Métodos Numéricos e Otimização Não Linear

1^o teste presencial, 1h20m, 5 valores, 3 dez 2020

Mestrado Integrado em Engenharia Informática

Universidade do Minho, Escola de Engenharia, Departamento de Produção e Sistemas

---

Apresente todos os cálculos que tiver de efetuar e use **4 casas decimais**

---

1. **[1 valor]** Considere a tabela: S(0,1) T(1)

$I_1 = \frac{0,1}{3}(f_0 + 4f_1 + 2f_2 + 4f_3 + f_4)$
$= \frac{0,1}{3}(1 + 4 \cdot 0,8710 + 2 \cdot 0,6880 + 4 \cdot 0,4570 + 0,1840)$
$= 0,2624$

$I_2 = \frac{1}{2}(f_5 + 2f_6 + 2f_7 + 2f_8 + f_9)$
$= \frac{1}{2}(-3,5360 + 2 \cdot -4,8560 + 2 \cdot 2,2240 + 2 \cdot 23,7040 + 65,5840)$
$= 52,096$

0,1 0,1 0,1 0,1 1 1 1 1 1

x	0	0.1	0.2	0.3	0.4	1.4	2.4	3.4	4.4	5.4
$f(x)$	1	0.8710	0.6880	0.4570	0.1840	-3.5360	-4.8560	2.2240	23.7040	65.5840

a) Calcule uma estimativa de $\int_0^{5.4} f(x)\,dx$ usando as fórmulas de integração numérica mais adequadas. $\int_0^{5,4} f(x)dx = \int_0^{0,4} f(x)dx + \int_{0,4}^{5,4} f(x)dx = I_1 + I_2 \simeq 52,3584$

b) Sabendo que $f(x)$ tem um comportamento de polinómio de grau 3 estime o erro cometido em $a)$ erro Simpson = 0 → grau 3 e simpson precisa de se derivar 4 vezes + erro trapz = $\left| -\frac{1}{12}(5,4-0,4)\underset{10,2}{\underset{4}{DD2}} \cdot 2! \right| =$

2. **[1 valor]** Considere a função $f(x)$ na tabela:

x	-1	1	2
$f(x)$	-1.635	4.75	8.25

Pretende-se aproximar $f(x)$, no sentido dos Mínimos Quadrados, por um modelo do tipo:

$$M(x; c_1, c_2) = c_1 \overset{\phi_1}{\frac{1}{x}} + c_2 \overset{\phi}{e^x}$$

$$\begin{pmatrix} \Sigma\phi_1^2 & \Sigma\phi_1\phi_2 \\ \Sigma\phi_2\phi_1 & \Sigma\phi_2^2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \Sigma f\phi_1 \\ \Sigma f\phi_2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 0,5^2 & 6,0449 \\ 6,0449 & 62,1225 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10,51 \\ 73,2701 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{matrix} c_1 = -9,99501 \\ c_2 = 2,15202 \end{matrix}$$

Calcule o modelo $M(x)$.

NOTA - a seguinte tabela contém muitos dos cálculos de que necessita:

$\frac{1}{x}$	x	$f(x)$	$(e^x)^2$	$\frac{e^x}{x}$	$\frac{f}{x}$	$f\,e^x$
-1	-1	-1.635	0.1353	-0.3679	1.635	-0.6015
1	1	4.75	7.3891	2.7183	4.75	12.9118
$\frac{1}{2}$	2	8.25	54.5982	3.6945	4.125	60.9597
$\sum$ $\frac{1}{2}$	-	-	62.1225	6.0449	10.51	73.2701

3. **[1 valor]** Calcule o valor de **a** de forma a que a seguinte função segmentada $s_3(x)$ no intervalo $[-2, 2]$, possa representar uma spline cúbica:

$0,375 \times 2 \times (x+2) \times 1 - 0,5 \times 1 \times 1$
$0,125 \times 3 \times (x+2)^2 \times 1 - 0,25 \times 2 \times (x+2) + 1$

$$s_3(x) = \begin{cases} s_3^1(x) = 0.125(x+2)^3 - 0.25(x+2)^2 + x + 3, & -2 \le x \le 0 \\ s_3^2(x) = -0.375x^3 + \mathbf{a}x^2 + 1.5x + 3, & 0 \le x \le 2 \end{cases}$$

$-0,375 \times 3 \times x^2 + 2 \times a \times x + 1,5$
$-0,375 \times 3 \times 2 \times x + 2 \times a$

$s_3^1(0) = 3$
$s_3^2(0) = 3$

$s_3^{1\prime} = 1,5$
$s_3^{1\prime} = 1,5$

$s_3^{1\prime\prime} = 1$
$s_3^{1\prime\prime} = 1 \Rightarrow 2a = 1 \Leftrightarrow a = \frac{1}{2}$

4. **[1 valor]** A equação que representa uma onda que se propaga transversalmente numa corda é dada por:

$$y(t,x) = \overset{10}{\cancel{y_{max}}}\sin(2\pi(\frac{\overset{0}{\cancel{x}}}{\lambda} - ft))$$

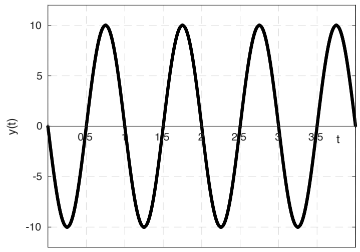
em que y é a elongação transversal, $y_{max} = 10$ cm é elongação máxima, $\lambda = 0.5$ m é o comprimento de onda, $f = 1$ Hz é a frequência, x é a posição e t é o tempo.

A figura representa a oscilação transversal da extremidade da corda, i.e., quando **x=0**, em função do tempo:

$10\sin(2\pi\cdot - t) = 8$

$\underbrace{10\sin(2\pi\cdot - t) - 8}$ $= 0$

$\hookrightarrow f(x) = 10\sin(2\pi\cdot - x) - 8$



$x = 0,651447$

$f(x) = 0,143275$

Pretende-se calcular o instante de tempo $t \in [0.62, 0.68]$ para o qual a elongação na extremidade da corda $y(t, \mathbf{0})$ atinge o valor 8. Use um método que não recorre a derivadas, considere no critério de paragem $\varepsilon_1 = 0.05$, $\varepsilon_2 = 0.15$ ou $n_{max} = 1$.

5. **[1 valor]** Considere a tabela das Diferenças Divididas correspondente aos pontos $(x, f(x))$:

x	$f(x)$	dd_1	dd_2
-3	16		
		-7	
-2	9		1
		-4	
0	1		1
		1	
3	4		1
		5	
4	9		

$f(0) + (x - -2) \times -4 + (x+2)(x+0) \times 1$

$f(x) = 9 + (x+2) \times -4 + (x+2)(x+0) \times 1$

$f(1,25) =$ isto

dd_3

$\frac{1-1}{-2-4} =$

a) Estime $f(1.25)$ utilizando um polinómio interpolador de grau 2. Justifique a escolha dos pontos usados.

b) Estime o erro cometido em a).

FIM