

Espaços vetoriais

Resumo de alguns resultados importantes

No que se segue, V designa um espaço vetorial real e $\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n$ são n vetores de V .

1. Seja V tal que $\dim V = m$. Tem-se:

- (a) se $n < m$, então $\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n$ não geram V ;
- (b) se $n > m$, então $\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n$ não são linearmente independentes;
- (c) se $n = m$ e $\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_m$ geram V , então $(\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_m)$ é um base de V ;
- (d) se $n = m$ e $\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_m$ são linearmente independentes, então $(\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_m)$ é um base de V ;
- (e) se U é um subespaço de V e $\dim U = m$, então $U = V$.

2.

$$\begin{aligned}\langle \mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n, \mathbf{v} \rangle = \langle \mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n \rangle &\iff \mathbf{v} \text{ é combinação linear de } \mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n \\ &\iff \mathbf{v} \in \langle \mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n \rangle\end{aligned}$$

3. $\langle \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_n \rangle = \langle \alpha \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_n \rangle, \alpha \neq 0$

4. $\langle \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_n \rangle = \langle \mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_n \rangle$

5. $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_n$ são linearmente independentes e $\alpha \neq 0 \iff \alpha \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_n$ são linearmente independentes.

6. $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_n$ são linearmente independentes $\iff \mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_n$ são linearmente independentes.

7. Se $(\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n)$ é uma base V , então todo o vetor $\mathbf{v} \in V$ pode escrever-se, de forma única, como combinação linear de $\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n$. (Os coeficientes da combinação linear são chamados as *coordenadas* de \mathbf{v} relativamente a essa base).

Nota: Ver a resolução do exercício 4.18.

8. \mathbf{v}_1 é linearmente independente $\iff \mathbf{v}_1 \neq \mathbf{0}$

9. $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_n$ ($n \geq 2$) são linearmente dependentes \iff (pelo menos) um dos vetores é combinação linear dos restantes.

10. $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2$ são linearmente independentes \iff nenhum dos vetores é um múltiplo escalar do outro.

Resultados válidos no espaço $V = \mathbb{R}^m$

Dados $\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n \in \mathbb{R}^m$ e $\alpha_1, \dots, \alpha_n \in \mathbb{R}$, vamos denotar por A a matriz $m \times n$ que tem $\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n$ como colunas, i.e. $A = (\mathbf{v}_1 \ \dots \ \mathbf{v}_n)$, e por α o vetor $\alpha = \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{pmatrix}$.

1. $\dim \mathbb{R}^m = m$

2. O único subespaço de \mathbb{R}^m com dimensão m é o próprio \mathbb{R}^m (veja 1.(e) acima).

3. $\alpha_1 \mathbf{v}_1 + \dots + \alpha_n \mathbf{v}_n = (\mathbf{v}_1 \ \dots \ \mathbf{v}_n) \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{pmatrix} = A \alpha.$

4.

$$\boxed{\mathbf{v} \in \langle \mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n \rangle} \iff \exists \alpha_1, \dots, \alpha_n \in \mathbb{R} : \alpha_1 \mathbf{v}_1 + \dots + \alpha_n \mathbf{v}_n = \mathbf{v}$$

$$\iff \exists \alpha : A \alpha = \mathbf{v}$$

$$\iff \text{o sistema de matriz ampliada } (A|\mathbf{v}) \text{ tem solução}$$

$$\iff \boxed{\text{car}(A) = \text{car}(A|\mathbf{v})}$$

Nota: Como $\text{car}(X) = \text{car}(X^T)$, também podemos ver se $\text{car} \begin{pmatrix} \mathbf{v}_1 \\ \vdots \\ \mathbf{v}_n \end{pmatrix} = \text{car} \begin{pmatrix} \mathbf{v}_1 \\ \vdots \\ \mathbf{v}_n \\ \mathbf{v} \end{pmatrix}$, onde, neste caso,

dispomos os vetores como linhas de uma matriz.

5. Para escrever \mathbf{v} como combinação linear de $\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n$ (caso isso seja possível), basta encontrar uma solução α do sistema de matriz ampliada $(A|\mathbf{v})$, uma vez que

$$\mathbf{v} = \alpha_1 \mathbf{v}_1 + \dots + \alpha_n \mathbf{v}_n \iff A \alpha = \mathbf{v}.$$

Em particular, se $(\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n)$ é uma base de \mathbb{R}^n , o vetor $(\alpha_1, \dots, \alpha_n)$ das coordenadas de um dado vetor \mathbf{v} nessa base é a solução do sistema (possível e determinado) de matriz ampliada $(A|\mathbf{v})$.

6. Por definição, $\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n$ são linearmente independentes se e só se for válida a seguinte implicação

$$\alpha_1 \mathbf{v}_1 + \dots + \alpha_n \mathbf{v}_n = \mathbf{0} \Rightarrow \alpha_1 = \dots = \alpha_n = 0.$$

Logo, tem-se:

$$\boxed{\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n \text{ linearmente independentes}} \iff (A \alpha = \mathbf{0} \Rightarrow \alpha = \mathbf{0})$$

$$\iff \text{o sistema homogéneo de matriz } A \text{ tem apenas a solução nula}$$

$$\iff \boxed{\text{car}(A) = n}$$

Nota: Como $\text{car } A = \text{car } A^T$, também podemos ver qual é a característica da matriz que tem por linhas os vetores dados (dispostos em linha).

7. Se os vetores $\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n$ forem linearmente dependentes, para escrever um deles como combinação linear dos restantes, podemos:

- (i) determinar uma solução não trivial α do sistema homogéneo cuja matriz simples é A (tal solução tem de existir, uma vez que esse sistema é indeterminado);
- (ii) partindo de $\alpha_1 \mathbf{v}_1 + \dots + \alpha_n \mathbf{v}_n = \mathbf{0}$, se, por exemplo, for $\alpha_1 \neq 0$, escrever $\mathbf{v}_1 = -\frac{\alpha_2}{\alpha_1} \mathbf{v}_2 - \dots - \frac{\alpha_n}{\alpha_1} \mathbf{v}_n$ (ou de modo análogo para qualquer outro $\alpha_i \neq 0$).

8. Dada uma matriz $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ e sendo A' equivalente por linhas a A , tem-se:

- (a) as linhas não nulas de A' formam uma base de $\mathcal{L}(A)$;
- (b) $\dim \mathcal{L}(A) = \text{car } A$;
- (c) as colunas principais de A formam uma base de $\mathcal{C}(A)$;
- (d) $\dim \mathcal{C}(A) = \text{car } A$;
- (e) $\dim \mathcal{N}(A) = n - \text{car } A$.

9. Sendo $U = \langle \mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n \rangle$, com $\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n \in \mathbb{R}^m$ e sendo $A = (\mathbf{v}_1 \ \dots \ \mathbf{v}_n)$, tem-se:

- (a) as colunas principais de A formam uma base de U ;
- (b) $\dim U = \text{car } A$.

Nota: Esta base é formada por vetores que pertencem ao conjunto $\{\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n\}$.

(Aplicação imediata dos resultados 8. (c) e 8. (d).)

10. Sendo $U = \langle \mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n \rangle$, com $\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n \in \mathbb{R}^m$, $B = \begin{pmatrix} \mathbf{v}_1 \\ \vdots \\ \mathbf{v}_n \end{pmatrix}$ (com os vetores $\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n$ dispostos em linha) e sendo B' um matriz equivalente por linhas a B , tem-se

- (a) as linhas não nulas de B' formam uma base de U ;
- (b) $\dim U = \text{car } B$.

Nota: Os vetores que formam esta base não pertencem (em geral) ao conjunto $\{\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n\}$.

(Aplicação imediata dos resultados 8. (a) e 8. (b).)

$T: E \rightarrow F$ linear

$$1. T\left(\sum_{k=1}^n \alpha_k v_k\right) = \sum_{k=1}^n \alpha_k T(v_k)$$

$$2. T(0_E) = 0_F \rightarrow \text{condição necessária para ser linear mas não suficiente}$$

$$3. T \text{ injetiva} \Leftrightarrow \text{Nuc } T = \{0_E\}$$

$$4. T \text{ sobrejetiva} \Leftrightarrow \text{Im } T = F$$

$$T: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$$

$$1. M_T = (T(c_1) | T(c_2) | \dots | T(c_n)) \in \mathbb{R}^{m \times n}$$

$$2. \forall x \in \mathbb{R}^n \quad T(x) = M_T x \quad (\text{achar a imagem de um vetor } x)$$

$$3. \text{Nuc } T = \mathcal{N}(M_T) \Rightarrow \dim \text{Nuc } T = n - \text{car}(M_T)$$

→ espaço nulo da matriz

$$4. \text{Im } T = \mathcal{C}(M_T) \Rightarrow \dim \text{Im } T = \text{car}(M_T)$$

→ espaço das colunas da matriz

$$5. T \text{ injetiva} \Leftrightarrow \dim \text{Nuc } T = 0 \Leftrightarrow \text{car}(M_T) = n$$

→ sem o vetor nulo

$$6. T \text{ sobrejetiva} \Leftrightarrow \dim \text{Im } T = m \Leftrightarrow \text{car}(M_T) = m$$

$$7. n > m \Rightarrow T \text{ não é injetiva}$$

$$8. n < m \Rightarrow T \text{ não é sobrejetiva}$$

$$9. \text{Se } n = m, \text{ são equivalentes:}$$

$$1) T \text{ injetiva}$$

$$2) T \text{ sobrejetiva}$$

$$3) T \text{ é bijetiva}$$

} Se for injetiva e sobrejetiva é bijetiva e vice-versa