. Por essa razão, quando falarmos em *espaço vectorial*, devemos entender um espaço vectorial real. As adaptações para o caso de um espaço vectorial complexo são triviais.

Os elementos de um espaço vectorial V são vulgarmente designados por *vectores* e os elementos de $\mathbb{R}$ (ou $\mathbb{C}$), tal como já temos feito, designados por *escalares*.

Proposição 4.1 (Unicidade do neutro e do simétrico)**.** *Seja V um espaço vectorial. Então:*

1. *o elemento neutro para a adição é único;*

2. *cada elemento de V tem um único simétrico.*

Dem:

1. Suponhamos que existem $\mathbf{z}$ e $\mathbf{z}'$ em V tais que, para todo o $\mathbf{v} \in V$, se tem

$$\mathbf{z} + \mathbf{v} = \mathbf{v} + \mathbf{z} = \mathbf{v}$$

e

$$\mathbf{z}' + \mathbf{v} = \mathbf{v} + \mathbf{z}' = \mathbf{v}.$$

Considerando $\mathbf{v} = \mathbf{z}'$ na primeira equação, vem $\mathbf{z} + \mathbf{z}' = \mathbf{z}'$. Por outro lado, considerando $\mathbf{v} = \mathbf{z}$ na segunda equação, tem-se $\mathbf{z}+\mathbf{z}' = \mathbf{z}$. Segue-se, portanto, que $\mathbf{z} = \mathbf{z}'$, como queríamos provar.

2. Suponhamos que $\mathbf{v} \in E$ tem dois simétricos $\mathbf{v}'$ e $\mathbf{v}''$, ou seja, que

$$\mathbf{v} + \mathbf{v}' = \mathbf{v}' + \mathbf{v} = \mathbf{z}$$

e

$$\mathbf{v} + \mathbf{v}'' = \mathbf{v}'' + \mathbf{v}' = \mathbf{z},$$

onde $\mathbf{z}$ é o neutro para a adição. Então,

$$\mathbf{v}' = \mathbf{v}' + \mathbf{z} = \mathbf{v}' + (\mathbf{v} + \mathbf{v}'') = (\mathbf{v}' + \mathbf{v}) + \mathbf{v}'' = \mathbf{z} + \mathbf{v}'' = \mathbf{v}'',$$

o que estabelece o resultado. □

Usaremos a notação $\mathbf{0}_V$ (ou simplesmente $\mathbf{0}$, se o espaço V estiver implícito) para o elemento neutro da adição em V e designá-lo-emos por *zero* ou *vector nulo* de V.

Dado $\mathbf{v}$ em V, o seu (único) simétrico será denotado por $-\mathbf{v}$.

Usaremos também a notação $\mathbf{u} - \mathbf{v}$ para designar $\mathbf{u} + (-\mathbf{v})$ e falaremos, nesse caso, na diferença entre $\mathbf{u}$ e $\mathbf{v}$.

Seguem-se alguns exemplos de espaços vectoriais sobre $\mathbb{R}$.

Exemplo 4.1. Para m e n dados, o conjunto $\mathbb{R}^{m\times n}$ das matrizes reais de ordem $m \times n$ é um espaço vectorial real para as operações de adição de matrizes e de multiplicação de um número por uma matriz, introduzidas no Capítulo 2 (reveja as propriedades da adição de matrizes e de multiplicação de um escalar por uma matriz estudadas nesse capítulo, para confirmar esta afirmação).

Em particular, são espaços vectoriais reais, para as operações referidas, os conjuntos

$$\mathbb{R}^{1\times n}=\left\{\begin{pmatrix}x_1 & x_2 & \dots & x_n\end{pmatrix} : x_i\in\mathbb{R}\right\} \quad \text{e} \quad \mathbb{R}^{n\times 1}=\left\{\begin{pmatrix}x_1\\ x_2\\ \vdots\\ x_n\end{pmatrix} : x_i\in\mathbb{R}\right\}$$

das matrizes linha com n elementos e das matrizes coluna com n elementos, respectivamente.

Se examinarmos com atenção a forma como foi definida a adição de duas matrizes de $\mathbb{R}^{n\times 1}$,

$$\mathbf{u}+\mathbf{v}=\begin{pmatrix}u_1\\ u_2\\ \vdots\\ u_n\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}v_1\\ v_2\\ \vdots\\ v_n\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}u_1+v_1\\ u_2+v_2\\ \vdots\\ u_n+v_n\end{pmatrix}$$

ou a adição de duas matrizes de $\mathbb{R}^{1\times n}$,

$$\mathbf{u}+\mathbf{v}=\begin{pmatrix}u_1 & u_2 & \cdots & u_n\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}v_1 & u_2 & \cdots & v_n\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}u_1+v_1 & u_2+v_2 & \cdots & u_n+v_n\end{pmatrix},$$

ou ainda a forma como adicionamos n-uplos de $\mathbb{R}^n$,

$$\mathbf{u}+\mathbf{v}=(u_1,u_2,\cdots,u_n)+(v_1,v_2,\cdots,v_n)=(u_1+v_1,u_2+v_2,\cdots,u_n+v_n),$$

verificamos que as três operações são totalmente idênticas: em todos os casos há apenas que somar os elementos nas posições correspondentes. O mesmo se passa relativamente à multiplicação escalar. Podemos, assim, dizer que:

Os espaços $\mathbb{R}^{1\times n}$, $\mathbb{R}^{n\times 1}$ e $\mathbb{R}^n$ são todos "o mesmo", apenas diferindo na forma como apresentamos os seus elementos.

Por esse motivo, usaremos indistintamente qualquer das notações - linha, coluna ou n-uplo - conforme seja mais conveniente, e falaremos sempre em $\mathbb{R}^n$, quando nos referirmos a qualquer dos três espaços acima considerados.

Naturalmente, quando estivermos a trabalhar com outro tipo de operações onde isso seja relevante, nomeadamente quando efectuarmos produto de matrizes, teremos o cuidado de considerar vectores de $\mathbb{R}^n$ com a "forma adequada"; por exemplo, se A for uma matriz do tipo $m\times n$ e falarmos no produto de A por um vector $\mathbf{v}\in\mathbb{R}^n$, estaremos a considerar $\mathbf{v}$ como um vector coluna $n\times 1$, isto é, como um elemento do espaço $\mathbb{R}^{n\times 1}$.

Exemplo 4.2. Dado $n\in\mathbb{N}$ (fixo), o conjunto $\mathcal{P}_n(x)$ de todos os polinómios na variável x, com coeficientes reais, de grau inferior ou igual a n, isto é:

$$\mathcal{P}_n(x)=\{a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\cdots+a_1x+a_0 : a_i\in\mathbb{R}\}$$

é um espaço vectorial real para a adição usual de polinómios e multiplicação de um polinómio por um número real. Note-se, no entanto, que o conjunto de todos os polinómios de grau exactamente igual a n, isto é, o conjunto

$$\{a_nx^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1x + a_0 : a_i \in \mathbb{R}, a_n \neq 0\}$$

não é um espaço vectorial (porquê?).

Se representarmos por $\mathcal{P}(x)$ o conjunto de todos os polinómios na variável x e coeficientes reais sem restrição de grau, podemos também afirmar que $\mathcal{P}(x)$ é um espaço vectorial real para as operações usuais de adição de polinómios e de multiplicação de um número real por um polinómio.

Exemplo 4.3. Seja S um subconjunto não vazio de $\mathbb{R}$ e consideremos o conjunto de todas as funções de S em $\mathbb{R}$, com a adição de funções e de multiplicação de um escalar por uma função definidas por:

$$(f+g)(x) = f(x) + g(x) \quad \text{e} \quad (\alpha f)(x) = \alpha f(x), \quad x \in S, \alpha \in \mathbb{R}.$$

Então, este conjunto, usualmente denotado por $\mathbb{R}^S$, é um espaço vectorial real para as operações indicadas.

Exemplo 4.4. O conjunto $C[a,b]$ de todas as funções reais contínuas definidas num determinado intervalo $[a,b]$ de $\mathbb{R}$ é um espaço vectorial real, para as operações de adição de funções e de multiplicação de um escalar por uma função introduzidas no exemplo anterior.

Proposição 4.2. *Sendo* $\mathbf{u}$,$\mathbf{v}$ *e* $\mathbf{w}$ *vectores arbitrários de um espaço vectorial* V *e sendo* α, β *números reais quaisquer, tem-se:*

1. $\mathbf{u} + \mathbf{v} = \mathbf{u} + \mathbf{w} \Rightarrow \mathbf{v} = \mathbf{w}$ *(Lei do corte à esquerda)*
2. $\mathbf{v} + \mathbf{u} = \mathbf{w} + \mathbf{u} \Rightarrow \mathbf{v} = \mathbf{w}$ *(Lei do corte à direita)*
3. $\alpha\mathbf{0} = \mathbf{0}$
4. $0\mathbf{u} = \mathbf{0}$
5. $(-\alpha)\mathbf{u} = \alpha(-\mathbf{u}) = -(\alpha\mathbf{u})$
6. $\alpha\mathbf{u} = \mathbf{0} \Rightarrow \alpha = 0$ *ou* $\mathbf{u} = \mathbf{0}$
7. $(\alpha\mathbf{u} = \alpha\mathbf{v}$ *e* $\alpha \neq 0) \Rightarrow \mathbf{u} = \mathbf{v}$
8. $(\alpha\mathbf{u} = \beta\mathbf{u}$ *e* $\mathbf{u} \neq \mathbf{0}) \Rightarrow \alpha = \beta$

Dem: Como exercício para os alunos. □

4.3 Subespaços vectoriais

Subespaço de um espaço vectorial

Um subconjunto U de um espaço vectorial V diz-se um *subsespaço vectorial* (ou apenas *subespaço*) de V, se verificar as seguintes condições:

1. $\mathbf{0}_V \in U$;
2. $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in U \Rightarrow \mathbf{u} + \mathbf{v} \in U$ (dizemos que U é fechado para a adição);
3. $\mathbf{u} \in U,\ \alpha \in \mathbb{R} \Rightarrow \alpha\mathbf{u} \in U$ (dizemos que U é fechado para a multiplicação escalar).

A razão porque chamamos subespaço a um subconjunto U de V que satisfaça as condições 1.-3. acima tem a ver com o facto de U ser ele próprio um espaço vectorial para as operações de adição e de multiplicação escalar "herdadas"de V, isto é para as operações que estão definidas no espaço V, mas actuando apenas com elementos de U. Chamamos a essas operações, operações *induzidas* de V em U.

De facto, as condição 2. e 3. garantem-nos que as operações de adição e de multiplicação por um escalar, quando actuam apenas com elementos de U, têm como resultado um novo elemento de U. Além disso, sendo as propriedades **A1** e **A2** da adição e as propriedades **M1-M4** da multiplicação escalar válidas para quaisquer elementos de V, elas são também válidas quando actuam com elementos de U, uma vez que todos os elementos de U estão em V. A condição 1. e o facto de $\mathbf{u}_V$ ser o neutro para a adição em V, garante-nos que

$$\exists \mathbf{0}_V \in U\ \forall \mathbf{u} \in U, \mathbf{u} + \mathbf{0}_V = \mathbf{0}_V + \mathbf{u} = \mathbf{u}$$

ou seja, existe, em U, um neutro para a adição, o qual é o neutro de V, ou dito de outro modo

$$\mathbf{0}_U = \mathbf{0}_V.$$

Finalmente, a condição 3. permite-nos concluir que, dado $\mathbf{u} \in U$, se tem $(-1)\mathbf{u} = -\mathbf{u} \in U$. Então, o simétrico de $\mathbf{u}$ (enquanto elemento de V) está em U, o que garante que será o simétrico de $\mathbf{u}$ em U.

Exemplo 4.5. O conjunto

$$U = \{(x, 0) : x \in \mathbb{R}\}$$

é um subespaço do espaço vectorial $\mathbb{R}^2$.

Vejamos que, de facto, assim é.

- Tendo em conta a definição de U, é imediato concluir que $(0, 0) \in U$.
- Se $\mathbf{u} = (x, 0)$ e $\mathbf{v} = (y, 0)$ são dois elementos arbitrários de U, então

$$\mathbf{u} + \mathbf{v} = (x, 0) + (y, 0) = (x + y, 0) \in U.$$

- Se $\mathbf{u} = (x, 0)$ é um elemento de U e $\alpha \in \mathbb{R}$, tem-se

$$\alpha\mathbf{u} = \alpha(x, 0) = (\alpha x, 0) \in U.$$

Seguem-se alguns exemplos mais de subespaços vectoriais. Em cada caso, mostre que se trata, de facto, de um subespaço.

Exemplo 4.6. Se V é um espaço vectorial, então $\{\mathbf{0}_V\}$ e V são subespaços de V . Estes subespaços são chamados *subespaços triviais* de V.

Exemplo 4.7. São subespaços do espaço das matrizes $\mathbb{R}^{n\times n}$:

- o conjunto das matrizes simétricas (de ordem n);
- o conjunto das matrizes diagonais (de ordem n).

Exemplo 4.8. Seja A uma matriz de ordem $m \times n$. Então, o conjunto das soluções do sistema homogéneo $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$ é um subespaço do espaço vectorial $\mathbb{R}^n$.

Vejamos agora alguns exemplos de subconjuntos de espaços vectoriais que <u>não são</u> subespaços.

Exemplo 4.9. O conjunto $U = \{(x, y) \in \mathbb{R} : x \neq y\}$ não é um subespaço de $\mathbb{R}^2$.

Exemplo 4.10. O conjunto das matrizes quadradas de ordem n, invertíveis, não é um subespaço de $\mathbb{R}^{n\times n}$.

Exemplo 4.11. Sendo A uma matriz de ordem $m \ \times n$ e sendo $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^{m\times 1}$, $\mathbf{b} \neq \mathbf{0}$, o conjunto das soluções do sistema $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ não é um subespaço de $\mathbb{R}^n$.

Combinação linear de vectores de um espaço

Sejam $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_r$ vectores de um espaço vectorial V. Uma *combinação linear* (abreviadamente *c.l.*) de $\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_r$ é um vector $\mathbf{v}$ da forma

$$\mathbf{v} = \alpha_1\mathbf{v}_1 + \alpha_2\mathbf{v}_2 + \cdots + \alpha_r\mathbf{v}_r,$$

com $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_r$ pertencentes a $\mathbb{R}$. Os escalares $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_r$ são chamados *coeficientes* da combinação linear.

Exemplo 4.12. Vejamos se o vector $\mathbf{v} = (1,6,7)$ do espaço vectorial $\mathbb{R}^3$ é ou não c.l. dos vectores $\mathbf{v}_1 = (1,2,3)$ e $\mathbf{v}_2 = (1,0,1)$ desse mesmo espaço. Procuramos saber se existem escalares $\alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{R}$ tais que $\alpha_1(1,2,3) + \alpha_2(1,0,1) = (1,6,7)$. Mas,

$$\alpha_1(1,2,3)+\alpha_2(1,0,1) = (1,6,7) \iff (\alpha_1+\alpha_2, 2\alpha_1, 3\alpha_1+\alpha_2) = (1,6,7) \iff \begin{cases} \alpha_1 + \alpha_2 = 1 \\ 2\alpha_1 = 6 \\ 3\alpha_1 + \alpha_2 = 7 \end{cases}.$$

Se consideramos a matriz ampliada do sistema anterior

$$\left(\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 6 \\ 3 & 1 & 7 \end{array}\right)$$

facilmente se verifica que ela pode ser convertida na seguinte forma em escada $\left(\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 1 \\ 0 & -2 & 4 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$.

Como a característica da matriz simples é igual à característica da matriz ampliada e igual ao número de incógnitas, concluímos que o sistema é possível e determinado. A solução é obtida facilmente por substituição inversa: $\alpha_1 = 3$, $\alpha_2 = -2$. Concluímos, assim que $\mathbf{v}$ é c.l. dos vectores $\mathbf{v}_1$ e $\mathbf{v}_2$ e que os coeficientes da c.l. são univocamente determinados, ou seja, que a única maneira de escrever $(1,6,7)$ como c.l. de $(1,2,3)$ e $(1,0,1)$ é

$$(1,6,7) = 3(1,2,3) - 2(1,0,1).$$

Exemplo 4.13. Em $\mathbb{R}^2$, $\mathbf{v} = (3,3)$ é combinação linear dos vectores $\mathbf{v}_1 = (1,1)$ e $\mathbf{v}_2 = (4,4)$, mas os coeficientes da combinação linear não são univocamente determinados . Com efeito, tem-se

$$\alpha_1(1,1) + \alpha_2(4,4) = (3,3) \iff \begin{cases} \alpha_1 + 4\alpha_2 = 3 \\ \alpha_1 + 4\alpha_2 = 3 \end{cases}.$$

A matriz ampliada do sistema obtido é

$$\left(\begin{array}{cc|c} 1 & 4 & 3 \\ 1 & 4 & 3 \end{array}\right),$$

a qual pode converter-se na seguinte forma em escada $\left(\begin{array}{cc|c} 1 & 4 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$ Neste caso, tem-se que a característica da matriz simples é igual à característica da matriz ampliada (igual a 1), mas inferior ao número de incógnitas (que é igual a 2), pelo que o sistema é possível e indeterminado; as soluções são da forma $\alpha_1 = 3 - 4\alpha$, $\alpha_2 = \alpha$ com $\alpha \in \mathbb{R}$. Então, podemos escrever

$$(3,3) = (3-4\alpha)(1,1) + \alpha(4,4)$$

para qualquer valor de α em $\mathbb{R}$; por exemplo, temos $(3,3) = 3(1,1) + 0(4,4)$ ou $(3,3) = -5(1,1) + 2(4,4)$, correspondendo às escolhas $\alpha = 0$ e $\alpha = 2$, respectivamente.

Exemplo 4.14. Vejamos se o vector $\mathbf{v} = (1,3,7)$ é c.l. dos vectores $\mathbf{v}_1 = (1,2,3)$ e $\mathbf{v}_2 = (-1,1,2)$. Tem-se

$$(1,2,3) = \alpha_1(1,2,3) + \alpha_2(-1,1,2) \iff \begin{cases} \alpha_1 - \alpha_2 = 1 \\ 2\alpha_1 + \alpha_2 = 3 \\ 3\alpha_1 + 2\alpha_2 = 7 \end{cases}.$$

A matriz ampliada do sistema acima é

$$\left(\begin{array}{cc|c} 1 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & 3 \\ 3 & 2 & 7 \end{array}\right).$$

Facilmente se verifica que essa matriz pode converter-se na seguinte forma em escada

$$\left(\begin{array}{cc|c} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & \frac{7}{3} \end{array}\right).$$

Como a característica da matriz simples é inferior à característica da matriz ampliada, o sistema é impossível, pelo que podemos concluir que $\mathbf{v}$ não é c.l. de $\mathbf{v}_1$ e $\mathbf{v}_2$.

Se observarmos de novo os exemplos acima, vemos, que em todos os casos, a matriz ampliada do sistema que temos de discutir para saber se $\mathbf{v}$ é ou não combinação linear de $\mathbf{v}_1$ e $\mathbf{v}_2$ é a matriz cujas colunas são os vectores $\mathbf{v}_1$, $\mathbf{v}_2$ e $\mathbf{v}$, se usarmos a notação de coluna para esses vectores. Isto não é, naturalmente, coincidência.

De facto, sendo $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_r$ e $\mathbf{v}$ vectores de $\mathbb{R}^{n\times 1}$, tem-se

$$\alpha_1\mathbf{v}_1 + \alpha_2\mathbf{v}_2 + \cdots + \alpha_r\mathbf{v}_r = \mathbf{v} \iff \begin{pmatrix} \mathbf{v}_1 & \mathbf{v}_2 & \cdots & \mathbf{v}_r \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \vdots \\ \alpha_r \end{pmatrix} = \mathbf{v} \iff A\mathbf{a} = \mathbf{v},$$

onde A é a matriz cujas colunas são os vectores $\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_r$, isto é, $A = \begin{pmatrix} \mathbf{v}_1 & \mathbf{v}_2 & \cdots & \mathbf{v}_r \end{pmatrix}$ e $\mathbf{a} = \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_r \end{pmatrix}$. Assim, para determinarmos se $\mathbf{v}$ é ou não combinação linear de $\mathbf{v}_1$, $\mathbf{v}_2, \ldots \mathbf{v}_r$, teremos apenas de verificar se o sistema com matriz ampliada $(A|\mathbf{v}) = \begin{pmatrix}\mathbf{v}_1 \ \mathbf{v}_2 \ \cdots \ \mathbf{v}_r \mid \mathbf{v}\end{pmatrix}$ tem ou não solução.

Em conclusão, podemos adoptar o seguinte procedimento para determinar se um dado vector de $\mathbb{R}^n$ é ou não combinação linear de vectores $\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_r$ desse mesmo espaço.

Verificar se um vector de $\mathbb{R}^n$ é c.l. de vectores dados

Sejam dados vectores $\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_r$ do espaço $\mathbb{R}^n$ e seja $\mathbf{v}$ um vector de $\mathbb{R}^n$. Para verificar se $\mathbf{v}$ é ou não combinação linear dos vectores $\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_r$ podemos:

- formar a matriz
$$(A|\mathbf{v}) = \begin{pmatrix}\mathbf{v}_1 \ \cdots \ \mathbf{v}_r \mid \mathbf{v}\end{pmatrix}$$
ou seja a matriz cujas colunas são os vectores $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_r$ e $\mathbf{v}$;
- considerar a matriz anterior como matriz ampliada de um sitema e investigar (da forma usual) se tal sistema tem ou não solução; em particular:
  - se car$(A) <$ car$(A|\mathbf{v})$, concluímos que $\mathbf{v}$ não é c.l. de $\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_r$;
  - se car$(A) =$ car$(A|\mathbf{v}) = r$, concluímos que $\mathbf{v}$ é c.l. de $\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_r$ e que os coeficientes da c.l. são univocamente determinados;
  - se car$(A) =$ car$(A|\mathbf{v}) < r$, concluímos que $\mathbf{v}$ é c.l. de $\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_r$, mas os coeficientes da c.l. não são univocamente determinados, havendo uma infinidade de formas de escrever $\mathbf{v}$ como c.l. de $\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_r$.

Exemplo 4.15. O procedimento acima descrito aplica-se apenas ao caso de estarmos a trabalhar num espaço de tipo $\mathbb{R}^n$. Por exemplo, no espaço das matrizes $\mathbb{R}^{2\times 2}$, para verificar se a matriz $A = \begin{pmatrix}-2 & 10\\ 6 & 16\end{pmatrix}$ é ou não combinação linear das matrizes $A_1 = \begin{pmatrix}1 & 3\\ -1 & 2\end{pmatrix}$ e $A_2 = \begin{pmatrix}-1 & 1\\ 2 & 3\end{pmatrix}$, teremos de proceder do seguinte modo.

Queremos saber se é possível encontrar escalares α_1 e α_2 tais que $\alpha_1 A_1 + \alpha_2 A_2 = A$. Mas,

$$\begin{aligned}
\alpha_1 A_1 + \alpha_2 A_2 = A &\iff \alpha_1 \begin{pmatrix}1 & 3\\ -1 & 2\end{pmatrix} + \alpha_2 \begin{pmatrix}-1 & 1\\ 2 & 3\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-2 & 10\\ 6 & 16\end{pmatrix}\\
&\iff \begin{pmatrix}\alpha_1 - \alpha_2 & 3\alpha_1 + \alpha_2\\ -\alpha_1 + 2\alpha_2 & 2\alpha_1 + 3\alpha_2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-2 & 10\\ 6 & 16\end{pmatrix}\\
&\iff \begin{cases} \alpha_1 - \alpha_2 = -2\\ 3\alpha_1 + \alpha_2 = 10\\ -\alpha_1 + 2\alpha_2 = 6\\ 2\alpha_1 + 3\alpha_2 = 16 \end{cases}
\end{aligned}$$

Temos portanto de discutir o sistema acima para saber se ele é ou não possível. A matriz ampliada desse sistema é

$$(A|\mathbf{b}) = \left(\begin{array}{cc|c} 1 & -1 & -2 \\ 3 & 1 & 10 \\ -1 & 2 & 6 \\ 2 & 3 & 16 \end{array}\right).$$

Usando operações elementares sobre linhas, a matriz anterior pode ser convertida na seguinte forma em escada:

$$\left(\begin{array}{cc|c} 1 & -1 & 2 \\ 0 & 4 & 16 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right).$$

Vemos que o sistema é possível e determinado; a sua solução é obtida facilmente por substituição inversa e é igual a $(2,4)$. Conclusão: a matriz A é c.l. das matrizes A_1 e A_2, sendo $A = 2A_1 + 4A_2$ a única forma de a escrever como c.l. dessas matrizes.

Subespaço gerado por um conjunto de vectores

Teorema 4.1. *Seja V um espaço vectorial e sejam $\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \ldots, \mathbf{u}_r$ vectores de V. Então, o conjunto de todas as combinações lineares de $\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \ldots, \mathbf{u}_r$ é um subespaço de V.*

Denotamos por $\langle \mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_r \rangle$ o subespaço referido acima, isto é

$$\langle \mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_r \rangle = \{\alpha_1 \mathbf{u}_1 + \alpha_2 \mathbf{u}_2 + \cdots + \alpha_r \mathbf{u}_r : \alpha_1, \ldots, \alpha_r \in \mathbb{R}\} \tag{4.1}$$

e chamamos-lhe *subespaço gerado pelos vectores* $\mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_r$ ou *subespaço gerado pelo conjunto* $\{\mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_r\}$. Sendo $U = \langle \mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_r \rangle$, dizemos que $\mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_r$ *geram* (ou *são geradores*) de U ou que o conjunto $\{\mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_r\}$ gera U.

Demonstremos, então, o Teorema 4.1.

1. Como $0\mathbf{u}_1 + 0\mathbf{u}_2 + \cdots + 0\mathbf{u}_r = \mathbf{0}_V$, podemos concluir que $\mathbf{0}_V \in \langle \mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_r \rangle$.

2. Se $\mathbf{u} = \alpha_1 \mathbf{u}_1 + \cdots + \alpha_r \mathbf{u}_r$ e $\mathbf{v} = \beta_1 \mathbf{u}_1 + \cdots + \beta_r \mathbf{u}_r$ são dois elementos arbitrários de $\langle \mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_r \rangle$, tem-se

$$\begin{aligned} \mathbf{u} + \mathbf{v} &= (\alpha_1 \mathbf{u}_1 + \cdots + \alpha_r \mathbf{u}_r) + (\beta_1 \mathbf{u}_1 + \cdots + \beta_r \mathbf{u}_r) \\ &= (\alpha_1 + \beta_1)\mathbf{u}_1 + \cdots (\alpha_r + \beta_r)\mathbf{u}_r \end{aligned}$$

   o que mostra que $\mathbf{u} + \mathbf{v}$ é uma combinação linear de $\mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_r$ ou seja, que $\mathbf{u} + \mathbf{v} \in \langle \mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_r \rangle$.

3. Sendo $\mathbf{u} = \alpha_1\mathbf{u}_1 + \cdots + \alpha_r\mathbf{u}_r$ um elemento arbitrário de $\langle \mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_r \rangle$ e sendo $\alpha \in \mathbb{R}$, temos
$$\alpha\mathbf{u} = \alpha\,(\alpha_1\mathbf{u}_1 + \ldots + \alpha_r\mathbf{u}_r) = (\alpha\alpha_1)\mathbf{u}_1 + \cdots + (\alpha\alpha_r)\mathbf{u}_r$$
ou seja, temos que $\alpha\mathbf{u} \in \langle \mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_r \rangle$.

Está assim provado que $\langle \mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_r \rangle$ é um subespaço vectorial de V. □

Definição 4.2. Um espaço V diz-se *finitamente gerado* se existem $r \in \mathbb{N}$ e $\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_r$ em V tais que que
$$V = \langle \mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_r \rangle.$$

Exemplo 4.16. O espaço $\mathbb{R}^3$ é finitamente gerado. De facto, vemos facilmente que qualquer vector (x_1, x_2, x_3) de $\mathbb{R}^3$ se pode escrever como combinação linear dos três vectores $\mathbf{e}_1 = (1,0,0), \mathbf{e}_2 = (0,1,0)$ e $\mathbf{e}_3 = (0,0,1)$:
$$(x_1, x_2, x_3) = x_1(1,0,0) + x_2(0,1,0) + x_3(0,0,1).$$

Exemplo 4.17. O espaço vectorial $\mathcal{P}(x)$ de todos os polinómios na variável x, sem restrição de grau, não é finitamente gerado. De facto, se $\mathcal{P}(x)$ fosse finitamente gerado, existiriam polinómios $p_1(x), \ldots, p_r(x)$, com $r \in \mathbb{N}$, tais que
$$\mathcal{P}(x) = \langle p_1(x), \ldots, p_r(x) \rangle.$$
Vejamos que tal não é possível.

Seja m o máximo grau dos polinómios $p_1(x), \ldots, p_r(x)$. Tendo em conta a forma como estão definidas a adição de polinómios e de multiplicação de um escalar por um polinómio, podemos concluir que qualquer combinação linear de $p_1(x), \ldots, p_r(x)$ será um polinómio com grau não superior a m. Então, o polinómio $x^{m+1} \in \mathcal{P}(x)$ e não pode ser obtido como c.l. de $p_1(x), \ldots, p_r(x)$, ou seja, $x^{m+1} \in \mathcal{P}(x)$, mas $x^{m+1} \notin \langle p_1(x), \ldots, p_r(x) \rangle$. Isto mostra que $\mathcal{P}(x) \neq \langle p_1(x), \ldots, p_r(x) \rangle$.

Teorema 4.2. *Seja V um espaço vectorial e sejam dados vectores $\mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_r$ e $\mathbf{w}_1, \ldots, \mathbf{w}_s$ em V. Seja $U = \langle \mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_r \rangle$ e $W = \langle \mathbf{w}_1, \ldots, \mathbf{w}_s \rangle$. Então:*

1. *$U \subseteq W$ se e só se $\mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_r$ pertencem a W;*
2. *$U = W$ se e só se $\mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_r$ pertencem a W e $\mathbf{w}_1, \ldots, \mathbf{w}_s$ pertencem a U.*

Dem: Comecemos por recordar que dados dois conjuntos A e B se tem $A \subseteq B$ se e só se todo o elemento de A pertencer a B, isto é, se e só se for válida a seguinte implicação

$$x \in A \Rightarrow x \in B.$$

Além disso, tem-se

$$A = B \iff A \subseteq B \text{ e } B \subseteq A.$$

1. $\Rightarrow$) Os vectores $\mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_r$ estão em U (porquê?); se $U \subseteq W$, então eles pertencerão também a W.

   $\Leftarrow$) Suponhamos agora que os vectores $\mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_r$ estão em W e provemos que $U \subseteq W$. Seja $\mathbf{u}$ um elemento arbitrário de U; então $\mathbf{u}$ é um vector da forma $\mathbf{u} = \alpha_1\mathbf{u}_1 + \ldots + \alpha_r\mathbf{u}_r$, para determinados escalares $\alpha_1, \ldots, \alpha_r$. Como $\mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_r$ pertencem a W e W é um subespaço (logo, fechado para a adição e para a multiplicação escalar), segue-se que $\mathbf{u}$ também está em W. Vemos, assim, que $\mathbf{u} \in U \Rightarrow \mathbf{u} \in W$, ou seja, que $U \subseteq W$.

2. É uma consequência imediata de 1. e do que referimos sobre a igualdade de conjuntos.

$\square$

O seguinte corolário é uma consequência imediata do teorema anterior.

Corolário 4.1. *Sejam dados vectores $\mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_r$ de um espaço vectorial V e seja $\mathbf{w}$ um vector de V. Então:*

1. *se $\mathbf{w}$ for uma combinação linear de $\mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_r$, tem-se*

$$\langle \mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_r \rangle = \langle \mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_r, \mathbf{w} \rangle;$$

2. *se $\mathbf{w}$ não for uma combinação linear de $\mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_r$, tem-se*

$$\langle \mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_r \rangle \subsetneqq \langle \mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_r, \mathbf{w} \rangle.$$

(Usamos o símbolo $\subsetneqq$ para siginificar inclusão estrita, isto é, $A \subsetneqq B$ siginifica que $A \subseteq B$, mas $A \neq B$.)

Exemplo 4.18. Em $\mathbb{R}^3$, tem-se

$$\langle (1, 0, 0), (1, 2, 3), (3, 4, 6) \rangle = \langle (1, 0, 0), (1, 2, 3) \rangle,$$

uma vez que facilmente se vê que $(3, 4, 6) = (1, 0, 0) + 2(1, 2, 3)$.

Naturalmente, quando nos dão um conjunto de geradores $\mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_r$ de um certo espaço U, gostaríamos de eliminar geradores "supérfluos", ou seja, gostaríamos de encontrar um subconjunto desse conjunto, com o menor número de elementos possível, que ainda gerasse U. Vejamos como poderemos proceder, usando o Corolário 4.1 de uma forma sistemática.

Sejam V um espaço vectorial, $\mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_r$, $r \geq 2$, vectores de V e seja $U = \langle \mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_r \rangle$. Suponhamos que, pelo menos um, dos vectores $\mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_r$ é não nulo. (Caso contrário, $U = \{\mathbf{0}_V\}$ e U será gerado pelo vector $\mathbf{0}_V$). Uma vez que, se reordenarmos os vectores geradores, o espaço por eles gerado não se altera – veja-se o Teorema4.2 – podemos, sem perda de generalidade, assumir que esse vector não nulo é o vector $\mathbf{u}_1$; este vector fará parte dos vectores a considerar.

Consideremos então o vector $\mathbf{u}_2$; se $\mathbf{u}_2$ for uma c.l. de $\mathbf{u}_1$ (isto é, se $\mathbf{u}_2 = \alpha \mathbf{u}_1$ para um certo escalar α), podemos eliminar esse vector do conjunto de geradores, atendendo ao corolário anterior; caso contrário, esse vector deve ser considerado; vemos depois se $\mathbf{u}_3$ é c.l. de $\mathbf{u}_1$ e $\mathbf{u}_2$ (ou apenas de $\mathbf{u}_1$, se $\mathbf{u}_2$ tiver sido eliminado); se for, eliminamos $\mathbf{u}_3$, se não for, mantemo-lo. E assim sucessivamente. Este processo terá de acabar, uma vez que inicialmente dispúnhamos de um número finito de vectores. Vejamos, então, um exemplo concreto.

Exemplo 4.19. Seja U o subespaço do espaço vectorial $\mathbb{R}^4$ gerado pelos vectores $\mathbf{u}_1 = (1, 2, 3, 4)$, $\mathbf{u}_2 = (2, 4, 6, 8)$, $\mathbf{u}_3 = (1, -1, 3, 1)$ e $\mathbf{u}_4 = (2, 1, 6, 5)$.

Como $\mathbf{u}_1 \neq \mathbf{0}$, mantemos $\mathbf{u}_1$. Para vermos se $\mathbf{u}_2$ é c.l. de $\mathbf{u}_1$, podemos seguir o procedimento descrito na página 84.[1] Formemos a matriz que tem esses vectores (escritos na notação em coluna) como colunas, isto é,

$$\begin{pmatrix} \mathbf{u}_1 & \mathbf{u}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \\ 3 & 6 \\ 4 & 8 \end{pmatrix}.$$

Facilmente se verifica que esta matriz pode converter-se na seguinte forma em escada, usando operações elementares sobre as suas linhas:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

[1] De facto, é imediato ver que $(2, 4, 6, 8) = 2(1, 2, 3, 4)$, mas preferimos usar o procedimento descrito anteriormente.

Como car$\Big(\mathbf{u}_1\Big) = $ car$\Big(\mathbf{u}_1 \mid \mathbf{u}_2\Big)$, concluímos que $\mathbf{u}_2$ é c.l. de $\mathbf{u}_1$, ou seja, que este vector pode ser eliminado do conjunto de geradores.

Consideremos então o vector $\mathbf{u}_3$ e procedamos como fizemos com $\mathbf{u}_2$. A matriz cujas colunas são $\mathbf{u}_1$ e $\mathbf{u}_3$ é

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -1 \\ 3 & 3 \\ 4 & 1 \end{pmatrix}.$$

Facilmente se verifica que esta matriz pode ser convertida, por eliminação Gaussiana, na seguinte matriz em escada:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -3 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Então, vemos que car$\Big(\mathbf{u}_1\Big) <$ car$\Big(\mathbf{u}_1 \mid \mathbf{u}_3\Big)$, pelo que $\mathbf{u}_3$ não é c.l. de $\mathbf{u}_1$, devendo ser considerado.

Finalmente, vejamos se $\mathbf{u}_4$ é ou não c.l. de $\mathbf{u}_1$ e $\mathbf{u}_3$. A matriz a analisar é, neste caso

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & -1 & 1 \\ 3 & 3 & 6 \\ 4 & 1 & 5 \end{pmatrix},$$

a qual pode facilmente ser convertida na seguinte matriz em escada:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Como car$\Big(\mathbf{u}_1\ \mathbf{u}_3 \mid \mathbf{u}_4\Big) = $ car$\Big(\mathbf{u}_1\ \mathbf{u}_3\Big)$, concluímos que $\mathbf{u}_4$ é c.l. de $\mathbf{u}_1$ e $\mathbf{u}_3$, podendo ser eliminado.

Em resumo, tem-se

$$U = \langle \mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_3, \mathbf{u}_4 \rangle = \langle \mathbf{u}_1, \mathbf{u}_3 \rangle.$$

Se analisarmos o procedimento anterior, vemos que poderíamos ter procedido de uma forma mais eficiente, se convertêssemos em escada, de um só vez, a matriz formada pelos quatro vectores dispostos em coluna, isto é, a matriz

$$A = \begin{pmatrix} \mathbf{u}_1 & \mathbf{u}_2 & \mathbf{u}_3 & \mathbf{u}_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 2 \\ 2 & 4 & -1 & 1 \\ 3 & 6 & 3 & 6 \\ 4 & 8 & 1 & 5 \end{pmatrix}.$$

Neste caso, obter-se-ia a seguinte matriz:

$$E = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

É imediato reconhecer que as colunas de E que não têm pivôs (2ª e 4ª) são as que não fazem "aumentar a característica" quando são acrescentadas às colunas anteriores; isso significa que as correspondentes colunas de A são as que contêm os vectores que são c.l. de vectores anteriores, ou seja, são as que contêm os vectores a eliminar; pelo contrário, as restantes colunas - ou seja, as colunas principais - contêm os vectores que devem ser mantidos.

Descrevemos, então, um possível procedimento a adoptar para eliminar vectores supérfluos de um conjunto de geradores de um subespaço de $\mathbb{R}^n$ (os vectores a retirar são c.l. de outros vectores do conjunto e não são necessários para gerar o subespaço). Vamos chamar a este procedimento, *Processo 1*.

Processo 1

Eliminar geradores redundantes de um conjunto de geradores de um subespaço de $\mathbb{R}^n$

Sejam dados r vectores $\mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_r$ de $\mathbb{R}^n$, com $r \geq 2$, e seja $U = \langle \mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_r \rangle$. Para extrair de $\{\mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_r\}$ um conjunto de geradores de U sem vectores redundantes, podemos:

1. construir a matriz A que tem os vectores $\mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_r$ como colunas;
2. encontrar as colunas principais de A (por eliminação Gaussiana), as quais formarão o conjunto pretendido.

Proposição 4.3. *Sejam $\mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_r$ vectores de um espaço vectorial V e sejam $\mathbf{w}_1, \ldots, \mathbf{w}_r$ vectores obtidos de $\mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_r$ por qualquer das operações seguintes:*

1. *troca da ordem de dois vectores;*
2. *multiplicação de um dos vectores por um escalar não nulo;*
3. *adição a um vector de outro multiplicado por um dado escalar.*

Então, tem-se

$$\langle \mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_r \rangle = \langle \mathbf{w}_1, \ldots, \mathbf{w}_r \rangle.$$

Dem:

1. É uma consequência imediata do Teorema 4.2.

2. Como a ordem dos vectores é irrelevante, vamos supor que é o vector $\mathbf{u}_1$ que é multiplicado por um escalar $\alpha \neq 0$. Pretendemos mostrar, então, que

$$\langle \mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \ldots, \mathbf{u}_r \rangle = \langle \alpha\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \ldots, \mathbf{u}_r \rangle.$$

   De acordo com o Teorema 4.2, bastar-nos-á mostrar que $\alpha\mathbf{u}_1 \in \langle \mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_r \rangle$ e que $\mathbf{u}_1 \in \langle \alpha\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \ldots, \mathbf{u}_r \rangle$. É evidente que $\alpha\mathbf{u}_1 \in \langle \mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_r \rangle$, uma vez que

$$\alpha\mathbf{u}_1 = \alpha\mathbf{u}_1 + 0\mathbf{u}_2 + \cdots + 0\mathbf{u}_r.$$

   Por outro lado, como

$$\mathbf{u}_1 = \frac{1}{\alpha}\alpha\mathbf{u}_1 = \frac{1}{\alpha}(\alpha\mathbf{u}_1) + 0\mathbf{u}_2 + \cdots + \mathbf{u}_r,$$

   também concluímos que $\mathbf{u}_1 \in \langle \alpha\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \ldots, \mathbf{u}_r \rangle$.

3. Sem perda de generalidade, suponhamos que $\mathbf{w}_1 = \mathbf{u}_1 + \alpha\mathbf{u}_2$. Pretendemos mostrar que

$$\langle \mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \ldots, \mathbf{u}_r \rangle = \langle \mathbf{u}_1 + \alpha\mathbf{u}_2, \mathbf{u}_2, \ldots, \mathbf{u}_r \rangle.$$

   Uma vez que é evidente que o vector $\mathbf{u}_1 + \alpha\mathbf{u}_2$ é uma c.l. de $\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \ldots, \mathbf{u}_r$, ou seja, que esse vector pertence ao subespaço $\langle \mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \ldots, \mathbf{u}_r \rangle$, para estabelecer a igualdade dos subespaços bastará, apenas, mostrar que $\mathbf{u}_1 \in \langle \mathbf{u}_1 + \alpha\mathbf{u}_2, \mathbf{u}_2, \ldots, \mathbf{u}_r \rangle$. Mas,

$$\mathbf{u}_1 = (\mathbf{u}_1 + \alpha\mathbf{u}_2) - \alpha\mathbf{u}_2 + 0\mathbf{u}_3 + \cdots + 0\mathbf{u}_r,$$

   o que mostra que $\mathbf{u}_1$ é uma c.l. dos vectores $\mathbf{u}_1 + \alpha\mathbf{u}_2, \mathbf{u}_2, \ldots, \mathbf{u}_r$, ou seja, pertence ao subespaço gerado por esses vectores, o que conclui a demonstração.

$\square$

A proposição anterior vai fornecer-nos um processo alternativo de encontrar um conjunto de geradores para um subespaço de $\mathbb{R}^n$, sem nenhum vector redundante. Comecemos por ver um exemplo.

Exemplo 4.20. Retomemos novamente o subespaço do Exemplo 4.19, isto é, o subespaço U de $\mathbb{R}^4$ gerado pelos vectores $\mathbf{u}_1 = (1,2,3,4)$, $\mathbf{u}_2 = (2,4,6,8)$, $\mathbf{u}_3 = (1,-1,3,1)$ e $\mathbf{u}_4 = (2,1,6,5)$. Formemos agora uma matriz B com esses vectores como linhas, isto é:

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 4 & 6 & 8 \\ 1 & -1 & 3 & 1 \\ 2 & 1 & 6 & 5 \end{pmatrix}.$$

Facilmente se verifica que a matriz anterior pode ser convertida na seguinte matriz em escada, usando operações elementares sobre as suas linhas:

$$E = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & -3 & -6 & -11 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

De acordo com a proposição anterior, as linhas de E são geradoras de U, atendendo ao tipo de operações que efectuámos para converter B em E. Mas, naturalmente, as linhas nulas não precisam de ser consideradas, uma vez que elas são (trivialmente) c.l. das restantes linhas. Ou seja, as linhas não nulas de E são geradoras de U, isto é:

$$U = \langle (1,2,3,4), (0,-3,-6,-11) \rangle.$$

Além disso, pode mostrar-se facilmente que nenhuma das linhas não nulas de E é uma c.l. das outras, ou seja, estas linhas devem ser mantidas (nenhuma delas é redundante).

Note-se que, neste caso, o conjunto de vectores geradores encontrado <u>não é um subconjunto do conjunto inicial</u>. No entanto, este conjunto é, tal como no Exemplo 4.19, formado por dois vectores.

Verifique que

$$\langle (1,2,3,4), (0,-3,-6,-11) \rangle = \langle (1,2,3,4), (1,-1,3,1) \rangle.$$

Nota: Recorde que $(1,2,3,4)$ e $(1,-1,3,1)$ foram os geradores de U encontrados no Exemplo 4.19.

O que fizemos no exemplo anterior pode fazer-se geralmente para um dado conjunto de geradores de um certo subespaço de $\mathbb{R}^n$.

Suponhamos que $\mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_r$ são vectores de $\mathbb{R}^n$ e seja $U = \langle \mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_r \rangle$. Se formarmos a matriz B que tem os vectores $\mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_r$ como linhas e, por operações elementares sobre as linhas da matriz, convertermos B numa matriz E com a forma em escada, as linhas não nulas de E são vectores geradores de U.

Pode provar-se, além disso, que estando a matriz E na forma em escada, nenhuma das suas linhas não nulas é combinação linear das restantes linhas.

Assim, ao efectuarmos o processo acima descrito, nas linhas que "aproveitamos" não há vectores redundantes. Tem-se, então o seguinte processo alternativo de encontrar um conjunto de geradores de um subespaço de $\mathbb{R}^n$, a que chamaremos *Processo 2.*

Processo 2
Encontrar um conjunto de geradores não redundantes de um subespaço de $\mathbb{R}^n$

Sejam dados r vectores $\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_r$ de $\mathbb{R}^n$, com $r \geq 2$, e seja $U = \langle \mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_r \rangle$. Para encontrar um conjunto de geradores de U sem geradores redundantes, podemos:

1. formar a matriz B que tem os vectores como linhas;
2. converter a matriz B numa matriz E com a forma em escada, por operações elementares sobre linhas;
3. considerar como vectores desejados as linhas não nulas de E.

4.4 Dependência e independência linear

Começamos por introduzir a seguinte definição.

Vectores linearmente independentes/dependentes

Seja V um espaço vectorial e sejam $\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_r$ vectores de V. Dizemos que os vectores $\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_r$ são *linearmente independentes* (l.i.) ou que o conjunto $\{\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_r\}$ é *linearmente independente* (l.i.) se e só se a única forma de escrever o vector nulo do espaço como combinação linear desses vectores é considerando todos os coeficientes iguais a zero, isto é, se e só se for válida a seguinte implicação

$$\alpha_1 \mathbf{v}_1 + \cdots + \alpha_r \mathbf{v}_r = \mathbf{0}_V \Rightarrow \alpha_1 = \cdots = \alpha_r = 0. \tag{4.2}$$

Se, pelo contrário, for possível escrever o vector nulo como c.l. desses vectores sem que os coeficientes sejam todos nulos, dizemos que os vectores são *linearmente dependentes* (l.d.) ou que formam um conjunto linearmente dependente (l.d.); isto é, $\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_r$ são linearmente dependentes se e só se

$$\exists \alpha_1, \dots, \alpha_r \in \mathbb{R} \;\; \exists i \in \{1, \dots r\} : \alpha_i \neq 0 \text{ e } \alpha_1 \mathbf{v}_1 + \cdots + \alpha_r \mathbf{v}_r = \mathbf{0}_V. \tag{4.3}$$

É importante salientar que o vector nulo consegue sempre escrever-se como combinação linear de quaisquer vectores $\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_r$ dados. Basta considerar os coeficientes todos iguais a zero, isto é, tem-se <u>sempre</u>

$$0\mathbf{v}_1 + \ldots + 0\mathbf{v}_r = \mathbf{0}_V.$$

O que está em causa na independência/dependência linear é saber se essa é ou não a <u>única</u> forma de o fazer.

Exemplo 4.21. Vejamos se os vectores $\mathbf{v}_1 = (1, 2, 3)$, $\mathbf{v}_2 = (-1, 2, 0)$ e $\mathbf{v}_3 = (0, 4, 5)$ são vectores linearmente independentes ou vectores linearmente dependentes do espaço vectorial $\mathbb{R}^3$.

Tem-se

$$\begin{aligned}
\alpha_1\mathbf{v}_1 + \alpha_2\mathbf{v}_2 + \alpha_3\mathbf{v}_3 = \mathbf{0} &\iff \alpha_1(1,2,3) + \alpha_2(-1,2,0) + \alpha_3(0,4,5) = (0,0,0) \\
&\iff (\alpha_1 - \alpha_2, 2\alpha_1 + 2\alpha_2 + 4\alpha_3, 3\alpha_1 + 5\alpha_3) = (0,0,0) \\
&\iff \begin{cases} \alpha_1 - \alpha_2 = 0 \\ 2\alpha_1 + 2\alpha_2 + 4\alpha_3 = 0 \\ 3\alpha_1 + 5\alpha_3 = 0 \end{cases} .
\end{aligned}$$

Vemos, assim, que os vectores dados são independentes se e só se o sistema homogéneo acima for determinado (caso em que teremos apenas a solução $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = 0$), sendo dependentes se o sistema for indeterminado. Como sabemos, tal sistema é determinado ou indeterminado conforme se tenha $\text{car}(A) = 3$ ou $\text{car}(A) < 3$, onde A é a matriz (simples) do sistema, isto é

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 2 & 2 & 4 \\ 3 & 0 & 5 \end{pmatrix}.$$

Usando operações elementares sobre as linhas de A, vemos que A pode converter-se na seguinte forma em escada

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 0 & 6 & 4 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

o que mostra que $\text{car}(A) = 3$. Em conclusão, temos que

$$\alpha_1\mathbf{v}_1 + \alpha_2\mathbf{v}_2 + \alpha_3\mathbf{v}_3 = \mathbf{0} \Rightarrow \alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = 0,$$

ou seja, os vectores dados são linearmente independentes.

Note que, de modo análogo ao que fizemos para verificar se um dado vector é ou não c.l. de vectores dados de $\mathbb{R}^n$, também aqui poderemos usar a notação em coluna para vectores de $\mathbb{R}^n$ e ter em atenção que

$$\alpha_1\mathbf{v}_1 + \alpha_2\mathbf{v}_2 + \cdots + \alpha_r\mathbf{v}_r = \mathbf{0} \iff \begin{pmatrix}\mathbf{v}_1 & \mathbf{v}_2 & \cdots & \mathbf{v}_r\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\alpha_1\\ \alpha_2\\ \vdots\\ \alpha_r\end{pmatrix} = \mathbf{0} \iff A\mathbf{a} = \mathbf{0}$$

onde $A = \begin{pmatrix}\mathbf{v}_1 \cdots \mathbf{v}_r\end{pmatrix}$ é a matriz cujas colunas são os vectores $\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_r$ e $\mathbf{a} = \begin{pmatrix}\alpha_1\\ \vdots\\ \alpha_r\end{pmatrix}$. Ou seja, temos o seguinte procedimento para saber se um conjunto de vectores de $\mathbb{R}^n$ é l.i ou l.d.

Determinar se um dado conjunto de vectores de $\mathbb{R}^n$ é l.i. ou l.d.

Sejam dados vectores $\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_r$ do espaço $\mathbb{R}^n$. Para determinar se esses vectores são linearmente independentes ou linearmente dependentes, podemos:

- formar a matriz $A = \begin{pmatrix}\mathbf{v}_1 & \cdots & \mathbf{v}_r\end{pmatrix}$ que tem esses vectores como colunas;
- determinar car(A);
- concluir que os vectores são linearmente independentes, se car$(A) = r$, e que são linearmente dependentes, se car$(A) < r$.

Note-se que a matriz A acima referida é uma matriz do tipo $n \times r$. Assim, se $n < r$, nunca poderá ser car$(A) = r$, ou seja, os vectores nunca poderão ser linearmente independentes. Podemos pois afirmar que:

Em $\mathbb{R}^n$, qualquer conjunto constituído por mais do que n vectores é um conjunto linearmente dependente.

Por exemplo, em $\mathbb{R}^2$, os três vectores $(1, 2)$, $(2, -1)$ e $(3, 5)$ são linearmente dependentes (verifique!).

Exemplo 4.22. Um só vector $\mathbf{v}$ é linearmente independente (respectivamente, dependente) se e só se $\mathbf{v} \neq \mathbf{0}_V$ (respectivamente, $\mathbf{v} = \mathbf{0}_V$); veja a Proposição 4.2 - 6.

O seguinte teorema explica, de certo modo, porque chamamos *linearmente dependentes* a um determinada colecção de vectores.

Teorema 4.3. *Seja V um espaço vectorial e sejam $\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_r$, com $r \geq 2$, vectores de V. Então, os vectores dados são linearmente dependentes se e só se (pelo menos) um deles for combinação linear dos restantes. Dito de uma forma equivalente, tem-se que os vectores $\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_r$ são linearmente independentes se e só se nenhum deles for combinação linear dos restantes.*

Dem: $\Rightarrow$) Suponhamos que $\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_r$ são l.d. Então, existem escalares $\alpha_1, \ldots, \alpha_r$, não todos nulos, tais que

$$\alpha_1 \mathbf{v}_1 + \ldots + \alpha_r \mathbf{v}_r = \mathbf{0}_V.$$

Seja $i \in \{1, 2, \ldots, r\}$ tal que $\alpha_i \neq 0$. Então, podemos escrever a equação anterior como

$$\alpha_i \mathbf{v}_i = -\alpha_1 \mathbf{v}_1 - \cdots - \alpha_{i-1} \mathbf{v}_{i-1} - \alpha_{i+1} \mathbf{v}_{i+1} - \cdots - \alpha_r \mathbf{v}_r$$

ou ainda como

$$\mathbf{v}_i = -\frac{\alpha_1}{\alpha_i} \mathbf{v}_1 - \cdots - \frac{\alpha_{i-1}}{\alpha_i} \mathbf{v}_{i-1} - \frac{\alpha_{i+1}}{\alpha_i} \mathbf{v}_{i+1} - \cdots \frac{\alpha_r}{\alpha_i} \mathbf{v}_r,$$

o que mostra que $\mathbf{v}_i$ é c.l. dos restantes vectores.

$\Leftarrow$) Suponhamos que um dos vectores, $\mathbf{v}_i$ $(1 \leq i \leq r)$, é combinação linear dos restantes, isto é, que

$$\mathbf{v}_i = \alpha_1 \mathbf{v}_1 + \cdots + \alpha_{i-1} \mathbf{v}_{i-1} + \alpha_{i+1} \mathbf{v}_{i+1} + \cdots + \alpha_r \mathbf{v}_r.$$

Então, podemos escrever

$$\alpha_1 \mathbf{v}_1 + \cdots + \alpha_{i-1} \mathbf{v}_{i-1} - \mathbf{v}_i + \alpha_{i+1} \mathbf{v}_{i+1} + \cdots + \alpha_r \mathbf{v}_r = \mathbf{0}_V.$$

Vemos, então, que o vector nulo $\mathbf{0}_V$ se pode escrever como c.l. dos vectores $\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_i, \ldots, \mathbf{v}_r$ com (pelo menos) um coeficiente não nulo (o coeficiente -1 de $\mathbf{v}_i$), ou seja, vemos que os vectores $\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_r$ são linearmente dependentes. $\square$

Os resultado contidos nos dois corolário seguintes são facilmente obtidos, ficando a sua demonstração ao cuidado dos alunos.

Corolário 4.2. *Dois vectores $\mathbf{v}_1$, $\mathbf{v}_2$ não nulos são linearmente dependentes se e só se qualquer deles for um múltiplo do outro.*

Corolário 4.3. *Seja $\{\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_r\}$ um conjunto de vectores linearmente independentes de um espaço vectorial V e seja $\mathbf{w}$ um vector de V. Se $\mathbf{w}$ não for uma combinação linear de $\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_r$, então $\{\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_r, \mathbf{w}\}$ ainda é formado por vectores linearmente independentes.*

A proposição seguinte é uma espécie de correspondente da Proposição 4.3, para a dependência/independência linear.

Proposição 4.4. *Sejam* $\mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_r$ *vectores de um espaço vectorial* V *e sejam* $\mathbf{w}_1, \ldots, \mathbf{w}_r$ *vectores obtidos de* $\mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_r$ *por qualquer das operações seguintes:*

- *troca da ordem de dois vectores;*
- *multiplicação de um dos vectores por um escalar não nulo;*
- *adição a um vector de outro multiplicado por um dado escalar.*

Então $\{\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_r\}$ *é um conjunto linearmente independente (respectivamente, dependente) se e só se o conjunto* $\{\mathbf{w}_1, \ldots, \mathbf{w}_r\}$ *for linearmente independente (respectivamente, dependente). Dito de outro modo, a dependência/independência linear de um conjunto de vectores não é alterada por qualquer das operações acima referidas.*

Dem: Como exercício. $\square$

Teorema 4.4. *Seja* V *um espaço vectorial. Sejam* $\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_r$ *tais que* $V = \langle \mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_r \rangle$ *e sejam* $\mathbf{w}_1, \ldots, \mathbf{w}_s$ *vectores de* V *linearmente independentes. Então, tem-se*

$$r \geq s.$$

Por outras palavras, num espaço vectorial, um conjunto gerador nunca pode ter menos elementos do que um conjunto linearmente independente.

Dem: Suponhamos que $r < s$ e vejamos que isso leva a uma contradição. Como $\mathbf{w}_1, \ldots, \mathbf{w}_s$ estão em V e $\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_r$ geram V, podemos concluir que cada uma dos vectores $\mathbf{w}_1, \ldots, \mathbf{w}_s$ se poderá escrever como c.l. dos vectores $\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_r$, isto é, ter-se-á

$$\begin{aligned}
\mathbf{w}_1 &= a_{11}\mathbf{v}_1 + a_{21}\mathbf{v}_2 + \cdots + a_{r1}\mathbf{v}_r \\
\mathbf{w}_2 &= a_{12}\mathbf{v}_1 + a_{22}\mathbf{v}_2 + \cdots + a_{r2}\mathbf{v}_r \\
&\vdots \\
\mathbf{w}_s &= a_{1s}\mathbf{v}_1 + a_{2s}\mathbf{v}_2 + \cdots + a_{rs}\mathbf{v}_r,
\end{aligned}$$

para certos escalares a_{ij}. Seja $A = (a_{ij})$ a matriz $r \times s$ cuja coluna j contém os coeficientes do vector $\mathbf{w}_j$ na expansão em termos dos $\mathbf{v}_i$'s, isto é:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1s} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2s} \\ & & \vdots & \\ a_{r1} & a_{r2} & \cdots & a_{rs} \end{pmatrix}.$$

Como, $r < s$, tem-se car$(A) \leq r < s$, o que garante que o sistema homogéneo $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$ tem soluções não nulas. Seja $(\alpha_1, \ldots, \alpha_s)$ uma tal solução. Isto significa que temos

$$\begin{cases} a_{11}\alpha_1 + a_{12}\alpha_2 + \cdots + a_{1s}\alpha_s = 0 \\ \vdots \\ a_{r1}\alpha_1 + a_{r2}\alpha 2 + \cdots + a_{rs}\alpha_s = 0 \end{cases}$$

com (pelo menos) um dos escalares $\alpha_1, \ldots, \alpha_s$ diferente de zero. Mas, então, vem

$$\begin{aligned} &\alpha_1\mathbf{w}_1 + \cdots + \alpha_s\mathbf{w}_s = \\ &\qquad = \alpha_1(a_{11}\mathbf{v}_1 + \cdots + a_{r1}\mathbf{v}_r) + \cdots + \alpha_s(a_{1s}\mathbf{v}_1 + \cdots + a_{rs}\mathbf{v}_r) \\ &\qquad = (\alpha_1 a_{11} + \cdots + \alpha_s a_{1s})\mathbf{v}_1 + \cdots + (\alpha_1 a_{r1} + \cdots + \alpha_s a_{rs})\mathbf{v}_r \\ &\qquad = (a_{11}\alpha_1 + \cdots + a_{1s}\alpha_s)\mathbf{v}_1 + \cdots + (a_{r1}\alpha_1 + \cdots + a_{rs}\alpha_s)\mathbf{v}_r \\ &\qquad = 0\mathbf{v}_1 + \cdots + 0\mathbf{v}_r = \mathbf{0}_V, \end{aligned}$$

com os escalares $\alpha_1, \ldots, \alpha_s$ não todos nulos. Isto significa que $\mathbf{w}_1, \ldots \mathbf{w}_r$ são linearmente dependentes, o que contradiz uma das hipóteses do teorema. □

4.5 Bases e dimensão

Base de um espaço vectorial

Dado um espaço vectorial V e dada uma sequência de vectores $(\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_n)$ de V, dizemos que essa sequência é uma *base* de V, se e só se os vectores que a constituem, $\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_n$, forem:

- geradores de V;
- linearmente independentes.

Por convenção, considera-se que o conjunto vazio $\emptyset$ é uma base do espaço $\{\mathbf{0}_V\}$.

Exemplo 4.23. No espaço vectorial $\mathbb{R}^n$, a sequência de vectores $(\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_n)$ onde

$$\mathbf{e}_1 = (1, 0, \ldots, 0),\ \mathbf{e}_2 = (0, 1, \ldots, 0), \ldots, \mathbf{e}_n = (0, 0, \ldots, 1)$$

($\mathbf{e}_i$ tem todas as componentes nulas, excepto a componente i que é igual a 1) é uma base de $\mathbb{R}^n$, chamada *base canónica* de $\mathbb{R}^n$.

Exemplo 4.24. As matrizes

$$M_{11} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad M_{12} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad M_{13} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$
$$M_{21} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad M_{22} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad M_{23} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

são tais que $(M_{11}, M_{12}, M_{13}, M_{21}, M_{22}, M_{23})$ é uma base do espaço $\mathbb{R}^{2\times 3}$. Do mesmo modo, é fácil de ver que as matrizes M_{ij}, de ordem $m \times n$, cujos elementos são todos nulos, com excepção do elemento situado na posição (i, j), que é igual a 1, formam uma base do espaço $\mathbb{R}^{m\times n}$. Esta é a base canónica para este espaço.

Exemplo 4.25. A sequência $(p_0(x), p_1(x), \ldots p_n(x))$ onde $p_0(x) = 1, p_1(x) = x, \ldots, p_n(x) = x^n$, é uma base do espaço vectorial $\mathcal{P}_n(x)$.

Observação: Falamos numa base como uma sequência e não como um simples conjunto de vectores, porque a ordem dos vectores é importante, considerando-se como bases distintas as que se obtiverem por re-ordenamento de uma base dada. No entanto, muitas vezes, com alguma imprecisão, referimo-nos a um conjunto de vectores como uma base, estando implícita que a ordem a considerar é aquela em que os vectores são apresentados.

Pode provar-se que todo o espaço vectorial finitamente gerado admite uma base.
De agora em diante, assumimos que os espaços considerados são finitamente gerados, dispensado-nos de o dizer explicitamente.

Teorema 4.5. *Seja V um espaço vectorial e seja $B = (\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_n)$ uma sua base. Então, todo o vector de V se escreve, de modo único, como combinação linear dos vectores de B.*

Dem: Como uma base é formada por geradores, é evidente que todo o vector de V se escreve como c.l. dos vectores dessa base. A única coisa a provar é, portanto, que existe um única forma de o fazer. Seja $\mathbf{v} \in V$ e suponhamos que

$$\mathbf{v} = \alpha_1\mathbf{v}_1 + \cdots + \alpha_n\mathbf{v}_n$$

e

$$\mathbf{v} = \beta_1\mathbf{v}_1 + \cdots + \beta_n\mathbf{v}_n,$$

para escalares $\alpha_i, \beta_i \in \mathbb{R}$. Então, tem-se

$$\alpha_1\mathbf{v}_1 + \cdots + \alpha_n\mathbf{v}_n = \beta_1\mathbf{v}_1 + \cdots + \beta_n\mathbf{v}_n,$$

de onde se segue que

$$(\alpha_1 - \beta_1)\mathbf{v}_1 + \cdots + (\alpha_n - \beta_n)\mathbf{v}_n = \mathbf{0}_V.$$

Como, os vectores $\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_n$ que formam a base são l.i. segue-se, da igualdade anterior, que

$$\alpha_1 - \beta_1 = 0, \ldots, \alpha_n - \beta_n = 0,$$

ou seja, que

$$\alpha_1 = \beta_1, \ldots, \alpha_n = \beta_n,$$

como pretendíamos provar. $\square$

Aos coeficientes (univocamente determinados) de um vector $\mathbf{v}$ como combinação linear dos vectores de uma dada base B, chamamos *coordenadas* do vector nessa base. O vector coluna formado por essas coordenadas será denotado por $[\mathbf{v}]_B$.

Exemplo 4.26. As coordenadas do vector $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ de $\mathbb{R}^n$ na base canónica $S = (\mathbf{e_1}, \ldots, \mathbf{e_n})$ são $x_1, \ldots, x_n$, já que

$$(x_1, x_2, \ldots, x_n) = x_1(1, 0, \ldots, 0) + x_2(0, 1, \ldots, 0) + \cdots + x_n(0, 0, \ldots, 1),$$

ou seja, tem-se $[\mathbf{x}]_S = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$. Assim, as coordenadas do vector $\mathbf{x} = (3, 4, 8)$ na base canónica de $\mathbb{R}^3$ são $3, 4$, e 8, isto é, $[\mathbf{x}]_S = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 8 \end{pmatrix}$. Se consideramos outra base de $\mathbb{R}^3$, por exemplo, $B = (\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_3)$, onde $\mathbf{u}_1 = (1, 1, 1), \mathbf{u}_2 = (1, 1, 0)$ e $\mathbf{u}_3 = (1, 0, 0)$,[2] para determinarmos as coordenadas do mesmo vector $\mathbf{x}$ nessa base , teremos de encontrar os escalares da expansão de $\mathbf{x}$ como combinação linear de $\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2$ e $\mathbf{u}_3$ (por esta ordem). Tal problema resume-se, como sabemos, a encontrar a solução do sistema cuja matriz ampliada é

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 3 \\ 1 & 1 & 0 & 4 \\ 1 & 0 & 0 & 8 \end{array}\right).$$

Resolvendo o sistema referido, obtemos que a solução é o vector $\mathbf{s} = \begin{pmatrix} 8 \\ -4 \\ -1 \end{pmatrix}$, donde, concluímos que

$$[\mathbf{x}]_B = \begin{pmatrix} 8 \\ -4 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

O teorema seguinte é um recíproco de Teorema 4.5.

[2] É fácil de verificar que B é, de facto, uma base de $\mathbb{R}^3$.

Teorema 4.6. *Seja V um espaço vectorial e seja seja $B = (\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n)$ uma sequência de vectores de V. Se todo o vector de V se escrever, de modo único, como c.l. dos vectores $\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n$, então B é uma base de V.*

Dem: A hipótese implica que os vectores $\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n$ são geradores de V e que, além disso, o vector nulo de V se escreve de modo único como sua c.l.(naturalmente que essa será a c.l. com todos os coeficientes iguais a zero), ou seja, que os vectores são também linearmente independentes, constituindo, portanto, uma base de V. $\square$

Teorema 4.7. *Todas as bases de um espaço vectorial têm o mesmo número de elementos.*

Dem: Se $V = \{\mathbf{0}_V\}$, a única base é o conjunto vazio e não há nada a provar. Seja $V \neq \{\mathbf{0}_V\}$ e suponhamos que $B = (\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_n)$ e $B' = (\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_p)$ são duas bases de V. Então, porque $\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_n$ geram V e $\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_p$ são l.i., tem-se, usando o Teorema 4.4, que $n \geq p$; trocando os papéis de B e B', vemos que $p \geq n$; logo, terá de ser $p = n$. $\square$

Faz, assim sentido, introduzir a seguinte definição:

Dimensão de um espaço

Se V é um espaço vectorial, chamamos *dimensão* de V ao número de elementos de uma sua base. Denotamos a dimensão de V por $\dim V$.

Exemplo 4.27. Sendo V um espaço vectorial, a dimensão do (sub)espaço $\{\mathbf{0}_V\}$ é zero.

Exemplo 4.28. A dimensão do espaço vectorial $\mathbb{R}^n$ é n.

Exemplo 4.29. A dimensão do espaço vectorial $\mathbb{R}^{m \times n}$ é mn.

Exemplo 4.30. A dimensão do espaço vectorial $\mathcal{P}_n(x)$ dos polinómios na variável x de grau não superior a n é $n + 1$.

Como consequência imediata da definição de dimensão e do Teorema 4.4, tem-se o seguinte resultado.

Teorema 4.8. *Seja V um espaço vectorial de dimensão n. Então:*

- *se $\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_r$ são vectores do espaço e $r < n$, $\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_r$ não geram V.*
- *se $\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_s$ são vectores do espaço e $s > n$, $\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_s$ não são linearmente independentes.*

Dito de outro modo, num espaço de dimensão n, o número mínimo de geradores é n e o número máximo de vectores linearmente independentes também é n.

Teorema 4.9. *Seja V um espaço vectorial de dimensão n e seja $(\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_r)$ uma sequência de vectores linearmente independentes de V, com $r < n$. Então é possível encontrar vectores $\mathbf{v}_{r+1}, \ldots, \mathbf{v}_n$ tais que*

$$(\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_r, \mathbf{v}_{r+1}, \ldots, \mathbf{v}_n)$$

é uma base de V.

Dem: De acordo com o teorema anterior, $\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_r$ não podem ser uma base de V, porque não geram V. Assim, existe pelo menos um vector $\mathbf{v}_{r+1}$ em V que não é c.l. dos vectores $\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_r$. Atendendo ao Corolário 4.3, o conjunto $\{\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_r, \mathbf{v}_{r+1}\}$ é l.i.; então, ou este conjunto é gerador e encontrámos a base (caso em que seria $n = r+1$) ou não é, e o raciocínio anterior, aplicado a este novo conjunto, repete-se. Ao fim de $n - r$ etapas, o processo tem de parar, porque não existem mais do que n vectores linearmente independentes em V. $\square$

Teorema 4.10. *Seja V um espaço vectorial de dimensão n e seja $(\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_s)$ uma sequência de vectores geradores de V, com $s > n$. Então, é possível extrair uma base de V da sequência $(\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_s)$.*

Dem: Como $s > n$, pelo Teorema 4.8, $(\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_s)$ não é uma base de V porque não é formada por vectores l.i. Então, pelo menos um dos vectores $\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_s$ é uma c.l. dos restantes $s - 1$ vectores. Eliminando esse vector da sequência, ficamos com uma sequência que é ainda geradora de V, de acordo com o Corolário 4.1. Então, ou esta sequência é linearmente independente e teremos encontrado a base (caso em que $n = s - 1$) ou não é, e o raciocínio repete-se. Ao fim de $s - n$ etapas, o processo tem de parar, porque não é possível ter menos do que n vectores geradores de V. $\square$

Teorema 4.11. *Seja E um espaço vectorial de dimensão n, $n \geq 1$. Então:*

1. *quaisquer n vectores linearmente independentes desse espaço formam um base do espaço (isto é, são necessariamente geradores).*
2. *quaisquer n vectores geradores do espaço formam uma base desse espaço (isto é, são necessariamente linearmente independentes).*

Dem:

1. Sejam $\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_n$ vectores l.i. de V. Suponhamos que $\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_n$ não são geradores de V e vejamos que obtemos uma contradição. Se $\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_n$ não geram V, existirá um vector $\mathbf{w} \in V$ que não está em $\langle \mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_n \rangle$, ou seja, que não é c.l. de $\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_n$. De acordo com o Corolário 4.3, $\{\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_n, \mathbf{w}\}$ será um conjunto l.i., o que é impossível pelo Teorema 4.8.

2. Sejam $\mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_n$ geradores de V e suponhamos que os vectores são linearmente dependentes. Se $n = 1$, o vector gerador não pode ser o vector nulo, logo será l.i.; veja o Exemplo 4.22. Se $n \geq 2$, então, pelo Teorema 4.3, pelo menos um dos vectores será c.l. dos restantes. Eliminando esse vector, o conjunto resultante (com $n - 1$ elementos) será ainda gerador, o que é impossível pelo Teorema 4.8.

$\square$

O resultado do teorema anterior é muito útil porque, se soubermos a dimensão do espaço, e nos for dado um conjunto de vectores em número igual à dimensão, para provar que eles formam uma base teremos apenas de mostrar que eles verificam <u>um</u> dos requisitos da definição de base: ou que são geradores ou que são linearmente independentes.

Por exemplo, dados 3 vectores de $\mathbb{R}^3$, para mostrar que eles formam uma uma base desse espaço bastará mostrar que são linearmente independentes.

Teorema 4.12. *Seja V um espaço vectorial e seja U um seu subespaço. Então, tem-se:*

1. $\dim U \leq \dim V$;

2. $U = V \iff \dim U = \dim V$.

Dem: Como exercício. $\square$

Consideremos novamente o caso particular de o espaço onde estamos a trabalhar ser o espaço $\mathbb{R}^n$, para um certo $n \in \mathbb{N}$.

Sejam dados $\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_r$ vectores de $\mathbb{R}^n$ e seja $U = \langle \mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_r \rangle$. Relembremos os dois processos de encontrar um conjunto de geradores de U, sem vectores redundantes, anteriormente descritos, a que chamámos *Processo 1* e *Processo 2*.

- O primeiro (*Processo 1*) consiste em formar a matriz A que tem esses vectores como colunas, sendo as colunas principais de A os geradores pretendidos.

Se analisarmos de novo esse processo, vemos que, da forma como a escolha foi feita, temos a garantia de que nenhuma das colunas obtidas é c.l. das restantes, ou seja, que elas são vectores linearmente independentes, pelo que constituem uma base de U.

- O segundo (*Processo 2*) consiste em formar a matriz B que tem esses vectores como linhas e efectuar operações elementares sobre B para a converter numa matriz E com a forma em escada. As linhas não nulas de E são geradores do subespaço.

  Dissemos também que se pode provar que nenhuma das linhas não nulas de E é c.l. das restantes, pelo que podemos concluir que essas linhas são linearmente independentes, formando, portanto, uma base do espaço U.

Em resumo, podemos afirmar o seguinte.

Os dois processos - Processo 1 e Processo 2 - de encontrar geradores sem vectores redundantes de um dado subespaço U de $\mathbb{R}^n$, descritos anteriormente (páginas 90 e 92), podem ser vistos como processos de encontrar bases de U.

4.6 Espaços associados a uma matriz

Nesta secção estudaremos alguns espaços vectoriais associados a uma dada matriz de $\mathbb{R}^{m\times n}$.

Espaço das linhas e espaço das colunas de uma matriz

Dada uma matriz $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$, podemos identificar as suas colunas com vectores de $\mathbb{R}^m$. Ao subespaço de $\mathbb{R}^m$ gerado por esses vectores, chamamos *espaço das colunas* da matriz A. Este espaço denota-se por $\mathcal{C}(A)$.

Por seu lado, podemos também identificar as linhas de A com vectores de $\mathbb{R}^n$. O subespaço de $\mathbb{R}^n$ gerado por estes vectores é chamado *espaço das linhas* de A e denotado por $\mathcal{L}(A)$.

Note-se que um vector $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^m$ está no espaço das colunas de A se e só se for uma combinação linear das colunas de A, o que, como sabemos, é equivalente a afirmar que o sistema $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ tem solução. Em resumo, temos o seguinte resultado.

Proposição 4.5. *Dada uma matriz $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$, tem-se:*

$$\mathbf{b} \in \mathcal{C}(A) \iff \textit{O sistema } A\mathbf{x} = \mathbf{b} \textit{ tem solução} \iff \exists \mathbf{s} \in \mathbb{R}^n : A\mathbf{s} = \mathbf{b}.$$

Vimos, no Exemplo 4.8, que dada uma matriz $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$, o conjunto das soluções do sistema homogéneo que tem A como matriz, isto é, o sistema $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$, é um subespaço de $\mathbb{R}^n$.

Espaço nulo de uma matriz

Dada uma matriz $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$ chama-se *espaço nulo* ou *núcleo* de A ao subespaço de $\mathbb{R}^n$ formado pelas soluções do sistema homogéneo $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$. Esse espaço é denotado por $\mathcal{N}(A)$.

Vejamos como podemos encontrar bases para cada um destes espaços e determinar, portanto, qual a respectiva dimensão.

Consideremos primeiramente o espaço das colunas de A, $\mathcal{C}(A)$. Tendo em conta o que dissemos no final da secção anterior, podemos usar o *Processo 1* [3] para obter uma base deste espaço, sendo levados a concluir que as colunas principais de A formam uma base de $\mathcal{C}(A)$. Como o número de colunas principais de A é igual à característica de A, segue-se que

$$\dim \mathcal{C}(A) = \mathrm{car}(A). \tag{4.4}$$

Concentrêmo-nos, agora, no espaço das linhas $\mathcal{L}(A)$. Também, pelo que vimos na secção anterior, para encontrar uma base deste espaço, poderemos usar o *Processo 2*, ou seja, podemos converter A numa matriz em escada E, por operações elementares sobre linhas. As linhas não nulas desta matriz serão uma base de $\mathcal{L}(A)$. Mas, como sabemos, o número de linhas não nulas de qualquer matriz em escada equivalente por linhas a A é igual à característica de A. Assim, podemos concluir que

$$\dim \mathcal{L}(A) = \mathrm{car}(A). \tag{4.5}$$

Como consequência imediata de (4.4) e (4.5), temos que

$$\dim \mathcal{C}(A) = \dim \mathcal{L}(A). \tag{4.6}$$

Além disso, tendo em conta a definição de matriz transposta, tem-se que

$$\mathcal{C}(A) = \mathcal{L}(A^{\mathsf{T}}) \quad \text{e} \quad \mathcal{L}(A) = \mathcal{C}(A^{\mathsf{T}}).$$

Então, tem-se

$$\mathrm{car}(A) = \dim \mathcal{C}(A) = \dim \mathcal{L}(A^{\mathsf{T}}) = \mathrm{car}(A^{\mathsf{T}}),$$

ou seja, concluímos o seguinte resultado:

[3] Naturalmente que também podemos usar o Processo 2, mas interessa-nos agora referir o uso do Processo 1.

Teorema 4.13. *Dada uma qualquer matriz A, tem-se*

$$\text{car}(A) = \text{car}(A^{\mathsf{T}}).$$

Vejamos agora, através de um exemplo, como encontrar uma base do espaço nulo de uma dada matriz.

Exemplo 4.31. Seja

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & -4 \\ 2 & -4 & -1 & -2 \\ 4 & -8 & 0 & -12 \end{pmatrix}$$

O espaço nulo de A, $\mathcal{N}(A)$, é o conjunto das soluções do sistema homogéneo $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$. Determinemos, então, da forma habitual, esse conjunto de soluções. Para tal convertamos a matriz do sistema, A, numa matriz com a forma em escada, por eliminação Gaussiana,[4] obtendo

$$E = \begin{pmatrix} 2 & -4 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & -4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

como é fácil de verificar. Como car$(A) = 2$ e o número de incógnitas é 4 o sistema dado é indeterminado. O grau de indeterminação deste sistema é igual a 2 $(= 4 - 2)$. Existem duas variáveis livres, $\mathbf{x_2}$ e $\mathbf{x_4}$, sendo as outras duas principais. Resolvendo este sistema da forma habitual, encontramos que o conjunto das soluções do sistema - ou seja, $\mathcal{N}(A)$ - é o conjunto

$$\mathcal{N}(A) = \{(2\alpha + 3\beta, \alpha, 4\beta, \beta) : \alpha, \beta \in \mathbb{R}\}.$$

Naturalmente, como

$$(2\alpha + \beta, \alpha, 4\beta, \beta) = (2\alpha, \alpha, 0, 0) + (3\beta, 0, 4\beta, \beta) = \alpha(2, 1, 0, 0) + \beta(3, 0, 4, 1),$$

podemos concluir que os vectores $(2, 1, 0, 0)$ e $(3, 0, 4, 1)$ são geradores de $\mathcal{N}(A)$, isto é:

$$\mathcal{N}(A) = \langle (2, 1, 0, 0), (3, 0, 4, 1) \rangle.$$

Como facilmente se verifica, os vectores $(2, 1, 0, 0), (3, 0, 4, 1)$ são l.i., pelo que formam uma base de $\mathcal{N}(A)$. Note-se que a dimensão de $\mathcal{N}(A)$ é igual ao grau de indeterminação do sistema.

O exemplo anterior ilustra um resultado importante, que enunciamos sem demonstração:

[4] Tratando-se de um sistema homogéneo, não há necessidade de considerarmos a matriz ampliada, bastando efectuar a eliminação de Gauss da matriz simples.

Teorema 4.14. *Dada uma matriz* $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$*, tem-se*

$$\dim \mathcal{N}(A) = n - \mathrm{car}(A).$$

Dem: Veja, e.g. [Mey00, p.199]. □

Como consequência imediata do resultado anterior e relembrando que $\mathrm{car}(A) = \dim \mathcal{C}(A)$, obtém-se o seguinte resultado importante:

$$\dim \mathcal{C}(A) + \dim \mathcal{N}(A) = n. \tag{4.7}$$

No quadro seguinte resumem-se os resultados mais importantes desta secção.

Espaços associados a uma matriz
Resumo de resultados

Seja A uma matriz real $m \times n$ e seja E uma matriz em escada tal que $E \overset{\text{linhas}}{\sim} A$. Então:

- as colunas principais de A formam uma base de $\mathcal{C}(A)$;
- as linhas não nulas de E formam uma base de $\mathcal{L}(A)$;
- $\dim \mathcal{C}(A) = \dim \mathcal{L}(A) = \mathrm{car}(A)$;
- $\dim \mathcal{N}(A) = n - \mathrm{car}(A)$;
- $\dim \mathcal{C}(A) + \dim \mathcal{N}(A) = n$.

4.7 Exercícios

Exercício 4.1. Demonstre a Proposição 4.2 na pg. 82.

Exercício 4.2. Em cada uma das alíneas seguintes é indicado um espaço vectorial V e um seu subconjunto S. Diga, justificando, quais dos conjuntos são subespaços do espaço dado.

(a) $V = \mathbb{R}^2$, $S = \{(x, 2x) : x \in \mathbb{R}\}$;

(b) $V = \mathbb{R}^3$, $S = \{(x_1, x_2, x_3) : x_1 = 0\}$;

(c) $V = \mathbb{R}^2$, $S = \{(m, n) : m, n$ são inteiros $\}$;

(d) $V = \mathbb{R}^3$, $S = \{(x, y, z) : x + y + z = 0\}$;

(e) $V = \mathbb{R}^3$, $S = \{(x, y, z) : x + y + z = 1\}$;

(f) $V = \mathbb{R}^3$, $S = \{(x, y, z) : x, y, z \geq 0\}$;

(g) $V = \mathbb{R}^5, \quad S = \{(x, 2x, 3x, 4x, 5x) : x \in \mathbb{R}\}$.

Exercício 4.3. Prove que, dada uma matriz $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$, o conjunto das soluções do sistema homogéno $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$ é um subespaço de $\mathbb{R}^n$.

Exercício 4.4. Seja V um espaço vectorial e sejam U, W dois subespaços de V. Prove que $U \cap W$ é um subespaço de V.

Exercício 4.5. Para $m, n \in \mathbb{N}$ (fixados), seja $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$ e $S \subseteq \mathbb{R}^n$. Seja

$$A(S) := \{A\mathbf{x} : \mathbf{x} \in S\}.$$

Prove que:

(a) se S é um subespaço de $\mathbb{R}^n$, então $A(S)$ é um subespaço de $\mathbb{R}^m$;

(b) se $S = \langle \mathbf{s}_1, \ldots, \mathbf{s}_k \rangle$ para certos vectores $\mathbf{s}_1, \ldots, \mathbf{s}_k$ de $\mathbb{R}^n$, então

$$A(S) = \langle A\mathbf{s}_1, \ldots, A\mathbf{s}_k \rangle.$$

Exercício 4.6. Considere os vectores $\mathbf{v}_1 = (1, 2, 3)$, $\mathbf{v}_2 = (1, 2, -1)$ e $\mathbf{v}_3 = (2, -1, 0)$ do espaço vectorial $\mathbb{R}^3$. Diga se o vector $\mathbf{v} = (0, 5, 2)$ é ou não c.l. de $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2$ e $\mathbf{v}_3$. Em caso afirmativo, diga, justificando, se os escalares da combinação linear são univocamente determinados e, se forem, determine-os.

Exercício 4.7. Considere os vectores $\mathbf{v}_1 = (1, -1, 0, 0), \mathbf{v}_2 = (0, 1, -1, 0)$ e $\mathbf{v}_3 = (0, 0, 1, -1)$ do espaço vectorial $\mathbb{R}^4$. Em cada alínea, diga se o vector indicado $\mathbf{v}$ é ou não combinação linear de $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2$ e $\mathbf{v}_3$. Em caso afirmativo, diga, justificando, se os escalares da combinação linear são univocamente determinados e, se forem, determine-os.

(a) $\mathbf{v} = (1, 1, 1, 1)$; (b) $\mathbf{v} = (2, -1, -2, 1)$.

(c) $\mathbf{v} = (1, 0, 0, 1)$; (d) $\mathbf{v} = (2, 1, 1, -4)$.

Exercício 4.8. Considere os seguintes subespaços U e W do espaço vectorial $\mathbb{R}^4$:

$$U = \langle (1, 2, 3, 1), (-3, -6, -9, -3), (3, 6, 2, 1), (5, 10, 8, 3) \rangle, \quad W = \langle (1, 2, 3, 1), (4, 8, 5, 2) \rangle.$$

(a) Indique um conjunto de geradores de U sem vectores redundantes.

(b) Diga se o vector $\mathbf{u} = (-2, -4, 1, 0)$ pertence a U.

(c) Diga, justificando, se $U = W$.

Exercício 4.9. Em cada alínea, indique se os vectores de $\mathbb{R}^4$ considerados são linearmente independentes ou linearmente dependentes. Para os que forem dependentes, escreva um dos vectores como c.l. dos outros.

(a) $\mathbf{v}_1 = (1, 3, 2, 1),\ \mathbf{v}_2 = (2, 3, 4, 2),\ \mathbf{v}_3 = (0, 1, 0, 1)$;

(b) $\mathbf{v}_1 = (1, 2, 3, 3),\ \mathbf{v}_2 = (2, 4, 1, -1),\ \mathbf{v}_3 = (-3, -6, -4, -2)$;

(c) $\mathbf{v}_1 = (1, 0, 0, 1),\ \mathbf{v}_2 = (0, 1, 1, 0),\ \mathbf{v}_3 = (3, 3, 3, 3)$.

Exercício 4.10. Sem efectuar quaisquer cálculos, diga, justificando, se:

(a) os vectores $\mathbf{u}_1 = (1, 2, -1)$ e $\mathbf{u}_2 = (3, -1, 2)$ geram $\mathbb{R}^3$;

(b) os vectores $\mathbf{v}_1 = (1, 2)$, $\mathbf{v}_2 = (3, 5)$ e $\mathbf{v}_3 = (7, -4)$ são vectores linearmente independentes de $\mathbb{R}^2$.

Exercício 4.11. (a) Encontre uma base de $\mathbb{R}^3$ que inclua os dois vectores $\mathbf{u}_1$ e $\mathbf{u}_2$ considerados na alínea (a) do exercício anterior.

(b) Encontre uma base de $\mathbb{R}^2$ formada com vectores do conjunto $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3\}$, onde $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}$ e $\mathbf{v}_3$ são os vectores considerados na alínea (b) do exercício anterior.

Exercício 4.12. Seja V um espaço vectorial e seja $S = \{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_r\}$ um seu subconjunto. Mostre que:

(a) se $\mathbf{0}_V \in S$, então S é um conjunto linearmente dependente;

(b) se S é linearmente dependente e $S' = \{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_r, \mathbf{v}_{r+1}, \ldots, \mathbf{v}_p\}$, $p > r$, então S' também é linearmente dependente;

(c) se S é linearmente independente e $S' \subseteq S$ $(S' \neq \emptyset)$, então S' também é linearmente independente.

Exercício 4.13. Considere o seguinte subconjunto do espaço vectorial $\mathbb{R}^3$

$$U = \{(x, y, z) : 3x + 2y - z = 0\}.$$

(a) Justifique (sem efectuar quaisquer cálculos) que U é um subespaço de $\mathbb{R}^3$.

Sugestão: Use o resultado do Exercício 4.2.

(b) Determine uma base e indique qual a dimensão de U.

(c) Mostre que o vector $\mathbf{u} = (1, 0, 3)$ pertence a U e determine as suas coordenadas na base encontrada na alínea anterior.

(d) Diga, justificando, se os vectores $\mathbf{u} = (1, 0, 3)$ e $\mathbf{v} = (5/3, -1, 3)$ formam uma base de U.

(e) Diga, justificando, se os vectores $\mathbf{u} = (1, 0, 3)$ e $\mathbf{w} = (2, -1, 5)$ formam uma base de U.

Exercício 4.14. Considere o seguinte subespaço do espaço vectorial $\mathbb{R}^4$:

$$U = \{(x, y, z, w) : x - y + 3w = 0 \text{ e } 2x + y + z = 0\}.$$

(a) Encontre uma base e indique qual a dimensão de U.

(b) Diga, justificando, se $\mathbf{u} = (-4/3, 5/3, 1, 1)$ pertence a U e, em caso afirmativo, determine as suas coordenadas na base encontrada na alínea anterior.

Exercício 4.15. Demonstre o Teorema 4.12 na pg. 106.

Exercício 4.16. Seja U o seguinte subespaço de $\mathbb{R}^3$:

$$U = \langle (1, 1, 1), (2, 3, -1), (0, 1, 5) \rangle.$$

(a) Determine uma base e diga qual é a dimensão do subespaço U.

(b) Justifique que $U = \mathbb{R}^3$.

Exercício 4.17. Para cada uma das matrizes indicadas nas alíneas seguintes:

(i) determine uma base para o espaço das linhas de A, $\mathcal{L}(A)$;

(ii) determine uma base para o espaço das colunas de A, $\mathcal{C}(A)$;

(iii) determine uma base para o espaço nulo de A, $\mathcal{N}(\mathcal{A})$, e confirme que

$$\dim \mathcal{C}(A) + \dim \mathcal{N}(A) = n,$$

onde n é o número de colunas de A.

(a) $A = \begin{pmatrix} 2 & -2 & 3 \\ 4 & 4 & 1 \\ 2 & 6 & -2 \\ 8 & 0 & 7 \end{pmatrix}$; (b) $A = \begin{pmatrix} 2 & -3 & 4 & 1 & 2 \\ 4 & -6 & 5 & 3 & -4 \\ -10 & 15 & -14 & 3 & 7 \\ -8 & 12 & -10 & 4 & 9 \end{pmatrix}$; (c) $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & -1 & 2 \\ 3 & 1 & 4 \end{pmatrix}$.

5

Transformações Lineares

5.1 Generalidades

As funções (ou aplicações) desempenham um papel fundamental em matemática, não sendo, portanto de estranhar, que isso aconteça também no caso particular da disciplina de Álgebra Linear.

Sejam V e W dois espaços vectoriais[1] e seja T uma aplicação de V em W (escrevemos $T : V \to W$). Uma vez que as operações de adição e de multiplicação escalar são as operações fundamentais num espaço vectorial, estaremos especialmente interessados em aplicações que "preservem" essas operações. Com isto, queremos dizer que, dados $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in V$, o vector $\mathbf{u} + \mathbf{v}$ deva ser transformado por T em $T(\mathbf{u}) + T(\mathbf{v})$ e, sendo $\alpha \in \mathbb{R}$, a imagem por T do vector $\alpha\mathbf{u}$ deva ser $\alpha T(\mathbf{u})$. Chamamos a tais funções *transformações lineares*. Tem-se, então, a seguinte definição.

Transformação Linear

Sejam V e W dois espaços vectoriais e seja $T : V \to W$ uma aplicação de V em W. Dizemos que T é uma *transformação linear* ou *aplicação linear* se satisfizer as duas propriedades seguintes:

1. $\forall \mathbf{u}, \mathbf{v} \in V, \quad T(\mathbf{u} + \mathbf{v}) = T(\mathbf{u}) + T(\mathbf{v})$;
2. $\forall \mathbf{u} \in V, \forall \alpha \in \mathbb{R}, \quad T(\alpha\mathbf{u}) = \alpha T(\mathbf{u})$.

[1] Continuamos a assumir que todos os espaços considerados, a não ser que algo seja dito em contrário, são espaços vectoriais reais; as adaptações para o caso de espaços vectoriais complexos são triviais.

Exemplo 5.1. A aplicação $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ definida por

$$T(x_1, x_2, x_3) = (x_1 + x_2, 0)$$

é linear. Vejamos que, de facto, T satisfaz as propriedades 1.e 2. da definição.

1. Sendo $\mathbf{x} = (x_1, x_2, x_3)$ e $\mathbf{y} = (y_1, y_2, y_3)$ dois vectores arbitrários de $\mathbb{R}^3$, tem-se

$$\begin{aligned} T(\mathbf{x}+\mathbf{y}) &\underset{①}{=} T(x_1+y_1, x_2+y_2, x_3+y_3) \underset{②}{=} ((x_1+y_1)+(x_2+y_2), 0) \\ &\underset{③}{=} ((x_1+x_2)+(y_1+y_2), 0) \underset{④}{=} (x_1+x_2, 0) + (y_1+y_2, 0) \\ &\underset{⑤}{=} T(\mathbf{x}) + T(\mathbf{y}). \end{aligned}$$

① Definição de adição em $\mathbb{R}^3$.

② Definição de T.

③ Comutatividade e associatividade da adição em $\mathbb{R}$.

④ Definição da adição em $\mathbb{R}^2$ e o facto de ser $0 + 0 = 0$.

⑤ Definição de T.

2. Sendo $\mathbf{x} = (x_1, x_2, x_3)$ um elemento qualquer de $\mathbb{R}^3$ e sendo $\alpha \in \mathbb{R}$, tem-se

$$\begin{aligned} T(\alpha\mathbf{x}) &\underset{①}{=} T(\alpha x_1, \alpha x_2, \alpha x_3) \underset{②}{=} (\alpha x_1 + \alpha x_2, 0) \\ &\underset{③}{=} (\alpha(x_1+x_2), 0) \underset{④}{=} \alpha(x_1+x_2, 0) \underset{⑤}{=} \alpha T(\mathbf{x}). \end{aligned}$$

① Definição da multiplicação escalar do e.v. $\mathbb{R}^3$.

② Definição de T.

③ Distributividade da multiplicação em relação à adição, em $\mathbb{R}$.

④ Definição da multiplicação escalar do e.v. $\mathbb{R}^2$ e o facto de ser $\alpha 0 = 0$, para qualquer $\alpha \in \mathbb{R}$.

⑤ Definição de T.

Seguem-se alguns exemplos importantes de aplicações lineares. Em cada caso, a verificação de que se trata, de facto, de uma aplicação linear é deixada ao cuidado dos alunos.

Exemplo 5.2. Sendo V e W dois espaços vectoriais, a aplicação $T : V \to W$ definida por

$$T(\mathbf{v}) = \mathbf{0}_W, \quad \forall \mathbf{v} \in V$$

é uma aplicação linear. Esta aplicação é chamada *aplicação nula*.

Exemplo 5.3. Sendo V um espaço vectorial, a aplicação $T : V \to V$ definida por

$$T(\mathbf{v}) = \mathbf{v}, \quad \forall \mathbf{v} \in V$$

é uma aplicação linear. Esta aplicação é chamada *aplicação identidade* (em V) sendo usualmente denotada por I_V ou id_V.

Exemplo 5.4. Sendo A uma matriz real $m \times n$ (m, n fixados), a aplicação $T_A : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ definida por

$$T_A(\mathbf{x}) = A\mathbf{x}, \quad \forall \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$$

é uma aplicação linear.

Vejamos agora alguns exemplos de aplicações entre espaços vectoriais que não são lineares.

Exemplo 5.5. A aplicação $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ definida por

$$T(x_1, x_2) = (x_1^2, x_2)$$

não é linear.

Exemplo 5.6. A aplicação $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ definida por

$$T(x_1, x_2, x_3) = (x_1 + x_2 + 3, 0)$$

não é linear.

Proposição 5.1. *Sejam V e W dois espaços vectoriais e seja $T : V \to W$ uma aplicação de V em W. Então, T é uma aplicação linear se e só se satisfizer a seguinte propriedade*

$$\forall \mathbf{x}, \mathbf{y} \in V, \ \forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}, \quad T(\alpha\mathbf{x} + \beta\mathbf{y}) = \alpha T(\mathbf{x}) + \beta T(\mathbf{y}).$$

Dem: Como exercício. □

Segue-se um teorema com algumas propriedades importantes das transformações lineares.

Teorema 5.1. *Seja $T : V \to W$ uma transformação linear. Então, tem-se:*

1. $T(\mathbf{0}_V) = \mathbf{0}_W$;
2. $\forall \mathbf{v} \in V, \quad T(-\mathbf{v}) = -T(\mathbf{v})$;
3. $\forall \mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_r \in V, \quad \forall \alpha_1, \ldots, \alpha_r \in \mathbb{R}, \quad T(\alpha_1\mathbf{v}_1 + \cdots + \alpha_r\mathbf{v}_r) = \alpha_1 T(\mathbf{v}_1) + \cdots + \alpha_r T(\mathbf{v}_r)$.

Dem:

1. Temos,
$$T(\mathbf{0}_V) = T(0\mathbf{0}_V) = 0T(\mathbf{0}_V) = \mathbf{0}_W,$$
uma vez que, num qualquer espaço U, se tem $0\mathbf{u} = \mathbf{0}_U$, para qualquer $\mathbf{u} \in U$; veja Proposição 4.2 na pg. 82.

2. Tem-se
$$T(-\mathbf{v}) = T((-1)\mathbf{v}) = (-1)T(\mathbf{v}) = -T(\mathbf{v}),$$
atendendo à propriedade 4 da Proposição 4.2 na pg. 82.

3. A demonstração faz-se facilmente por indução sobre r, usando o resultado da Proposição 5.1.

Nota:

- É frequente omitirmos os índices na propriedade 1. do teorema anterior, escrevendo apenas $T(\mathbf{0}) = \mathbf{0}$.
- O resultado 1. do teorema anterior é muito útil, porque nos ajuda a, muito facilmente, ver que não são lineares algumas transformações; por exemplo, a aplicação considerada no Exemplo 5.6 não pode ser linear, uma vez que $T(0,0,0) = (3,0) \neq (0,0)$.

5.2 Núcleo e espaço imagem

Núcleo de uma transformação linear

Seja $T : V \to W$ uma transformação linear entre dois espaços vectoriais V e W. O *núcleo* de T, denotado por $\mathrm{Nuc}(T)$, é o conjunto definido por
$$\mathrm{Nuc}(T) = \{\mathbf{v} \in V : T(\mathbf{v}) = \mathbf{0}_W\}.$$

Espaço imagem de uma transformação linear

Seja $T : V \to W$ uma transformação linear entre dois espaços vectoriais V e W. O *espaço imagem* de T (ou, simplesmente, a *imagem* de T), que denotaremos por $\mathrm{Im}(T)$, é o conjunto definido por
$$\mathrm{Im}(T) = \{\mathbf{w} \in W : \mathbf{w} = T(\mathbf{v}), \text{ para algum } \mathbf{v} \in V\}.$$
Por outras palavras, $\mathrm{Im}(T)$ é o contradomínio da aplicação T.

Teorema 5.2. *Sejam V e W espaços vectoriais e seja $T : V \to W$ uma aplicação linear. Então:*

1. *o núcleo de T é um subespaço de V;*
2. *a imagem de T é um subespaço de W.*

Dem:

1. Comecemos por notar que, de acordo com a definição, se tem $\mathsf{Nuc}(V) \subseteq V$. Para mostrarmos que este subconjunto de V é um subespaço teremos, então, de provar que ele verifica as três condições exigidas na definição de subespaço. Vejamos que, de facto, assim é.

   (a) Como T é uma transformação linear, sabemos, pelo Teorema 5.1, que $T(\mathbf{0}_V) = \mathbf{0}_W$, o que mostra que $\mathbf{0}_V \in \mathsf{Nuc}(V)$.

   (b) Sejam $\mathbf{u}$ e $\mathbf{v}$ dois elementos quaisquer de $\mathsf{Nuc}(T)$. Então, tem-se, por definição de $\mathsf{Nuc}(T)$, que $T(\mathbf{u}) = \mathbf{0}_W$ e $T(\mathbf{v}) = \mathbf{0}_W$. Assim sendo, tem-se

   $$T(\mathbf{u} + \mathbf{v}) = T(\mathbf{u}) + T(\mathbf{v}) = \mathbf{0}_W + \mathbf{0}_W = \mathbf{0}_W,$$

   o que mostra que $\mathbf{u} + \mathbf{v} \in \mathsf{Nuc}(T)$.

   (c) Seja $\mathbf{u} \in \mathsf{Nuc}(V)$, isto é, seja $\mathbf{u}$ tal que $T(\mathbf{u}) = \mathbf{0}_W$ e seja $\alpha \in \mathbb{R}$. Então

   $$T(\alpha\mathbf{u}) = \alpha T(\mathbf{u}) = \alpha\mathbf{0}_W = \mathbf{0}_W,$$

   donde concluímos que $\alpha\mathbf{u} \in \mathsf{Nuc}(T)$.

   Está, assim, provado que $\mathsf{Nuc}(T)$ é um subespaço de V.

2. A demonstração é deixada como exercício.

. $\square$

5.3 Representação matricial de transformações lineares

A partir deste momento, vamos dedicar-nos apenas ao estudo do caso particular de transformações lineares $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ (m, n fixos, mas arbitrários), isto é, ao caso em que $V = \mathbb{R}^n$

e $W = \mathbb{R}^m$. Vamos ver que existe uma relação estreita entre este tipo de transformações e as matrizes (reais) do tipo $m \times n$.

Comecemos por relembrar o Exemplo 5.4. Ele mostra que toda a matriz $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$ permite definir uma transformação linear $T_A : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$, através da fórmula

$$T_A(\mathbf{x}) = A\mathbf{x}.$$

Vamos ver que o recíproco também é verdadeiro, ou seja, que dada uma qualquer transformação linear $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$, existe uma matriz $A_T \in \mathbb{R}^{m\times n}$ tal que a imagem por T de um qualquer elemento $\mathbf{x}$ de $\mathbb{R}^n$ se pode obter simplesmente efectuando o produto $A_T\mathbf{x}$. Mais precisamente, tem-se o seguinte teorema.

Teorema 5.3. *Seja $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ uma transformação linear. Então existe uma e uma só matriz $A_T \in \mathbb{R}^{m\times n}$ tal que*

$$T(\mathbf{x}) = A_T\mathbf{x}, \quad \forall \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n. \tag{5.1}$$

Dem: Seja $S = (\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \ldots, \mathbf{e}_n)$ a base canónica de $\mathbb{R}^n$. Dado $\mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ em $\mathbb{R}^n$,[2] sabemos que que $\mathbf{x} = x_1\mathbf{e}_1 + \cdots + x_n\mathbf{e_n}$. Então,

$$T(\mathbf{x}) = T\left(x_1\mathbf{e}_1 + x_2\mathbf{e}_2 + \cdots + x_n\mathbf{e_n}\right) = x_1T(\mathbf{e}_1) + x_2T(\mathbf{e}_2) + \cdots + x_nT(\mathbf{e}_n). \tag{5.2}$$

Seja A_T a matriz cujas colunas são os vectores $T(\mathbf{e}_1), \ldots, T(\mathbf{e}_n)$, isto é,

$$A_T = \begin{pmatrix} T(\mathbf{e}_1) & T(\mathbf{e}_2) & \cdots & T(\mathbf{e}_n) \end{pmatrix}.$$

A igualdade (5.2) pode ser escrita como

$$T(\mathbf{x}) = \begin{pmatrix} T(\mathbf{e}_1) & T(\mathbf{e}_2) & \cdots & T(\mathbf{e}_n) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = A_T\mathbf{x}.$$

Acabámos de ver que a matriz A_T cujas colunas são as imagens por T dos vectores da base canónica de $\mathbb{R}^n$ – a qual é, naturalmente, uma matriz $m \times n$ – satisfaz

$$A_T\mathbf{x} = T(\mathbf{x}), \quad \forall \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n.$$

[2] Neste caso é conveniente adoptarmos a notação em coluna para os elementos de $\mathbb{R}^n$ e $\mathbb{R}^m$.

Vamos ver que esta é a única matriz que satisfaz essa propriedade.

Suponhamos que B é tal que $B\mathbf{x} = T(\mathbf{x})$ para todo o vector $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$. Então, em particular, ter-se-á

$$B\mathbf{e}_1 = T(\mathbf{e}_1),\ B\mathbf{e}_2 = T(\mathbf{e}_2), \ldots, B\mathbf{e}_n = T(\mathbf{e}_n).$$

Mas, para $j = 1, 2, \ldots, n$, $B\mathbf{e}_j$ é a j-ésima coluna de B; relembre o Exercício 2.4. Assim, podemos concluir que B tem como colunas os vectores $T(\mathbf{e}_1), \ldots, T(\mathbf{e}_n)$, ou seja que B é a matriz A_T definida anteriormente. □

Matriz canónica de uma transformação linear

Dada uma aplicação linear $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$, a *matriz canónica* de T é a matriz de $\mathbb{R}^{m \times n}$, que denotaremos por A_T, e cujas colunas são os vectores imagem por T de cada um dos vectores da base canónica de $\mathbb{R}^n$, isto é,

$$A_T = \begin{pmatrix} T(\mathbf{e}_1) & T(\mathbf{e}_2) & \cdots & T(\mathbf{e}_n) \end{pmatrix}.$$

Teorema 5.4. *Seja $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ uma aplicação linear e seja A_T a respectiva matriz canónica. Então:*

1. *o núcleo de T é igual ao espaço nulo de A_T, isto é*

$$\text{Nuc}(T) = \mathcal{N}(A_T); \tag{5.3}$$

2. *o espaço imagem de T coincide com o espaço das colunas de A_T, i.e.*

$$\text{Im}(T) = \mathcal{C}(A_T). \tag{5.4}$$

Dem:

1. Temos

$$\mathbf{v} \in \text{Nuc}(T) \iff T(\mathbf{v}) = \mathbf{0} \iff A_T\mathbf{v} = \mathbf{0} \iff \mathbf{v} \in \mathcal{N}(A_T).$$

2. Temos

$$\begin{aligned} \mathbf{w} \in \text{Im}(T) &\iff \exists \mathbf{v} \in \mathbb{R}^n : \mathbf{w} = T(\mathbf{v}) \\ &\iff \exists \mathbf{v} \in \mathbb{R}^n : \mathbf{w} = A_T\mathbf{v} \\ &\iff \mathbf{w} \in \mathcal{C}(A_T) \end{aligned}$$

   onde, na última passagem, fizemos uso do resultado da Proposição 4.5 na pg. 107.

□

Como consequência imediata dos resultados do teorema anterior, obtém-se o seguinte corolário.

Corolário 5.1. *Seja $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ uma transformação linear e seja A_T a respectiva matriz canónica. Então, tem-se:*

1. $\dim \mathsf{Im}(T) = \mathsf{car}(A_T)$;
2. $\dim \mathsf{Nuc}(T) = n - \mathsf{car}(A_T)$;
3. $\dim \mathsf{Nuc}(T) + \dim \mathsf{Im}(T) = n$.

5.4 Transformações injectivas, sobrejectivas e bijectivas

Definição 5.1. Seja $T : V \to W$ uma aplicação linear.

1. T é uma aplicação *injectiva* (ou *monomorfismo*) se e só se verificar
$$T(\mathbf{u}) = T(\mathbf{v}) \Rightarrow \mathbf{u} = \mathbf{v}, \quad \forall \mathbf{u}, \mathbf{v} \in V.$$
2. T é uma aplicação *sobrejectiva* (ou *epiformismo*) se e só se verificar
$$\forall \mathbf{w} \in W \ \exists \mathbf{v} \in V : \mathbf{w} = T(\mathbf{v}).$$
3. T é bijectiva (ou *isomorfismo*) se e só se for injectiva e sobrejectiva.

Teorema 5.5. *Seja $T : V \to W$ uma aplicação linear. Então:*

1. *T é injectiva se e só se* $\mathsf{Nuc}(T) = \{\mathbf{0}_V\}$;
2. *T é sobrejectiva se e só se* $\mathsf{Im}(T) = W$.

Dem:

1. $\Rightarrow$) Suponhamos que T é injectiva e seja $\mathbf{v} \in \mathsf{Nuc}(T)$. Então, por definição de $\mathsf{Nuc}(T)$, temos que $T(\mathbf{v}) = \mathbf{0}_W$. Por outro lado, sabemos que $T(\mathbf{0}_V) = \mathbf{0}_W$. Da injectividade de T, concluímos que $\mathbf{v} = \mathbf{0}_V$.

   $\Leftarrow$) Suponhamos que $\mathsf{Nuc}(T) = \{\mathbf{0}_V\}$ e mostremos que T é injectiva.

Sejam $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in V$ tais que $T(\mathbf{u}) = T(\mathbf{v})$. Então, será

$$T(\mathbf{u} - \mathbf{v}) = T(\mathbf{u}) - T(\mathbf{v}) = \mathbf{0}_W,$$

ou seja, será $(\mathbf{u} - \mathbf{v}) \in \text{Nuc}(T)$. Como $\text{Nuc}(T) = \{\mathbf{0}_V\}$, segue-se que terá de ser $\mathbf{u} - \mathbf{v} = \mathbf{0}_V$ ou seja, que $\mathbf{u} = \mathbf{v}$, o que mostra que T é injectiva.

2. Segue-se de imediato das definições de sobrejectividade e de espaço imagem.

$\square$

Teorema 5.6. *Seja $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ uma aplicação linear e seja A_T a respectiva matriz canónica. Então:*

1. *a aplicação é sobrejectiva se e só se* $\text{car}(A_T) = m$*;*
2. *a aplicação é injectiva se e só se* $\text{car}(A_T) = n$*.*

Dem:

1. T é sobrejectiva $\iff \text{Im}(T) = \mathbb{R}^m \iff \dim \text{Im}(T) = m \iff \text{car}(A_T) = m.$
2. $$\begin{aligned} T \text{ é injectiva} &\iff \text{Nuc}(T) = \{\mathbf{0}\} \\ &\iff \dim \text{Nuc}(T) = 0 \\ &\iff \dim \text{Im}(T) = n - 0 = n \\ &\iff \text{car}(A_T) = n. \end{aligned}$$

$\square$

Corolário 5.2. *Seja $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ uma aplicação linear. Então:*

1. *se $n < m$, a aplicação não é sobrejectiva;*
2. *se $m < n$, a aplicação não é injectiva;*
3. *se $m = n$, então são equivalentes:*
   (a) *T é injectiva;*
   (b) *T é sobrejectiva;*
   (c) *T é bijectiva;*
   (d) *a matriz canónica de T é invertível.*

Dem: Como exercício. $\square$

5.5 Exercícios

Exercício 5.1. Em cada uma das alíneas seguintes, diga, justificando, se a aplicação T é ou não linear.

(a) $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, definida por $T(x_1, x_2) = (2x_1 + 3x_2, x_1)$.

(b) $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$, definida por $T(x_1, x_2, x_3) = (x_1x_2, x_2x_3, x_3x_1)$.

(c) $T : \mathcal{P}_2(x) \to \mathcal{P}_2(x)$ definida por $T(ax^2 + bx + c) = 2ax^2 + 3bx$.

(d) $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$, definida por $T(x_1, x_2, x_3) = (2x_1, x_2 + 1, 3x_3)$.

Exercício 5.2. Seja P uma determinada matriz quadrada de ordem n, invertível e seja $T : \mathbb{R}^{n\times n} \to \mathbb{R}^{n\times n}$ a aplicação definida por

$$T(A) = P^{-1}AP, \quad \forall A \in \mathbb{R}^{n\times n}.$$

Mostre que T é uma aplicação linear.

Exercício 5.3. Demonstre a Proposição 5.1.

Exercício 5.4. Seja $T : V \to W$ uma aplicação linear. Prove que a imagem de T, $\mathrm{Im}(T)$, é um subespaço vectorial do espaço W.

Exercício 5.5. Seja $T : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^3$ a aplicação definida por

$$T(x_1, x_2, x_3, x_4) = (x_1 + x_2 + x_3, x_2 + x_3 + x_4, x_1 + x_3 + x_4).$$

(a) Mostre que T é uma transformação linear.

(b) Determine a matriz canónica de T, A_T, e calcule a sua característica.

(c) Determine o núcleo de T e indique uma sua base.

(d) Diga, justificando, se: (i) T é injectiva; (ii) T é sobrejectiva.

Exercício 5.6. Seja $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ a aplicação linear cuja matriz canónica é

$$A_T = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & 3 \\ 3 & 0 & 3 \end{pmatrix}.$$

(a) Determine a expressão de $T(x_1, x_2, x_3)$ com $(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3$.

(b) Diga, justificando, se o vector $(5, 7, 9) \in \mathrm{Im}(T)$.

(c) Indique uma base para Nuc(T).

(d) Indique uma base para Im(T).

Exercício 5.7. Seja $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ uma transformação linear tal que

$$T(1,1) = (1,2,1), \quad T(-1,1) = (-1,0,3).$$

(a) Determine $T(1,0)$ e $T(0,1)$ e indique, então, qual a matriz canónica de T.

(b) Determine $T(x,y)$ com $(x,y) \in \mathbb{R}^2$.

(c) Diga se T é injectiva.

Exercício 5.8. Seja $T_k : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ a aplicação linear cuja matriz canónica é:

$$\begin{pmatrix} 3 & 6 & -9 \\ 2 & 2k+2 & -4 \\ 1 & 2 & k-3 \end{pmatrix}.$$

(a) Determine para que valores de k a aplicação T_k é injectiva.

(b) Considere $k = 1$.

  (i) Determine Nuc(T_1) e diga qual a sua dimensão.

  (ii) Encontre uma base para Im(T_1).

6

Valores e Vectores Próprios

6.1 Generalidades

Valor próprio e vector próprio

Seja $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$. Um escalar $\lambda \in \mathbb{R}$ diz-se um *valor próprio* de A se e só se existir um vector não nulo $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ tal que

$$A\mathbf{x} = \lambda\mathbf{x}.$$

Neste caso, dizemos que $\mathbf{x}$ é um *vector próprio* associado ao valor próprio λ.

Valores e vectores próprios para matrizes complexas são definidos de modo análogo; se $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$, um escalar $\lambda \in \mathbb{C}$ será um valor próprio de A se e só se existir um vector não nulo $\mathbf{x} \in \mathbb{C}^n$ tal que $A\mathbf{x} = \lambda\mathbf{x}$. Nestas condições, $\mathbf{x}$ diz-se um vector próprio de A associado ao valor próprio λ.

Note-se que uma matriz $n \times n$ de elementos reais pode ser sempre encarada como um elemento do espaço $\mathbb{C}^{n\times n}$, pelo que, dada uma matriz com números reais teremos de saber se a vemos como um elemento do espaço $\mathbb{R}^{n\times n}$, procurando apenas valores próprios reais e vectores próprios com elementos reais, ou aceitamos também valores próprios complexos e vectores próprios em $\mathbb{C}^n$.

Embora os valores próprios complexos possam ser importantes, neste curso, a não ser que algo seja dito em contrário, dada uma matriz real, quadrada de ordem n, estaremos apenas interessados nos seus valores próprios reais e em vectores próprios de $\mathbb{R}^n$.

O teorema seguinte é muito importante porque nos fornece um processo de cálculo dos valores próprios de uma matriz.

Teorema 6.1. *Seja $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$. Então, λ é um valor próprio de A se e só se*

$$\det(A - \lambda I) = 0.$$

Dem:

$$\begin{aligned}
\lambda \text{ é valor próprio de } A &\iff \exists \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n, \mathbf{x} \neq \mathbf{0} : A\mathbf{x} = \lambda\mathbf{x} \\
&\iff \exists \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n, \mathbf{x} \neq \mathbf{0} : A\mathbf{x} = \lambda I\mathbf{x} \\
&\iff \exists \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n, \mathbf{x} \neq \mathbf{0} : (A - \lambda I)\mathbf{x} = \mathbf{0} \\
&\iff \text{ O sistema } (A - \lambda I)\mathbf{x} = \mathbf{0} \text{ tem uma solução não trivial} \\
&\iff \operatorname{car}(A - \lambda I) < n \iff \det(A - \lambda I) = 0;
\end{aligned}$$

veja a Equação 3.6 na pg. 68. □

Corolário 6.1. *Seja A uma matriz quadrada de ordem n. Então, tem-se*

$$\det A = 0 \iff \lambda = 0 \textit{ é um valor próprio de } A.$$

Dem:

$$\lambda = 0 \text{ é um valor próprio de } A \iff \det(A - 0I) = 0 \iff \det A = 0.$$

□

Exemplo 6.1. Seja $A = \begin{pmatrix} 7 & -4 \\ 5 & -2 \end{pmatrix}$ e calculemos os seus valores próprios. Temos

$$\begin{aligned}
\det(A - \lambda I) = 0 &\iff \begin{vmatrix} 7-\lambda & -4 \\ 5 & -2-\lambda \end{vmatrix} = 0 \\
&\iff \lambda^2 - 5\lambda + 6 = 0 \iff \lambda = 2 \text{ ou } \lambda = 3.
\end{aligned}$$

Concluímos, assim, que A tem dois valores próprios, $\lambda_1 = 2$ e $\lambda_2 = 3$.

Para determinar os vectores próprios associados ao valor próprio $\lambda_1 = 2$, teremos de encontrar as solução não nulas do sistema homogéneo

$$(A - 2I)\mathbf{x} = \mathbf{0}.$$

Mas,

$$A - 2I = \begin{pmatrix} 5 & -4 \\ 5 & -4 \end{pmatrix}.$$

Convertendo a matriz anterior na forma em escada vem

$$\begin{pmatrix} 5 & -4 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Resolvendo o sistema da forma habitual, vemos que ele tem como soluções o conjunto

$$\{(4/5\alpha, \alpha) : \alpha \in \mathbb{R}\}.$$

Os vectores próprios associados ao valor próprio 2 serão todos os vectores não nulos do conjunto anterior, ou seja, serão os vectores da forma $(4/5\alpha, \alpha)$ com $\alpha \neq 0$.

De modo análogo se verifica que qualquer vector da forma (β, β) com $\beta \neq 0$ é um vector próprio associado ao valor próprio $\lambda_2 = 3$.

Definição 6.1. Sendo A uma matriz quadrada de ordem n, pode provar-se que

$$p_A(\lambda) = \det(A - \lambda I) \tag{6.1}$$

é um polinómio na variável λ de grau exactamente igual a n. Este polinómio $p_A(\lambda)$ é chamado *polinómio característico* de A. A equação

$$p_A(\lambda) = 0 \tag{6.2}$$

é chamada *equação característica* de A.

Vemos, assim, que os valores próprios de A são as raízes da sua equação característica ou, dito de outro modo, os zeros do seu polinómio característico.

6.2 Subespaços próprios

Teorema 6.2. *Seja $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ e seja $\lambda \in \mathbb{R}$ um valor próprio de A. Então, os vectores próprios de A associados ao valor próprio λ são os vectores não nulos do espaço nulo da matriz $(A - \lambda I)$; assim, podemos afirmar que o conjunto dos vectores próprios de A associados a λ, juntamente com o vector nulo de $\mathbb{R}^n$, formam um subespaço de $\mathbb{R}^n$ (o subespaço $\mathcal{N}(A - \lambda I)$).*

Dem:

$$\begin{aligned} &\mathbf{x} \text{ é um vector próprio de } A \text{ associado ao valor próprio } \lambda \\ &\iff \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n,\ \mathbf{x} \neq 0 \text{ e } A\mathbf{x} = \lambda\mathbf{x} \\ &\iff \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n,\ \mathbf{x} \neq 0 \text{ e } (A - \lambda I)\mathbf{x} = \mathbf{0} \\ &\iff \mathbf{x} \in \mathcal{N}(A - \lambda I) \text{ e } \mathbf{x} \neq \mathbf{0}. \end{aligned}$$

□

Subespaço próprio associado a um valor próprio

Seja $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ e seja $\lambda \in \mathbb{R}$ um seu valor próprio. O subespaço $\mathcal{N}(A-\lambda I)$ (ou seja, o subespaço formado pelo conjunto dos vectores próprios associados a λ, conjuntamente com o vector nulo de $\mathbb{R}^n$) é chamado *subespaço próprio* de A associado ao valor próprio λ e será denotado por E_λ. A dimensão deste subespaço é chamada *multiplicidade geométrica* do valor próprio λ.[a]

[a] À multiplicidade de λ enquanto raíz da equação característica, chamamos *multiplicidade algébrica* do valor próprio.

6.3 Matrizes diagonalizáveis

Teorema 6.3. *Seja $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ e suponhamos que A tem n vectores próprios $\mathbf{v}_1,\ldots,\mathbf{v}_n$ associados, respectivamente, a valores próprios $\lambda_1,\ldots,\lambda_n$ (não necessariamente distintos), linearmente independentes. Seja S a matriz que tem esses vectores próprios como colunas e seja Λ a matriz diagonal com elementos diagonais iguais a $\lambda_1,\ldots,\lambda_n$, i.e.*

$$\Lambda = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_n \end{pmatrix}.$$

Então:

1. *S é uma matriz invertível;*
2. *$S^{-1}AS = \Lambda$.*

Dem:

1. Basta notar que, sendo S a matriz $n\times n$ definida por $S = \begin{pmatrix}\mathbf{v}_1 & \mathbf{v}_2 & \cdots \mathbf{v}_n\end{pmatrix}$ e uma vez, que por hipótese, $\mathbf{v}_1,\ldots,\mathbf{v}_n$ são linearmente independentes, ter-se-á car$(S) = n$, o que garante que S é invertível.

2. Como $A\mathbf{v}_i = \lambda_i \mathbf{v}_i$, tem-se

$$\begin{aligned} AS &= A\Big(\mathbf{v}_1\ \mathbf{v}_2\ \cdots \mathbf{v}_n\Big) \\ &= \Big(A\mathbf{v}_1\ A\mathbf{v}_2\ \cdots A\mathbf{v}_n\Big) \\ &= \Big(\lambda_1\mathbf{v}_1\ \lambda_2\mathbf{v}_2\ \cdots\ \lambda_n\mathbf{v}_n\Big) \\ &= \Big(\mathbf{v}_1\ \mathbf{v}_2\ \cdots \mathbf{v}_n\Big) \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_n \end{pmatrix} \\ &= S\Lambda. \end{aligned}$$

De $AS = S\Lambda$, vem, multiplicando ambos os membros (à esquerda) por S^{-1}, $S^{-1}AS = S^{-1}S\Lambda = \Lambda$, o que conclui a demonstração.

□

Definição 6.2. Uma matriz $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ diz-se *diagonalizável* se existir uma matriz invertível S tal que $S^{-1}AS$ seja uma matriz diagonal. Nesse caso, dizemos que S *diagonaliza* A.

Definição 6.3. Dadas duas matrizes A e B quadradas de ordem n, dizemos que B é *semelhante* a A se e só se existir uma matriz invertível P tal que $B = P^{-1}AP$.

Note-se que, se B é semelhante a A, também A é semelhante a B (basta notar que $B = P^{-1}AP \iff PBP^{-1} = A \iff (P^{-1})^{-1}BP^{-1} = A$) pelo que podemos simplesmente dizer que A e B são semelhantes.

O teorema anterior mostra, portanto, que se A for uma matriz quadrada de ordem n que tenha n vectores próprios linearmente independentes, então A é diagonalizável, ou, dito de outro modo, A é semelhante a uma matriz diagonal.

É fácil mostrar-se que o recíproco também é verdadeiro, isto é, que se $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ é diagonalizável, então A admite n vectores próprios linearmente independentes. Em resumo, tem-se o seguinte teorema.

Teorema 6.4. *Uma matriz $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ é diagonalizável (i.e., é semelhante a uma matriz diagonal) se e só se tiver n vectores próprios linearmente independentes.*

O resultado enunciado no corolário seguinte obtém-se de imediato.

Corolário 6.2. *Uma matriz $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ é diagonalizável se e só se existir uma base de $\mathbb{R}^n$ formada por vectores próprios de A.*

Enunciamos agora um teorema importante, que daremos sem demonstração.

Teorema 6.5. *Vectores próprios associados a valores próprios distintos são vectores linearmente independentes.*

Dem: Veja, e.g. [Mey00, pp.511-512]. $\square$

Como consequência imediata do teorema anterior, tem-se o seguinte resultado.

Corolário 6.3. *Seja $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$. Se A tem n valores próprios distintos, então A é diagonalizável.*

Dem: É evidente, porque, nesse caso, de acordo com o teorema anterior, A tem n vectores próprios linearmente independentes, o que, como vimos, garante que A é diagonalizável. $\square$

No quadro seguinte, resumimos os resultados referidos acima.

Seja A uma matriz quadradada de ordem n. Então:

- se A tem n valores próprios distintos, então A tem n vectores próprios linearmente independentes e é, portanto, diagonalizável;
- se A não tem n valores próprios distintos, A pode ou não ser diagonalizável; se a equação característica de A tiver uma raiz real múltipla, será necessário averiguar se A tem ou não n vectores próprios linearmente independentes.

6.4 Exercícios

Exercício 6.1. Determine o polinómio característico, a equação característica e os valores próprios de cada uma das matrizes seguintes:

(a) $A = \begin{pmatrix} 4 & -4 \\ -4 & -2 \end{pmatrix}$; (b) $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 3 & 2 \\ -2 & -3 & 10 \end{pmatrix}$; (c) $A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 4 & 1 \\ 0 & 2 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

Exercício 6.2. Sabendo que $\lambda = 1$ é um valor próprio da seguinte matriz

$$A = \begin{pmatrix} 5 & -7 & 7 \\ 4 & -3 & 4 \\ 4 & -1 & 2 \end{pmatrix},$$

determine os restantes valores próprios de A.

Exercício 6.3. Considere a matriz

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}.$$

Sem resolver a sua equação característica, indique quais dos vectores considerados nas alíneas seguintes são vectores próprios de A e, para os que o forem, identifique o valor próprio a que estão associados.

(a) $\begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}$; (b) $\begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$; (c) $\begin{pmatrix} 0 \\ 5 \\ 0 \end{pmatrix}$; (d) $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$.

Exercício 6.4. Seja A uma matriz e seja λ um valor próprio de A com vector próprio associado $\mathbf{x}$. Prove que:

(a) dado $\alpha \in \mathbb{R}$, $\alpha\lambda$ é um valor próprio da matriz αA, com vector próprio associado $\mathbf{x}$;

(b) λ^2 é um valor próprio da matriz A^2, com vector próprio associado $\mathbf{x}$;

(c) para $\beta \in \mathbb{R}$, $\lambda - \beta$ é um valor próprio da matriz $A - \beta I$, com vector próprio associado $\mathbf{x}$;

(d) se A é invertível, então $\lambda \neq 0$ e $\frac{1}{\lambda}$ é valor próprio da matriz A^{-1} com vector próprio associado $\mathbf{x}$.

Exercício 6.5. Justifique a seguinte afirmação: "*Os valores próprios de uma matriz triangular são iguais aos elementos da sua diagonal principal.*"

Exercício 6.6. Considere a matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$.

(a) Seja B a matriz obtida de A trocando a ordem das suas linhas. Calcule os valores próprios de A e de B e compare-os.

(b) Seja C a matriz obtida de A multiplicando a sua primeira linha por 3. Calcule os valores próprios de C e compare-os com os de A.

(c) Seja D a matriz obtida de A adicionando à sua primeira linha, a segunda linha multiplicada por -1. Determine os valores próprios de D e compare-os com os de A.

Nota: O objectivo deste exercício é mostrar que, em geral, as operações elementares sobre as linhas de uma matriz alteram os valores próprios da matriz (e é fácil de ver que o mesmo se passa com as operações elementares sobre as colunas).

Exercício 6.7. Seja $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 0 \\ 4 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 6 \end{pmatrix}$.

(a) Determine os valores próprios e vectores próprios de A.

(b) Para cada um dos valores próprios da matriz, indique uma base do correspondente subespaço próprio.

(c) Encontre uma base de $\mathbb{R}^3$ formada por vectores próprios de A.

(d) Determine uma matriz S que diagonaliza A.

Exercício 6.8. Em cada uma das alíneas seguintes: determine os valores próprios de A e respectivos subespaços próprios; indique a dimensão dos subespaços próprios; diga se a A matriz é diagonalizável e, se o for, encontre uma matriz S que a diagonaliza.

(a) $A = I_3$;

(b) $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$;

(c) $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$;

(d) $A = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -4 & 0 \end{pmatrix}$;

(e) $A = \begin{pmatrix} 5 & 0 & -4 \\ 0 & -3 & 0 \\ -4 & 0 & -1 \end{pmatrix}$;

(f) $A = \begin{pmatrix} 2 & -5 & 5 \\ 0 & 3 & -1 \\ 0 & -1 & 3 \end{pmatrix}$.

Exercício 6.9. **Nota**: Este exercício pretende testar os seus conhecimentos sobre resultados que não têm a ver apenas com o presente capítulo.

Seja A uma matriz quadrada de ordem n e seja T_A a aplicação linear $T_A : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ cuja matriz canónica é A. Preencha devidamente os espaços em branco:

A é invertível $\iff$ car$(A) =$

$\iff$ $\det A \quad 0$

$\iff$ 0 $\quad$ valor próprio de A

$\iff$ as colunas de A são linearmente

$\iff$ as colunas de A formam uma base de

$\iff$ $\mathcal{C}(A) =$

$\iff$ $\mathcal{N}(A) =$

$\iff$ A aplicação linear T_A é

$\iff$ $\dim \operatorname{Im}(T_A) =$

$\iff$ $\dim \operatorname{Nuc}(T_A) =$

$\iff$ O sistema homogéneo$A\mathbf{x} = \mathbf{0}$ $\quad$ tem soluções não triviais

$\iff$ O sistema $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ ($\mathbf{b} \in \mathbb{R}^{n\times 1}$) $\quad$ tem solução única

7

Soluções dos Exercícios

7.1 Capítulo 1

Exercício 1.1.

(a) Sim; pivôs: $a_{11} = 1$; $a_{23} = 3$; $a_{34} = 2$.

(b) Não.

(c) Sim; pivôs: $a_{11} = 2$; $a_{23} = 3$; $a_{35} = 3$.

(d) Não.

(e) Não.

(f) Sim; pivôs: $a_{11} = 1$; $a_{22} = 1$; $a_{33} = 1$; $a_{44} = 1$.

Exercício 1.2.

(a) $\begin{pmatrix} 1 & 6 & 4 & 2 \\ 0 & 5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$; car$(A) = 3$; col. principais: $1^{\underline{a}}, 2^{\underline{a}}, 4^{\underline{a}}$.

(b) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -3 \end{pmatrix}$; car$(A) = 3$; col. principais: $1^{\underline{a}}, 2^{\underline{a}}, 4^{\underline{a}}$.

(c) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & -3 & -3 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 10 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$; car$(A) = 3$; col. principais: $1^{\underline{a}}, 3^{\underline{a}}, 5^{\underline{a}}$.

(d) $\begin{pmatrix} 2 & 6 & 4 & 0 \\ 0 & 5 & 10 & 25 \\ 0 & 0 & -2 & -15 \end{pmatrix}$; car$(A) = 3$; col. principais: $1^{\underline{a}}, 2^{\underline{a}}, 3^{\underline{a}}$.

(e) $\begin{pmatrix} -3 & 0 & -6 \\ 0 & 4 & 12 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$; car$(A) = 2$; col. principais: $1^{\underline{a}}, 2^{\underline{a}}$.

(f) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & -8 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$; car$(A) = 3$; col. principais: $1^{\underline{a}}, 2^{\underline{a}}, 3^{\underline{a}}$.

Exercício 1.3.

(a) Não; Contra-exemplo:

$$(E|c) = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 2 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right).$$

(b) Sim.

Exercício 1.4. Seja E uma matriz em escada obtida de A por operações elementares.[1] Sabemos que

$$\begin{aligned} \text{car}(A) &= \text{n. pivôs de } E \\ &= \text{n. linhas não nulas de } E \\ &= \text{n. colunas de } E \text{ que contêm pivôs} \end{aligned}$$

Além disso, E tem m linhas e n colunas.

(a) Como car(A) é igual ao número de linhas não nulas de E, é evidente que car$(A) \leq m$; por outro lado, sendo car(A) igual ao número de colunas de E que contêm pivôs, tem-se que car$(A) \leq n$.

(b) Neste caso, E tem uma linha de zeros.

(c) Neste caso, E tem uma linha de zeros.

(d) Neste caso, E tem uma coluna de zeros.

Exercício 1.5. **Nota:** Apresentamos só as matrizes em escada obtidas a partir da matriz ampliada do sistema.

(a)

$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & -2 & -6 \\ 0 & 4 & 4 & 12 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{array}\right)$;

car$(A) =$ car$(A|\mathbf{b}) = 3$; $n = 3$; S.P.D.; solução: $(-1, 1, 2)$.

(b)

$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & -2 & -1 \\ 0 & -1 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 7 \end{array}\right)$;

car$(A) = 2$; car$(A|\mathbf{b}) = 3$; S.I.

[1] Se preferir, pode pensar em $E = E_A$

(c)
$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right);$$ car$(A) =$ car$(A|b) = 2$, $n = 3$; S.P.I. Sol: $\{(1-2\alpha, -1+\alpha, \alpha) : \alpha \in \mathbb{R}\}$.

(d)
$$\left(\begin{array}{cc|c} 1 & -2 & -1 \\ 0 & 9 & 18 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right);$$
car$(A) =$ car$(A|\mathbf{b}) = 2$; $n = 2$; S.P.D.; solução: $(3, 2)$.

(e)
$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & -5 & -5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right);$$
car$(A) =$ car$(A|\mathbf{b}) = 2$; $n = 3$; S.P.I. (grau indeterminação=1); conjunto de soluções: $\{(1 + \alpha, \alpha, 1) : \alpha \in \mathbb{R}\}$.

(f)
$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & -1 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right);$$ car$(A) =$ car$(A|b) = 2$; $n = 4$; S.P. duplamente indeterminado.
Sol: $\{(1 - 2\alpha - \beta, \alpha, 2 - \beta, \beta) : \alpha, \beta \in \mathbb{R}\}$.

(g)
$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & -2 & 2 \\ 0 & 0 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{array}\right)$$
car$(A) = 3$; car$(A|\mathbf{b}) = 4$; S.I.

(h)
$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & -2 & 2 \\ 0 & 0 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$
car$(A) = 3$; car$(A|\mathbf{b}) = 3$; $n = 3$; S.P.D; solução: $(2, 1/2, -1/2)$.

Exercício 1.6.

(a)
$$\left(\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & k \\ 0 & k+3 & 3k-2 \end{array}\right)$$

- $k = -3 \Longrightarrow$ car$(A) = 1$ e car$(A|\mathbf{b}) = 2 \Longrightarrow$ S.I.
- $k \neq -3 \Longrightarrow$ car$(A) =$ car$(A|\mathbf{b}) = 2$; $n = 2$; S.P.D.; solução: $(\frac{k^2+2}{k+3}, \frac{3k-2}{k+3})$.

(b)
$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & k \\ 0 & 1-k & 2-k & 2-k^2 \\ 0 & 0 & k-2 & (k-2)(k+3) \end{array}\right)$$

- $k \neq 1, 2 \Longrightarrow$ car$(A) =$ car$(A|\mathbf{b}) = 3$; $n = 3$; S.P.D.; solução: $(\frac{2k+1}{1-k}, \frac{k-4}{1-k}, k+3)$.
- $k = 1$
$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & -4 \end{array}\right)$$
Matriz ainda não está na forma em escada; convertendo-a nessa forma, vem
$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -3 \end{array}\right)$$
car$(A) = 2$, car$(A|\mathbf{b}) = 3$; S.I.
- $k = 2$
$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & -1 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$
car$(A) =$ car$(A|\mathbf{b}) = 2$; $n = 3$; S.P.I. ; conjunto de soluções: $\{(-\alpha, 2, \alpha) : \alpha \in \mathbb{R}\}$.

(c)
$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & k & 1 \\ 0 & 0 & k(k+4) & k \end{array}\right)$$

- $k \neq 0, -4 \Longrightarrow$ car$(A) =$ car$(A|\mathbf{b}) = 3$; $n = 3$, S.P.D.; solução: $(\frac{k+9}{k+4}, \frac{4}{k+4}, \frac{1}{k+4})$
- $k = 0$
$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$
car$(A) =$ car$(A|\mathbf{b}) = 2$; $n = 3$; S.P.I.; conjunto de soluções: $\{(3 - 3\alpha, 1, \alpha) : \alpha \in \mathbb{R}\}$.
- $k = -4$
$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & -4 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -4 \end{array}\right)$$
car$(A) = 2$, car$(A|b) = 3$ S.I.

Exercício 1.7.

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & a-6 & -3 \\ 0 & 0 & 2(4-a) & b-6 \end{array}\right)$$

- $a \neq 4 \Longrightarrow$ car$(A) =$ car$(A|\mathbf{b}) = 3$; $n = 3$; S.P.D.
- $a = 4, b \neq 6 \Longrightarrow$ car$(A) = 2$ e car$(A|\mathbf{b}) = 3$; S.I.
- $a = 4, b = 6 \Longrightarrow$ car$(A) =$ car$(A|\mathbf{b}) = 2$; $n = 3$; S.P.I.; conjunto de soluções: $\{(\alpha - 2, 2\alpha - 3, \alpha) : \alpha \in \mathbb{R}\}$.

Exercício 1.8.

(a) Sim.

(b) Não; $\begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 3 \end{pmatrix}$.

(c) Não; $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

(d) Não; $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

(e) Não; $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

Exercício 1.9.

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & \alpha \\ 0 & -1 & 1 & 1-\alpha^2 \\ 0 & 0 & 0 & 1-\alpha \end{pmatrix}$$

Então, car$(A) = 2 \iff \alpha = 1$.

Exercício 1.10. Solução de S_1: $(\frac{8}{3}, -\frac{4}{3}, \frac{1}{3})$. Solução de S_2: $(-\frac{13}{3}, \frac{5}{3}, \frac{1}{3})$. Solução de S_3: $(-\frac{4}{3}, -\frac{1}{3}, \frac{1}{3})$.

Exercício 1.11. (a) S.P.I.; conjunto de soluções: $\{(\alpha, \alpha, \alpha, \alpha) : \alpha \in \mathbb{R}\}$.

(b) S.P.D.; solução: $(0, 0, 0)$

Exercício 1.12. **Sugestão:** Fazer $x = \operatorname{sen}\alpha$, $y = \cos\beta$ e $z = \tan\gamma$ e resolver o sistema linear resultante.

Solução: $\alpha = \frac{\pi}{2}$, $\beta = \pi$, $\gamma = 0$.

7.2 Capítulo 2

Exercício 2.1.

(a) $\begin{pmatrix} 4 & 2 & 6 \\ -4 & 0 & 2 \\ 2 & 4 & 2 \end{pmatrix}$; (b) $\begin{pmatrix} 3 & 1 & 5 \\ -5 & 1 & 2 \\ 3 & 3 & 0 \end{pmatrix}$; (c) $\begin{pmatrix} 4 & 3 & 5 \\ 0 & -2 & 1 \\ -1 & 4 & 5 \end{pmatrix}$;

(d) $\begin{pmatrix} 4 & 0 & -1 \\ 3 & -2 & 4 \\ 5 & 1 & 5 \end{pmatrix}$; (e) $\begin{pmatrix} 5 & 4 & 2 \\ 0 & 1 & -5 \\ -3 & 3 & 3 \end{pmatrix}$; (f) $\begin{pmatrix} 4 & 5 & 5 \\ -7 & -1 & -7 \\ 1 & 0 & 6 \end{pmatrix}$;

(g) $\begin{pmatrix} 5 & 0 & -3 \\ 4 & 1 & 3 \\ 2 & -5 & 3 \end{pmatrix}$; (h) $\begin{pmatrix} 5 & 0 & -3 \\ 4 & 1 & 3 \\ 2 & -5 & 3 \end{pmatrix}$; (i) $\begin{pmatrix} 5 & 8 & 10 \\ -3 & 0 & -5 \\ -1 & 3 & 6 \end{pmatrix}$.

Exercício 2.2.

(a) $\begin{pmatrix} 8 & 8 \\ 8 & 8 \end{pmatrix}$; (b) $\begin{pmatrix} 10 & 10 \\ 6 & 6 \end{pmatrix}$; (c) $\begin{pmatrix} 8 & 8 \\ 8 & 8 \end{pmatrix}$.

Exercício 2.3.

$$\text{(a)}\ \begin{pmatrix}6 & 1 & 4 & 18 & 24\end{pmatrix};\quad \text{(b)}\ \begin{pmatrix}15\\-1\\1\\1\\16\end{pmatrix};\quad \text{(c)}\ \begin{pmatrix}2\\1\\0\\2\\4\end{pmatrix};\quad \text{(d)}\ \begin{pmatrix}2 & 1 & 4 & -2 & 2\end{pmatrix}.$$

Exercício 2.4. $A\mathbf{e}_j$ é igual à coluna j de A.

Exercício 2.5. (a) - (b) Basta considerar $\mathbf{x} = \mathbf{e}_j; j = 1, 2, \ldots, n$.

Exercício 2.6.

$$\text{(a)}\ \begin{pmatrix}8 & 0 & 0\\0 & 6 & 0\\0 & 0 & -3\end{pmatrix};\quad \text{(b)}\ \begin{pmatrix}2 & 4 & 6\\12 & 15 & 18\\-7 & -8 & -9;\end{pmatrix}\quad \text{(c)}\ \begin{pmatrix}2 & 6 & -3\\8 & 15 & -6\\14 & 24 & -9;\end{pmatrix}$$

Exercício 2.7. (a) $D = (d_{ij})$ diagonal $\iff d_{ij} = 0$ para $i \neq j$; $D' = (d'_{ij})$ diagonal $\iff d'_{ij} = 0$ para $i \neq j$. Então:

$$(DD')_{ij} = d_{i1}d'_{1j} + \cdots + d_{ii}d'_{ij} + \cdots + d_{in}d'_{nj} = \begin{cases} d_{ii}d'_{ii}, & \text{se } i = j \\ 0, & \text{se } i \neq j \end{cases}$$

Logo, DD' é diagonal e $(DD')_{ii} = d_{ii}d'_{ii}$.

(b) Tem-se

$$(DA)_{ij} = d_{i1}a_{1j} + \cdots + d_{ii}a_{ij} + \cdots + d_{in}a_{nj} = d_{ii}a_{ij}.$$

(BD) obtém-se de B multiplicando cada uma das suas colunas pelo elemento diagonal correspondente.

Exercício 2.8. (a) Sejam A e B simétricas, ou seja, tais que $A = A^{\mathsf{T}}$ e $B = B^{\mathsf{T}}$. Então: $(A+B)^{\mathsf{T}} = A^{\mathsf{T}} + B^{\mathsf{T}} = A + B$; logo $A + B$ é simétrica. De modo análogo para o caso A, B anti-simétricas.

(b) Usar a propriedade $(\alpha A)^{\mathsf{T}} = \alpha A^{\mathsf{T}}$.

(c) $(A + A^{\mathsf{T}})^{\mathsf{T}} = A^{\mathsf{T}} + (A^{\mathsf{T}})^{\mathsf{T}} = A^{\mathsf{T}} + A = A + A^{\mathsf{T}}$; logo $A + A^{\mathsf{T}}$ é simétrica. De modo análogo, se prova que $A - A^{\mathsf{T}}$ é anti-simétrica.

(d) Tem-se $A = \frac{1}{2}(A + A^{\mathsf{T}} + A - A^{\mathsf{T}}) = \frac{1}{2}(A + A^{\mathsf{T}}) + \frac{1}{2}(A - A^{\mathsf{T}})$. O resultado segue-se das alíneas (b) e (c).

(e) $AB = (AB)^{\mathsf{T}} \iff AB = B^{\mathsf{T}}A^{\mathsf{T}} \iff AB = BA$ onde, na última equivalência usámos o facto de A e B serem simétricas.

(f) Sendo A simétrica e invertível, tem-se $(A^{-1})^{\mathsf{T}} = (A^{\mathsf{T}})^{-1} = A^{-1}$, logo A^{-1} é simétrica.

Exercício 2.9.

(a) Basta verificar que o produto das matrizes indicadas é igual à identidade.

(b)

(i) Uma vez que A tem inversa, a sua característica tem de ser igual à sua ordem, isto é, tem-se car$(A) = 4$.

(ii) Sendo A invertível, o sistema homogéneo $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$ admite apenas a solução nula; logo, o vector indicado não pode ser solução desse sistema.

(iii) Tem-se:

$$(A^\mathsf{T})^{-1} = (A^{-1})^\mathsf{T} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & -2 \\ -2 & -2 & 1 & 3 \\ 1 & 2 & -1 & -2 \\ 0 & -3 & 1 & 3 \end{pmatrix}.$$

(iv) Tem-se:

$$(2A)^{-1} = \tfrac{1}{2}A^{-1} = \begin{pmatrix} 1/2 & -1 & 1/2 & 0 \\ 1/2 & -1 & 1 & -3/2 \\ 0 & 1/2 & -1/2 & 1/2 \\ -1 & 3/2 & -1 & 3/2 \end{pmatrix}.$$

Exercício 2.10.

(a) Não.

(b) Sim; $B^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 3 & -5 & -2 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

(c) Sim; $C^{-1} = \begin{pmatrix} -1/2 & -1/2 & 1/2 \\ 1/4 & -1/4 & -1/4 \\ 1/6 & 1/2 & 1/6 \end{pmatrix}$.

(d) Sim; $D^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Exercício 2.11. Qualquer que seja o valor de k, a matriz tem característica igual a 4 (ordem da matriz), pelo que é invertível.

$$A_k^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -k & k^2 & -k^3 \\ 0 & 1 & -k & k^2 \\ 0 & 0 & 1 & -k \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Exercício 2.12. (a) Como A é quadrada, sabemos que o sistema $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ tem uma e uma só solução se e só se car$(A) = n$. Por outro lado, também sabemos que A é invertível se e só se car$(A) = n$. Uma vez que $A(A^{-1}\mathbf{b}) = AA^{-1}\mathbf{b} = \mathbf{b}$, segue-se que $A^{-1}\mathbf{b}$ é (a única) solução do sistema.

(b) Fraccionemos B nas suas p colunas: $B = (\mathbf{b}_1|\ldots|\mathbf{b}_p)$. Então, cada uma dos sistemas $A\mathbf{x}_j = \mathbf{b}_j, j = 1, \ldots, p$ terá uma e uma só solução, dada por $\mathbf{x}_j = A^{-1}\mathbf{b}_j$, se e só se A for invertível (pela alínea anterior). Isto significa que existirá uma e uma só matriz X, dada por $X = \left(A^{-1}\mathbf{b}_1|\ldots|A^{-1}\mathbf{b}_p\right) = A^{-1}\left(\mathbf{b}_1|\ldots|\mathbf{b}_p\right) = A^{-1}B$ para a qual se tenha $AX = B$, se e só se A for invertível.

Exercício 2.13. (a) Sendo $A^2 = A$, vem:

$$\begin{aligned} A^3 &= AA^2 = AA = A^2 = A, \\ A^4 &= AA^3 = AA = A^2 = A, \\ A^5 &= AA^4 = AA = A^2 = A, \end{aligned}$$

e o raciocínio repete-se para qualquer potência de A.

Nota: Uma demonstração rigorosa deveria fazer-se usando indução sobre k.

(b) Basta verificar que $B^2 = BB = B$.

(c) Tem-se
$$A = \left(\begin{array}{c|c} I & B \\ \hline \mathbf{0} & B \end{array}\right).$$
Assim sendo, vem
$$A^2 = A\,A = \left(\begin{array}{c|c} I & B \\ \hline \mathbf{0} & B \end{array}\right)\left(\begin{array}{c|c} I & B \\ \hline \mathbf{0} & B \end{array}\right) = \left(\begin{array}{c|c} I & B+B^2 \\ \hline \mathbf{0} & B^2 \end{array}\right) = \left(\begin{array}{c|c} I & 2B \\ \hline \mathbf{0} & B \end{array}\right).$$
Então, tem-se
$$A^3 = A\,A^2 = \left(\begin{array}{c|c} I & B \\ \hline \mathbf{0} & B \end{array}\right)\left(\begin{array}{c|c} I & 2B \\ \hline \mathbf{0} & B \end{array}\right) = \left(\begin{array}{c|c} I & 2B+B^2 \\ \hline \mathbf{0} & B^2 \end{array}\right) = \left(\begin{array}{c|c} I & 3B \\ \hline \mathbf{0} & B \end{array}\right).$$
Facilmente se constata (embora, para uma demonstração rigorosa, devêssemos usar indução) que $A^k = \left(\begin{array}{c|c} I & kB \\ \hline \mathbf{0} & B \end{array}\right)$, pelo que A^{300} seria a matriz:
$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 100 & 100 & 100 \\ 0 & 1 & 0 & 100 & 100 & 100 \\ 0 & 0 & 1 & 100 & 100 & 100 \\ 0 & 0 & 0 & 1/3 & 1/3 & 1/3 \\ 0 & 0 & 0 & 1/3 & 1/3 & 1/3 \\ 0 & 0 & 0 & 1/3 & 1/3 & 1/3 \end{pmatrix}.$$

Exercício 2.14. (a) Basta notar que
$$\left(\begin{array}{c|c} A & \mathbf{0}_{r\times s} \\ \hline \mathbf{0}_{s\times r} & B \end{array}\right)\left(\begin{array}{c|c} A^{-1} & \mathbf{0}_{r\times s} \\ \hline \mathbf{0}_{s\times r} & B^{-1} \end{array}\right) = \left(\begin{array}{c|c} I_r & \mathbf{0}_{r\times r} \\ \hline \mathbf{0}_{s\times s} & I_s \end{array}\right) = I_{r+s}.$$

(b) Usando a alínea anterior bastar-nos á calcular a inversa da matriz $C = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}$, a qual se calcula facilmente e é dada por $C^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1/2 & 1/2 \end{pmatrix}$. Então, a inversa da matriz dada é:
$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & -1/2 & 1/2 \end{pmatrix}.$$

Exercício 2.15. (a)-(b)-(c) Basta pensar que, nesse caso, a matriz E_A terá (pelo menos) uma linha nula, o que significa que será car$(A) < n$, o que, como sabemos, implica que A é singular.

Quanto à questão sobre as colunas, a resposta é afirmativa. Como as colunas de A são as linhas de A^T, qualquer das condições indicadas (neste caso para colunas) implicaria que A^T seria singular; como A é invertível se e só se A^T também é invertível, a conclusão é imediata.

Exercício 2.16. É uma consequência imediata do Exercício 2.7.

7.3 Capítulo 3

Exercício 3.1. (a) 5; (b) 1; (c) -24.

Exercício 3.2. $\det A + \det B = -4$; $\det(A+B) = -6$. Tem-se, portanto, $\det A + \det B \neq \det(A+B)$.

Exercício 3.3. (a) -18; (b) -10.

Exercício 3.4. (a) k; (b) $-12k$; (c) k; (d) $-3k$; (e) $-k$.

Exercício 3.5. Se adicionarmos à 5ª coluna, a 4ª multiplicada por 10, a 3ª multiplicada por 10^2, a 2ª multiplicada por 10^3 e a 1ª multiplicada por 10^4, o valor do determinante não se altera, ou seja, tem-se

$$\begin{vmatrix} 2 & 0 & 6 & 0 & 4 \\ 5 & 3 & 2 & 2 & 7 \\ 2 & 5 & 7 & 5 & 5 \\ 2 & 0 & 9 & 2 & 7 \\ 7 & 8 & 4 & 2 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 0 & 6 & 0 & 20604 \\ 5 & 3 & 2 & 2 & 53227 \\ 2 & 5 & 7 & 5 & 25755 \\ 2 & 0 & 9 & 2 & 20927 \\ 7 & 8 & 4 & 2 & 78421 \end{vmatrix}.$$

Como todos os elementos da última coluna são divisíveis por 17, o mesmo sucederá ao determinante, tendo em conta a Proposição 3.1 na pg. 63 (ou melhor, o resultado análogo relativo a colunas).

Exercício 3.6. (a) -28; (b) -4; (c) 0.

Exercício 3.7. (a) (i) $\det(A) = 4$; (ii) $\operatorname{adj}(A) = \begin{pmatrix} 4 & -1 \\ -4 & 2 \end{pmatrix}$; (iii) $A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -1/4 \\ -1 & 1/2 \end{pmatrix}$.

(b) (i) $\det A = 1$; (ii) $\operatorname{adj} A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$; (iii) $A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

(c) (i) $\det A = -6$; (ii) $\operatorname{adj} A = \begin{pmatrix} -4 & 4 & -2 \\ 2 & -2 & -2 \\ -1 & -2 & 1 \end{pmatrix}$; (iii) $A^{-1} = \begin{pmatrix} 2/3 & -2/3 & 1/3 \\ -1/3 & 1/3 & 1/3 \\ 1/6 & 1/3 & -1/6 \end{pmatrix}$.

Exercício 3.8. (a) 15; (b) 24; (c) 5/3.

Exercício 3.9. $\det A = u_{11}u_{22}u_{33}$.

Exercício 3.10. (a) Falsa; como $\det A \neq 0$, ter-se-á $\operatorname{car}(A) = 3$ (ordem da matriz).

(b) Verdadeira; como $\det A \neq 0$, A é invertível e, portanto a equação matricial tem solução (única) dada por $X = A^{-1}\begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 2 \end{pmatrix}$; recorde o Exercício 2. 12 na pg. 55.

(c) Verdadeira; como $\det A \neq 0$, sabemos que $\operatorname{car}(A) = 3$ o que é condição suficiente para que a matriz em escada reduzida obtida de A, E_A, seja igual a I_3.

Exercício 3.11. (a) Sabemos que, sendo A invertível, se tem

$$A \frac{1}{\det A} \operatorname{adj} A = I.$$

A igualdade anterior mostra que a matriz $\operatorname{adj} A$ tem inversa, dada por $\frac{1}{\det A}A$. Como $\frac{1}{\det A} = \det(A^{-1})$, a segunda igualdade segue-se, de imediato.

(b) Dada A invertível, tem-se $\frac{1}{\det A}\,\mathrm{adj}\,A = A^{-1}$, ou seja, tem-se

$$\mathrm{adj}\,A = (\det A)A^{-1}.$$

Aplicando este resultado à matriz A^{-1} tem-se

$$\mathrm{adj}(A^{-1}) = \det(A^{-1})(A^{-1})^{-1} = \det(A^{-1})A = (\mathrm{adj}(A))^{-1},$$

onde, na última igualdade, se usou o resultado da alínea anterior.

(c) Como $\mathrm{adj}\,A = (\det A)A^{-1}$, tem-se

$$\det(\mathrm{adj}(A)) = \det\left((\det A)A^{-1}\right) = (\det(A))^n \det(A^{-1}) = (\det(A))^n \frac{1}{\det(A)} = (\det(A))^{n-1}.$$

Exercício 3.12. Tem-se

$$\mathbf{x} = A^{-1}\mathbf{b},$$

ou seja, usando a expressão de A^{-1} em termos da matriz adjunta de A:

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_i \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \frac{1}{\det A} \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & \cdots & A_{n1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ A_{1i} & A_{2i} & \cdots & A_{ni} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ A_{1n} & A_{2n} & \cdots & A_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_i \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}.$$

Então, vemos que

$$x_i = \frac{1}{\det(A)}\left(A_{1i}b_1 + A_{2i}b_2 + \cdots + A_{ni}b_n\right); i = 1, 2, \ldots, n. \tag{3.1}$$

Seja $\tilde{A}_i$ a matriz obtida de A substituindo a sua coluna i pela coluna dos termos independentes, i.e.

$$\tilde{A}_i = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1,i-1} & b_1 & a_{1,i+1} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2,i-1} & b_2 & a_{2,i+1} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{n,i-1} & b_n & a_{n,i+1} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}.$$

Se calcularmos $\det \tilde{A}_i$ usando o Teorema de Laplace aplicado à coluna i, vemos que

$$\det \tilde{A}_i = b_1\, A_{1i} + b_2\, A_{2i} + \cdots + b_n\, A_{ni}. \tag{3.2}$$

O resultado pretendido segue-se de imediato, combinando (3.1) e (3.2).

Exercício 3.13. Sendo $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$, tem-se $\det A = -4 \neq 0$, pelo que o sistema é possível e determinado. Aplicando a regra de Cramer, obtém-se:

$$x_1 = \frac{\det \tilde{A}_1}{\det A} = \frac{-4}{-4} = 1; \quad x_2 = \frac{\det \tilde{A}_2}{\det A} = \frac{-4}{-4} = 1; \quad x_3 = \frac{\det \tilde{A}_3}{\det A} = \frac{-8}{-4} = 2.$$

(b) De modo análogo à alínea anterior; solução do sistema :$(-2/3, 2/3, 1/3, 0)$.

Exercício 3.14. (a) $\det A = -10$.

(b) O sistema é possível e determinado porque $\det A \neq 0$. Além disso, tem-se $x_1 = \frac{\det \tilde{A}_1}{\det A} = \frac{-20}{-10} = 2$.

(c) A é invertível porque $\det A \neq 0$. O elemento da posição $(2,3)$ da matriz A^{-1} é o segundo elemento da coluna 3 da inversa de A, ou seja, é a segunda componente da solução do sistema $A\mathbf{c}_3 = \mathbf{e}_3$, onde $\mathbf{e_3} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$. Assim, designando esse elemento por c_{23} tem-se que $c_{23} = \frac{\det \tilde{A}_2}{\det A}$, onde $\tilde{A}_2$ designa, neste caso, a matriz obtida de A substituindo a sua segunda coluna pela coluna $\mathbf{e}_3$. Efectuando os cálculos, vemos que $c_{23} = -1/10$.

7.4 Capítulo 4

Exercício 4.1.

1. Temos:
$$\mathbf{u} + \mathbf{v} = \mathbf{u} + \mathbf{w} \Rightarrow -\mathbf{u} + \mathbf{u} + \mathbf{v} = -\mathbf{u} + \mathbf{u} + \mathbf{w} \Rightarrow \mathbf{0}_V + \mathbf{v} = \mathbf{0}_V + \mathbf{w} \Rightarrow \mathbf{v} = \mathbf{w}.$$
2. Demonstração análoga a 1.
3. Por um lado, temos
$$\alpha\mathbf{0} = \alpha\mathbf{0} + \mathbf{0}$$
e, por outro, temos
$$\alpha\mathbf{0} = \alpha(\mathbf{0} + \mathbf{0}) = \alpha\mathbf{0} + \alpha\mathbf{0}.$$
Assim, temos
$$\alpha\mathbf{0} + \mathbf{0} = \alpha\mathbf{0} + \alpha\mathbf{0},$$
donde, usando 1., podemos concluir que $\alpha\mathbf{0} = \mathbf{0}$.
4. Temos
$$0\mathbf{u} = 0\mathbf{u} + \mathbf{0}$$
e também
$$0\mathbf{u} = (0 + 0)\mathbf{u} = 0\mathbf{u} + 0\mathbf{u}.$$
Logo, temos
$$0\mathbf{u} + 0\mathbf{u} = 0\mathbf{u} + \mathbf{0}$$
donde, usando 1., concluímos que $0\mathbf{u} = \mathbf{0}$.
5. Basta notar que:
$$\alpha\mathbf{u} + (-\alpha)\mathbf{u} = (\alpha + (-\alpha))\mathbf{u} = 0\mathbf{u} = \mathbf{0}$$
e
$$\alpha\mathbf{u} + \alpha(-\mathbf{u}) = \alpha(\mathbf{u} + (-\mathbf{u}) = \alpha\mathbf{0} = \mathbf{0}.$$
6. $$\alpha\mathbf{u} = \mathbf{0} \text{ e } \alpha \neq 0 \Rightarrow \frac{1}{\alpha}\alpha\mathbf{u} = \frac{1}{\alpha}\mathbf{0} \Rightarrow 1\mathbf{u} = \mathbf{0} \Rightarrow \mathbf{u} = \mathbf{0}.$$

7.
$$\alpha\mathbf{u} = \beta\mathbf{u} \text{ e } \mathbf{u} \neq \mathbf{0} \Rightarrow (\alpha - \beta)\mathbf{u} = \mathbf{0} \text{ e } \mathbf{u} \neq \mathbf{0} \to \alpha - \beta = 0 \Rightarrow \alpha = \beta.$$

Exercício 4.2. (a) Sim. (b) Sim. (c) Não. (d) Sim. (e) Não. (f) Não. (g) Sim.

Exercício 4.3. Denotemos por S o conjunto em causa (o qual é, naturalmente, um subconjunto de $\mathbb{R}^n$). Então:

1. $\mathbf{0} \in S$, porque $A\mathbf{0} = \mathbf{0}$.
2. Sejam $\mathbf{s}_1, \mathbf{s}_2 \in S$, isto é, sejam $\mathbf{s}_1$ e $\mathbf{s}_2$ tais que $A\mathbf{s}_1 = \mathbf{0}$ e $A\mathbf{s}_2 = \mathbf{0}$. Então, tem-se $A(\mathbf{s}_1 + \mathbf{s}_2) = A\mathbf{s}_1 + A\mathbf{s}_2 = \mathbf{0} + \mathbf{0} = \mathbf{0}$, ou seja, tem-se $\mathbf{s}_1 + \mathbf{s}_2 \in S$.
3. Se $\mathbf{s}$ é um elemento arbitrário de S, isto é, se $\mathbf{s}$ satisfaz $A\mathbf{s} = \mathbf{0}$ e se $\alpha \in \mathbb{R}$, tem-se $A(\alpha\mathbf{s}) = \alpha(A\mathbf{s}) = \alpha\mathbf{0} = \mathbf{0}$, ou seja, tem-se que $\alpha\mathbf{s} \in S$.

Verifica-se, então, que S é um subespaço de $\mathbb{R}^n$.

Exercício 4.4.
1. Como U e W são subespaços, então $\mathbf{0}_V \in U$ e $\mathbf{0}_V \in W$; por definição de $U \cap W$, concluímos que $\mathbf{0}_V \in (U \cap W)$.
2. Sejam $\mathbf{u}$ e $\mathbf{w}$ dois elementos quaisquer de $U \cap W$. Então, por definição de $U \cap W$, tem-se que $\mathbf{u} \in U$ e $\mathbf{u} \in W$ e também que $\mathbf{w} \in U$ e $\mathbf{w} \in W$. Como $\mathbf{u}$ e $\mathbf{w}$ estão em U e U é um subespaço, segue-se que $\mathbf{u} + \mathbf{w}$ pertence a U; por outro lado, como $\mathbf{u}$ e $\mathbf{w}$ estão ambos em W e W é um subespaço, segue-se que $\mathbf{u} + \mathbf{w}$ está em W; conclusão: $\mathbf{u} + \mathbf{w} \in (U \cap W)$.
3. Seja $\mathbf{v} \in (U \cap W)$ e seja $\alpha \in \mathbb{R}$; por definição de intersecção, tem-se que $\mathbf{v} \in U$ e $\mathbf{v} \in W$; como U é um subespaço, temos que $\alpha\mathbf{v} \in U$; por outro lado, como W é um subespaço, temos também que $\alpha\mathbf{v} \in W$. Então, concluímos que $\alpha\mathbf{v} \in (U \cap W)$.

Como $(U \cap W)$ satisfaz as três condições acima, concluímos que $(U \cap W)$ é um subespaço de V.

Exercício 4.5. (a)
1. Sendo S um subespaço de $\mathbb{R}^n$, tem-se que $\mathbf{0} \in S$ (por definição de subespaço). Mas, então, $\mathbf{0} = A\mathbf{0} \in A(S)$, por definição do conjunto $A(S)$.
2. Sejam $\mathbf{u}$ e $\mathbf{v}$ dois elementos de $A(S)$. Por definição de $A(S)$, isso significa que $\mathbf{u} = A\mathbf{x}$ com $\mathbf{x} \in S$ e que $\mathbf{v} = A\mathbf{y}$, com $\mathbf{y} \in S$. Seja $\mathbf{z} = \mathbf{x} + \mathbf{y}$. Como S é um subespaço, tem-se que $\mathbf{z} \in S$. Além disso, temos $\mathbf{u} + \mathbf{v} = A\mathbf{x} + A\mathbf{y} = A(\mathbf{x} + \mathbf{y}) = A(\mathbf{z})$, o que mostra que $\mathbf{u} + \mathbf{v} \in A(S)$.
3. Seja $\mathbf{u} \in A(S)$, isto é, seja $\mathbf{u} = A\mathbf{x}$ com $\mathbf{x} \in S$ e seja $\alpha \in \mathbb{R}$. Então, como S é um subespaço e $\mathbf{x} \in S$, também será $\alpha\mathbf{x} \in S$. Por outro lado, tem-se $\alpha\mathbf{u} = \alpha(A\mathbf{x}) = A(\alpha\mathbf{x})$. Como $\alpha\mathbf{x} \in S$, segue-se que $\alpha\mathbf{u} \in A(S)$.

Por 1. 2. e 3., concluímos que $A(S)$ é um subespaço de $\mathbb{R}^n$.

(b) Tem-se
$$\begin{aligned}
\mathbf{u} \in A(S) &\iff \mathbf{u} = A\mathbf{x}, \text{ com } \mathbf{x} \in S \\
&\iff \mathbf{u} = A(\alpha_1\mathbf{s}_1 + \cdots + \alpha_r\mathbf{s}_r), \text{ com } \alpha_1, \ldots, \alpha_r \in \mathbb{R} \\
&\iff \mathbf{u} = \alpha_1 A\mathbf{s}_1 + \cdots + \alpha_r A\mathbf{s}_r, \text{ com } \alpha_1, \ldots, \alpha_r \in \mathbb{R} \\
&\iff \mathbf{u} \in \langle A\mathbf{s}_1, \ldots, A\mathbf{s}_r \rangle.
\end{aligned}$$

Exercício 4.6. Sim; sim, os escalares são univocamente determinados; a única forma de escrever $\mathbf{v}$ como c.l. de $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2$ e $\mathbf{v}_3$ é $\mathbf{v} = 1\mathbf{v}_1 + 1\mathbf{v}_2 - 1\mathbf{v}_3 = \mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2 - \mathbf{v}_3 =$.

Exercício 4.7. (a) Não.

(b) Sim; escalares univocamente determinados; $\mathbf{v} = 2\mathbf{v}_1 + 1\mathbf{v}_2 - 1\mathbf{v}_3 = 2\mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2 - \mathbf{v}_3$.

(c) Não.

(d) Sim; escalares univocamente determinados; $\mathbf{v} = 2\mathbf{v}_1 + 3\mathbf{v}_2 + 4\mathbf{v}_3$.

Exercício 4.8. (a) $\{(1,2,3,1),(3,6,2,1)\}$.

(b) Sim; $\mathbf{u} = (-2,-4,1,0) = 1(1,2,3,1) - 3(3,6,2,1)$.

(c) Mostra-se facilmente que $(3,6,2,1) \in W$ e $(4,8,5,2) \in U$, donde, pelo Teorema 4.4.2 na pg. 89, concluímos que $U = W$.

Exercício 4.9. (a) Os vectores são l.i.

(b) Os vectores são l.d.; $(-3,-6,-4,-2) = -(1,2,3,3) - (2,4,1,-1)$.

(c) Os vectores são l.d.; $(3,3,3,3) = 3(1,0,0,1) + 3(0,1,1,0)$.

Exercício 4.10. (a) Como $\dim \mathbb{R}^3 = 3$, o número mínimo de geradores de $\mathbb{R}^3$ é 3; logo, os dois vectores $\mathbf{u}_1$ e $\mathbf{u}_2$ não chegam para gerar $\mathbb{R}^3$.

(b) Como $\dim \mathbb{R}^2 = 2$, o número máximo de vectores linearmente independentes de $\mathbb{R}^2$ é 2; logo, os três vectores $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2$ e $\mathbf{v}_3$ não são l.i.

Exercício 4.11. (a) Por exemplo, $B = ((1,2,-1),(3,-1,2),(0,0,1))$ é uma base de $\mathbb{R}^3$ que inclui $\mathbf{u}_1$ e $\mathbf{u}_2$.

(b) Por exemplo, $B = (\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2)$.

Exercício 4.12. (a) Seja $\mathbf{v}_i = \mathbf{0}_V$. Então, tem-se:

$$0\mathbf{v}_1 + \cdots + 0\mathbf{v}_{i-1} + 1\mathbf{v}_i + 0\mathbf{v}_{i+1} + \cdots + 0\mathbf{v}_r = \mathbf{0}_V + \cdots + \mathbf{0}_V + \mathbf{0}_V + \mathbf{0}_V + \cdots + \mathbf{0}_V = \mathbf{0}_V,$$

ou seja, existe uma c.l. dos vectores $\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_r$ igual ao vector nulo, com um dos escalares diferente de zero, o que significa que $\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_r$ são vectores l.d.

(b) Se $\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_r$ são l.d., então existem escalares $\alpha_1, \ldots, \alpha_r$ com, pelo menos um deles não nulo, tais que

$$\alpha_1\mathbf{v}_1 + \cdots + \alpha_r\mathbf{v}_r = \mathbf{0}_V.$$

Mas, então, ter-se-á

$$\alpha_1\mathbf{v}_1 + \cdots + \alpha_r\mathbf{v}_r + 0\mathbf{v}_{r+1} + \cdots + 0\mathbf{v}_p = \mathbf{0}_V,$$

com um dos escalares $\alpha_1, \ldots, \alpha_r, 0, \ldots, 0$ não nulo, ou seja, os vectores $\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_r, \mathbf{v}_{r+1}, \ldots, \mathbf{v}_p$ são l.d.

(c) É uma consequência imediata da alínea anterior.

Exercício 4.13. (a) Basta notar que U é o conjunto das soluções do sistema homogéneo $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$ onde A é a matriz $A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & -1 \end{pmatrix}$ e invocar o Exercício 4.3.

(b) $B = ((-2/3,1,0),(1/3,0,1))$ é uma base de U; $\dim U = 2$.

(c) $[\mathbf{u}]_B = \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \end{pmatrix}$.

(d) Sim; estão ambos em U e são l.i.; como $\dim U = 2$, formam uma base de U.

(e) Não; $(2,-1,5) \notin U$.

Exercício 4.14. (a) $B = ((-1/3, -1/3, 1, 0), (-1, 2, 0, 1))$ é uma base de U; $\dim U = 2$.

(b) Sim; $[\mathbf{u}]_B = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Exercício 4.15. (a) $B = ((1, 1, 1), (2, 3, -1), (0, 1, 5))$ é uma base de U (basta verificar que são l.i.); $\dim U = 3$.

(b) U é subespaço de $\mathbb{R}^3$ e $\dim U = 3 = \dim \mathbb{R}^3 \Rightarrow U = \mathbb{R}^3$.

Exercício 4.16. **Nota:** No que se segue, usamos a notação de n-uplos para os vectores de $\mathbb{R}^n$, independentemente de pertencerem ao espaço das linhas, espaço das colunas ou núcleo da matriz.

(a) (i) $((2, -2, 3), (0, 8, -5))$ é uma base de $\mathcal{L}(A)$;
(ii) $((2, 4, 2, 8), (-2, 4, 6, 0))$ é uma base de $\mathcal{C}(A)$;
(iii) O vector $(-7/8, 5/8, 1)$ forma uma base de $\mathcal{N}(A)$;

$$\dim \mathcal{C}(A) + \dim \mathcal{N}(A) = 2 + 1 = 3 = n.$$

(b) (i) $((2, -3, 4, 1, 2), (0, 0, -3, 1, -8), (0, 0, 0, 10, 1))$ é uma base de $\mathcal{L}(A)$;
(ii) $((2, 4, -10, 8), (4, 5, -14, 10), (1, 3, 3, 4))$ é uma base de $\mathcal{C}(A)$;
(iii) $((3/2, 1, 0, 0, 0), (89/20, 0, -27/10, -1/10, 1))$ é uma base de $\mathcal{N}(A)$;

$$\dim \mathcal{C}(A) + \dim \mathcal{N}(A) = 3 + 2 = 5 = n$$

(c) (i) $((1, 2, 3), (0, -5, -4), (0, 0, -1))$ é uma base de $\mathcal{L}(A)$;
(ii) $((1, 2, 3), (2, -1, 1), (3, 2, 4))$ é uma base de $\mathcal{C}(A)$;
(iii) $\mathcal{N}(A) = \{(0, 0, 0)\} \Rightarrow$ base de $\mathcal{N}(A) = \emptyset$.

$$\dim \mathcal{C}(A) + \dim \mathcal{N}(A) = 3 + 0 = 3 = n.$$

7.5 Capítulo 5

Exercício 5.1. (a) Sim; (b) Não; (c) Sim; (d) Não.

Exercício 5.2. 1. Sejam $A, B \in \mathbb{R}^{n \times n}$. Então

$$T(A + B) = P^{-1}(A + B)P = (P^{-1}A + P^{-1}B)P = P^{-1}AP + P^{-1}BP = T(A) + T(B).$$

2. Sejam $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ e $\alpha \in \mathbb{R}$. Então, tem-se

$$T(\alpha A) = P^{-1}(\alpha A)P = \alpha P^{-1}AP = \alpha T(A).$$

Por 1. e 2. concluímos que T é linear.

Exercício 5.3. $\Rightarrow$) Suponhamos que $T : V \to W$ satisfaz

$$\forall \mathbf{x}, \mathbf{y} \in V \ \forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}, \quad T(\alpha\mathbf{x} + \beta\mathbf{y}) = \alpha T(\mathbf{x}) + \beta T(\mathbf{y}) \tag{5.3}$$

e mostremos que T é linear.

1. Dados $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in V$, tem-se
$$T(\mathbf{x}+\mathbf{y}) = T(1\mathbf{x}+1\mathbf{y}) = 1T(\mathbf{x}) + 1T(\mathbf{y}) = T(\mathbf{x}) + T(\mathbf{y}).$$
2. Dados $\mathbf{x} \in V$ e $\alpha \in \mathbb{R}$, tem-se
$$T(\alpha\mathbf{x}) = T(\alpha\mathbf{x} + \mathbf{0}_V) = T(\alpha\mathbf{x} + 0\mathbf{x}) = \alpha T(\mathbf{x}) + 0T(\mathbf{x}) = \alpha T(\mathbf{x}) + \mathbf{0}_W = \alpha T(\mathbf{x}).$$

Conclusão: T é linear.

$\Leftarrow$) Suponhamos, agora, que T é linear e mostremos que satisfaz (5.3). Atendendo à linearidade de T, tem-se, para quaisquer $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in V$, e quaisquer $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$
$$T(\alpha\mathbf{x} + \beta\mathbf{y}) = T(\alpha\mathbf{x}) + T(\beta\mathbf{y}) = \alpha T(\mathbf{x}) + \beta T(\mathbf{y}),$$
como queríamos mostrar.

Exercício 5.4.
$$\mathsf{Im}(T) = \{\mathbf{w} \in W : \mathbf{w} = T(\mathbf{v}), \text{para algum } \mathbf{v} \in V\}.$$

Pela definição, tem-se, naturalmente, que $\mathsf{Im}(T) \subseteq W$. Vejamos que satisfaz as três condições de subespaço.

1. Sendo T linear, sabemos que $T(\mathbf{0}_V) = \mathbf{0}_W$, o que mostra que $\mathbf{0}_W$, sendo imagem de um vector de V, pertence a $\mathsf{Im}(T)$.
2. Sejam $\mathbf{w}_1$ e $\mathbf{w}_2$ dois vectores arbitrários de $\mathsf{Im}(T)$. Então, existem $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2 \in V$ tais que $\mathbf{w}_1 = T(\mathbf{v}_1)$ e $\mathbf{w}_2 = T(\mathbf{v}_2)$ (por definição de $\mathsf{Im}(T)$). Mas, então, tem-se
$$\mathbf{w}_1 + \mathbf{w}_2 = T(\mathbf{v}_1) + T(\mathbf{v}_2) = T(\mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2).$$
Como $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2$ pertencem a V,$\mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2$ também está em V, donde, podemos concluir que que $(\mathbf{w}_1 + \mathbf{w}_2) \in \mathsf{Im}(T)$.
3. Seja $\mathbf{w} \in W$, isto é, seja $\mathbf{w} = T(\mathbf{v})$ para um certo $\mathbf{v} \in V$. Seja $\alpha \in \mathbb{R}$. Então,
$$\alpha\mathbf{w} = \alpha T(\mathbf{v}) = T(\alpha\mathbf{v}) \in \mathsf{Im}(T),$$
uma vez que $\alpha\mathbf{v} \in V$, o que conclui a demonstração.

Exercício 5.5. (a) Seguir os passos do Exemplo 5.1.

(b)
$$A_T = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}; \quad \mathsf{car}(A_T) = 3.$$

(c) $\mathsf{Nuc}(T) = \{(\alpha, \alpha, -2\alpha, \alpha) : \alpha \in \mathbb{R}\}$; $((1, 1, -2, 1))$ é uma base de $\mathsf{Nuc}(T)$.

(d) (i) T não é injectiva porque $\mathsf{Nuc}(T) \neq \{(0, 0, 0, 0)\}$.
(ii) Como $\mathsf{car}(A_T) = 3$ e T é uma aplicação de $\mathbb{R}^4$ em $\mathbb{R}^3$, concluímos que T é sobrejectiva.

Exercício 5.6. (a) $T(x_1, x_2, x_3) = (2x_1 - x_2 + x_3, 2x_1 + x_2 + 3x_3, 3x_1 + 3x_3)$.

(b) Mostra-se facilmente que $(5, 7, 9)$ é c.l. das colunas de A_T, pelo que $(5, 7, 9) \in \mathsf{Im}(T)$.

(c) $((-1, -1, 1))$ é uma base de $\mathsf{Nuc}(T)$.

(d) $((2,2,3),(-1,1,0))$ é uma base de $\text{Im}(T)$.

Exercício 5.7. (a) $T(1,0)=(1,1,-1)$, $T(0,1)=(0,1,2)$, $A_T=\begin{pmatrix}1&0\\1&1\\-1&2\end{pmatrix}$.

(b) $T(x,y)=(x,x+y,-x+y)$.

(c) Sim.

Exercício 5.8. (a) $k\neq 0,1$.

(b) (i) $\text{Nuc}(T_1)=\{(-2\alpha,\alpha,0):\alpha\in\mathbb{R}\}$; $\dim \text{Nuc}(T_1)=1$.

(ii) $B=((3,2,1),(-9,-4,2))$.

7.6 Capítulo 6

Exercício 6.1. (a) $p_A(\lambda)=\lambda^2-2\lambda-24$; $\lambda^2-2\lambda-24=0$; $\lambda_1=6,\lambda_2=-4$.

(b) $p_A(\lambda)=(1-\lambda)(\lambda^2-13\lambda+36)$; $(1-\lambda)(\lambda^2-13\lambda+36)=0$; $\lambda_1=1,\lambda_2=4,\lambda_3=9$.

(c) $p_A(\lambda)=-(3-\lambda)(2-\lambda)(1-\lambda)\lambda$; $-(3-\lambda)(2-\lambda)(1-\lambda)\lambda=0$; $\lambda_1=3,\lambda_2=2,\lambda_3=1,\lambda_4=0$.

Exercício 6.2. $\lambda_2=5,\lambda_3=-2$.

Exercício 6.3. (a) Sim; valor próprio $\lambda=3$; (b) Não; (c) Sim; valor próprio $\lambda=2$; (d) Não.

Exercício 6.4. Temos $A\mathbf{x}=\lambda\mathbf{x}$, com $\mathbf{x}\neq 0$.

(a)
$$A\mathbf{x}=\lambda\mathbf{x}\Rightarrow \alpha A\mathbf{x}=\alpha\lambda\mathbf{x}\Rightarrow(\alpha A)\mathbf{x}=(\alpha\lambda)\mathbf{x}.$$

(b)
$$A\mathbf{x}=\lambda\mathbf{x}\Rightarrow A(A\mathbf{x})=A(\lambda\mathbf{x})\Rightarrow A^2\mathbf{x}=\lambda(A\mathbf{x})\Rightarrow A^2\mathbf{x}=\lambda\lambda\mathbf{x}\Rightarrow A^2\mathbf{x}=\lambda^2\mathbf{x}.$$

(c)
$$A\mathbf{x}=\lambda\mathbf{x}\Rightarrow A\lambda x-\beta\mathbf{x}=\lambda\mathbf{x}-\beta\mathbf{x}\Rightarrow A\mathbf{x}-\beta I\mathbf{x}=\lambda\mathbf{x}-\beta\mathbf{x}\Rightarrow(A-\beta I)\mathbf{x}=(\lambda-\beta)\mathbf{x}.$$

(d) A invertível $\Rightarrow \det A\neq 0\Rightarrow \det(A-0I)\neq 0\Rightarrow\lambda=0$ não é valor próprio de A. Logo, se λ é valor próprio de A, (A invertível), $\lambda\neq 0$. Então, tem-se:
$$A\mathbf{x}=\lambda\mathbf{x}\Rightarrow A^{-1}A\mathbf{x}=\lambda A^{-1}\mathbf{x}\Rightarrow\mathbf{x}=\lambda A^{-1}\mathbf{x}\Rightarrow\frac{1}{\lambda}\mathbf{x}=A^{-1}\mathbf{x}.$$

Exercício 6.5. Seja A triangular e suponhamos que A é de ordem n. Então $A-\lambda I$ é triangular e os elementos diagonais de $A-\lambda I$ são $(a_{ii}-\lambda); i=1,\ldots,n$. Então, o polinómio característico de A, $p_A(\lambda)$ é dado por
$$p_A(\lambda)=\det(A-\lambda I)=(a_{11}-\lambda)(a_{22}-\lambda)\ldots(a_{nn}-\lambda),$$
atendendo a que o determinante de uma matriz triangular é igual ao produto dos seus elementos diagonais. Assim sendo, tem-se
$$\begin{aligned}p_A(\lambda)=0 &\iff (a_{11}-\lambda)(a_{22}-\lambda)\ldots(a_{nn}-\lambda)=0\\ &\iff \lambda=a_{11}\text{ ou }\lambda=a_{22}\text{ ou }\ldots\text{ ou }\lambda=a_{nn},\end{aligned}$$
o que estabelece o pretendido.

Exercício 6.6. (a) Valores próprios de A: $\lambda_1 = 1, \lambda_2 = 2$; valores próprios de B: $\lambda_1 = -1$, $\lambda_2 = 2$.

(b) Valores próprios de C: $\lambda_1 = 3; \lambda_2 = 2$.

(c) D não tem valores próprios (reais).

Exercício 6.7. (a) Valores próprios de A: $\lambda_1 = 6$ (com multiplicidade algébrica 2) e $\lambda_2 = -1$.
Vectores próprios associados ao valor próprio $\lambda_1 = 6$: $(-3/5\alpha, -4/5\alpha, 0), \alpha \in \mathbb{R}, \alpha \neq 0$ e $(0, 0, \beta), \beta \in \mathbb{R}, \beta \neq 0$.
Vectores próprios associados ao valor próprio $\lambda_2 = -1$: $(-\sqrt{2}/2\alpha, \sqrt{2}/2\alpha, 0), \alpha \in \mathbb{R}, \alpha \neq 0$.

(b) Base de E_6: $((-3/5, -4/5, 0), (0, 0, 1))$.
Base de E_{-1}: $((-\sqrt{2}/2, \sqrt{2}/2, 0))$.

(c) $B = ((-3/5, -4/5, 0), (0, 0, 1), (-\sqrt{2}/2, \sqrt{2}/2, 0))$.

(d) $S = \begin{pmatrix} -3/5 & 0 & -\sqrt{2}/2 \\ -4/5 & 0 & \sqrt{2}/2 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

Exercício 6.8. (a) Valores próprios de A: $\lambda = 1$ (multiplicidade algébrica 3).
$E_1 = \mathbb{R}^3$; $\dim E_1 = 3$; A já é diagonal (podemos tomar $S = I$).

(b) Valores próprios de A: $\lambda = 1$ (multiplicidade algébrica 3).
$E_1 = \langle (1, 0, 0), (0, 0, 1) \rangle$; $\dim E_1 = 2$; a matriz não é diagonalizável.

(c) Valores próprios de A: $\lambda = 1$ (multiplicidade algébrica 3).
$E_1 = \langle (1, 0, 0) \rangle$; $\dim E_1 = 1$; a matriz não é diagonalizável.

(d) Valores próprios de A: $\lambda_1 = 2, \lambda_2 = -2$.
$E_2 = \langle (-1/2, 1) \rangle$; $\dim E_2 = 1$
$E_{-2} = \langle (1/2, 1) \rangle$; $\dim E_{-2} = 1$
$S = \begin{pmatrix} -1/2 & 1/2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$.

(e) Valores próprios de A: $\lambda_1 = -3$ (multiplicidade algébrica 2) e $\lambda_2 = 7$.
$E_{-3} = \langle (0, 1, 0), (1/2, 0, 1) \rangle$; $\dim E_{-3} = 2$;
$E_7 = \langle (1, 0, -1/2) \rangle$; $\dim E_7 = 1$.
A é diagonalizável; $S = \begin{pmatrix} 0 & 1/2 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1/2 \end{pmatrix}$.

(f) Valores próprios de A: $\lambda_1 = 2$ (multiplicidade algébrica 2) e $\lambda_2 = 4$.
$E_2 = \langle (1, 0, 0), (0, 1, 1) \rangle$; $\dim E_2 = 2$;
$E_4 = \langle (-1/2, 1, -1/2) \rangle$; $\dim E_4 = 1$.
A é diagonalizável; $S = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1/2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1/2 \end{pmatrix}$.

Exercício 6.9.

$$
\begin{aligned}
A \text{ é invertível} &\iff \text{car}(A) = n \\
&\iff \det A \neq 0 \\
&\iff 0 \text{ não é valor próprio de } A \\
&\iff \text{ as colunas de } A \text{ são linearmente independentes} \\
&\iff \text{ as colunas de } A \text{ formam uma base de } \mathbb{R}^n \\
&\iff \mathcal{C}(A) = \mathbb{R}^n \\
&\iff \mathcal{N}(A) = \{(0, 0, \ldots, 0)\} \\
&\iff \text{ A aplicação linear } T_A \text{ é bijectiva} \\
&\iff \dim \text{Im}(T_A) = n \\
&\iff \dim \text{Nuc}(T_A) = 0 \\
&\iff \text{O sistema homogéneo} A\mathbf{x} = \mathbf{0} \text{ não tem soluções não triviais} \\
&\iff \text{O sistema } A\mathbf{x} = \mathbf{b} \ (\mathbf{b} \in \mathbb{R}^{n \times 1}) \text{tem solução única}
\end{aligned}
$$

Bibliografia

[Agu73] F.R. Dias Agudo. *Introdução à Álgebra Linear e Geometria Analítica*. Escolar Editora, 1973.

[CPS09] Isabel Cabral, Cecília Perdigão, and Carlos Saiago. *Álgebra Linear*. Escolar Editora, 2009.

[Ger90] Harver Gerber. *Elementary Linear Algebra*. Brooks/Cole Publishing Company, 1990.

[Ham92] Alan G. Hamilton. *Linear Algebra*. Cambridge University Press, 1992.

[Hil86] Richard O. Hill. *Elementary Linear Algebra*. Academic Press, 1986.

[Mey00] Carl D. Meyer. *Matrix Analysis and Applied Linear Algebra*. SIAM, 2000.

[Str80] Gilbert Strang. *Linear Algebra and Its Applications*. Academic Press, 1980.

[Val03] Maria Raquel Valença. *Introdução à Álgebra Linear*. Departamento de Matemática, Universidade do Minho, 2003.

Índice

ÍNDICE