Elementos de Probabilidades e Teoria de Números

Elementos de Probabilidades - Folha 5

1. Sejam a um número real estritamente positivo e X uma v.a. tal que $X \sim N(0,1)$. Qual das seguintes afirmações é verdadeira:
   (a) $P(X \leq a) + P(X \geq -a) = 0$; (b) $P(X \leq a) + P(X \geq -a) = 1$;
   (c) $P(X \leq a) = P(X > a)$; (d) $P(X \leq a) = P(X \geq -a)$.
2. Seja $Z \sim N(0,1)$. Para cada uma das alíneas seguintes, determine $c \in \mathbb{R}$ tal que
   (a) $P(Z \leq c) = 0.975$; (b) $P(Z \leq c) = 0.025$; (c) $P(Z > c) = 0.05$; (d) $P(|Z| \geq c) = 0.1$.
3. Certo produto tem peso médio de 10g e desvio-padrão de 0.5g. Este produto é embalado em caixas de 12 unidades que, quando estão vazias, têm peso médio de 150g e desvio-padrão de 8g. Supondo que todos os pesos considerados são v.a.'s independentes com distribuição normal,
   (a) identifique a distribuição da v.a. que representa o peso de uma caixa cheia deste produto.
   (b) determine a probabilidade de uma caixa cheia deste produto pesar mais de 285g.
4. O comprimento das pétalas das flores de certa espécie tem distribuição normal com valor médio 3.2cm e desvio-padrão 1.8cm. Considere uma amostra aleatória de 10 destas pétalas. Qual é a distribuição da média dos comprimentos das pétalas desta amostra? Qual é a probabilidade de a média dos comprimentos das 10 pétalas ser superior 3.5cm?
5. Sejam $X_1, X_2, \ldots, X_{100}$ v.a.'s i.i.d.'s com distribuição $Poisson(0.02)$. Calcule $P(S_{100} > 2)$.
6. Seja $X_1, \ldots, X_{100}$ uma amostra aleatória proveniente de uma v.a. X cuja média é 20 e variância é 350. Obtenha um valor aproximado de $P(\overline{X}_{100} > 18)$ (com $\overline{X}_{100} = \frac{1}{100} S_{100}$).
7. Suponha que 100 baterias têm durações de vida independentes, cada uma com tempo médio de vida e desvio-padrão de 3 anos. Calcule a probabilidade (aproximada) de a média dos tempos de vida das 100 baterias ser superior a 30 meses.
8. Uma certa espécie de árvore tem altura média de 4m e desvio-padrão 1.2m. Indique o valor médio e o desvio-padrão da v.a. $\overline{X}_{70}$, isto é, da média de uma amostra aleatória de 70 destas árvores. Determine a probabilidade (aproximada) de a média das alturas das 70 árvores da amostra não se afastar do valor médio populacional (os 4m) mais do que um doze avos do desvio-padrão populacional (os 1.2m)?
9. Considere a experiência que consiste em efectuar 100 lançamentos de um dado equilibrado.
   i) Seja Y a v.a. que representa o número total de pintas nos 100 lançamentos. Determine $E[Y]$ e $Var[Y]$ e obtenha uma aproximação para o valor de $P(Y > 300)$.
   ii) Seja X a v.a. que representa o número de vezes que saiu a face 6 nos 100 lançamentos. Identifique a distribuição exacta de X, o seu valor médio e a sua variância. Obtenha, usando o TLC., um valor aproximado de $P(X \leq 30)$.
   iii) X e Y são independentes? Justifique.
10. O peso de sacos de 1kg de café é uma v.a. com distribuição normal e desvio-padrão de 25g. O controlo de qualidade reprova todos os sacos com peso abaixo de 950g ou acima de 1.075kg.
    (a) Qual a probabilidade de um saco ser rejeitado?
    (b) Se S representar o n.º de sacos reprovados por peso a menos num lote de 100, indique distribuição de S (justifique) e determine $E(S)$. Calcule $P(S < 6)$ (valor exato e aproximado).
11. Qual a probabilidade de, em 10000 algarismos escolhidos ao acaso, o 7 aparecer, no máximo, 968 vezes?
12. Qual a probabilidade de o número de ases obtidos em 12000 lançamentos de um dado equilibrado estar estar compreendido entre 1950 e 2100?

2) $Z \sim N(0,1) \Rightarrow Z \sim N(0,1)$ então $x_p = -x_{1-p}$, $p \in]0,1[$ $f(a) = f(-a)$, $a \in \mathbb{R}$

a) $P(Z \leq c) = 0{,}975 \Leftrightarrow c = x_{0{,}975} \Leftrightarrow c = 1{,}96$ → procurar 0,975 − 0,5 na tabela

b) $P(Z \leq c) = 0{,}025 \Leftrightarrow c = x_{0{,}025} \Leftrightarrow c = -1{,}96$ → senão der para fazer "−0,5" → fazer $x_p = -x_{1-p}$

c) $P(Z > c) = 0{,}05 \Leftrightarrow P(Z \leq c) = 0{,}95 \Leftrightarrow c = x_{0{,}95} \Leftrightarrow c = \dfrac{1{,}64 + 1{,}65}{2} \Leftrightarrow c = 1{,}645$

d) $P(|Z| \geq c) = 0{,}1 \Leftrightarrow P(|Z| < c) = 0{,}9 \Leftrightarrow P(-c < Z < c) = 0{,}9 \Leftrightarrow c = x_{0{,}95} \Leftrightarrow c = 1{,}645$

3)

x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6
x_7	x_8	x_9	x_{10}	x_{11}	x_{12}

X_i : "v.a. que representa o peso da i-ésima unidade", $i = 1, \dots, 12$

e V: "v.a " " " " " caixa vazia

a) T : "v.a. que representa o peso de uma caixa cheia deste produto"

$$T = V + \sum_{i=1}^{12} X_i \sim N\Big(\underbrace{150 + \sum_{i=1}^{12} 10}_{\text{média total}}, \underbrace{8^2 + \sum_{i=1}^{12} 0{,}5^2}_{\text{desvio-padrão total}}\Big) = N(270, 67)$$

b) $P(T > 285) = 1 - P(T \leq 285) = 1 - P\left(\dfrac{T - 270}{\sqrt{67}} \leq \dfrac{285 - 270}{\sqrt{67}}\right) = 1 - F_{N(0,1)}(1{,}83) = 1 - (0{,}5 + 0{,}4664) = 0{,}0336$

→ somar 0,5 quando buscar um valor à tabela

6) $X_1, X_2, \dots, X_{100}$

$E[X] = 20$, $Var[X] = 350$

$$P(\bar{X}_{100} > 18) = 1 - P(\bar{X}_{100} \leq 18) = 1 - P\left(\frac{\bar{X}_{100} - 20}{\sqrt{\frac{350}{100}}} \leq \underbrace{\frac{18 - 20}{\sqrt{\frac{350}{100}}}}_{= -1{,}07}\right) \approx 1 - F_{N(0,1)}(-1{,}07) = 1 - [1 - F_{N(0,1)}(1{,}07)]$$

$$= F_{N(0,1)}(1{,}07) = 0{,}5 + 0{,}3577 = 0{,}8577$$

$$\bar{X}_{100} = \frac{1}{100} S_{100} = \frac{1}{100} \sum_{i=1}^{100} X_i$$

9) ii) X : "v.a. que representa o nº de vezes que saiu face 6 em 100 lançamentos de um dado equilibrado"

$\sum_{i=1}^{100} Y_i = X \sim Bin(100, 1/6)$; $E[X] = 100 \times \frac{1}{6} = \frac{100}{6}$; $Var[X] = 100 \times \frac{1}{6} \times \frac{5}{6} = \frac{500}{36}$

$Y_i \sim$ Bernoulli $\left(\frac{1}{6}\right)$

$$P(X \leq 30) = P\left(\frac{X - \frac{100}{6}}{\sqrt{\frac{500}{36}}} \leq \frac{30 - \frac{100}{6}}{\sqrt{\frac{500}{36}}}\right) \approx F_{N(0,1)}(3{,}58) = 0{,}5 + 0{,}4558 = 0{,}9558$$

T.L.C.

iii) $\underbrace{P(X = 100, Y = 100)}_{=0} \neq \underbrace{P(X = 100)}_{(\frac{1}{6})^{100} > 0} \underbrace{P(Y = 100)}_{(\frac{1}{6})^{100} > 0}$

0