Programação Linear - análise de sensibilidade

Investigação Operacional

J.M. Valério de Carvalho
vc@dps.uminho.pt

Departamento de Produção e Sistemas
Escola de Engenharia, Universidade do Minho

5 de novembro de 2020

Análise de sensibilidade

antes

- Até aqui, assumimos que os dados não eram alteráveis.
- Na realidade, os dados podem não estar totalmente correctos, ou podemos querer avaliar se deveremos actuar para os alterar.

Guião

- Após determinar a solução óptima, queremos analisar como é que a solução óptima varia quando varia o valor de um dado (passaremos a tratá-lo como um parâmetro),
- ou seja, analisar a sensibilidade da solução óptima ao parâmetro.
- Parâmetros a analisar: quantidade de recurso disponível e coeficiente da função objectivo.

depois

- Os *solvers* de programação linear produzem relatórios que ajudam a efectuar a análise de sensibilidade.

Motivação

- Resolvendo o seguinte modelo com um *solver* de PL:

```
        max:   30x1 +20x2 +10x3;
restricao1:    1x1 + 1x2 + 2x3 <=  40;
restricao2:    2x1 + 2x2 + 1x3 <= 150;
restricao3:    2x1 + 1x2       <=  20;
```

- obtém-se o seguinte relatório com a solução óptima:

Objective	
Variables	result
	500
x1	0
x2	20
x3	10

- Para além de conhecer a solução óptima, fazer 20 unidades da actividade 2 e 10 unidades da actividade 3, com vendas de 500,
- podemos querer saber ...

E se ...?

Questões pós-optimização

- Se a quantidade do recurso 1 variasse, como variaria o valor da solução óptima?
- A variação seria igual dentro de que limites de variação do recurso?
- Se o preço da actividade 3 descesse, será que ainda seria atractiva?
- Qual o limite dessa descida para ainda ser atractiva?
- Qual o preço mínimo da actividade 1 para ela ser atractiva?

- *Análise pós-optimização* é uma designação alternativa de análise de sensibilidade.

Para além de determinarem a solução óptima do problema,

- os *solvers* de PL produzem *Relatórios de análise de sensibilidade* com informação para responder a estas questões.

Duals			
Variables	value	from	till
objective	500	500	500
x1	-5	-20	10
x2	0	-inf	+inf
x3	0	-inf	+inf
recurso1	5	20	240
recurso2	0	-inf	+inf
recurso3	15	0	40

Objective				
Variables	**from**	till	from value	till value
objective	500	500	500	500
x1	-inf	35	10	0
x2	17.5	+inf	-inf	0
x3	0	20	-inf	0

Conteúdo

- Objectivo da análise de sensibilidade
- Alteração num termo independente b_i de uma restrição
  - análise matricial: alteração de b_i
- Conceito de preço-sombra
- Alteração num coeficiente c_j da função objectivo
- Apêndices
  1. análise matricial: alteração de c_j (var. não-básica no quadro óptimo)
  2. análise matricial: alteração de c_j (var. básica no quadro óptimo)

Objectivo

A análise de sensibilidade permite determinar:

- as alterações no quadro óptimo que decorrem de uma alteração no quadro inicial:
  - de um termo independente b_i da restrição i
  - de um coeficiente c_j da função objectivo
- os limites de variação desses elementos do quadro inicial sem alterar o conjunto de variáveis básicas da solução óptima.

Alteração do termo independente b_i

- O valor do termo independente b_i da restrição $A^i x \leq b_i$ indica frequentemente a quantidade de recurso disponível.
- O valor pode alterar-se ou podemos estar interessados em comprar mais unidades de recurso.

Questões pós-optimização

- Se a quantidade do recurso variasse, como variaria o valor da solução óptima?
- A variação seria igual dentro de que limites de variação do recurso?

Exemplo 1: espaço a duas dimensões

- Modelo, quadro óptimo e relatório Duals:

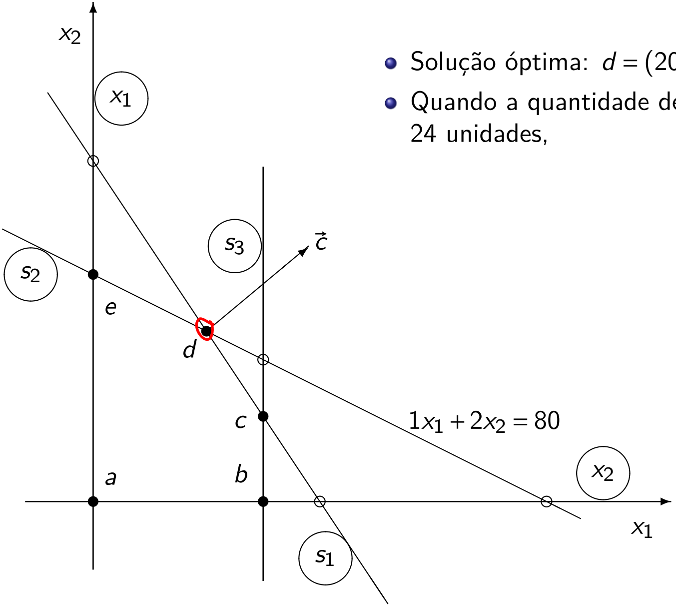
```
      max:  12x1 +10x2;
tmaquina:   3x1 + 2x2<=120;
maodobra:   1x1 + 2x2<= 80;
material:   1x1      <= 30;
```

	z	x_1	x_2	s_1	s_2	s_3	
x_2	0	0	1	-0.25	0.75	0	30
s_3	0	0	0	-0.5	0.5	1	10
x_1	0	1	0	0.5	-0.5	0	20
z	1	0	0	3.5	1.5	0	540

Duals			
Variables	value	from	till
objective	540	540	540
tmaquina	3,5	80	140
maodobra	1,5	60	120
material	0	$-\infty$	$+\infty$
x1	0	$-\infty$	$+\infty$
x2	0	$-\infty$	$+\infty$

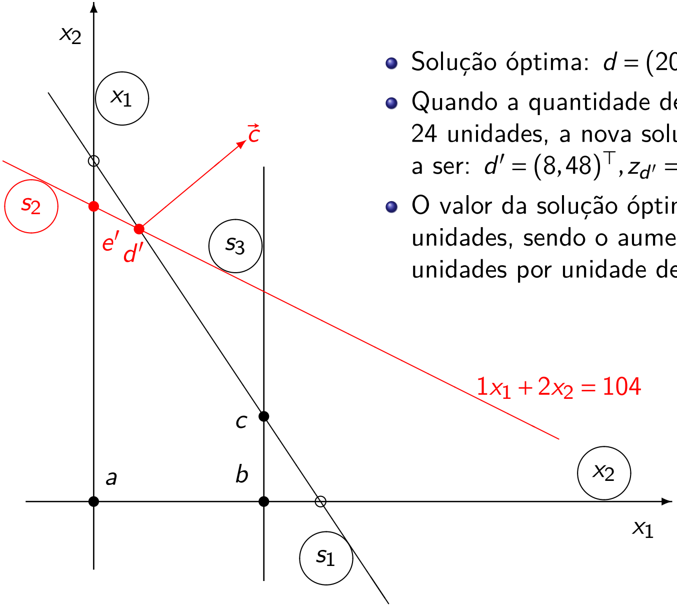
- Como varia o valor da solução óptima quando o valor do parâmetro `maodobra` aumenta do valor inicial, 80, para 104?

- Do ponto de vista geométrico, a variação de um parâmetro b_i do modelo traduz-se numa translação da recta associada à restrição.



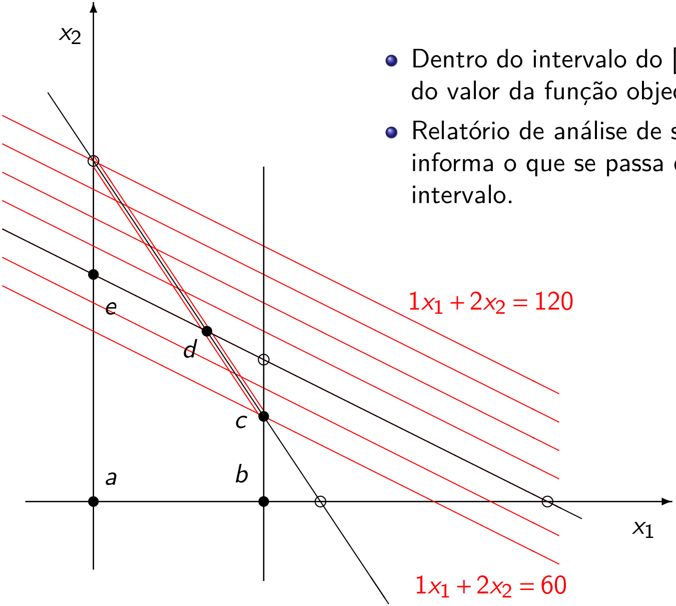
- Solução óptima: $d = (20, 30)^\top, z_d = 540$.
- Quando a quantidade de recurso aumenta 24 unidades,

Variação do valor do óptimo: interpretação geométrica



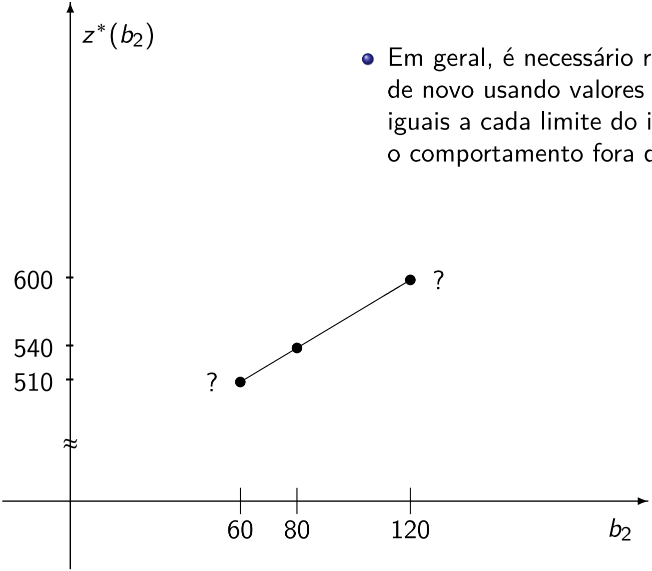
- Solução óptima: $d = (20, 30)^\top, z_d = 540$.
- Quando a quantidade de recurso aumenta 24 unidades, a nova solução óptima passa a ser: $d' = (8, 48)^\top, z_{d'} = 576$.
- O valor da solução óptima aumenta 36 unidades, sendo o aumento de 1.5 unidades por unidade de recurso.

Limite variação parâmetro: interpretação geométrica



- Dentro do intervalo do $[60, 120]$, a variação do valor da função objectivo é linear.
- Relatório de análise de sensibilidade só informa o que se passa dentro desse intervalo.

Variação do valor do óptimo em função do parâmetro b_2



- Em geral, é necessário resolver o problema de novo usando valores do parâmetro b_2 iguais a cada limite do intervalo para saber o comportamento fora do intervalo.

Conceito de preço-sombra de um recurso

Preço-sombra: valor que o decisor atribui a uma unidade do recurso,

- medido pelo aumento do valor da função objectivo resultante de se usar uma unidade adicional do recurso.

- O valor é algo individual: diferentes agentes económicos podem atribuir valores diferentes a um dado recurso.
- Cada agente optimiza um modelo semelhante, mas com diferenças, e
- os valores do relatórios de análise de sensibilidade resultam do modelo.

Preço-sombra de um recurso vs. custo de um recurso

- O custo de um recurso (preço no mercado) é uma coisa diferente.
- A comparação do preço-sombra e do custo ajuda a tomar decisões no âmbito da análise pós-optimização.

Exemplo 2: o *preço-sombra* no quadro simplex

Quadro Inicial

	z	x_1	x_2	x_3	s_1	s_2	s_3	
s_1	0	1	1	2	1	0	0	40
s_2	0	2	2	1	0	1	0	150
s_3	0	2	1	0	0	0	1	20
z	1	-30	-20	-10	0	0	0	0

Quadro Óptimo

	z	x_1	x_2	x_3	s_1	s_2	s_3	
x_3	0	-1/2	0	1	1/2	0	-1/2	10
s_2	0	-3/2	0	0	-1/2	1	-3/2	100
x_2	0	2	1	0	0	0	1	20
z	1	5	0	0	5	0	15	500

O *preço-sombra* do recurso i é dado pelo custo reduzido $(c_B B^{-1})_i$

- $(c_B B^{-1})_i = \delta z / \delta(-s_i)$, *i.e.*,
- o valor da função objectivo aumenta $\delta z / \delta(-s_i)$ unidades por cada unidade adicional do recurso i;

- acontece o oposto do que quando se aumenta a variável de folga s_i.

Exemplo 2: preço-sombra dos recursos 1 e 2

Quadro Óptimo

	z	x_1	x_2	x_3	s_1	s_2	s_3	
x_3	0	-1/2	0	1	1/2	0	-1/2	10
s_2	0	-3/2	0	0	-1/2	1	-3/2	100
x_2	0	2	1	0	0	0	1	20
z	1	5	0	0	5	0	15	500

- O preço-sombra do recurso 1 é $\delta z/\delta(-s_1) = +5$ (o valor da função objectivo aumenta 5 unidades por cada unidade adicional do recurso 1).

- O preço-sombra do recurso 2 é $\delta z/\delta(-s_2) = +0$.
- Não há interesse em ter unidades adicionais de recurso 2: o aumento do recurso 2 não aumenta o valor da função objectivo, só aumenta a folga s_2.

Relatório *Duals* (vamos ver que há um *problema dual*)

- A coluna *value* apresenta os valores da linha da função objectivo do quadro simplex:
  - {x1,...,x3} $\leftrightarrow$ variáveis de folga do dual (de facto, são os valores simétricos, porque o *LPSolve* apresenta o vector $c - c_B B^{-1} A$).
  - {recurso1,...,recurso3} $\leftrightarrow$ variáveis de decisão do dual ($c_B B^{-1}$).

Duals			
Variables	value	from	till
objective	500	500	500
x1	-5	-20	10
x2	0	-inf	+inf
x3	0	-inf	+inf
recurso1	5	20	240
recurso2	0	-inf	+inf
recurso3	15	0	40

- O relatório *Duals* indica que o preço-sombra do recurso 1 é 5.

Relatório *Duals:* interpretação

Duals			
Variables	value	from	till
objective	500	500	500
x1	-5	-20	10
x2	0	-inf	+inf
x3	0	-inf	+inf
recurso1	5	20	240
recurso2	0	-inf	+inf
recurso3	15	0	40

Relativamente ao recurso 1:

- quando a quantidade de recurso 1 (b_1) varia desde 20 até 240,
- o valor do óptimo da função obj. é $500 + 5(b_1 - 40), \forall b_1 \in [20, 240]$,
- e as variáveis básicas óptimas continuam a ser x_3, s_2 e x_2.

Análise matricial: alteração de b_i

Quais os vectores / matrizes que sofrem alterações no quadro óptimo?

- Quando há uma alteração de um elemento do vector b (vector dos termos independentes das restrições),
- as únicas alterações no quadro óptimo são no vector $B^{-1}b$ e no elemento $c_B B^{-1} b$ (ver quadros no diapositivo seguinte).

- Lembrete: a matriz B é a submatriz de $[\ A \mid I\ ]$ com as colunas das variáveis básicas:

$$B = \begin{array}{ccc} x_3 & s_2 & x_2 \\ \hline 2 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{array}$$

$$c_B = \boxed{\begin{array}{ccc} 10 & 0 & 20 \end{array}}$$

- O vector c_B tem os coeficientes do vector c das mesmas variáveis.

Exemplo 2

Quadro Inicial

	z	x_1	x_2	x_3	s_1	s_2	s_3	
s_1	0	1	1	2	1	0	0	40
s_2	0	2	2	1	0	1	0	150
s_3	0	2	1	0	0	0	1	20
z	1	-30	-20	-10	0	0	0	0

Quadro Óptimo

	z	x_1	x_2	x_3	s_1	s_2	s_3	
x_3	0	-1/2	0	1	1/2	0	-1/2	10
s_2	0	-3/2	0	0	-1/2	1	-3/2	100
x_2	0	2	1	0	0	0	1	20
z	1	5	0	0	5	0	15	500

$$\left[\begin{array}{c|c} B^{-1} & \tilde{0} \\ \hline c_B B^{-1} & 1 \end{array}\right] * \left[\begin{array}{c|c|c} A & I & b \\ \hline -c & \tilde{0} & 0 \end{array}\right] =$$

$$= \left[\begin{array}{c|c|c} B^{-1}A & B^{-1} & B^{-1}b \\ \hline c_B B^{-1}A - c & c_B B^{-1} & c_B B^{-1} b \end{array}\right]$$

Exemplo 2: análise da variação de b_1 (passa a ser $40+\alpha$)

$$b_{ant} = \boxed{\begin{array}{c} 40 \\ 150 \\ 20 \end{array}}, \quad b_{novo} = \boxed{\begin{array}{c} 40+\alpha \\ 150 \\ 20 \end{array}}$$

- Novo vector $B^{-1}b_{novo}$:

$$B^{-1}b_{novo} = \boxed{\begin{array}{rrr} 1/2 & 0 & -1/2 \\ -1/2 & 1 & -3/2 \\ 0 & 0 & 1 \end{array}} * \boxed{\begin{array}{c} 40+\alpha \\ 150 \\ 20 \end{array}} = \boxed{\begin{array}{c} 10+\alpha/2 \\ 100-\alpha/2 \\ 20 \end{array}}$$

- Novo valor de $c_B B^{-1}b_{novo}$:

$$c_B B^{-1}b_{novo} = \boxed{\begin{array}{ccc} 5 & 0 & 15 \end{array}} * \boxed{\begin{array}{c} 40+\alpha \\ 150 \\ 20 \end{array}} = \boxed{500+5\alpha}$$

Exemplo 2: quadro óptimo quando há uma variação de b_1

Quadro Inicial

	z	x_1	x_2	x_3	s_1	s_2	s_3	
s_1	0	1	1	2	1	0	0	$40+\alpha$
s_2	0	2	2	1	0	1	0	150
s_3	0	2	1	0	0	0	1	20
z	1	-30	-20	-10	0	0	0	0

Quadro Óptimo

	z	x_1	x_2	x_3	s_1	s_2	s_3	
x_3	0	-1/2	0	1	1/2	0	-1/2	$10+\alpha/2$
s_2	0	-3/2	0	0	-1/2	1	-3/2	$100-\alpha/2$
x_2	0	2	1	0	0	0	1	20
z	1	5	0	0	5	0	15	$500+5\alpha$

- Este quadro é óptimo dentro dos limites de variação de α, *i.e.*, enquanto todos os elementos de $B^{-1}b_{novo}$ forem não-negativos.
- Se o valor de α estiver para além desses limites, haverá um elemento negativo no lado direito do quadro, e é necessário usar o simplex dual [veremos depois] para determinar o novo quadro óptimo.

Exemplo 2: determinação dos limites de variação de α

- Limites de variação de α :

$$B^{-1}b_{novo} = \boxed{\begin{array}{c} 10+\alpha/2 \\ 100-\alpha/2 \\ 20 \end{array}} \geq \boxed{\begin{array}{c} 0 \\ 0 \\ 0 \end{array}}$$

$$\begin{cases} \alpha \geq -20 \\ \alpha \leq 200 \end{cases}$$

ou seja,

$$-20 \leq \alpha \leq 200.$$

- Limites de variação de b_1 (no quadro inicial, $b_1 = 40$):

$$40-20 \leq b_1 \leq 40+200,$$

ou seja,

$$20 \leq b_1 \leq 240.$$

- Estes são os valores apresentados no relatório *Duals*.

Alteração num coeficiente da função objectivo

- O valor do coeficiente c_j da função objectivo está frequentemente relacionado com o preço de venda ou com o lucro associado a uma actividade.
- O valor pode alterar-se ou podemos estar interessados em alterá-lo para a actividade se tornar atractiva.

Questões pós-optimização

- Se o preço da actividade 3 descesse, será que ainda seria atractiva?
- Qual o limite dessa descida para ainda ser atractiva?
- Qual o preço mínimo da actividade 1 para ela ser atractiva?

Exemplo 1: espaço a duas dimensões

- Modelo, quadro óptimo e relatório Objective:

```
    max:   12x1 +10x2;
tmaquina:   3x1 + 2x2<=120;
maodobra:   1x1 + 2x2<= 80;
material:   1x1       <= 30;
```

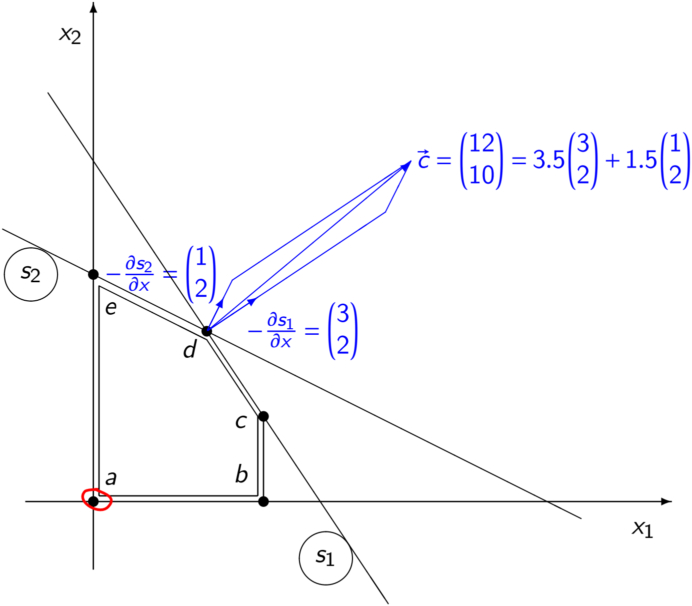
	z	x_1	x_2	s_1	s_2	s_3	
x_2	0	0	1	-0.25	0.75	0	30
s_3	0	0	0	-0.5	0.5	1	10
x_1	0	1	0	0.5	-0.5	0	20
z	1	0	0	3.5	1.5	0	540

Objective				
Variables	from	till	from value	till value
objective	540	540	540	540
x1	5	15	$-\infty$	0
x2	8	24	$-\infty$	0

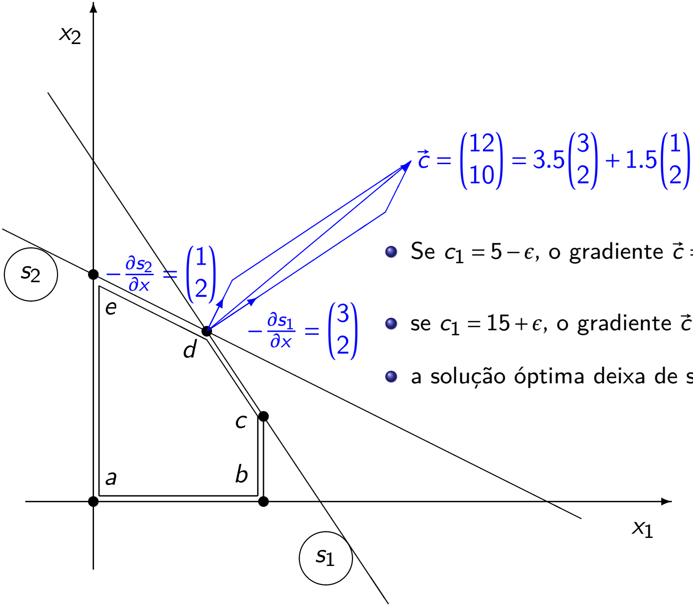
- Porque é que a solução óptima muda se o valor do coeficiente c_1 estiver fora do intervalo $[5, 15]$?

- Do ponto de vista geométrico, a alteração de um coeficiente da função objectivo traduz-se numa alteração da direcção do vector gradiente.

Exemplo 1: alteração de um coeficiente da f. objectivo

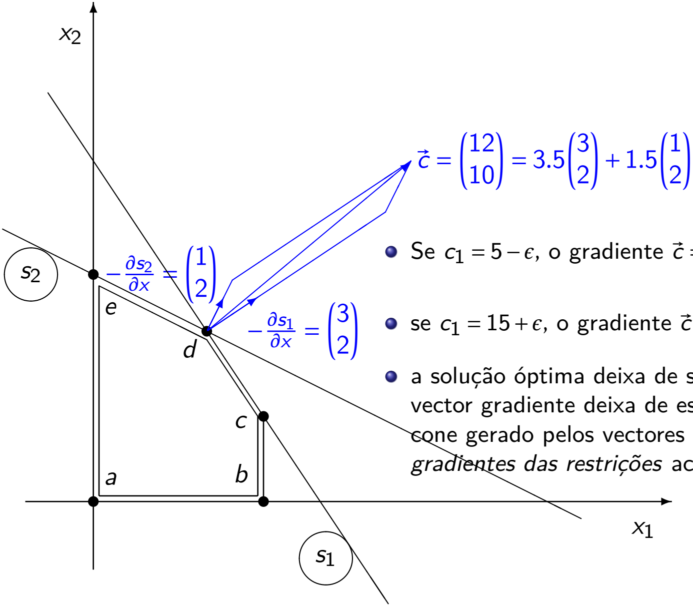


Exemplo 1: alteração de um coeficiente da f. objectivo



- Se $c_1 = 5 - \epsilon$, o gradiente $\vec{c} = \begin{pmatrix} 5 - \epsilon \\ 10 \end{pmatrix}$, ou
- se $c_1 = 15 + \epsilon$, o gradiente $\vec{c} = \begin{pmatrix} 15 + \epsilon \\ 10 \end{pmatrix}$,
- a solução óptima deixa de ser d, porque

Exemplo 1: alteração de um coeficiente da f. objectivo



- Se $c_1 = 5 - \epsilon$, o gradiente $\vec{c} = \begin{pmatrix} 5-\epsilon \\ 10 \end{pmatrix}$, ou
- se $c_1 = 15 + \epsilon$, o gradiente $\vec{c} = \begin{pmatrix} 15+\epsilon \\ 10 \end{pmatrix}$,
- a solução óptima deixa de ser d, porque o vector gradiente deixa de estar contido no cone gerado pelos vectores simétricos dos *gradientes das restrições* activas em d.

Interpretação da informação do Relatório:

- Não há alteração das actividades atractivas (variáveis básicas na solução óptima) se todos os coeficientes da função objectivo pertencerem ao intervalo definido pelas colunas **from** e **till**.

Exemplo 2:

- Os coeficientes da função objectivo são $(c_1, c_2, c_3) = (30, 20, 10)$.

Objective				
Variables	**from**	till	from value	till value
objective	500	500	500	500
x1	-inf	35	10	0
x2	17.5	+inf	-inf	0
x3	0	20	-inf	0

- A análise matricial, usando a mesma metodologia, é apresentada nos Apêndices 1 e 2 (será aplicada num exercício das TP).

Exemplo 2: caso de var. não-básica no quadro óptimo

Relativamente ao coeficiente da função objectivo c_1 :

- A solução óptima terá como variáveis básicas óptimas x_3, s_2 e x_2 se o coeficiente c_1 for menor ou igual a 35.

- Acima desse valor, a variável não-básica x_1 tornar-se-á atractiva para entrar na base, e é necessário usar o algoritmo simplex primal para determinar o novo quadro óptimo.
- Ver informação adicional no Apêndice 1.

Objective				
Variables	**from**	till	from value	till value
objective	500	500	500	500
x1	-inf	35	10	0
x2	17.5	+inf	-inf	0
x3	0	20	-inf	0

Exemplo 2: caso de variável básica no quadro óptimo

Relativamente ao coeficiente da função objectivo c_3 :

- A solução óptima terá como variáveis básicas óptimas x_3, s_2 e x_2 se o coeficiente c_3 pertencer ao intervalo [0,20].

- Se o valor for inferior a 0, a actividade x_3 deixa de ser atractiva.
- Se o valor for superior a 20, a actividade x_3 permanece atractiva, mas a solução óptima terá outras variáveis básicas.
- Ver informação adicional no Apêndice 2.

Objective				
Variables	**from**	till	from value	till value
objective	500	500	500	500
x1	-inf	35	10	0
x2	17.5	+inf	-inf	0
x3	0	20	-inf	0

Conclusão

- O conceito de preço-sombra é um conceito fundamental.
- Os recursos mais críticos são os que têm maior preço-sombra.
- A análise de sensibilidade permite avaliar alternativas ao cenário actual, e ajuda em processos de decisão pós-optimização;
- permite evitar ter de resolver novamente o problema com novos valores dos parâmetros.
- A análise de sensibilidade à variação simultânea de vários parâmetros pode ser feita com análise matricial.
- A análise de sensibilidade dos elementos a_{ij} da matriz A é mais complexa.

Apêndices

1. Análise matricial das alterações de c_j (Variável não-básica no quadro óptimo)
2. Análise matricial das alterações de c_j (Variável básica no quadro óptimo)
3. Identificação da variável que entra na base quando há alteração do coeficiente de uma variável básica para além dos limites de variação
4. Significado do elemento **from value**

1. Alteração de c_j: quais as alterações no quadro óptimo?

- Há alterações nas matrizes e nos vectores do quadro óptimo que envolvem os coeficientes da função objectivo que se alteram nos dados iniciais.
- É necessário distinguir 2 casos:

Caso I: Variável é não-básica no quadro óptimo

- só se altera um elemento do vector c,
- e só há alterações no vector $c_B B^{-1} A - c$ do quadro final;

Caso II: Variável é básica no quadro óptimo

- alteram-se um elemento do vector c e um elemento do vector c_B (que é construído a partir de c),
- e há alterações nos vectores $c_B B^{-1} A - c$, $c_B B^{-1}$ e $c_B B^{-1} b$ do quadro final.

1. Exemplo

Quadro Inicial

	z	x_1	x_2	x_3	s_1	s_2	s_3	
s_1	0	1	1	2	1	0	0	40
s_2	0	2	2	1	0	1	0	150
s_3	0	2	1	0	0	0	1	20
z	1	-30	-20	-10	0	0	0	0

Quadro Óptimo

	z	x_1	x_2	x_3	s_1	s_2	s_3	
x_3	0	-1/2	0	1	1/2	0	-1/2	10
s_2	0	-3/2	0	0	-1/2	1	-3/2	100
x_2	0	2	1	0	0	0	1	20
z	1	5	0	0	5	0	15	500

$$
\begin{array}{|c|c|}
\hline
B^{-1} & \tilde{0} \\
\hline
c_B B^{-1} & 1 \\
\hline
\end{array}
\ast
\begin{array}{|c|c|c|}
\hline
A & I & b \\
\hline
-c & \tilde{0} & 0 \\
\hline
\end{array}
=
$$

$$
=
\begin{array}{|c|c|c|}
\hline
B^{-1}A & B^{-1} & B^{-1}b \\
\hline
c_B B^{-1}A - c & c_B B^{-1} & c_B B^{-1} b \\
\hline
\end{array}
$$

- Como a actividade 1 não é atractiva, interessa analisar o aumento do valor do coeficiente c_1, que passa a ser igual a $30+\alpha$,

Caso I: Variável x_1 é não-básica no quadro óptimo

$$\begin{aligned} c_{ant} &= \boxed{30 \quad 20 \quad 10} \\ c_{novo} &= \boxed{30+\alpha \quad 20 \quad 10} \end{aligned}$$

Novo vector $c_B B^{-1} A - c_{novo}$:

$$\begin{aligned} c_B B^{-1} A - c_{novo} &= c_B B^{-1} A - c_{novo} + c_{ant} - c_{ant} = \\ &= (c_B B^{-1} A - c_{ant}) + (c_{ant} - c_{novo}) \\ c_B B^{-1} A - c_{novo} &= \boxed{5 \quad 0 \quad 0} + \boxed{-\alpha \quad 0 \quad 0} = \\ &= \boxed{5-\alpha \quad 0 \quad 0} \end{aligned}$$

1. Exemplo: quadro óptimo quando há uma variação de c_1

		z	x_1	x_2	x_3	s_1	s_2	s_3	
Quadro Inicial	s_1	0	1	1	2	1	0	0	40
	s_2	0	2	2	1	0	1	0	150
	s_3	0	2	1	0	0	0	1	20
	z	1	$-(30+\alpha)$	-20	-10	0	0	0	0

		z	x_1	x_2	x_3	s_1	s_2	s_3	
Quadro Óptimo	x_3	0	-1/2	0	1	1/2	0	-1/2	10
	s_2	0	-3/2	0	0	-1/2	1	-3/2	100
	x_2	0	2	1	0	0	0	1	20
	z	1	$5-\alpha$	0	0	5	0	15	500

- Este quadro é óptimo dentro dos limites de variação de α, *i.e.*, enquanto todos os elementos de $c_B B^{-1} A - c_{novo}$ forem não-negativos.
- Se o valor de α estiver para além desses limites, haverá um elemento negativo na linha da função objectivo, e é necessário usar o simplex primal para determinar o novo quadro óptimo.

1. Determinação dos limites de variação de α

- Limites de variação de α :

$$c_B B^{-1} A - c_{novo} \quad = \quad \boxed{5-\alpha \quad 0 \quad 0}$$

$$\left\{ \; 5-\alpha \geq 0 \right. \qquad\qquad \left\{ \; \alpha \leq 5 \right.$$

ou seja,

$$-\infty \leq \alpha \leq 5.$$

- Limites de variação de c_1 :

$$-\infty \leq c_1 \leq 30+5,$$

ou seja,

$$-\infty \leq c_1 \leq 35.$$

Estes são os valores apresentados no relatório *Objective*.

2. Exemplo: variação de c_3

- Como a actividade 3 é atractiva, interessa analisar o decremento do valor do coeficiente c_3, que passa a ser igual a $10 - \alpha$,

Caso II: Variável x_3 é básica no quadro óptimo

$$c_{ant} = \boxed{30 \quad 20 \quad 10}$$

$$c_{novo} = \boxed{30 \quad 20 \quad 10 - \alpha}$$

$$c_{B_{ant}} = \boxed{10 \quad 0 \quad 20}$$

$$c_{B_{novo}} = \boxed{10 - \alpha \quad 0 \quad 20}$$

(continua)

Caso II: Variável x_3 é básica no quadro óptimo

Novo vector $c_{B_{novo}} B^{-1}$:

$$c_{B_{novo}} B^{-1} = \boxed{\begin{array}{ccc} 10-\alpha & 0 & 20 \end{array}} * \boxed{\begin{array}{ccc} 1/2 & 0 & -1/2 \\ -1/2 & 1 & -3/2 \\ 0 & 0 & 1 \end{array}} =$$

$$= \boxed{\begin{array}{ccc} 5-\alpha/2 & 0 & 15+\alpha/2 \end{array}}$$

Novo vector $c_{B_{novo}} B^{-1} A - c_{novo}$ (após efectuar todos os cálculos):

$$c_{B_{novo}} B^{-1} A - c_{novo} = \boxed{\begin{array}{ccc} 5+\alpha/2 & 0 & 0 \end{array}}$$

2. Exemplo: quadro óptimo quando há uma variação de c_3

Quadro Inicial

	z	x_1	x_2	x_3	s_1	s_2	s_3	
s_1	0	1	1	2	1	0	0	40
s_2	0	2	2	1	0	1	0	150
s_3	0	2	1	0	0	0	1	20
z	1	30	-20	$-(10-\alpha)$	0	0	0	0

Quadro Óptimo

	z	x_1	x_2	x_3	s_1	s_2	s_3	
x_3	0	-1/2	0	1	1/2	0	-1/2	10
s_2	0	-3/2	0	0	-1/2	1	-3/2	100
x_2	0	2	1	0	0	0	1	20
z	1	$5+\alpha/2$	0	0	$5-\alpha/2$	0	$15+\alpha/2$	$500-10\alpha$

- Este quadro é óptimo dentro dos limites de variação de α, *i.e.*, enquanto todos os elementos de $c_B B^{-1} A - c_{novo}$ e de $c_{B_{novo}} B^{-1}$ forem não-negativos.
- Se o valor de α estiver para além desses limites, haverá um elemento negativo na linha da função objectivo, e é necessário usar o simplex primal para determinar o novo quadro óptimo.

2. Determinação dos limites de variação de α

- Limites de variação de α :

$$\begin{aligned} c_{B_{novo}} B^{-1} A - c_{novo} &= \boxed{5+\alpha/2 \quad 0 \quad 0} \geq \tilde{0} \\ c_{B_{novo}} B^{-1} &= \boxed{5-\alpha/2 \quad 0 \quad 15+\alpha/2} \geq \tilde{0} \end{aligned}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} 5+\alpha/2 \geq 0 \\ 5-\alpha/2 \geq 0 \\ 15+\alpha/2 \geq 0 \end{array} \right. \qquad \left\{ \begin{array}{l} \alpha \geq -10 \\ \alpha \leq 10 \\ \alpha \geq -30 \end{array} \right.$$

ou seja,

$$-10 \leq \alpha \leq 10.$$

- Limites de variação de c_3 :

$$10-10 \leq c_3 \leq 10-(-10),$$

ou seja,

$$0 \leq c_3 \leq 20.$$

Estes são os limites apresentados no relatório *Objective*.

3. Aumento do preço associado à actividade x_3

- Qual a variável não-básica que se tornaria atractiva se o preço associado à actividade x_3 fosse igual a $20+\epsilon$ (*i.e.*, $\alpha = -10-\epsilon$)?
- Qual a variável básica que sairia da base?

Quadro Inicial

	z	x_1	x_2	x_3	s_1	s_2	s_3	
s_1	0	1	1	2	1	0	0	40
s_2	0	2	2	1	0	1	0	150
s_3	0	2	1	0	0	0	1	20
z	1	-30	-20	$-(10-\alpha)$	0	0	0	0

Quadro Óptimo

	z	x_1	x_2	x_3	s_1	s_2	s_3	
x_3	0	-1/2	0	1	1/2	0	-1/2	10
s_2	0	-3/2	0	0	-1/2	1	-3/2	100
x_2	0	2	1	0	0	0	1	20
z	1	$5+\alpha/2$	0	0	$5-\alpha/2$	0	$15+\alpha/2$	$500-10\alpha$

3. Decréscimo do preço associado à actividade x_3

- Qual a variável não-básica que se tornaria atractiva se o preço associado à actividade x_3 fosse igual a $0-\epsilon$ (*i.e.*, $\alpha = 10+\epsilon$)?
- Qual a variável básica que sairia da base?

Quadro Inicial

	z	x_1	x_2	x_3	s_1	s_2	s_3	
s_1	0	1	1	2	1	0	0	40
s_2	0	2	2	1	0	1	0	150
s_3	0	2	1	0	0	0	1	20
z	1	30	-20	$-(10-\alpha)$	0	0	0	0

Quadro Óptimo

	z	x_1	x_2	x_3	s_1	s_2	s_3	
x_3	0	-1/2	0	1	1/2	0	-1/2	10
s_2	0	-3/2	0	0	-1/2	1	-3/2	100
x_2	0	2	1	0	0	0	1	20
z	1	$5+\alpha/2$	0	0	$5-\alpha/2$	0	$15+\alpha/2$	$500-10\alpha$

4. Significado do elemento **from value**

- No Relatório *Objective*, o elemento da coluna **from value** só é significativo para variáveis não-básicas na solução óptima.
- Quando x_1 é atractiva (coluna pivô), entra na base, e toma o valor $20/2 = 10$.
- É o valor da menor razão positiva (a linha pivô é a da variável básica x_2 (ver diapositivo seguinte).

Objective				
Variables	**from**	till	from value	till value
objective	500	500	500	500
x1	-inf	35	10	0
x2	17.5	+inf	-inf	0
x3	0	20	-inf	0

4. Exemplo

Quadro Inicial

	z	x_1	x_2	x_3	s_1	s_2	s_3	
s_1	0	1	1	2	1	0	0	40
s_2	0	2	2	1	0	1	0	150
s_3	0	2	1	0	0	0	1	20
z	1	$-(30+\alpha)$	-20	-10	0	0	0	0

Quadro Óptimo

	z	x_1	x_2	x_3	s_1	s_2	s_3	
x_3	0	-1/2	0	1	1/2	0	-1/2	10
s_2	0	-3/2	0	0	-1/2	1	-3/2	100
x_2	0	2	1	0	0	0	1	20
z	1	$5+\alpha$	0	0	5	0	15	500

nota: coluna do quadro simplex mostra alterações em $B^{-1}b$

O novo vector $B^{-1}b_{novo}$ pode ser expresso em função do vector anterior $B^{-1}b_{ant}$ e de uma parcela de variação:

$$
\begin{aligned}
B^{-1}b_{novo} &= B^{-1}b_{novo} + B^{-1}b_{ant} - B^{-1}b_{ant} = \\
&= B^{-1}b_{ant} + B^{-1}(b_{novo} - b_{ant})
\end{aligned}
$$

As alterações produzidas em $B^{-1}b_{ant}$ seguem a alteração existente na coluna da variável de folga associada ao recurso que varia (neste exemplo, a coluna de s_1).

$$
\begin{aligned}
B^{-1}b_{novo} &= \boxed{\begin{matrix} 10 \\ 100 \\ 20 \end{matrix}} + \boxed{\begin{matrix} 1/2 & 0 & -1/2 \\ -1/2 & 1 & -3/2 \\ 0 & 0 & 1 \end{matrix}} * \boxed{\begin{matrix} \alpha \\ 0 \\ 0 \end{matrix}} = \\
&= \boxed{\begin{matrix} 10 \\ 100 \\ 20 \end{matrix}} + \alpha \boxed{\begin{matrix} 1/2 \\ -1/2 \\ 0 \end{matrix}}
\end{aligned}
$$

O novo valor da função objectivo $c_B B^{-1} b_{novo}$ pode ser expresso em função do valor anterior $c_B B^{-1} b_{ant}$ e de uma parcela de variação:

$$\begin{aligned} c_B B^{-1} b_{novo} &= c_B B^{-1} b_{novo} + c_B B^{-1} b_{ant} - c_B B^{-1} b_{ant} = \\ &= c_B B^{-1} b_{ant} + c_B B^{-1} (b_{novo} - b_{ant}) \end{aligned}$$

As alterações produzidas em $c_B B^{-1} b_{ant}$ seguem o preço-sombra associado ao recurso que varia (neste exemplo, o recurso associado à variável de folga s_1).

$$\begin{aligned} c_B B^{-1} b_{novo} &= \boxed{500} + \boxed{\begin{matrix} 5 & 0 & 15 \end{matrix}} * \boxed{\begin{matrix} \alpha \\ 0 \\ 0 \end{matrix}} = \\ &= \boxed{500} + \alpha \boxed{5} \end{aligned}$$

Fim