Universidade do Minho **LEI | MIEI**
Departamento de Matemática **2021/2022**

Elementos de Probabilidades e Teoria de Números

Elementos de Probabilidades - Folha 3

1. Determine o valor médio, a variância e o desvio-padrão das:
   (a) v.a.'s discretas dos exercícios 1 e 2 da Folha Prática 2;
   (b) v.a.'s contínuas dos exercícios 4, 5 e 7 da Folha Prática 2;

   Identifique ainda os quartis de cada uma das v.a.'s indicadas e, adicionalmente, os decis para a v.a. do exercício 1.(a)vi.

2. A proporção de álcool num certo composto é uma v.a. contínua, X, com função densidade de probabilidade dada por
$$f(x) = \begin{cases} 12x^2(1-x) & se \quad 0 < x < 1 \\ 0 & se \quad \text{c.c.} \end{cases}.$$
   (a) Determine a função de distribuição de X e calcule $E[X]$ e $Var[X]$.
   (b) O preço de venda, em euros, deste composto depende da proporção de álcool do seguinte modo: se a proporção de álcool é inferior a $1/3$, o preço é de 10€ por litro, se for superior ou igual a $1/3$ e inferior a $2/3$, o preço é de 15€ por litro e, se for superior ou igual a $2/3$, o preço é de 20€ por litro. O custo de produção é de 2€ por litro.
      i. Determine a f.m.p da v.a. que representa o lucro obtido na venda de 1L de composto.
      ii. Determine o lucro médio por litro.

3. Seja X uma v.a. tal que $E[X] = 3$, $Var[X] = 1.1$ e seja $Y = 2X + 4$.
   (a) Determine $E[Y]$ e $Var[Y]$.
   (b) Calcule $E[X^2]$.

4. Para promover uma urbanização recém construída, uma imobiliária decidiu publicar N anúncios em sites de grande difusão. Campanhas anteriores permitem dizer que o número de apartamentos vendidos após a publicação de um anúncio é uma v.a. discreta, X, com f.m.p.
$$X : \begin{cases} 0 & 1 & 2 \\ 0.8 & 0.15 & 0.05 \end{cases}.$$
   Suponha que os resultados da publicação de cada anúncio são independentes.
   (a) Determine o valor médio e a variância do número de apartamentos vendidos se $N = 100$.
   (b) Ao fim da publicação de N anúncios, designemos por Z_N o número de anúncios cuja publicação não teve qualquer resultado (i.e., resultou na compra de 0 apartamentos). Determine N de modo a que $P(Z_N = N) < 0.1$.

5. Suponha que faz duas extracções, sem reposição, de uma urna contendo três bolas numeradas de 1 a 3. Seja X a v.a. que representa o número da primeira bola extraída e Y a v.a. que representa o máximo dos números extraídos.
   (a) Determine as f.m.p. de X e de Y e calcule os respetivos valores médio e variâncias.
   (b) Calcule $P(X = 1|Y = 3)$ e $P(Y = 1|X = 3)$ e diga se X e Y são independentes.
   (c) Considere agora as seguintes v.a.'s: $S = X + Y$ e $T = |X - Y|$.
      i. Determine as f.m.p de S e T.
      ii. Calcule $E[S]$, $E[T]$, $Var[S]$ e $Var[T]$.

valor médio de x: $E[x] = 0\times\frac{1}{4} + 1\times\frac{1}{2} + 2\times\frac{1}{4} = 1$

variância de x: $\underset{\sigma^2_x}{\underset{\shortparallel}{Var[x]}} = \underset{\left(0^2\times\frac{1}{4}+1^2\times\frac{1}{2}+2^2\times\frac{1}{4}\right)}{\underset{\downarrow}{E[x^2]}} - (E[x])^2 = \frac{3}{2} - 1^2 = \frac{1}{2}$

desvio-padrão de x: $\sigma_x = \sqrt{\frac{1}{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$

Quartis:

1º Q: $x_{1/4} = \text{Inf}\{c \in \mathbb{R} : F_x(c) \geq \frac{1}{4}\} = \text{Inf}\{c \in \mathbb{R} : c \geq 0\} = 0$

2º Q: $x_{2/4} = x_{1/2} = \text{Inf}\{c \in \mathbb{R} : F_x(c) \geq \frac{1}{2}\} = \text{Inf}\{c \in \mathbb{R} : c \geq 1\} = 1$
↳ mediana

3º Q: $x_{\frac{3}{4}} = \text{Inf}\{c \in \mathbb{R} : F_x(c) \geq \frac{3}{4}\} = \text{Inf}\{c \in \mathbb{R} : c \geq 1\} = 1$

1.b) valor médio de x: $E[x] = \int_{-\infty}^{+\infty} x\, f(x)\, dx = \int_{-\infty}^{0} x \cdot 0\, dx + \int_0^4 x \cdot \frac{1}{8} dx + \int_4^6 x \cdot \frac{1}{4} dx + \int_6^{+\infty} x \cdot 0\, dx =$

$= \frac{1}{8}\left[\frac{x^2}{2}\right]_0^4 + \frac{1}{4}\left[\frac{x^2}{2}\right]_4^6 = \ldots = \frac{7}{2}$

variância de x: $Var[x] = E[x^2] - (E[x])^2 = \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 f(x)\, dx - \left(\frac{7}{2}\right)^2 = \int_{-\infty}^{0} x^2 \cdot 0\, dx + \int_0^4 x^2 \cdot \frac{1}{8} dx + \int_4^6 x^2 \cdot \frac{1}{4} dx$

$+ \int_6^{+\infty} x^2 \cdot 0\, dx - \left(\frac{7}{2}\right)^2 = \ldots = \frac{37}{12} = 3{,}08$

1º Quartil: $x_{\frac{1}{4}} = F^{-1}\left(\frac{1}{4}\right) = 2$

2º Quartil: $x_{\frac{2}{4}} = x_{\frac{1}{2}} = F\left(\frac{1}{2}\right) = 4$

3º Quartil: $x_{\frac{3}{4}} = F\left(\frac{3}{4}\right) = 5$

3. $E[x] = 3$ $\quad Var[x] = 1{,}4$
$Y = 2x + 4$

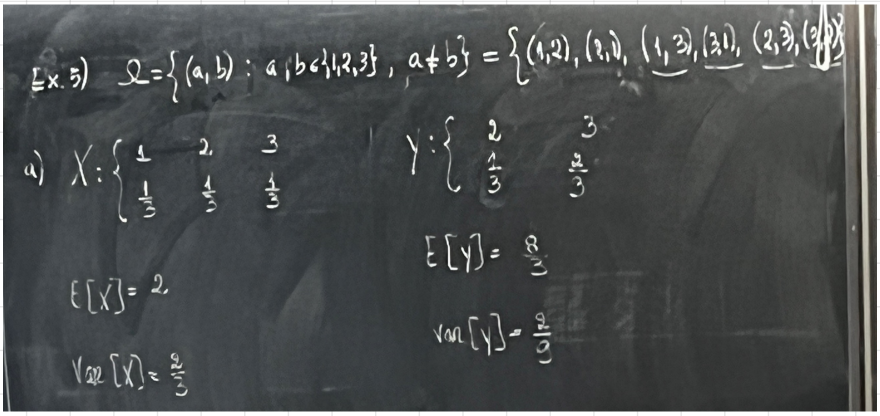
a) $E[Y] = 2E[x] + 4 = 2\times 3 + 4 = 10$
$Var[Y] = 2^2 Var[x] = 4\times 1{,}1 = 4{,}1$

$Var[ax+b] = a^2 Var[x]$
$Var[x] = E[x^2] - (E[x])^2$

b) $E[x^2] = Var[x] + (E[x])^2 = 1{,}1 + 3^2 = 10{,}1$

5)

a)



Ex. 5) $\Omega = \{(a,b) : a, b \in \{1,2,3\},\ a \neq b\} = \{(1,2), (2,1), (1,3), (3,1), (2,3), (3,2)\}$

a) $X : \begin{cases} 1 & 2 & 3 \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \end{cases}$ $\qquad Y : \begin{cases} 2 & 3 \\ \frac{1}{3} & \frac{2}{3} \end{cases}$

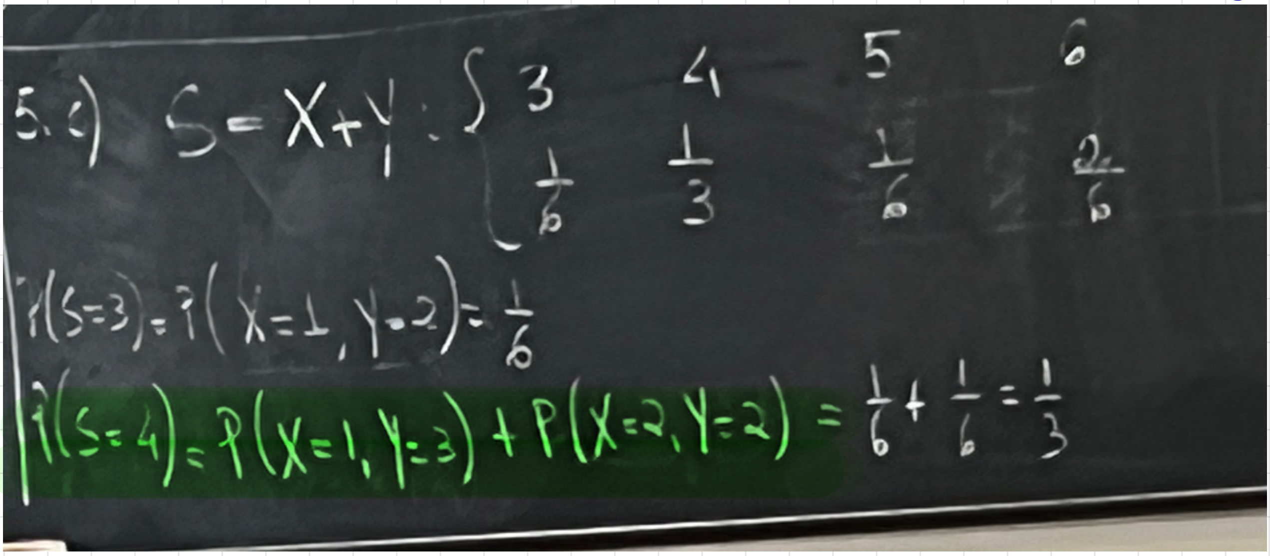
$E[X] = 2$ $\qquad E[Y] = \frac{8}{3}$

$Var[X] = \frac{2}{3}$ $\qquad Var[Y] = \frac{2}{9}$

b) $P(X=1 \mid Y=3) = \dfrac{P(X=1, Y=3)}{P(Y=3)} = \dfrac{\frac{1}{6}}{\frac{2}{3}} = \frac{1}{4}$

$P(Y=1 \mid X=3) = \dfrac{\overbrace{P(Y=1, X=3)}^{0}}{P(X=3)} = 0 = P(Y=1)$

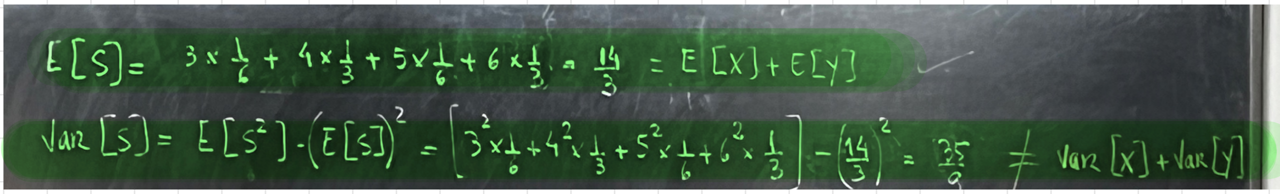
$P(S=5) = P(X=2, Y=3) + P(X=3, Y=2) = \frac{1}{6} + 0 = \frac{1}{6}$



5. c) $S = X + Y : \begin{cases} 3 & 4 & 5 & 6 \\ \frac{1}{6} & \frac{1}{3} & \frac{1}{6} & \frac{2}{6} \end{cases}$

$P(S=3) = P(X=1, Y=2) = \frac{1}{6}$

$P(S=4) = P(X=1, Y=3) + P(X=2, Y=2) = \frac{1}{6} + \frac{1}{6} = \frac{1}{3}$



$E[S] = 3 \times \frac{1}{6} + 4 \times \frac{1}{3} + 5 \times \frac{1}{6} + 6 \times \frac{1}{3} = \frac{14}{3} = E[X] + E[Y]$

$Var[S] = E[S^2] - (E[S])^2 = \left[3^2 \times \frac{1}{6} + 4^2 \times \frac{1}{3} + 5^2 \times \frac{1}{6} + 6^2 \times \frac{1}{3}\right] - \left(\frac{14}{3}\right)^2 = \frac{35}{9} \neq Var[X] + Var[Y]$