

MESTRADO INTEGRADO EM ENGENHARIA INFORMÁTICA
TÓPICOS DE MATEMÁTICA DISCRETA
4. RELAÇÕES BINÁRIAS

José Carlos Costa

Dep. Matemática
Universidade do Minho

1^o semestre 2020/2021

Neste capítulo estudaremos

RELAÇÕES BINÁRIAS

- Noções básicas
 - Relações de equivalência
 - Relações de ordem parcial
-
- Um par ordenado (a, b) pode ser utilizado para representar a noção de que o objeto a está em *relação* (i.e., associado de uma forma determinada) com o objeto b .
 - Uma *relação binária* é, então, um conjunto R de pares ordenados: um par ordenado (a, b) pertence a R se e só se a está R -relacionado com b .

DEFINIÇÃO

Sejam A e B conjuntos.

- Uma *relação (binária)* de A em B (ou *correspondência* de A para B) é um subconjunto R do produto cartesiano $A \times B$.
- Os conjuntos A e B dizem-se, respetivamente, o *conjunto de partida* e o *conjunto de chegada* de R .
- Quando $A = B$, diz-se simplesmente que R é uma *relação (binária)* em A .

NOTAÇÃO

Seja $R \subseteq A \times B$ uma relação e sejam $a \in A$ e $b \in B$.

- Se $(a, b) \in R$, então diz-se que a *está relacionado* com b por R (ou que a *está R -relacionado* com b), e denota-se $a R b$.
- Se $(a, b) \notin R$, então diz-se que a *não está relacionado* com b por R (ou que a *não está R -relacionado* com b), e escreve-se $a \nR b$.

EXEMPLOS

1 Sejam $A = \{0, 2, 4\}$ e $B = \{0, 1, 2, 3\}$. Então

$$R_1 = \{(0, 1)\},$$

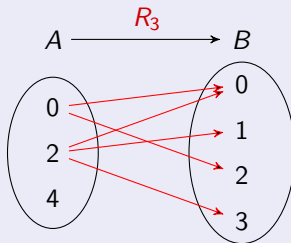
$$R_2 = \{(0, 1), (0, 2), (2, 2), (4, 1)\},$$

$$R_3 = \{(0, 0), (0, 2), (2, 0), (2, 1), (2, 3)\},$$

são relações de A em B , enquanto que

$$S = \{(0, 0), (1, 1), (2, 2), (3, 3)\}$$

não o é pois $S \not\subseteq A \times B$. A correspondência R_3 , por exemplo, pode ser descrita pelo seguinte diagrama



EXEMPLOS (CONTINUAÇÃO)

- 2 Sejam $A = \{1, 2, 3\}$ e $B = \{2, 4, 6, 9, 10\}$, e seja R a relação de A em B definida por

$a R b$ se e só se $a|b$ (ou seja, a divide b).

Então

$$R = \{(1, 2), (1, 4), (1, 6), (1, 9), (1, 10), (2, 2), (2, 4), (2, 6), (2, 10), (3, 6), (3, 9)\}.$$

Note-se que:

- $2 \not R 9$ pois $2 \nmid 9$, embora $(2, 9) \in A \times B$;
- $5 \not R 10$ pois $(5, 10) \notin A \times B$, embora $5|10$.

- 3 Seja $A = \{1, 2, 3\}$. Então

$$\emptyset, \quad \{(1, 1), (1, 2), (2, 2), (3, 2)\}, \quad \{(1, 2), (3, 3)\}, \quad A^2$$

são relações em A .

- 4 $R = \{(x, y) \in \mathbb{Z}^2 : y = 2x\}$ é uma relação em \mathbb{Z} . Por exemplo,

$$\begin{array}{lll} (0, 0) \in R, & (1, 2) \in R, & (4, 8) \in R, \\ (-2, -4) \in R, & (2, 3) \notin R, & (8, 4) \notin R. \end{array}$$

OBSERVAÇÃO

Sejam A e B conjuntos. Note-se que:

- ❶ O conjunto de **todas as relações binárias** de A em B é o conjunto potência $\mathcal{P}(A \times B)$. Em particular:
 - \emptyset é uma relação de A em B , chamada a **relação vazia**;
 - $A \times B$ é uma relação de A em B , chamada a **relação universal**.
- ❷ Se A e B são conjuntos finitos, com m e n elementos respetivamente, então
 - $A \times B$ tem mn elementos, donde $\mathcal{P}(A \times B)$ tem 2^{mn} elementos;
 - existem portanto 2^{mn} relações binárias de A em B .

NOTAÇÃO

Seja A um conjunto não vazio. Então,

- $\text{id}_A = \{(a, a) : a \in A\}$ é uma relação em A , dita a **relação identidade** em A ;
- $\omega_A = A^2$ é uma relação em A , chamada a **relação universal** em A .

As relações id_A e ω_A são também usualmente denotadas por Δ_A (“delta A ”) e ∇_A (“nabla A ”) respetivamente.

EXERCÍCIO

Considere os conjuntos

$$A = \{2, 3, 4, 5\}, \quad B = \{a, b, c\} \quad \text{e} \quad R = \{(x, y) \in A^2 : x < y\}.$$

Indique o valor lógico das seguintes proposições:

- (a) $\{(2, a), (4, b)\}$ é uma relação binária de A em B ;
- (b) $\{(a, 2), (b, 2), (b, b), (c, a)\}$ é uma relação binária de B em A ;
- (c) $\text{id}_A = \{(2, 2), (3, 3), (4, 4)\}$;
- (d) $\{(c, c), (a, a), (b, b)\}$ é a relação identidade em B ;
- (e) $(2, 4) \in R$;
- (f) $4 R 2$;
- (g) $(1, 5) \in R$;
- (h) R é uma relação em A com 6 elementos.

RESPOSTA

(a) V; (b) F; (c) F; (d) V; (e) V; (f) F; (g) F; (h) V.

DEFINIÇÃO

Seja R uma relação binária de A em B .

- O *domínio* de R é o seguinte subconjunto de A

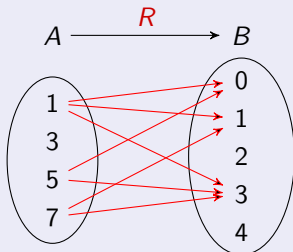
$$\text{Dom}(R) = \{a \in A : \exists_{b \in B} (a, b) \in R\}.$$

- A *imagem* ou *contradomínio* de R é o seguinte subconjunto de B

$$\text{Im}(R) = \{b \in B : \exists_{a \in A} (a, b) \in R\}.$$

EXEMPLO

Seja $R = \{(1, 0), (1, 1), (1, 3), (5, 0), (5, 3), (7, 1), (7, 3)\}$ a relação do conjunto $A = \{1, 3, 5, 7\}$ no conjunto $B = \{0, 1, 2, 3, 4\}$, ilustrada pelo seguinte diagrama



Então,

$$\text{Dom}(R) = \{1, 5, 7\},$$

$$\text{Im}(R) = \{0, 1, 3\}.$$

EXERCÍCIO

Seja R a relação binária em \mathbb{Z} definida por

$$a R b \text{ se e só se } |a| = 2b.$$

Calcule $\text{Dom}(R)$ e $\text{Im}(R)$.

DEFINIÇÃO

Dados conjuntos A e B , uma relação binária R de A em B diz-se:

- *total* quando $\text{Dom}(R) = A$;
- *unívoca* quando $\forall a \in A \forall b_1, b_2 \in B ((a R b_1 \wedge a R b_2) \rightarrow b_1 = b_2)$;
- uma *função* ou *aplicação* quando R é uma relação total e unívoca.

OBSERVAÇÃO

- Escreve-se $f : A \rightarrow B$ para indicar que f é uma função de A em B .
- Se f é uma função de A em B então, para cada $a \in A$, escreve-se $f(a) = b$, onde b é o único elemento de B tal que $(a, b) \in f$, e diz-se que *b é a imagem de a por f* ou que *b é o valor que a função f assume em a .*

OBSERVAÇÃO

Se R e S são relações binárias de A em B , então $R \cup S$, $R \cap S$ e $R \setminus S$ são também relações binárias de A em B .

EXEMPLO

Consideremos as relações

$$R = \{(1, d), (1, e), (2, d), (3, d)\}$$

e $S = \{(1, d), (2, d), (3, d), (4, e)\}$

do conjunto $A = \{1, 2, 3, 4\}$ no conjunto $B = \{d, e\}$. Então

$$R \cup S = \{(1, d), (1, e), (2, d), (3, d), (4, e)\},$$

$$R \cap S = \{(1, d), (2, d), (3, d)\},$$

$$R \setminus S = \{(1, e)\}$$

são relações binárias de A em B .

As operações de união, interseção e complementação permitem obter relações a partir de outras. Estudaremos de seguida outras operações sobre relações.

DEFINIÇÃO

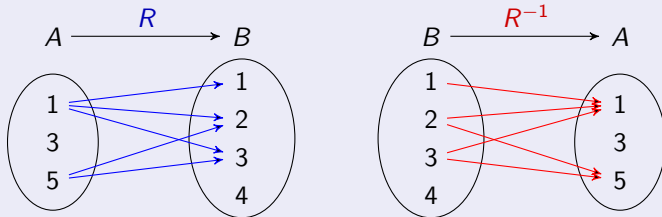
Dada uma relação binária R de A em B , a relação binária de B em A

$$R^{-1} = \{(b, a) \in B \times A : (a, b) \in R\}$$

é chamada a *relação inversa* de R .

EXEMPLOS

- ❶ Consideremos os conjuntos $A = \{1, 3, 5\}$ e $B = \{1, 2, 3, 4\}$. A relação $R = \{(1, 1), (1, 2), (1, 3), (5, 2), (5, 3)\}$ de A em B , tem como inversa a relação $R^{-1} = \{(1, 1), (2, 1), (3, 1), (2, 5), (3, 5)\}$ de B em A .



EXEMPLOS (CONTINUAÇÃO)

- ② A relação $S = \{(x, y) \in \mathbb{N}^2 : x \leq y\}$ em \mathbb{N} , dada em extensão por $S = \{(1, 1), (1, 2), (1, 3), (2, 2), (1, 4), (2, 3), (1, 5), (2, 4), (3, 3), \dots\}$, tem como inversa a relação em \mathbb{N} ,

$$\begin{aligned} S^{-1} &= \{(y, x) \in \mathbb{N}^2 : x \leq y\} \\ &= \{(x, y) \in \mathbb{N}^2 : x \geq y\} \\ &= \{(1, 1), (2, 1), (3, 1), (2, 2), (4, 1), (3, 2), (5, 1), (4, 2), (3, 3), \dots\}. \end{aligned}$$

TEOREMA

Sejam R e S relações binárias de A em B . Então,

- ① $\text{Dom}(R^{-1}) = \text{Im}(R)$ e $\text{Im}(R^{-1}) = \text{Dom}(R)$;
- ② $(R^{-1})^{-1} = R$;
- ③ Se $R \subseteq S$, então $R^{-1} \subseteq S^{-1}$.

DEFINIÇÃO

Consideremos relações $R \subseteq A \times B$ e $S \subseteq B \times C$. A relação binária de A em C dada por

$$S \circ R = \{(a, c) \in A \times C : \exists_{b \in B} (a R b \wedge b S c)\}$$

é chamada a *relação composta* de S com R , também dita “ S após R ”.

EXEMPLOS

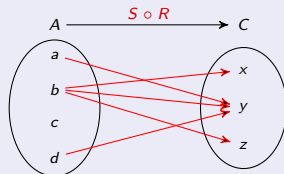
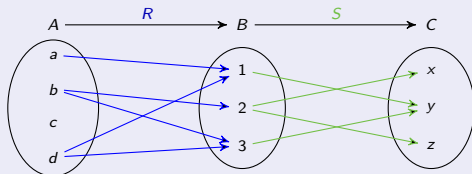
- ❶ Sejam $A = \{a, b, c, d\}$, $B = \{1, 2, 3\}$ e $C = \{x, y, z\}$. As relações

$$R = \{(a, 1), (b, 2), (b, 3), (d, 1), (d, 3)\}, \text{ de } A \text{ em } B,$$

e $S = \{(1, y), (2, x), (2, z), (3, y)\}, \text{ de } B \text{ em } C,$

têm como composta a relação

$$S \circ R = \{(a, y), (b, x), (b, y), (b, z), (d, y)\}, \text{ de } A \text{ em } C.$$



EXEMPLOS (CONTINUAÇÃO)

② Seja $A = \{1, 2, 3\}$ e consideremos as relações em A

$$R = \{(1, 1), (1, 2), (2, 2), (2, 3), (3, 1)\}$$

e $S = \{(1, 3), (2, 3), (3, 2)\}.$

Então,

$$S \circ R = \{(1, 3), (2, 2), (2, 3), (3, 3)\},$$

$$R \circ S = \{(1, 1), (2, 1), (3, 2), (3, 3)\},$$

$$R \circ R = \{(1, 1), (1, 2), (1, 3), (2, 1), (2, 2), (2, 3), (3, 1), (3, 2)\},$$

$$(R \circ S) \circ S = \{(1, 2), (1, 3), (2, 2), (2, 3), (3, 1)\},$$

$$R^{-1} = \{(1, 1), (1, 3), (2, 1), (2, 2), (3, 2)\},$$

$$R \circ R^{-1} = \{(1, 1), (1, 2), (1, 3), (2, 1), (2, 2), (2, 3), (3, 2), (3, 3)\},$$

etc.

EXERCÍCIO

Seja $A = \{D, E, F, H, I, J, L, N, T, X\}$. Considere as seguintes relações em A :

$$P = \{(J, L), (J, D), (L, T), (L, I), (X, N)\},$$

$$M = \{(E, J), (E, H), (H, N), (D, F)\}.$$

- 1 Determine P^{-1} , $P \circ M$, $M \circ P$ e $P \circ P^{-1}$.
- 2 Se P é a relação “é pai de” e M é a relação “é mãe de”, o que é:
 - i) E em relação a L ?
 - ii) J em relação a F ?
 - iii) D em relação a L ?
 - iv) D em relação a I ?

RESPOSTA

- 1 $P^{-1} = \{(L, J), (D, J), (T, L), (I, L), (N, X)\},$
 $P \circ M = \{(E, L), (E, D)\}, \quad M \circ P = \{(J, F)\},$
 $P \circ P^{-1} = \{(L, L), (D, D), (D, L), (L, D), (I, I), (I, T), (T, I), (T, T), (N, N)\}.$
- 2 i) Avó paterna; ii) Avô materno; iii) Irmã; iv) Tia.

TEOREMA

Sejam $R \subseteq A \times B$, $S \subseteq B \times C$ e $T \subseteq C \times D$ relações binárias. Então,

- ① $\text{Dom}(S \circ R) \subseteq \text{Dom}(R)$ e $\text{Im}(S \circ R) \subseteq \text{Im}(S)$;
- ② $(T \circ S) \circ R = T \circ (S \circ R)$;
- ③ $R \circ \text{id}_A = R = \text{id}_B \circ R$;
- ④ $(S \circ R)^{-1} = R^{-1} \circ S^{-1}$.

DEMONSTRAÇÃO

Apresentamos a prova de 4 e deixamos as restantes como exercício.

- ④ Note-se que $(S \circ R)^{-1}$ e $R^{-1} \circ S^{-1}$ são relações de C em A . Para qualquer $(c, a) \in C \times A$, tem-se

$$\begin{aligned}
 (c, a) \in (S \circ R)^{-1} & \text{ sse } (a, c) \in S \circ R \\
 & \text{ sse } \exists_{b \in B} ((a, b) \in R \wedge (b, c) \in S) \\
 & \text{ sse } \exists_{b \in B} ((b, a) \in R^{-1} \wedge (c, b) \in S^{-1}) \\
 & \text{ sse } \exists_{b \in B} ((c, b) \in S^{-1} \wedge (b, a) \in R^{-1}) \\
 & \text{ sse } (c, a) \in R^{-1} \circ S^{-1}.
 \end{aligned}$$

Daqui resulta que $(S \circ R)^{-1} = R^{-1} \circ S^{-1}$.

Dedicar-nos-emos agora ao estudo de relações num conjunto A . Começamos por introduzir algumas propriedades importantes que estas relações podem ter.

DEFINIÇÃO

Seja $R \subseteq A \times A$ uma relação binária num conjunto A . Diz-se que R é:

- *reflexiva* quando $\forall_{a \in A} a R a$;
- *simétrica* quando $\forall_{a, b \in A} (a R b \rightarrow b R a)$;
- *antissimétrica* quando $\forall_{a, b \in A} ((a R b \wedge b R a) \rightarrow a = b)$ ou, equivalentemente, quando $\forall_{a, b \in A} ((a R b \wedge a \neq b) \rightarrow b \not R a)$;
- *transitiva* quando $\forall_{a, b, c \in A} ((a R b \wedge b R c) \rightarrow a R c)$.

As propriedades acima podem ser caracterizadas da seguinte forma.

TEOREMA

Uma relação binária R em A é:

- *reflexiva* se e só se $\text{id}_A \subseteq R$;
- *simétrica* se e só se $R^{-1} = R$;
- *antissimétrica* se e só se $R \cap R^{-1} \subseteq \text{id}_A$;
- *transitiva* se e só se $R \circ R \subseteq R$.

EXEMPLOS

Seja A um conjunto.

- ❶ A relação id_A é reflexiva, simétrica, antissimétrica e transitiva.
- ❷ A relação ω_A é reflexiva, simétrica e transitiva. Esta relação é antissimétrica se e só se A tem no máximo um elemento.
- ❸ A relação \emptyset em A é simétrica, transitiva e antissimétrica. Esta relação é reflexiva se e só se $A = \emptyset$.
- ❹ Se $A = \{1, 2, 3\}$, então a relação em A :
 - $R = \{(1, 1), (1, 2), (2, 2), (3, 3)\}$ é reflexiva, não simétrica, antissimétrica e transitiva;
 - $S = \{(1, 1), (1, 2), (2, 1), (2, 2)\}$ é não reflexiva, simétrica, não antissimétrica e transitiva;
 - $T = \{(1, 2), (2, 1), (2, 3), (3, 2)\}$ é não reflexiva, simétrica, não antissimétrica e não transitiva.
- ❺ A relação $R = \{(x, y) \in \mathbb{Z}^2 : x \leq y\}$ em \mathbb{Z} é reflexiva, não simétrica, antissimétrica e transitiva.

DEFINIÇÃO

Seja A um conjunto. Uma relação binária em A diz-se uma *relação de equivalência* se é reflexiva, simétrica e transitiva.

EXEMPLOS

- 1 As relações id_A e ω_A são relações de equivalência num conjunto A .
- 2 Seja A o conjunto dos alunos da Universidade do Minho inscritos num único curso. A relação R definida, para cada $x, y \in A$, por
$$x R y \quad \text{se e só se} \quad x \text{ e } y \text{ são alunos do mesmo curso da UM}$$
é uma relação de equivalência em A .
- 3 $R = \{(1, 1), (1, 2), (2, 1), (2, 2), (3, 3)\}$ é uma relação de equivalência no conjunto $A = \{1, 2, 3\}$. De facto:
 - R é reflexiva visto que $\text{id}_A = \{(1, 1), (2, 2), (3, 3)\} \subseteq R$;
 - R é simétrica porque $R^{-1} = R$;
 - R é transitiva pois $R \circ R = R \subseteq R$.

EXEMPLO

Dada uma função $f : A \rightarrow B$, a relação binária $\text{Ker}(f)$ definida, para cada $x, y \in A$, por

$$x \text{ Ker}(f) y \quad \text{se e só se} \quad f(x) = f(y)$$

é uma relação de equivalência em A . De facto, $\text{Ker}(f)$ é

- reflexiva: $\forall x \in A \quad f(x) = f(x)$;
- simétrica: $\forall x, y \in A \quad (f(x) = f(y) \rightarrow f(y) = f(x))$;
- transitiva: $\forall x, y, z \in A \quad ((f(x) = f(y) \wedge f(y) = f(z)) \rightarrow f(x) = f(z))$.

A relação binária

$$\text{Ker}(f) = \{(x, y) \in A^2 : f(x) = f(y)\}$$

é chamada a equivalência *kernel* (ou *núcleo*) da função f .

EXEMPLO (CONGRUÊNCIA MÓDULO m)

Dado um natural m , dito um *módulo*, a relação \equiv_m em \mathbb{Z} dada por

$$x \equiv_m y \quad \text{se e só se} \quad m \text{ divide } x - y \quad (\text{i.e., } \exists_{k \in \mathbb{Z}} x - y = km).$$

é uma relação de equivalência em \mathbb{Z} . Com efeito, para todos os $x, y, z \in \mathbb{Z}$,

- $x - x = 0m$ e $0 \in \mathbb{Z}$, donde $x \equiv_m x$; [\equiv_m é reflexiva]
- se $x \equiv_m y$, então $x - y = km$ para algum $k \in \mathbb{Z}$. Logo $y - x = -(x - y) = -(km) = (-k)m$, com $-k \in \mathbb{Z}$, pelo que $y \equiv_m x$; [\equiv_m é simétrica]
- se $x \equiv_m y$ e $y \equiv_m z$, então $x - y = k_1m$ e $y - z = k_2m$ para alguns $k_1, k_2 \in \mathbb{Z}$. Logo, $x - z = (x - y) + (y - z) = (k_1 + k_2)m$, com $k_1 + k_2 \in \mathbb{Z}$, pelo que $x \equiv_m z$. [\equiv_m é transitiva]

A relação de equivalência

$$\equiv_m = \{(x, y) \in \mathbb{Z}^2 : m \text{ divide } x - y\}$$

é chamada a *congruência módulo m* . Também se escreve $x \equiv y \pmod{m}$ em vez de $x \equiv_m y$ e lê-se “ x é congruente com y módulo m ”.

OBSERVAÇÃO

Seja \equiv_3 a *congruência módulo 3*, a relação de equivalência em \mathbb{Z} dada por

$$x \equiv_3 y \quad \text{se e só se} \quad 3 \text{ divide } x - y \quad (\text{i.e., } \exists_{k \in \mathbb{Z}} x - y = 3k).$$

Notemos que, dado $x \in \mathbb{Z}$,

$$\begin{aligned} x \equiv_3 1 & \quad \text{sse} \quad x = 3k + 1 \quad \text{para algum } k \in \mathbb{Z} \\ & \quad \text{sse} \quad x \text{ tem resto } 1 \text{ na divisão inteira por } 3. \end{aligned}$$

De modo análogo se verifica que:

- $x \equiv_3 2$ se e só se x tem resto 2 na divisão inteira por 3;
- $x \equiv_3 0$ se e só se x tem resto 0 na divisão inteira por 3.

Assim, dado que 0, 1 e 2 são os únicos restos possíveis na divisão inteira por 3 e \equiv_3 é uma relação de equivalência, \mathbb{Z} pode ser partido em três blocos:

$$X_0 = \{x \in \mathbb{Z} : x \equiv_3 0\} = \{3k + 0 : k \in \mathbb{Z}\} = \{\dots, -6, -3, 0, 3, 6, \dots\}$$

$$X_1 = \{x \in \mathbb{Z} : x \equiv_3 1\} = \{3k + 1 : k \in \mathbb{Z}\} = \{\dots, -5, -2, 1, 4, 7, \dots\}$$

$$X_2 = \{x \in \mathbb{Z} : x \equiv_3 2\} = \{3k + 2 : k \in \mathbb{Z}\} = \{\dots, -4, -1, 2, 5, 8, \dots\}.$$

EXERCÍCIO

Seja $A = \{4, 5, 6, 7, 8\}$. Considere as seguintes relações binárias em A :

$$R = \{(4, 4), (4, 5), (5, 4), (5, 5), (6, 6), (7, 7), (7, 8), (8, 7), (8, 8)\},$$

$$S = \{(4, 4), (4, 5), (5, 4), (5, 5), (5, 6), (6, 5), (6, 6), (7, 7), (8, 8)\}.$$

- ① Mostre que R é uma relação de equivalência em A .
- ② Determine $X_a = \{x \in A : x R a\}$ para cada $a \in A$.
- ③ Mostre que S não é uma relação de equivalência em A .

RESPOSTA

- ① Para mostrar que R é uma relação de equivalência em A note-se que é
 - reflexiva visto que $\text{id}_A = \{(4, 4), (5, 5), (6, 6), (7, 7), (8, 8)\} \subseteq R$;
 - simétrica porque $R^{-1} = R$;
 - transitiva pois $R \circ R = R \subseteq R$.
- ② $X_4 = X_5 = \{4, 5\}$, $X_6 = \{6\}$ e $X_7 = X_8 = \{7, 8\}$.
- ③ S não é uma relação de equivalência em A pois não é transitiva já que $(4, 5), (5, 6) \in S$ e, no entanto, $(4, 6) \notin S$.

DEFINIÇÃO

Seja R uma relação de equivalência num conjunto A e seja a um elemento de A .

- A *classe de equivalência* de a para a relação R (ou *R -classe* de a) é o conjunto

$$[a]_R = \{x \in A : x R a\} = \{x \in A : a R x\}$$

dos elementos de A que são *R -equivalentes* a a (i.e., R -relacionados com a).

A R -classe $[a]_R$ é denotada de forma abreviada por $[a]$, e diz-se simplesmente a classe de equivalência de a , quando a relação R está subentendida.

- O *conjunto quociente* de A por R é a família de conjuntos

$$A/R = \{[a]_R : a \in A\}$$

formada pelas R -classes.

EXEMPLOS

- Seja $A \neq \emptyset$ e consideremos a relação de equivalência id_A . Para cada $a \in A$,

$$[a]_{\text{id}_A} = \{x \in A : x \text{id}_A a\} = \{x \in A : x = a\} = \{a\}$$

e, portanto,

$$A/\text{id}_A = \{\{a\} : a \in A\}.$$

EXEMPLOS (CONTINUAÇÃO)

- ② Seja $A \neq \emptyset$ e consideremos a relação de equivalência ω_A . Para $a \in A$, tem-se

$$[a]_{\omega_A} = \{x \in A : x \omega_A a\} = A,$$

pelo que

$$A/\omega_A = \{A\}.$$

- ③ Consideremos a relação de equivalência \equiv_3 em \mathbb{Z} . Como vimos na pág. 22,

$$[0]_{\equiv_3} = \{x \in \mathbb{Z} : x \equiv_3 0\} = \{3k + 0 : k \in \mathbb{Z}\} = \{\dots, -6, -3, 0, 3, 6, \dots\}$$

$$[1]_{\equiv_3} = \{x \in \mathbb{Z} : x \equiv_3 1\} = \{3k + 1 : k \in \mathbb{Z}\} = \{\dots, -5, -2, 1, 4, 7, \dots\}$$

$$[2]_{\equiv_3} = \{x \in \mathbb{Z} : x \equiv_3 2\} = \{3k + 2 : k \in \mathbb{Z}\} = \{\dots, -4, -1, 2, 5, 8, \dots\}$$

donde

$$\mathbb{Z}/\equiv_3 = \{[0]_{\equiv_3}, [1]_{\equiv_3}, [2]_{\equiv_3}\}.$$

- ④ Seja $R = \{(4, 4), (4, 5), (5, 4), (5, 5), (6, 6), (7, 7), (7, 8), (8, 7), (8, 8)\}$ a relação de equivalência em $A = \{4, 5, 6, 7, 8\}$ do exercício da pág. 23. Então,

$$[4]_R = [5]_R = \{4, 5\}, \quad [6]_R = \{6\}, \quad [7]_R = [8]_R = \{7, 8\}.$$

Assim,

$$A/R = \{\{4, 5\}, \{6\}, \{7, 8\}\}.$$

Na análise dos exemplos anteriores, verifica-se que as classes de equivalência são não vazias, são disjuntas duas a duas e a sua união é o conjunto no qual a relação de equivalência está definida. O teorema seguinte mostra que essa propriedade é válida para qualquer relação de equivalência.

TEOREMA

Se R é uma relação de equivalência num conjunto A , então o conjunto quociente A/R é uma partição do conjunto A .

A cada relação de equivalência num conjunto A está portanto associada uma partição de A . O próximo resultado mostra que, reciprocamente, cada partição de A determina uma relação de equivalência em A .

TEOREMA

Sejam Π uma partição de um conjunto A e \mathcal{R}_Π a relação binária em A definida por

$$a \mathcal{R}_\Pi b \text{ se e só se } \exists x \in \Pi \text{ } a, b \in X.$$

Então, \mathcal{R}_Π é uma relação de equivalência em A .

EXEMPLO

A partição $\Pi = \{\{1, 3, 5\}, \{2, 4\}, \{6\}\}$ do conjunto $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ determina em A a relação de equivalência

$$\mathcal{R}_\Pi = \{(1, 1), (1, 3), (1, 5), (3, 1), (3, 3), (3, 5), (5, 1), (5, 3), (5, 5), (2, 2), (2, 4), (4, 2), (4, 4), (6, 6)\}.$$

Note-se que $[1]_{\mathcal{R}_\Pi} = \{1, 3, 5\}$. Ou seja, a \mathcal{R}_Π -classe de equivalência do elemento 1 de A é o bloco $\{1, 3, 5\}$ de Π que contém 1. Esta propriedade é verificada por cada elemento de A .

Combinando os dois últimos resultados obtém-se o *teorema fundamental das relações de equivalência*.

TEOREMA

Seja A um conjunto e sejam R uma relação de equivalência em A e Π uma partição de A . Então,

- ① A/R é uma partição de A e $\mathcal{R}_{A/R} = R$.
- ② \mathcal{R}_Π é uma relação de equivalência em A e $A/\mathcal{R}_\Pi = \Pi$.

DEFINIÇÃO

Uma relação binária R num conjunto A é chamada uma *(relação de) ordem parcial* quando R é reflexiva, antissimétrica e transitiva. Neste caso, o par (A, R) diz-se um *conjunto parcialmente ordenado (cpo)*.

EXEMPLOS

Cada um dos seguintes pares é um cpo:

- ❶ (A, id_A) , onde A é um conjunto e id_A é a relação identidade em A ;
- ❷ (\mathbb{R}, \leq) , onde \leq é a relação “é menor ou igual a” usual em \mathbb{R} . De facto, \leq é
 - reflexiva: $\forall_{x \in \mathbb{R}} x \leq x$;
 - antissimétrica: $\forall_{x, y \in \mathbb{R}} ((x \leq y \wedge y \leq x) \rightarrow x = y)$;
 - transitiva: $\forall_{x, y, z \in \mathbb{R}} ((x \leq y \wedge y \leq z) \rightarrow x \leq z)$.
- ❸ $(\mathbb{N}, |)$, onde $|$ é a relação “divide” em \mathbb{N} , ou seja,

$$x | y \quad \text{se e só se} \quad \exists_{k \in \mathbb{N}} y = kx.$$
- ❹ (\mathcal{F}, \subseteq) , onde \mathcal{F} é uma família de conjuntos e \subseteq é a relação de inclusão usual. Em particular, para qualquer conjunto A , $(\mathcal{P}(A), \subseteq)$ é um cpo.

EXEMPLOS

Os seguintes pares não são cpo:

- ❶ $(\mathbb{R}, <)$, onde $<$ é a relação “é menor que” usual em \mathbb{R} . De facto, $<$ não é reflexiva.
- ❷ $(\mathbb{Z}, |)$, onde $|$ é a relação “divide” em \mathbb{Z} , ou seja,

$$x | y \quad \text{se e só se} \quad \exists k \in \mathbb{Z} \quad y = kx.$$

De facto, tem-se por exemplo $4 | -4$ e $-4 | 4$ e, no entanto, $4 \neq -4$. A relação $|$ não é portanto uma relação antissimétrica em \mathbb{Z} .

- ❸ (A, R) , onde $A = \{1, 2, 3\}$ e $R = \{(1, 1), (1, 2), (2, 2), (2, 3), (3, 3)\}$. De facto R não é transitiva pois $1 R 2$ e $2 R 3$ e, no entanto, $1 \not R 3$.

Habitualmente, usa-se o símbolo \leq para representar uma ordem parcial genérica num conjunto A .

NOTAÇÃO

Dado um cpo (A, \leq) e dados $a, b \in A$, escreve-se:

- $a \leq b$, e lê-se “ a é menor ou igual a b ” ou “ a **precede** b ”, para representar $(a, b) \in \leq$;
- $a < b$, e lê-se “ a é menor que b ” ou “ a precede propriamente b ”, se $a \leq b$ e $a \neq b$;
- $a \ll b$, e lê-se “ b é **sucedor** de a ” ou “ a é sucedido por b ” ou “ b **cobre** a ” ou “ a é coberto por b ”, se $a < b$ e $\neg \exists c \in A (a < c \wedge c < b)$;
- $a \parallel b$, e lê-se “ a e b são **incomparáveis**”, se $a \not\leq b$ e $b \not\leq a$.

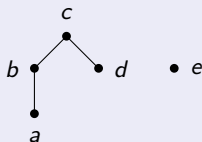
REPRESENTAÇÃO GRÁFICA DE UM CPO

Um cpo (A, \leq) , em que A é um conjunto finito não vazio, pode ser representado por meio de um **diagrama de Hasse**, como se descreve a seguir:

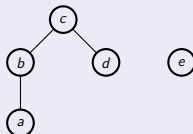
- cada elemento a de A é representado por um ponto do plano;
- se $a, b \in A$ são tais que $a \ll b$, então representa-se b acima de a e unem-se estes dois pontos por um segmento de reta.

EXEMPLOS

- 1 Seja $A = \{a, b, c, d, e\}$ e seja \leq a relação $\text{id}_A \cup \{(a, b), (a, c), (b, c), (d, c)\}$.
O cpo (A, \leq) pode ser representado pelo seguinte diagrama de Hasse

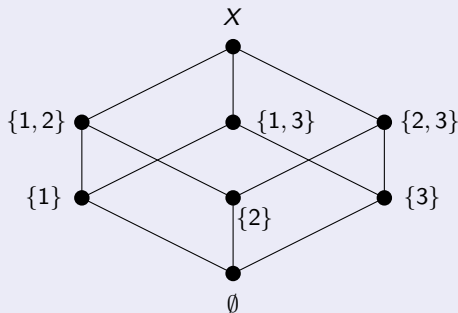


ou pelo diagrama de Hasse



EXEMPLOS

- 2 Seja $X = \{1, 2, 3\}$. O cpo $(\mathcal{P}(X), \subseteq)$ pode ser representado pelo seguinte diagrama de Hasse



EXEMPLOS

- 3 Seja $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 10, 12, 15, 20, 30, 60\}$ o conjunto dos divisores de 60 e seja $|$ a ordem parcial definida em A por

$$x | y \quad \text{se e só se} \quad \exists_{k \in \mathbb{N}} y = kx.$$

O cpo $(A, |)$ pode ser representado pelo seguinte diagrama de Hasse:

