Elementos de Probabilidades - Folha 2

1. Considere a experiência que consiste em lançar um dado equilibrado duas vezes consecutivas.
   (a) Determine a função massa de probabilidade e a de distribuição da v.a. que representa:
      i. o número de faces ímpar obtidas.
      ii. o número de faces par obtidas.
      iii. o máximo das faces obtidas.
      iv. o mínimo das faces obtidas.
      v. o módulo da diferença das faces obtidas.
      vi. a soma das faces obtidas.
   (b) Use as funcões obtidas na alínea anterior para calcular a probabilidade de:
      i. sair pelo menos uma face par.
      ii. não sair qualquer face par.
      iii. todas as faces obtidas serem inferiores ou iguais a 3.
      iv. todas as faces obtidas serem superiores os iguais a 4.
      v. sairem duas faces iguais.
      vi. saírem faces diferentes.
      vii. a soma das faces obtidas ser inferior ou igual 4.

2. Seja X a v.a. que representa o número de embalagens de um certo medicamento vendidas diariamente numa farmácia. A f.m.p. desta v.a. é dada por:

$$X : \begin{cases} 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 0.05 & a & 0.2 & 0.15 & 0.3 & 2a \end{cases}$$

   onde a é uma constante real.
   (a) Mostre que $a = 0.1$.
   (b) Determine a probabilidade de, num dia, se venderem:
      i. pelo menos 3 embalagens; ii. mais de 3 embalagens; iii. no máximo 3 embalagens.
   (c) Determine a função de distribuição de X.
   (d) Sabendo que, num dia, se venderam no máximo 4 embalagens, qual a probabilidade de:
      i. se terem vendido menos de 2 embalagens?
      ii. se terem vendido mais de 2 embalagens?
      iii. se terem vendido exatamente 4 embalagens?

3. Considere a experiência que consiste em lançar um moeda equilibrada duas vezes consecutivas.
   (a) Identifique o espaço amostral desta experiência.
   (b) Considere agora as v.a.'s X e Y que representam o número de caras e o número de coroas, respectivamente, obtidas nesta experiência.
      i. Identifique (através de um diagrama ou tabela) as funções X e Y.
      ii. Determine a função massa de probabilidade e a função de distribuição de cada uma das v.a.'s. Comente.

4. Seja X uma v.a. contínua com função densidade de probabilidade dada por:

$$f(x) = \begin{cases} a & \text{se} \quad 0 \leq x \leq 4 \\ \frac{1}{4} & \text{se} \quad 4 < x \leq 6 \\ 0 & se \quad \text{c.c.} \end{cases}$$

onde a é uma constante real.

(a) Mostre que $a = \frac{1}{8}$, determine a função de distribuição de X e esboce o seu gráfico.

(b) Calcule:

i. $P\left(X \leq \frac{3}{2}\right)$; ii. $P\left(X > \frac{3}{2}\right)$; iii. $P\left(X \geq \frac{3}{2}\right)$;

iv. $P(3 < X \leq 5)$; $P(3 \leq X \leq 5)$; $P(3 < X < 5)$; $P(3 \leq X < 5)$

(c) Supondo que X representa o tempo de espera, em minutos, de atendimento telefónico aos clientes de uma determinda empresa, determine:

- a probabilidade de um cliente esperar mais de 1.5 minutos?
- a probabilidade de, dado que um cliente já esperou 1.5 minutos, ainda ter que esperar pelo menos mais 1 minuto para ser atendido?

5. O tempo de vida, em horas, de um certo tipo de bactérias é uma v.a. contínua com função densidade de probabilidade dada por:

$$f(x) = \begin{cases} kx & \text{se} \quad 1 \leq x \leq 3 \\ 0 & se \quad \text{c.c.} \end{cases},$$

em que k é uma constante real.

(a) Determine o valor de k e a função de distribuição desta v.a..

(b) Calcule a probabilidade de uma bactéria deste tipo viver:

i. mais do que 1h30m; ii. pelo menos 1h30m; iii. no mínimo 1h15m e no máximo 2h.

(c) Escolheu-se, ao acaso, uma bactéria deste tipo e observou-se que ao fim de 1h30min ela ainda estava viva. Qual a probabilidade de a bactéria escolhida viver pelo menos mais 30mins?

6. Seja T uma v.a. contínua que tem distribuição exponencial de parâmetro $\lambda > 0$, i.e., a função densidade de probabilidade de T é dada por

$$f(x) = \begin{cases} 0 & se \quad x < 0 \\ \lambda e^{-\lambda x} & se \quad x \geq 0 \end{cases}.$$ Obs.: Abrevia-se por $T \sim Exp(\lambda)$.

(a) Determine a função de distribuição de T e mostre que $P(T > t + x | T > t) = P(T > x)$, para quaisquer $t > 0, x > 0$ [propriedade de falta de memória].

(b) Uma colónia contém bactérias de dois tipos A e B, aparentemente iguais, na proporção de 1 para 3. O tempo de vida (em horas)de uma bactéria do tipo A é uma v.a. com distribuição exponencial de parâmetro 0.1, enquanto que o de uma bactéria do tipo B é exponencial com parâmetro 0.2. Escolheu-se uma bactéria ao acaso nesta colónia e observou-se que após 20h ela ainda vivia. Qual a probabilidade de a bactéria ser do tipo B?

7. Seja X uma v.a. contínua com função densidade de probabilidade $f(x) = ke^{-|x|}, x \in \mathbb{R}$, em que k é uma constante real.

(a) Mostre que $k = \frac{1}{2}$ e determine a função de distribuição de X.

(b) Calcule: $P(X < 0)$, $P(X > 0)$, $P(0 < X < 1)$, $P(0 \leq X \leq 1)$ e $P(X^2 < 1)$.

(c) Identifique a distribuição da v.a. $Y = |X|$. [Sug.: Use o ex. anterior.]

8. (*) Seja $X \sim Exp(\lambda)$, a uma constante real positiva e considere a v.a. $Y = \begin{cases} X - a & se \quad X > a \\ 0 & se \quad c.c. \end{cases}$.

Calcule $P(Y = 0)$ e determine a função de distribuição de Y.

(*) Exercício desafio

1. a) i) X = "v.a. que representa o nº faces ímpares obtidas."

Função massa de probabilidade : $X : \Big\{$

Falta

Função de distribuição

ii) Y: "v.a. que representa o número de faces par obtidas".

Função massa de probabilidade: $Y: \begin{cases} 0 & 1 & 2 \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{2} & \frac{1}{4} \end{cases}$

Falta → Função de distribuição :

iii) Z: "v.a que representa o máximo de faces obtidas"

Função massa de probabilidade: $Z: \begin{cases} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ \frac{1}{36} & \frac{3}{36} & \frac{5}{36} & \frac{7}{36} & \frac{9}{36} & \frac{11}{36} \end{cases}$

TPC → Função de distribuição :

$$c \in \mathbb{R}, \quad F_Z(c) = P(Z \leq c) = \begin{cases} 0 & , \; c < 1 \\ P(Z=1) = \frac{1}{36} & , \; 1 \leq c < 2 \\ \frac{4}{36} & , \; 2 \leq c < 3 \\ \frac{9}{36} & , \; 3 \leq c < 4 \\ \frac{16}{36} & , \; 4 \leq c < 5 \\ \frac{25}{36} & , \; 5 \leq c < 6 \\ 1 & , \; c \geq 6 \end{cases}$$

v) W: "v.a que representa o módulo da diferença das faces obtidas"

Função massa de probabilidade: $W: \begin{cases} 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ \frac{6}{36} & \frac{10}{36} & \frac{8}{36} & \frac{6}{36} & \frac{4}{36} & \frac{2}{36} \end{cases}$

Função de distribuição :

$$c, c \in \mathbb{R}, F(c) = P(W \leq c) = \begin{cases} \frac{6}{36} & , c < 0 \\ \frac{10}{36} & , 1 \leq c < 2 \\ \frac{8}{36} & , 2 \leq c < 3 \\ \frac{6}{36} & , 3 \leq c < 4 \\ \frac{4}{36} & , 4 \leq c < 5 \\ \frac{2}{36} & , c \geq 5 \end{cases}$$

1.b) i) $P(Y \geq 1) = 1 - P(Y < 1) = 1 - P(Y \leq 0) = 1 - F_y(0) = 1 - \frac{1}{4} = \frac{3}{4}$

ou $= 1 - P(Y=0) = 1 - \frac{1}{4} = \frac{3}{4}$

b) ii) $P(Y=0) = 1 - P(Y \neq 0) = 1 - P(Y \geq 1) = 1 - \frac{3}{4} = \frac{1}{4}$

b) iii) $P(Z \leq 3) = F_Z(3) = \frac{9}{36}$

b) v) $P(W=0) = F_W(0) = \frac{6}{36} = \frac{1}{6}$

b vi) $P(W \geq 1) = 1 - P(W < 1) = 1 - P(W \leq 0) = 1 - P(W=0) = 1 - \frac{6}{36} = 1 - \frac{1}{6} = \frac{5}{6}$

2 a) $C_X = \{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$

$P(X=0) + P(X=1) + P(X=2) + P(X=3) + P(X=4) + P(X=5) = 1 \Leftrightarrow a = 0{,}1$

b) i) $P(X \geq 3) = P(X=3) + P(X=4) + P(X=5) = 0{,}15 + 0{,}3 + 0{,}2 = 0{,}65$

ii) $P(X > 3) = P(X=4) + P(X=5) = 0{,}5$

iii) $P(X \leq 3) = 1 - P(X > 3) = 1 - 0{,}5 = 0{,}5$

c) Função de distribuição

$$\underbrace{F_X(c)}_{=P(X\leq c)} = \begin{cases} 0 & , c<0 \\ 0{,}05 & , 0\leq c<1 \\ 0{,}15 & , 1\leq c<2 \\ 0{,}35 & , 2\leq c<3 \\ 0{,}5 & , 3\leq c<4 \\ 0{,}8 & , 4\leq c<5 \\ 1 & , c\geq 0 \end{cases}$$

d) i) $P(\underbrace{X<2}_{A} \mid \underbrace{X\leq 4}_{B}) = \dfrac{P((X<2)\cap(X\leq 4))}{P(X\leq 4)} = \dfrac{P(X<2)}{P(X\leq 4)} = \dfrac{P(X\leq 1)}{P(X\leq 4)} = \dfrac{F_X(1)}{F_X(4)} = \dfrac{0{,}15}{0{,}8} = \dfrac{3}{16}$

4. a) $a\geq 0$ porque $f(x)\geq 0, \forall x\in\mathbb{R}$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx = 1 \Leftrightarrow \underbrace{\int_{-\infty}^{0} 0\,dx}_{0} + \int_0^4 a\,dx + \int_4^6 \frac{1}{4}\,dx + \underbrace{\int_6^{+\infty} 0\,dx}_{0} = 1 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow a[x]_0^4 + \frac{1}{4}[x]_4^6 = 1 \Leftrightarrow a(4-0) + \frac{1}{4}(6-4) = 4a + \frac{1}{2} \Leftrightarrow 4a = 1-\frac{1}{2} = a = \frac{1}{8}$$

Função de distribuição:

$$c\in\mathbb{R},\ F_X(c) = P(X\leq c) = \int_{-\infty}^{c} f(x)\,dx = \begin{cases} \int_{-\infty}^{c} 0\,dx & , c<0 \\ \int_{-\infty}^{0} 0\,dx + \int_0^c \frac{1}{8}\,dx & , 0\leq c<4 \\ \int_{-\infty}^{0} 0\,dx + \int_0^4 \frac{1}{8}\,dx + \int_4^c \frac{1}{4}\,dx & , 4\leq c<6 \\ \int_{-\infty}^{0} 0\,dx + \int_0^4 \frac{1}{8}\,dx + \int_4^6 \frac{1}{4}\,dx + \int_6^{+\infty} 0\,dx & , c\geq 6 \end{cases} = \begin{cases} 0 \\ \frac{1}{8} \\ \frac{1}{2} + \frac{1}{4}(c-4) \\ 1 \end{cases}$$

Fui eu que fiz

b) i) $P(X\leq \frac{3}{2}) = \underbrace{\int_{-\infty}^{0} 0\,dx}_{0} + \int_0^{\frac{3}{2}} \frac{1}{8}\,dx = \cancel{\frac{4}{8}} = \frac{1}{8}[x]_0^{\frac{3}{2}} = \frac{1}{8}\left[\frac{3}{2}-0\right] = \frac{3}{16}$

ii) $P(X>\frac{3}{2}) = 1 - P(X\leq \frac{3}{2}) = 1 - \frac{3}{16} = \frac{13}{16}$

iii) $P(X\geq \frac{3}{2}) = \cancel{1-P(X<\frac{3}{2})} = \cancel{1-P(X\leq 0)} = \cancel{1-\frac{1}{8}} = \cancel{\frac{7}{8}}$

porque X é contínua $\rightarrow P(X=\frac{3}{2})=0$

$= P(X>\frac{3}{2}) = \frac{13}{16}$

iv)

? ? ?

iv) $P(3 < X \leq 5) = F_X(5) - F_X(3) = \frac{1}{2} + \frac{1}{4}(5-1) - \frac{1}{8} \times 3 = \frac{3}{8}$

$P(3 \leq X \leq 5) = \frac{3}{8}$

$P(3 < X < 5) = P(3 < X \leq 5) = \frac{3}{8}$

↳ X é contínua $P(X=5) = 0$

$P(3 \leq X < 5) = \frac{3}{8}$

c) $P(X > \frac{3}{2}) = \frac{13}{16}$

$$P(X \geq \tfrac{5}{2} \mid X \geq \tfrac{3}{2}) = \frac{P((X \geq \frac{5}{2}) \cap (X \geq \frac{3}{2}))}{P(X \geq \frac{3}{2})} = \frac{P(X \geq \frac{5}{2})}{\frac{13}{16}} = \frac{1 - P(X < \frac{5}{2})}{\frac{13}{16}} = \frac{1 - F_X(\frac{5}{2})}{\frac{13}{16}}$$

$$= \frac{1 - \frac{1}{8} \times \frac{5}{2}}{\frac{13}{16}} = \frac{11}{13}$$

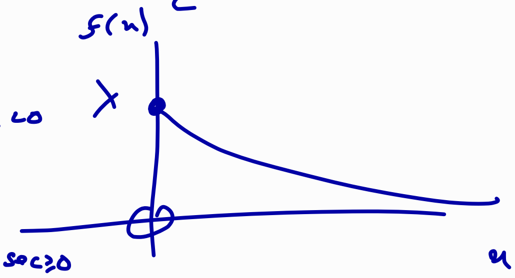
6) X v.a. contínua com $X \sim Exp(\lambda)$

A função de densidade de prob. de X é:

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{se } x < 0 \\ \lambda e^{-\lambda x} & \text{se } x \geq 0 \end{cases}$$ → gráfico

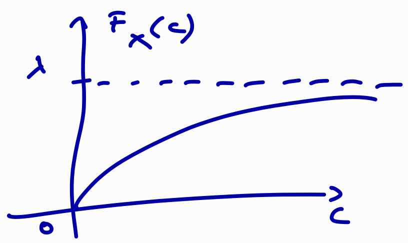
a) Função de dist. de T:

$$c \in \mathbb{R}, \quad \underset{P(T \leq c)}{\overset{\|}{F_T(c)}} = \int_{-\infty}^{c} f(x)\,dx = \begin{cases} \int_{-\infty}^{c} 0\,dx = 0 & \text{se } c < 0 \\ \int_{-\infty}^{0} 0\,dx + \underbrace{\int_{0}^{c} \lambda e^{-\lambda x}\,dx}_{} & \text{se } c \geq 0 \end{cases}$$



$[-e^{-\lambda x}] = -e^{-\lambda c} - (-1) = 1 - e^{-\lambda c}$

$$= \begin{cases} 0 & \text{se } c < 0 \\ 1 - e^{-\lambda c} & \text{se } c \geq 0 \end{cases}$$



Falta de memória:

$$t>0,\ x>0,\ P(T>t+x \mid T>t) = \frac{P((T>t+x)\cap(T>t))}{P(T>t)} = \frac{P(T>t+x)}{P(T>t)}$$

$$= \frac{1-P(T\leq t+x)}{1-P(T\leq t)} = \frac{1-F_T(t+x)}{1-F_T(t)} = \frac{1-[1-e^{-\lambda(t+x)}]}{1-[1-e^{-\lambda t}]} = \frac{e^{-\lambda x}e^{-\lambda t}}{e^{-\lambda t}}$$

$$= e^{-\lambda x} = P(T>x) =$$

6.b) A: bateria escolhida é do tipo A

B: " " " " " B

C: " " vive pelo menos 20h

$P(A) = \frac{1}{4}$

$P(B) = \frac{3}{4}$

$P(B \mid C) = ?$

$P(C \mid A) = P(T_A \geq 20)$, com $T_A \sim Exp(0,1)$ $\rightarrow$ $P(C \mid A) = P(T_A \geq 20) = e^{-0,1\times 20} = e^{-2}$

$P(C \mid B) = P(T_B \geq 20)$, com $T_B \sim Exp(0,2)$ $\rightarrow$ $P(C \mid B) = P(T_B \geq 20) = e^{-0,2\times 20} = e^{-4}$

$$P(B \mid C) = \frac{P(B\cap C)}{P(C)} = \frac{P(C \mid B)\,P(B)}{P(C\cap A)+P(C\cap B)}$$

Bayes

$$= \frac{P(C \mid B)\,P(B)}{P(C \mid A)P(A)+P(C \mid B)P(B)} = \frac{e^{-4}\times\frac{3}{4}}{e^{-2}\times\frac{1}{4}+e^{-4}\times\frac{3}{4}} = \frac{3e^{-4}}{e^{-2}+3e^{-4}}$$