



# Métodos Numéricos

## Interpolação polinomial

Teresa Monteiro

Departamento de Produção e Sistemas

Escola de Engenharia

Universidade do Minho

tm@dps.uminho.pt

Encontrar uma aproximação (por exemplo, um polinómio) à função dada  $f(x)$  com o menor erro possível.

Porquê?

- Não é conhecida a expressão analítica da função  $f(x)$  - apenas se conhecem pontos discretos  $(x_i, f_i)$  (uma tabela de pontos) e há necessidade de prever valores em pontos intermédios (interpolar).

Dado um conjunto discreto de valores  $(x_i, f_i)$ ,  $i = 0, 1, \dots, n$  ( $n + 1$  pontos), pretende-se encontrar uma relação funcional (expressão) entre as variáveis  $x$  (variável independente) e  $f$  (variável dependente) para prever o comportamento entre as variáveis e poder estimar valores.

- Quando se conhece a expressão da função  $f(x)$  mas ela é muito complicada e operações como diferenciação ou integração são difíceis ou mesmo impossíveis, pelo que um modelo matemático mais simples é muito útil.

Pretende-se conhecer uma expressão mais simples que descreva o melhor possível o comportamento de  $f$  como função de  $x$ .

- Introdução
- Diferenças divididas
- Polinómio interpolador de Newton
- Exercícios de aplicação
- Interpolação segmentada
- Splines lineares
- Splines cúbicas
- Exercícios de aplicação

O problema geral da interpolação polinomial consiste em, dados  $n + 1$  pontos distintos  $x_0, x_1, \dots, x_n$  e respectivos valores  $y_0, y_1, \dots, y_n$  em que  $y_i = f(x_i)$ , determinar um polinómio  $p_n(x)$  de grau  $n$  tal que

$$p_n(x_i) = y_i, \quad i = 0, \dots, n.$$

O valor do resíduo é nulo para estes pontos, *i.e.*,  
 $r(x_i) = f(x_i) - p_n(x_i) = 0, i = 0, \dots, n.$

Este tipo de polinómio é conhecido na literatura como  
"colocativo".

## Teorema

(Teorema de Weirstrass): Dadas uma função  $f(x)$  contínua num intervalo  $[a, b]$  e uma quantidade  $\varepsilon > 0$ , existe sempre um polinómio  $p_n(x)$ , de grau  $\leq n$ , tal que o **erro** da aproximação  $\|f(x) - p_n(x)\| < \varepsilon$ .

O teorema seguinte informa que o polinómio existe e é único.

## Teorema

Dados  $n + 1$  pontos distintos  $x_0, x_1, \dots, x_n$  e  $n + 1$  valores  $y_0, y_1, \dots, y_n$ , existe um e um só polinómio  $p_n(x)$ , de grau menor ou igual a  $n$  tal que:

$$p_n(x_i) = y_i, \quad i = 0, \dots, n.$$

Por 2 pontos quantas retas diferentes ( $p_1(x)$ ) passam?



# Tabela das diferenças divididas

Considere-se a tabela com os valores de  $x$  e  $f(x)$  para  $n + 1$  pontos:

$x_i$	$x_0$	$x_1$	$\dots$	$x_{n-1}$	$x_n$
$f_i$	$f_0$	$f_1$	$\dots$	$f_{n-1}$	$f_n$

A diferença dividida de primeira ordem relativa a  $x_j$  e  $x_{j+1}$  é dada por:

$$[x_j, x_{j+1}] = \frac{f_j - f_{j+1}}{x_j - x_{j+1}}, \quad j = 0, \dots, n - 1$$

(há  $n$  diferenças divididas de ordem 1 ( $dd_1$ ))

# Tabela das diferenças divididas

A diferença dividida de segunda ordem envolvendo os pontos  $x_j$ ,  $x_{j+1}$  e  $x_{j+2}$  relaciona as diferenças divididas de 1<sup>a</sup> ordem  $[x_j, x_{j+1}]$  e  $[x_{j+1}, x_{j+2}]$  :

$$[x_j, x_{j+1}, x_{j+2}] = \frac{[x_j, x_{j+1}] - [x_{j+1}, x_{j+2}]}{x_j - x_{j+2}}, \quad j = 0, \dots, n-2$$

(há  $n - 1$  diferenças divididas de ordem 2 ( $dd_2$ ))

# Tabela das diferenças divididas

A diferença dividida de ordem  $n$  relaciona as diferenças divididas de ordem  $n - 1$ ,  $[x_0, x_1, \dots, x_{n-1}]$  e  $[x_1, x_2, \dots, x_{n-1}, x_n]$  :

$$[x_0, x_1, \dots, x_{n-1}, x_n] = \frac{[x_0, x_1, \dots, x_{n-1}] - [x_1, x_2, \dots, x_{n-1}, x_n]}{x_0 - x_n}$$

(há 1 diferença dividida de ordem  $n - dd_n$ )

# Tabela da Diferenças Divididas

$x_0$	$f_0$					
$x_1$	$f_1$	$[x_0, x_1]$	$[x_0, x_1, x_2]$		$[x_0, x_1, \dots, x_{n-1}]$	
		$[x_1, x_2]$				
$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\vdots$		$[x_0, x_1, \dots, x_{n-1}, x_n]$
$x_{n-1}$	$f_{n-1}$	$[x_{n-2}, x_{n-1}]$	$[x_{n-2}, x_{n-1}, x_n]$		$[x_1, \dots, x_{n-1}, x_n]$	
$x_n$	$f_n$	$[x_{n-1}, x_n]$				
		$dd_1$	$dd_2$	$\vdots$	$dd_{n-1}$	$dd_n$

# Propriedades das diferenças divididas

- Podem ser calculadas para **qualquer** espaçamento (não constante) entre os pontos  $x_0, x_1, \dots, x_{n-1}, x_n$
- as diferenças divididas são funções simétricas dos seus argumentos, *i.e.*,  $[x_i, x_j] = [x_j, x_i]$
- as diferenças divididas de ordem  $n$  de um polinómio de grau  $n$  são iguais e diferentes de zero (as diferenças divididas de ordem  $n + 1$  são zero)

# Propriedades das diferenças divididas

A seguinte fórmula relaciona a diferença dividida de ordem  $n$  com a derivada da mesma ordem de  $f(x)$  num ponto de  $[x_0, x_n]$

Diferença dividida de ordem  $n$  e derivada de ordem  $n$

$$[x_0, x_1, \dots, x_n] = \frac{f^{(n)}(\xi)}{n!} \quad \xi \in [x_0, x_n]$$

Sempre que a expressão da função  $f(x)$  for desconhecida e houver necessidade de estimar qualquer derivada, a tabela das diferenças divididas e a fórmula anterior permitem essa estimação.

**NOTA:** o recurso à tabela das diferenças divididas para estimação de derivadas, **apenas** deverá ser feito quando não é conhecida a expressão analítica de  $f(x)$ .

# Polinómio interpolador de Newton

O polinómio interpolador de Newton de grau  $\leq n$  passa pelos  $n + 1$  pontos  $x_0, x_1, \dots, x_n$  utilizando as diferenças divididas.

## Polinómio interpolador de Newton de grau $n$

$$p_n(x) = f_0 + (x - x_0)[x_0, x_1] + (x - x_0)(x - x_1)[x_0, x_1, x_2] + \dots + (x - x_0)\dots(x - x_{n-1})[x_0, x_1, \dots, x_n].$$

O polinómio passa pelos  $n + 1$  pontos ou seja é colocativo:

$$p_n(x_i) = f(x_i) \quad i = 0, \dots, n.$$

O erro ou resíduo, nesses  $n + 1$  pontos é zero:

$$p_n(x_i) - f(x_i) = 0 \quad i = 0, \dots, n.$$

# Polinómio interpolador de Newton

No entanto para pontos  $x \in [x_0, x_n] : x \neq x_i, i = 0, \dots, n$  existe erro ( $r(x) = f(x) - p_n(x) \neq 0$ ). Esse erro é calculado a partir de um polinómio  $R_n(x)$  de grau  $n + 1$ .

## Erro do polinómio interpolador de Newton

$$R_n(x) = (x-x_0)(x-x_1) \dots (x-x_{n-1})(x-x_n) \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!} \quad \xi \in [x_0, x_n]$$



Quando não é conhecida a expressão de  $f(x)$ , para estimação da diferença dividida de ordem  $n + 1$ ,  $\frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}$ , é necessário um ponto extra,  $x_{extra}$ , que não foi usado para construção de  $p_n(x)$  e do qual se conhece  $f(x_{extra})$ :

$$[x_0, x_1, \dots, x_n, x_{extra}] = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!} \quad \xi \in [x_0, x_n]$$

# Polinómio interpolador de Newton

Interpolação direta - tem-se  $x$  pretende-se  $f(x)$

Seja  $\bar{x}$  um ponto que não está na tabela.

**Objetivo:** Estimar  $f(\bar{x})$  usando  $p_n(\bar{x})$

- escolher  $n + 1$  pontos da tabela  $\Rightarrow$  polinómio de grau  $n$
- escolher pelo menos um ponto à direita e à esquerda de  $\bar{x}$
- escolher os  $n + 1$  pontos da tabela mais próximos de  $\bar{x}$

## Polinómio de grau 3

$x_i$	-1	0	1	2	8	10	12	15	20
$f_i$	-5	-2	-1	3	0	-2	-1	4	6

- Se  $\bar{x} = 3$ :

$$\begin{array}{cccc} x_0 & x_1 & x_2 & x_3 \\ \hline f_0 & f_1 & f_2 & f_3 \end{array} \Leftrightarrow \begin{array}{cccc} 0 & 1 & 2 & 8 \\ \hline -2 & -1 & 3 & 0 \end{array}$$

- Se  $\bar{x} = 13$ :

$$\begin{array}{cccc} x_0 & x_1 & x_2 & x_3 \\ \hline f_0 & f_1 & f_2 & f_3 \end{array} \Leftrightarrow \begin{array}{cccc} 8 & 10 & 12 & 15 \\ \hline 0 & -2 & -1 & 4 \end{array}$$

# Exercício de aplicação 1

A velocidade do som na água varia com a temperatura de acordo com a tabela abaixo:

Temperatura ( $^{\circ}\text{C}$ )	86.0	93.3	98.9	104.4	110.0
Velocidade ( $\text{m/s}$ )	1552	1548	1544	1538	1532

Pretende-se estimar a velocidade do som na água a uma temperatura de  $100^{\circ}\text{C}$ , utilizando um polinómio interpolador de Newton de grau dois. Estime também o erro cometido.

O polinómio interpolador é de grau 2 logo são precisos 3 pontos. Como o valor a estimar é em 100, os pontos a escolher são um imediatamente antes (98.9) e outro imediatamente depois (104.4), o terceiro ponto deve ser o mais próximo possível de 100 (93.3).

Variável independente: temperatura ( $x$ )

Variável dependente: velocidade ( $f(x)$ )

# Resolução

$$x_0 = 93.3, \quad x_1 = 98.9, \quad x_2 = 104.4$$

Tabela das diferenças divididas:

$x_i$	$f_i$		
93.3	1548		
		-0.71429	
98.9	1544		-0.03393
		-1.09091	
104.4	1538		

O polinómio é:

$$p_2(x) = 1548 + (x - 93.3) \times (-0.71429) + (x - 93.3) \times (x - 98.9) \times (-0.03393)$$

$$f(100) \approx p_2(100) = 1542.964$$

Para o cálculo do erro é necessária a diferença dividida de ordem 3. Para isso adiciona-se um ponto, em que é conhecido o valor de  $f(x)$  (o mais próximo possível do valor a interpolar (100))- pode ser colocado no fim ou no início da tabela, pois o valor da diferença dividida de ordem  $n + 1$  é igual.

$x_i$	$f_i$			
93.3	1548			
		-0.71429		
98.9	1544		-0.03393	
		-1.09091		$2.136829^{-3}$
104.4	1538		$1.755045^{-3}$	
		-1.071429		
110	1532			

$$|R(100)| \leq |(100-93.3)(100-98.9)(100-104.4) \times 2.136829^{-3}| = 0.06929$$

# Exercício de aplicação 2

Pretende-se construir um desvio entre duas linhas de caminho de ferro paralelas. O desvio deve corresponder a um polinómio de grau três que une os pontos  $(x_0, f_0) = (0, 0)$

e  $(x_4, f_4)$ , como mostra a figura



Com base nos dados da tabela

$x_i$	0	1	1.5	2	$x_4$
$f_i = p_3(x_i)$	0	0.3125	0.6328125	1	$f_4$

verifique se o ponto  $(x_4, f_4) = (4, 2)$  pertence ao polinómio. Use 7 casas decimais nos cálculos.



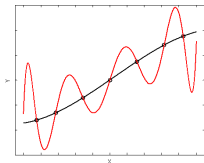
## Tabelas das diferenças divididas:

$x_i$	$f_i$	$dd1$	$dd2$	$dd3$	$dd4$
0	0				
1	0.3125	0.3125			
1.5	0.6328125	0.640625	0.21875	-0.0625	
2	1	0.734375	0.09375	-0.0625	0
4	2	0.5	-0.09375		

Uma vez que as  $dd3$  são iguais e a  $dd4$  é zero, conclui-se que  $f$  é um polinómio de grau 3 e o ponto  $(4, 2)$  pertence a esse polinómio. Poderiam também calcular o  $p_3(x)$  e verificar que  $p_3(4) = 2$ .

- A técnica de interpolação por splines está na base da Gráfica Computacional (sw gráfico, CAD, etc).
- As splines são réguas de madeira utilizadas pelos desenhadores para traçar curvas suaves que passem por pontos dados.
- Esta técnica é muito utilizada na indústria naval para apurar a forma dos cascos a partir de esboços relativamente grosseiros.
- Surgiu pelos anos quarenta do século XX na engenharia náutica na elaboração de trajectórias de grandes navios - as rotas deveriam ser curvas suaves a passarem pelos vários pontos de paragem.
- São também muito usadas nas trajectórias de movimento de robots.

Quando se utilizam polinómios de grau muito elevado, estes assumem um comportamento muito oscilatório, não refletindo o comportamento da função que pretendem estimar.



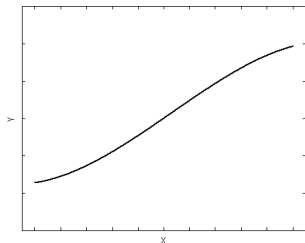
(se for usado um polinómio interpolador de grau 10)

Por outro lado, os polinómios são funções simples e computacionalmente atraentes.

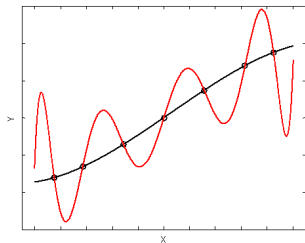
## Interpolação por splines

Utilizar vários polinómios de grau baixo em diferentes intervalos de pontos

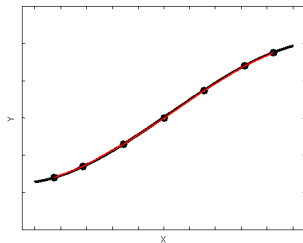
Considere-se a representação gráfica dum função  $f(x)$ :



Se for usado um polinómio interpolador de grau 10:



Se for usada uma *spline* linear:



- Junção de polinómios de grau 1.
- Para cada segmento  $i$  a forma do polinómio de grau 1 obtém-se:

$$s_1^i(x) = f_{i-1} + \frac{f_i - f_{i-1}}{x_i - x_{i-1}}(x - x_{i-1})$$

$$i = 1, 2, \dots, n.$$

- O segmento  $i$  é definido por  $[x_{i-1}, x_i]$

Limite superior do erro de truncatura com a aproximação *spline* linear  $s_1$ :

- (i) Seja  $f(x)$  contínua, com derivadas contínuas até à segunda ordem,
- (ii) sejam os pontos do intervalo  $[a, b]$ :

$$a = x_0 < x_1 < x_2 < \cdots < x_{n-1} < x_n = b,$$

- (iii) seja  $s_1(x)$  a 'spline' linear composta pelos polinómios de grau 1  $s_1^i(x)$ ,  $i = 1, 2, \dots, n$  para aproximar  $f(x)$  em  $[a, b]$ ,



(iv) seja

$$\max_{\xi \in [a,b]} |f''(\xi)| \leq M_2,$$

$M_2$  majorante da segunda derivada de  $f(x)$  em  $[a, b]$

(v) seja

$$h = \max_{0 \leq i \leq n-1} (x_{i+1} - x_i)$$

então

$$|f(x) - s_1(x)| \leq \frac{1}{8} h^2 M_2$$

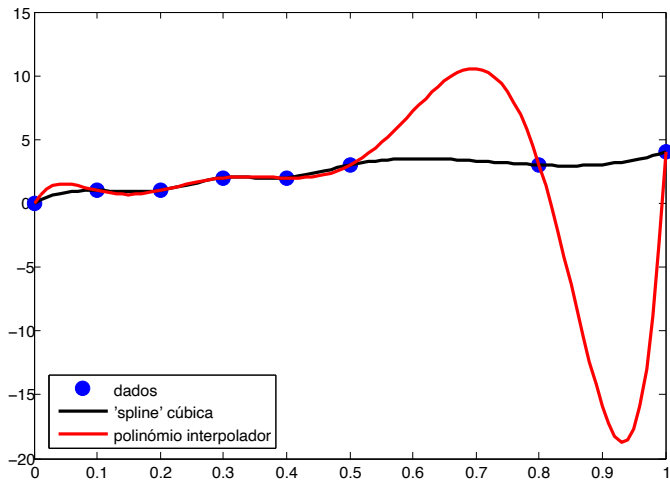
**Nota:** se  $f(x)$  não for dada por uma expressão, substitui-se  $M_2$  pela diferença dividida de 2ª ordem de maior módulo em valor absoluto multiplicada por 2!.

## Splines cúbicas

- derivadas contínuas até à segunda ordem
- fáceis de construir
- comportamento estável

Uma spline cúbica é uma função polinomial segmentada de grau 3, i.e., definida por diferentes polinómios cúbicos em segmentos da reta real, sendo os polinómios escolhidos por forma a permitir uma "junção" suave.

# Spline vs polinómio interpolador



# Spline cúbica $s_3(x)$

Considere-se um conjunto de  $n + 1$  nós

$$a = x_0 < x_1 < \dots < x_{n-1} < x_n = b$$

- nós fronteira:  $x_0$  e  $x_n$
- $n - 1$  nós interiores:  $x_1, x_2, \dots, x_{n-1}$

Estes  $n + 1$  pontos definem  $n$  segmentos -  
 $[x_0, x_1], [x_1, x_2], \dots, [x_{n-1}, x_n]$ .

A expressão para a função spline  $s_3(x)$  é

$$s_3(x) = \begin{cases} s_3^1(x) & x \in [x_0, x_1] \text{ (para o segmento 1)} \\ s_3^2(x) & x \in [x_1, x_2] \text{ (para o segmento 2)} \\ \vdots & \vdots \\ s_3^n(x) & x \in [x_{n-1}, x_n] \text{ (para o segmento } n) \end{cases}$$

## Spline cúbica $s_3(x)$

$s_3^i(x)$  é o polinómio cúbico do segmento  $i$  com a seguinte expressão:

$$\begin{aligned}s_3^i(x) = & \frac{M_{i-1}}{6(x_i - x_{i-1})}(x_i - x)^3 + \frac{M_i}{6(x_i - x_{i-1})}(x - x_{i-1})^3 + \\ & + \left[ \frac{f_{i-1}}{(x_i - x_{i-1})} - \frac{M_{i-1}(x_i - x_{i-1})}{6} \right](x_i - x) + \\ & + \left[ \frac{f_i}{(x_i - x_{i-1})} - \frac{M_i(x_i - x_{i-1})}{6} \right](x - x_{i-1}), \quad i = 1, 2, \dots, n.\end{aligned}$$

$M_i \equiv M(x_i)$  é o valor da segunda derivada de  $s_3$  em  $x_i$

$$M_i \approx f''(x_i)$$

Para que a ligação entre os vários segmentos seja suave, tem de haver continuidade nos nós e tem de se manter a curvatura. Em cada nó interior  $x_i, i = 1, 2, \dots, n - 1$  tem de se verificar:

- $s_3^i(x_i) = s_3^{i+1}(x_i)$
- $s_3^{i'}(x_i) = s_3^{i+1'}(x_i)$
- $s_3^{i''}(x_i) = s_3^{i+1''}(x_i)$

A continuidade nas primeiras derivadas nos  $n - 1$  nós interiores

$$s_3^{i'}(x_i) = s_3^{i+1'}(x_i) \quad i = 1, 2, \dots, n - 1$$

origina a seguinte equação, para o nó interior  $i$ :

$$\begin{aligned} & (x_i - x_{i-1})M_{i-1} + 2(x_{i+1} - x_{i-1})M_i + (x_{i+1} - x_i)M_{i+1} = \\ & = \frac{6}{(x_{i+1} - x_i)}(f_{i+1} - f_i) - \frac{6}{(x_i - x_{i-1})}(f_i - f_{i-1}), \quad i = 1, \dots, n - 1 \end{aligned}$$

Substituindo a equação anterior para os  $n - 1$  nós interiores obtém-se um sistema de  $n - 1$  equações lineares nas  $n + 1$  incógnitas  $M$  ( $M_0, M_1, \dots, M_n$ )

O sistema tem mais duas incógnitas do que equações!!!

Se a spline for **natural** então

$$M_0 = 0 \text{ e } M_n = 0$$

e o sistema passa a ter  $n - 1$  equações e  $n - 1$  incógnitas

$$M_1, M_2, \dots, M_{n-1}$$



Se a spline for **completa**, adicionam-se ao sistema as seguintes equações, relativas aos nós fronteira inferior e superior, respectivamente:

$$2(x_1 - x_0)M_0 + (x_1 - x_0)M_1 = \frac{6}{(x_1 - x_0)}(f_1 - f_0) - 6f'_0$$

$$2(x_n - x_{n-1})M_n + (x_n - x_{n-1})M_{n-1} = 6f'_n - \frac{6}{(x_n - x_{n-1})}(f_n - f_{n-1})$$

O sistema passa a ter  $n + 1$  equações e  $n + 1$  incógnitas!

As equações envolvem o cálculo da derivada nos nós fronteira ( $f'_0$  e  $f'_n$ ). Se a expressão analítica da função  $f(x)$  for conhecida, esse cálculo é imediato, caso contrário tem de ser estimado através de diferenças divididas.

Utilizam-se para tal, dois pontos auxiliares que não sejam nós da spline:  $x_a$  deve estar o mais próximo possível de  $x_0$  para estimar  $f'_0$  e  $x_b$  deve estar o mais próximo possível de  $x_n$  para estimar  $f'_n$

Deve ter-se o cuidado inicial de retirar esses dois pontos e não os utilizar como nós da spline

## Erro na spline

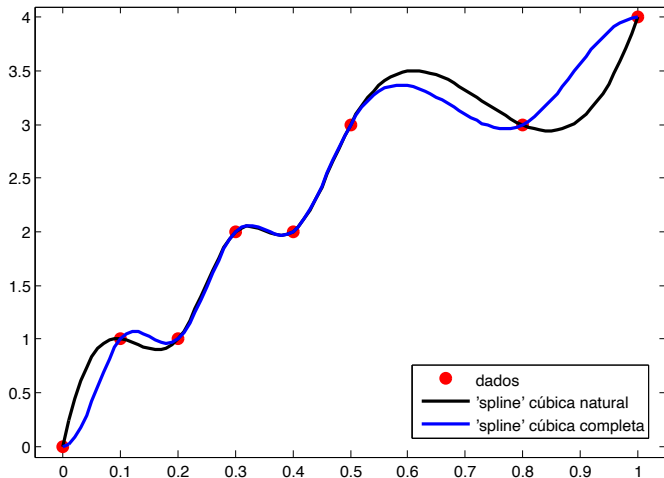
$$|f(x) - s_3(x)| \leq \frac{5}{384}h^4M_4 \quad |f'(x) - s'_3(x)| \leq \frac{1}{24}h^3M_4$$

em que

$$h = \max_{0 \leq i \leq n-1} (x_{i+1} - x_i) \quad \text{e} \quad \max_{\xi \in [x_0, x_n]} |f^{iv}(\xi)| \leq M_4$$

( $M_4$  é um majorante do valor absoluto da quarta derivada de  $f(x)$  em  $[x_0, x_n]$ ).

# Spline completa vs spline natural



A seguinte função segmentada  $s_3(x)$  no intervalo  $[0, 3]$ , representa o lucro obtido na venda de um produto sazonal. No 1º mês de vendas o lucro é representado por  $s_3^1(x)$  e nos 2º e 3º meses é descrito por  $s_3^2(x)$ . Poderá a função segmentada  $s_3(x)$  representar uma spline cúbica? Justifique.



$$s_3(x) = \begin{cases} s_3^1(x) = 3x^3 - x^2 + x - 2, & 0 \leq x \leq 1 \\ s_3^2(x) = 2x^3 + 2x - 3, & 1 \leq x \leq 3 \end{cases}$$

### Resolução:

Para esta função cúbica segmentada representar uma spline, deve ser continuamente diferenciável até à segunda ordem. Nos pontos interiores ( $x = 1$ ) deverá verificar-se:

$$s_3^1(1) = s_3^2(1), \quad s_3^{1'}(1) = s_3^{2'}(1), \quad s_3^{1''}(1) = s_3^{2''}(1).$$

A função tem o mesmo valor para  $x = 1$  nos dois segmentos:  $s_3^1(1) = 1$  e  $s_3^2(1) = 1$ .

Analisando a primeira derivada:

$$s_3'(x) = \begin{cases} s_3^{1'}(x) = 9x^2 - 2x + 1, & 0 \leq x \leq 1 \\ s_3^{2'}(x) = 6x^2 + 2, & 1 \leq x \leq 3 \end{cases}$$

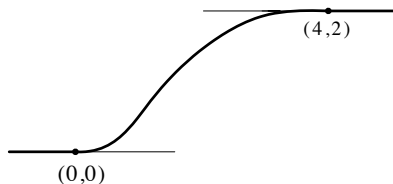
$s_3^{1'}(1) = 8$  e  $s_3^{2'}(1) = 8$ . A primeira derivada da função tem o mesmo valor nos dois segmentos, para  $x = 1$ . Verificando a segunda derivada:

$$s_3''(x) = \begin{cases} s_3^{1''}(x) = 18x - 2, & 0 \leq x \leq 1 \\ s_3^{2''}(x) = 12x, & 1 \leq x \leq 3 \end{cases}$$

$s_3^{1''}(1) = 16$  e  $s_3^{2''}(1) = 12$ . A segunda derivada da função tem valores diferentes para  $x = 1$  em cada um dos segmentos. Este facto indica que a função  $s_3(x)$  não pode representar uma spline.

# Exercício 1

Considere um desvio entre duas linhas de caminho de ferro paralelas. O desvio agora deve corresponder a um polinómio de grau três que une os pontos  $(0,0)$  e  $(4,2)$ , como mostra a figura.



Com base nos quatro pontos da tabela

$x_i$	-1	0	4	5
$f_i = f(x_i)$	0.4375	0	2	1.5625

$m_0 = 0$        $s_3^{(1)}$        $s_3^{(2)}$        $s_3^{(3)}$        $m_3 = 0$

construa a parte da *spline* cúbica natural que descreve a trajetória desenhada e calcule  $f(2)$ .

## Resolução do Exercício 1

$i$	0	1	2	3
$x_i$	-1	0	4	5
$f_i$	0.4375	0	2	1.5625
	extremo inferior	ponto interior	ponto interior	extremo superior
	$M_0 = 0$			$M_3 = 0$

Como pretendemos determinar uma *spline* cúbica natural, então a curvatura nos extremos é nula, ou seja,  $M_0 = 0$  e  $M_3 = 0$  e apenas se constroem as equações para os pontos interiores ( $i = 1$  e  $i = 2$ ).

- Expressão para o ponto  $i = 1$

$$(x_1 - x_0)M_0 + 2(x_2 - x_0)M_1 + (x_2 - x_1)M_2 = \frac{6}{(x_2 - x_1)}(f_2 - f_1) - \frac{6}{(x_1 - x_0)}(f_1 - f_0)$$

- Expressão para o ponto  $i = 2$

$$(x_2 - x_1)M_1 + 2(x_3 - x_1)M_2 + (x_3 - x_2)M_3 = \frac{6}{(x_3 - x_2)}(f_3 - f_2) - \frac{6}{(x_2 - x_1)}(f_2 - f_1)$$



## Resolução do Exercício 1 (cont.)

Simplificando as expressões, o sistema resultante é

$$\begin{cases} 10M_1 + 4M_2 = 5.625 \\ 4M_1 + 10M_2 = -5.625 \end{cases}$$

que se resolve por EGPP, e determina-se

$$\begin{cases} M_1 = 0.9375 \\ M_2 = -0.9375 \end{cases}$$

Como queremos estimar o valor de  $f(2)$  através de uma *spline* cúbica natural, então verificamos que o ponto 2 encontra-se entre o ponto  $x = 0$  e  $x = 4$ .

$x$	-1	0	4	5
$f$	0.4375	0	2	1.5625

## Resolução do Exercício 1 (cont.)

Uma vez que temos um segmento de spline entre cada 2 pontos, então o ponto  $x = 2$  localiza-se no 2º segmento, ou seja no intervalo  $[0,4]$ .

Seguidamente, constrói-se expressão do segmento  $i = 2$  da *spline* cúbica

$$s_3^{(2)}(x) = \frac{M_1}{6(x_2 - x_1)}(x_2 - x)^3 + \frac{M_2}{6(x_2 - x_1)}(x - x_1)^3 + \left[ \frac{f_1}{(x_2 - x_1)} - \frac{M_1(x_2 - x_1)}{6} \right] (x_2 - x) \\ + \left[ \frac{f_2}{(x_2 - x_1)} - \frac{M_2(x_2 - x_1)}{6} \right] (x - x_1)$$

Substituindo valores e simplificando

$$s_3^{(2)}(x) = 0.0390625(4 - x)^3 - 0.0390625x^3 - 0.625(4 - x) + 1.125x$$

Por fim, calcula-se  $f(2) \approx s_3^{(2)}(2) = 1$ .

# Exercício de aplicação 1

Ao efectuar observações astronómicas medindo as variações na magnitude aparente,  $M$ , de uma estrela variável chamada *variável Cepheid*, ao longo de um período de tempo,  $t$ , foram obtidos os seguintes valores:

tempo ( $t$ )	0.0	0.3	0.5	0.6	0.8
Magnitude aparente ( $M$ )	0.302	0.106	0.240	0.579	0.468

Determine um valor aproximado da magnitude aparente da *variável Cepheid* no instante  $t = 0.4$ , utilizando uma spline cúbica natural.

**Resolução:**

$x_0 = 0$	$x_1 = 0.3$	$x_2 = 0.5$	$x_3 = 0.6$	$x_4 = 0.8$
$f_0 = 0.302$	$f_1 = 0.106$	$f_2 = 0.240$	$f_3 = 0.579$	$f_4 = 0.468$

Para os pontos interiores  $(x_1, x_2, x_3)$  substitui-se na equação do nó interior o índice  $i$  por 1, 2, 3 obtendo-se:

$$\begin{cases} 0.3M_0 + 1M_1 + 0.2M_2 = 7.94 \\ 0.2M_1 + 0.6M_2 + 0.1M_3 = 16.32 \\ 0.1M_2 + 0.6M_3 + 0.2M_4 = -23.67 \end{cases}$$

Este sistema tem 3 equações mas 5 incógnitas. Como a spline é natural tem-se  $M_0 = M_4 = 0$  eliminando-se duas incógnitas:

$$\begin{cases} 1M_1 + 0.2M_2 = 7.94 \\ 0.2M_1 + 0.6M_2 + 0.1M_3 = 16.32 \\ 0.1M_2 + 0.6M_3 = -23.67 \end{cases}$$

Este sistema é resolvido por um método direto e estável (EGPP):

$$M_1 = 1.065031, \quad M_2 = 34.374847, \quad M_3 = -45.179141.$$

O valor a estimar  $x = 0.4$  pertence ao segmento 2 ( $[x_1, x_2]$ ), então substitui-se na equação do segmento da spline o índice  $i$  por 2 para obter  $s_3^2(x)$ .

Para estimar  $f(0.4)$  calcula-se  $s_3^2(0.4) = 0.084400 \approx f(0.4)$ .

## Exercício de aplicação 2

Resolver o exercício anterior mas com uma *spline* cúbica completa.

Como a spline **é completa e não conhecemos a expressão de  $f(x)$**  guardam-se 2 pontos o mais próximo possível dos pontos extremos que irão servir para estimar o valor de  $f'(x)$  nos pontos extremos.

A nova tabela fica:

$x_0 = 0$	$x_a = 0.3$	$x_1 = 0.5$	$x_b = 0.6$	$x_2 = 0.8$
$f_0 = 0.302$	$f_a = 0.106$	$f_1 = 0.240$	$f_b = 0.579$	$f_2 = 0.468$

Os pontos da spline são  $(x_0, f_0)$ ,  $(x_1, f_1)$ ,  $(x_2, f_2)$  tendo apenas um ponto interior.

Utiliza-se a equação dos pontos interiores para  $i = 1$  (índice do único ponto interior):

$$\begin{aligned} (x_1 - x_0)M_0 + 2(x_2 - x_0)M_1 + (x_2 - x_1)M_2 &= \\ = \frac{6}{(x_2 - x_1)}(f_2 - f_1) - \frac{6}{(x_1 - x_0)}(f_1 - f_0) &\Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow 0.5M_0 + 1.6M_1 + 0.3M_2 = 5.304 \end{aligned}$$

Fica uma equação com 3 incógnitas:

- como a spline é completa adicionam-se as duas equações para os pontos fronteira.

A primeira envolve o cálculo de  $f'(x_0)$  e a última o cálculo de  $f'(x_2)$ . Como não é conhecida a expressão analítica de  $f(x)$  vão utilizar-se os pontos auxiliares que foram guardados.

$$f'(x_0) \approx \frac{f_0 - f_a}{x_0 - x_a} = -0.653333$$
$$f'(x_2) \approx \frac{f_2 - f_b}{x_2 - x_b} = -0.555$$

$$2(x_1 - x_0)M_0 + (x_1 - x_0)M_1 = \frac{6}{(x_1 - x_0)}(f_1 - f_0) - 6f'_0 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow M_0 + 0.5M_1 = 3.175998$$

$$2(x_2 - x_1)M_2 + (x_2 - x_1)M_1 = 6f'_2 - \frac{6}{(x_2 - x_1)}(f_2 - f_1) \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow 0.3M_1 + 0.6M_2 = -7.89$$



O sistema fica então:

$$\begin{cases} M_0 + 0.5M_1 = 3.175998 \\ 0.5M_0 + 1.6M_1 + 0.3M_2 = 5.304 \\ 0.3M_1 + 0.6M_2 = -7.89 \end{cases}$$

Resolvido por EGPP vem:

$$M_0 = -0.016086, M_1 = 6.384168, M_2 = -16.342084.$$

O valor a estimar  $x = 0.4$  pertence ao segmento 1 ( $[x_0, x_1]$ ), então substitui-se na equação do segmento o índice  $i$  por 1 para obter  $s_3^1(x)$ .

Para estimar  $f(0.4)$  calcula-se  $s_3^1(0.4) = 0.175919 \approx f(0.4)$ .

## Exercício de aplicação 3

Considere a função

$$f(x) = \begin{cases} \frac{4}{27}(9x - 6x^2 + x^3), & \text{para } 0 \leq x \leq 3 \\ 0, & \text{para outros valores de } x. \end{cases}$$

Pretende-se construir uma *spline* cúbica completa para aproximar  $f(x)$  baseada apenas nos valores de  $x$ : 0, 1.5 e 3. Calcule a aproximação fornecida pela *spline* para  $f(1)$ .

## Resolução:

$$\begin{array}{c|c|c} x_0 = 0 & x_1 = 1.5 & x_2 = 3 \\ \hline f_0 = 0 & f_1 = 0.5 & f_2 = 0 \end{array}$$

Há apenas um ponto interior. Utiliza-se a equação dos pontos interiores para  $i = 1$  (índice do único ponto interior):

$$\begin{aligned} (x_1 - x_0)M_0 + 2(x_2 - x_0)M_1 + (x_2 - x_1)M_2 &= \\ = \frac{6}{(x_2 - x_1)}(f_2 - f_1) - \frac{6}{(x_1 - x_0)}(f_1 - f_0) &\Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow 1.5M_0 + 6M_1 + 1.5M_2 &= -4 \end{aligned}$$

Fica uma equação com 3 incógnitas - como a spline é completa adicionam-se duas equações para os pontos fronteira.

A primeira envolve o cálculo de  $f'(x_0)$  e a última o cálculo de  $f'(x_2)$ .

Como é conhecida a expressão analítica de  $f(x)$  calcula-se  $f'(0) = \frac{4}{3}$  e  $f'(3) = 0$ .

Equações para os pontos fronteira:

$$\begin{cases} 3M_0 + 1.5M_1 = -6 \\ 1.5M_1 + 3M_2 = 2 \end{cases}$$

Sistema final:

$$\begin{cases} 3M_0 + 1.5M_1 = -6 \\ 1.5M_0 + 6M_1 + 1.5M_2 = -4 \\ 1.5M_1 + 3M_2 = 2 \end{cases}$$

Os valores, obtidos por EGPP são:

$$M_0 = -1.(7), \quad M_1 = -0.(4), \quad M_2 = 0.(8).$$

O valor a estimar  $x = 1$  pertence ao segmento 1 ( $[x_0, x_1]$ )-  
substitui-se na equação do segmento o índice  $i$  por 1 para  
obter  $s_3^1(x)$ .

Para estimar  $f(1)$  calcula-se  $s_3^1(1) = 0.592593 \approx f(1)$ .