Capítulo II: Variáveis Aleatórias

Elementos de Probabilidades e Teoria de Números

Licenciatura em Engenharia Informática
e
Mestrado Integrado em Engenharia Informática

Universidade do Minho
Ano Letivo 2021/2022

Dado um subconjunto $B \subseteq \mathbb{R}$, a probabilidade de a v.a. X assumir um valor pertencente a B, i.e. $P(X \in B)$, será dada pela probabilidade do subconjunto formado pelos elementos de Ω cuja imagem, pela função X, pertence a B.

Em linguagem matemática, o subconjunto formado pelos elementos de Ω cuja imagem, pela função X, pertence a B é designado por *imagem inversa de B pela função X* e é denotado por $X^{-1}(B)$:

$$X^{-1}(B) = \{\omega \in \Omega : X(\omega) \in B\}.$$

Assim, depois de identificado $X^{-1}(B)$, teremos simplesmente

$$P(X \in B) = P(X^{-1}(B)).$$

1. Variáveis aleatórias

Voltando ao exemplo dos dois lançamentos de uma moeda:

O acontecimento "saiu pelo menos uma coroa" é agora representado por $(X \geq 1)$ ou, de modo equivalente, $(X \in [1, +\infty[)$.

O acontecimento "número de caras igual ao número de coroas" é representado por $(Y = 0)$ ou, de modo equivalente, $(Y \in \{0\})$.

Para calcular $P(X \in [1, +\infty[)$ e $P(Y \in \{0\})$ temos primeiro que identificar os seguintes subconjuntos de Ω:

$$X^{-1}([1, +\infty[) \quad \text{e} \quad Y^{-1}(\{0\}).$$

Observando a tabela atrás vemos facilmente que

$$X^{-1}([1, +\infty[) = \{(Ca, Co), (Co, Ca), (Co, Co)\}$$

e que

$$Y^{-1}(\{0\}) = \{(Ca, Co), (Co, Ca)\}.$$

Se a moeda for equilibrada, os acontecimentos elementares são equiprováveis, i.e.,

$$P(\{(Ca, Ca)\}) = P(\{(Ca, Co)\}) = P(\{(Co, Ca)\}) = P(\{(Co, Co)\}) = \frac{1}{4}.$$

Podemos então usar a definição de Laplace para calcular as probabilidades dos diferentes acontecimentos decorrentes desta experiência. Assim,

$$P(X \geq 1) = P\left(X^{-1}([1, +\infty[)\right) = P(\{(Ca, Co), (Co, Ca), (Co, Co)\}) = \frac{3}{4}$$

e

$$P(Y = 0) = P\left(Y^{-1}(\{0\})\right) = P(\{(Ca, Co), (Co, Ca)\}) = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}.$$

1. Variáveis aleatórias

Entre as v.a.'s distinguem-se v.a.'s discretas e v.a.'s contínuas.

Uma v.a. X diz-se *discreta* se o seu contradomínio (i.e., o conjunto de valores que a função X assume) é um conjunto finito (tem cardinal finito) ou infinito numerável (e.g., $\mathbb{N}$, $\mathbb{N}_0$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Z}^+$, $\mathbb{Z}^-$).

Note-se que se o espaço amostral Ω for finito ou infinito numerável, então qualquer v.a. sobre ele definido será discreta (pela definição de função, o número de elementos do contradomínio nunca poderá ser superior ao número de elementos do domínio Ω).

Mas, se Ω for infinito não numerável (e.g., $\mathbb{R}$, $\mathbb{R}^-$), podemos definir v.a.'s discretas mas também não discretas.

Uma v.a. discreta, X, é caracterizada pelo seu contradomínio, denotado por C_X, que é o conjunto de valores que a v.a. assume com probabilidade estritamente positiva, e ainda por uma função, designada de *função massa de probabilidade* (f.m.p.), que a cada elemento $a \in C_X$ faz corresponder o valor $P(X = a)$.

Sendo X uma v.a. discreta com contradomínio $C_X = \{x_1, x_2, x_3, \ldots\}$, a sua f.m.p. é usualmente representada do seguinte modo:

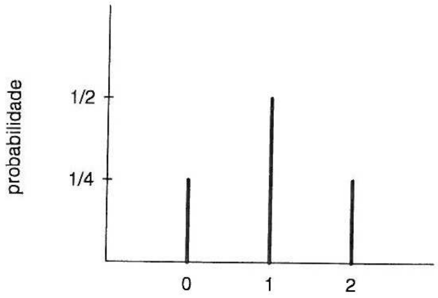
$$X : \left\{ \begin{array}{cccc} x_1 & x_2 & x_3 & \ldots \\ P(X = x_1) & P(X = x_2) & P(X = x_3) & \ldots \end{array} \right. .$$

No exemplo dos dois lançamentos da moeda, as f.m.p.'s de X e Y são, respetivamente:

$$X : \left\{ \begin{array}{ccc} 0 & 1 & 2 \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{2} & \frac{1}{4} \end{array} \right. \quad \text{e} \quad Y : \left\{ \begin{array}{ccc} -2 & 0 & 2 \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{2} & \frac{1}{4} \end{array} \right. .$$

2. Variáveis aleatórias discretas

A representação gráfica da f.m.p. da variável X é a seguinte:



2. Variáveis aleatórias discretas

A partir da definição axiomática de probabilidade e da definição de v.a. deduz-se o seguinte: se X é uma v.a. discreta, com contradomínio C_X, então

$$\sum_{x_i \in C_X} P(X = x_i) = 1.$$

Deduz-se também a seguinte fórmula geral para o cálculo de probabilidades envolvendo uma v.a. X discreta: para um qualquer subconjunto $B \subseteq \mathbb{R}$, tem-se

$$P(X \in B) = \sum_{x_i \in C_X \,:\, x_i \in B} P(X = x_i).$$

No exemplo dos dois lançamentos da moeda temos, para a v.a. X,

$$P(0 \leq X \leq 1.5) = \sum_{x_i \in C_X \,:\, x_i \in [0,\, 1.5]} P(X = x_i) = P(X = 0) + P(X = 1) = \frac{3}{4}$$

e, para a v.a. Y,

$$P(Y > 0) = \sum_{y_i \in C_Y \,:\, y_i \in]0,\, +\infty[} P(Y = y_i) = P(Y = 2) = \frac{1}{4}.$$

Entre as v.a's que têm contradomínio infinito não numerável (e.g., $\mathbb{R}$,$\mathbb{R}^-$, $[0,+\infty[$, um qualquer intervalo real de amplitudo não nula), vamos estudar as chamadas v.a.'s *absolutamente contínuas* que são caracterizadas à custa de uma função designada de *função densidade de probabilidade*.

Definição

Uma função $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ diz-se uma função densidade de probabilidade se satisfaz as seguintes condições:

i) para todo o $x\in\mathbb{R}$, $f(x)\geq 0$,

ii) $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = 1$.

Nota: Nesta disciplina, as v.a.'s *absolutamente contínuas* serão simplesmente designadas de *contínuas*.

3. Variáveis aleatórias contínuas

Para uma v.a. contínua, X, com função densidade de probabilidade f, tem-se que: para um qualquer subconjunto $B \subseteq \mathbb{R}$,

$$P(X \in B) = \int_B f(x)dx.$$

Note que, se B é um conjunto singular, i.e. $B = \{b\}$, com b um número real, tem-se

$$P(X \in B) = P(X = b) = 0.$$

No caso em que B é um intervalo real da forma $[a, c]$, $[a, c[$, $]a, c]$ ou $]a, c[$, com $a < c$, tem-se

$$P(X \in B) = \int_a^c f(x)dx.$$

4. Função de distribuição de uma variável aleatória

Já vimos que as v.a.'s discretas são caracterizadas à custa da função massa de probabilidade e que as v.a.'s contínuas são caracterizadas à custa da função densidade de probabilidade. No entanto, **qualquer** v.a. é também caracterizada pela chamada *função de distribuição*.

Definição

Chamamos função de distribuição da v.a. X à função

$$\begin{array}{rccl} F: & \mathbb{R} & \longrightarrow & [0,1] \\ & c & \mapsto & F(c) = P(X \leq c) \end{array}.$$

De entre as propriedades de uma função de distribuição destacam-se:

i) F é uma função não decrescente,

ii) F é contínua à direita,

iii)
$$\lim_{c \to -\infty} F(c) = 0 \quad \text{e} \quad \lim_{c \to +\infty} F(c) = 1.$$

Para uma v.a. discreta X, a função de distribuição obtém-se do seguinte modo

$$F(c) = P(X \leq c) = \sum_{x_i \in C_X : x_i \leq c} P(X = x_i).$$

Exemplo: Para a v.a. X que representa o número de coroas obtidas em dois lançamentos consecutivos de uma moeda equilibrada, a respetiva função de distribuição é dada por:

$$F(c) = P(X \leq c) = \begin{cases} 0 & se \quad c < 0 \\ P(X = 0) = \frac{1}{4} & se \quad 0 \leq c < 1 \\ P(X = 0) + P(X = 1) = \frac{3}{4} & se \quad 1 \leq c < 2 \\ P(X = 0) + P(X = 1) + P(X = 2) = 1 & se \quad c \geq 2 \end{cases}$$

Nota: Esboce o gráfico desta função e constate que esta verifica as propriedades `i)` a `iii)` referidas no slide anterior.

Para uma v.a. contínua X, com função densidade de probabilidade f, a função de distribuição de X obtém-se do seguinte modo

$$c \in \mathbb{R},\ F(c) = P(X \leq c) = \int_{-\infty}^{c} f(x)dx.$$

Exemplo: Para uma v.a. contínua X que tenha como função densidade de probabilidade

$$f(x) = \begin{cases} 10 & se \quad -0.1 \leq x \leq 0 \\ 0 & se \quad c.c. \end{cases},$$

a função de distribuição é dada por:

$$\begin{aligned} F(c) &= P(X \leq c) = \int_{-\infty}^{c} f(x)dx = \\ &= \begin{cases} \int_{-\infty}^{c} 0\ dx = 0 & se \quad c < -0.1 \\ \int_{-\infty}^{-0.1} 0\ dx + \int_{-0.1}^{c} 10\ dx = 10(c+0.1) & se \quad -0.1 \leq c < 0 \\ \int_{-\infty}^{-0.1} 0\ dx + \int_{-0.1}^{0} 10\ dx + \int_{0}^{c} 0\ dx = 1 & se \quad c \geq 0 \end{cases}. \end{aligned}$$

A função de distribuição é muito útil para calcular probabilidades do tipo

$$P(a < X \leq b)$$

com $a < b$ constantes reais. De facto,

$$\begin{aligned} P(a < X \leq b) &= P(\,(X \leq b) \cap (X > a)\,) \\ &= P(\,(X \leq b) \cap (\overline{X \leq a})\,) \\ &= P(X \leq b) - P(X \leq a) \\ &= F(b) - F(a) \end{aligned}.$$

As v.a.'s têm características, designadas de *teóricas* ou *populacionais*, correspondentes às características amostrais calculadas em estatística descritiva (por exemplo: média, variância, desvio-padrão, mediana, percentis, etc.) para uma amostra dessas mesmas variáveis, e que pretendem quantificar determinados aspectos da sua distribuição (localização, dispersão/variabilidade, etc).

Definição

O *valor médio* de uma v.a. X (ou valor médio populacional), usualmente denotado por μ_X ou $E[X]$, é a média pesada, de acordo com a função massa/densidade de probabilidade, dos valores de X, i.e.,

$$\mu_X = \sum_{x_i \in C_X} x_i P(X = x_i) \quad , \qquad \mu_X = \int_{-\infty}^{+\infty} x f(x)dx.$$

(caso discreto) (caso contínuo)

Obs.: A notação $E[X]$ deriva de "esperança matemática" que é uma designação alternativa para valor médio.

Outra característica importante de uma v.a. X é a *variância*, usualmente denotada por σ_X^2 ou $Var[X]$.

Definição

Seja X uma v.a.. A *variância* de X é dada por

$$\sigma_X^2 = E[(X-\mu_X)^2]$$

e, tal como acontece com o valor médio, é calculada de forma diferente conforme X é discreta ou contínua. Assim, a variância de X é dada por:

$$\sigma_X^2 = \sum_{x_i \in C_X} (x_i - \mu_X)^2 P(X = x_i) \quad , \quad \sigma_X^2 = \int_{-\infty}^{+\infty} (x-\mu_X)^2 f(x)dx.$$

(caso discreto) (caso contínuo)

A $\sigma_X = \sqrt{\sigma_X^2}$ chamamos *desvio-padrão* da v.a. X.

Obs.: Repare-se na semelhança destas fórmulas com as da média, variância e desvio-padrão amostrais usadas em estatística descritiva.

Notas:

1) Recordar que as somas/integrais podem não existir ou não ser finitas. Nesse caso diz-se que a v.a. não tem a característica em causa.

2) Quando $E[X^2]$ existe, i.e., quando

$$\sum_{x_i \in C_X} x_i^2 P(X = x_i) < +\infty \quad , \quad \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 f(x)dx < +\infty$$

(caso discreto) (caso contínuo)

a fórmula da variância reduz-se facilmente a

$$\sigma_X^2 = E[X^2] - (E[X])^2,$$

ou seja,

$$\sigma_X^2 = \left[\sum_{x_i \in C_X} x_i^2 P(X = x_i)\right] - (E[X])^2 \quad , \quad \sigma_X^2 = \left[\int_{-\infty}^{+\infty} x^2 f(x)dx\right] - (E[X])^2 \quad .$$

(caso discreto) (caso contínuo)

3) Quando $E[X^k]$ existe, o seu valor é designado de *momento de ordem k de X*.

Finalmente, os quantis teóricos, que desempenham um papel muito importante em inferência estatística, são definidos de modo análogo aos quantis amostrais.

Recordar que, em estatística descritiva, o quantil amostral de ordem p, é, grosso modo, o valor que separa os $100 \times p\%$ valores inferiores da amostra dos $100 \times (1-p)\%$ superiores.

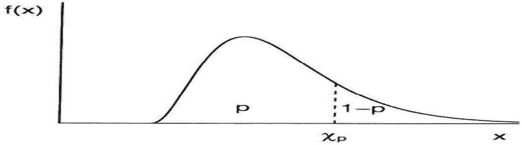
Definição

Para uma v.a. X, o *quantil de ordem* p, com $p \in]0,1[$, denota-se por χ_p, é dado por:

$$\chi_p = \inf\{c \in \mathbb{R} : F(c) \geq p\},$$

onde F é a função de distribuição de X.

Para uma v.a. contínua, o quantil χ_p é um valor que, no gráfico da função densidade de probabilidade, tem à sua esquerda área igual a p e à sua direita área igual a $(1-p)$.



Assim, neste caso e se $F^{-1}(p)$ existir, tem-se que

$$\chi_p = F^{-1}(p).$$

Casos especiais de quantis:

1. Mediana: $\chi_{0.5}$
2. Quartis: $\chi_{0.25}, \chi_{0.5}, \chi_{0.75}$
3. Decis: $\chi_{0.1}, \chi_{0.2}, \chi_{0.3}, \chi_{0.4}, \chi_{0.5}, \chi_{0.6}, \chi_{0.7}, \chi_{0.8}, \chi_{0.9}$
4. Percentis: $\chi_{0.01}, \chi_{0.02}, \ldots, \chi_{0.98}, \chi_{0.99}$

6. Independência de variáveis aleatórias

Vamos terminar esta secção enunciando algumas propriedades sobre o valor médio e a variância de transformações lineares, somas e produtos de v.a.'s (discretas ou contínuas). Algumas destas propriedades dizem respeito a v.a.'s independentes.

1) Para quaisquer números reais, a e b, e para qualquer v.a. X, tem-se

$$E[aX+b] = aE[X]+b \text{ e } Var[aX+b] = a^2 Var[X].$$

2) Para quaisquer v.a.'s $X_1, X_2, \ldots, X_n$, tem-se

$$E[X_1+X_2+\ldots+X_n] = E[X_1]+E[X_2]+\ldots+E[X_n].$$

3) Se $X_1, X_2, \ldots, X_n$ são v.a.'s independentes então

$$Var[X_1+X_2+\ldots+X_n] = Var[X_1]+Var[X_2]+\ldots+Var[X_n].$$

4) Se $X_1, X_2, \ldots, X_n$ são v.a.'s independentes então

$$E[X_1 X_2 \ldots X_n] = E[X_1]E[X_2]\ldots E[X_n].$$

Definição

Considere que, numa experiência aleatória ξ, um acontecimento S ocorre com probabilidade p, com $p \in]0,1[$. Considere agora uma v.a. X que representa o número de vezes que S ocorre em n repetições independentes da experiência ξ. Tem-se que X é uma v.a. discreta, com contradomínio $C_X = \{0, 1, \ldots, n\}$, e a sua função massa de probabilidade é dada por

$$P(X = k) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}, \quad k = 0, 1, 2, \ldots, n.$$

Nestas condições, diz-se que a v.a. X segue a distribuição (ou lei) Binomial com parâmetros n e p, e abrevia-se por $X \sim Bin(n, p)$.

Nota: O acontecimento S é usualmente designado de ”sucesso”.

Observações:

1) Se $X \sim Bin(n,p)$, então o valor médio e a variância são
$$E[X] = np \quad \text{e} \quad Var[X] = np(1-p).$$

2) A distribuição $Bin(n,p)$ também é a distribuição de uma v.a. X definida nas seguintes condições: *Suponha que numa população existe uma proporção $p \in]0,1[$ de indivíduos que tem uma certa característica A (e uma proporção $1-p$ não tem a característica). Considere agora a experiência aleatória que consiste em escolher ao acaso, e* **com reposição**, *n indivíduos desta população e seja X a v.a. que representa o número de indivíduos escolhidos que possuem a característica A. Então $X \sim Bin(n,p)$.*

3) Quando $n = 1$, a distribuição binomial é conhecida por *Bernoulli(p)*. Neste caso, o contradomínio é $C_X = \{0,1\}$ e a f.m.p. é dada por
$$X : \begin{cases} 0 & 1 \\ 1-p & p \end{cases}.$$

4) Se $X \sim Bin(n,p)$ então $X \overset{d}{=} \sum_{i=1}^{n} X_i$, em que $X_1, X_2, \ldots, X_n$ são v.a.'s independentes e identicamente distribuídas (i.i.d.'s) com lei *Bernoulli(p)*.

Historicamente, a distribuição de Poisson surge como sendo a distribuição limite de uma Binomial, em que os parâmetos n e p satisfazem certas condições. Vejamos então como surgiu esta distribuição.

Seja $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ uma sucessão de v.a.'s tais que $X_n \sim Bin(n, p_n)$ e em que os parâmetros n e p_n satisfazem a seguinte condição

$$\lim_{n\to+\infty} np_n = \lambda,$$

com $\lambda \in \mathbb{R}^+$. Note-se que, nestas condições, tem-se

$$\lim_{n\to+\infty} p_n = 0$$

e, para todo o $k \in \mathbb{N}$,

$$\frac{P(X_n = k)}{P(X_n = k-1)} = \frac{\binom{n}{k} p_n^k (1-p_n)^{n-k}}{\binom{n}{k-1} p_n^{k-1} (1-p_n)^{n-k+1}} = \frac{n-k+1}{k} \frac{p_n}{1-p_n} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \frac{\lambda}{k}.$$

Isto permite-nos concluir que, quando n é grande, a função massa de probabilidade da v.a. X_n comporta-se como a de uma v.a. discreta, Y, de contradomínio $\mathbb{N}_0$, e tal que

$$P(Y = k) = \frac{\lambda}{k} P(Y = k-1),\ k \in \mathbb{N}.$$

7.2. Distribuição de Poisson, com parâmetro λ

Trabalhando esta última igualdade, concluimos que

$$P(Y=k)=\frac{\lambda}{k}P(Y=k-1)=\frac{\lambda^2}{k(k-1)}P(Y=k-2)=\ldots=\frac{\lambda^k}{k!}P(Y=0).$$

Como $C_Y=\mathbb{N}_0$, temos

$$1=\sum_{k=0}^{+\infty}P(Y=k)\Leftrightarrow 1=\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{\lambda^k}{k!}P(Y=0)\underset{(*)}{\Leftrightarrow}1=P(Y=0)e^{\lambda}\Leftrightarrow P(Y=0)=e^{-\lambda}.$$

Concluimos assim que a função massa de probabilidade de Y é

$$P(Y=k)=\frac{\lambda^k}{k!}e^{-\lambda},\quad k\in\mathbb{N}_0. \tag{2}$$

Definição

Quando uma v.a. Y, discreta e de contradomínio $\mathbb{N}_0$, tem função massa de probabilidade dada por (2), diz-se que Y *segue uma distribuição Poisson com parâmetro* λ, e abrevia-se por $Y \sim Poisson(\lambda)$.

Observações:

1) Na prática, a distribuição de Poisson é adequada para modelar o número de ocorrências de um fenómeno raro (i.e. um fenómeno que tem baixa probabilidade de ocorrência) quando não limitamos o número de repetições da experiência aleatória.
Em particular, a função massa de probabilidade da distribuição de Poisson é usada para obter um valor aproximado da função massa de probabilidade de uma v.a. $Z \sim Bin(n, p)$ quando n é grande e p é pequeno. O parâmetro λ a utilizar na aproximação será igual a $n \times p$.

2) Se $Y \sim Poisson(\lambda)$ então o valor médio e a variância são

$$E[Y] = \lambda \quad \text{e} \quad Var[Y] = \lambda,$$

respetivamente.

3) Da expansão em série de Taylor da função e^x, em torno de zero, resulta a seguinte igualdada usada em $(*)$:

$$e^x = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{n!}, \; x \in \mathbb{R}.$$

7.3. Distribuição Geométrica, com parâmetro p

Considere uma experiência aleatória na qual um certo acontecimento, que designamos por "sucesso", ocorre com probabilidade $0 < p < 1$ (e ocorre "insucesso" com probabilidade $1 - p$). Suponhamos agora que se repete esta experiência, sempre nas mesmas condições, e seja T a v.a. que representa o número de vezes que se efetua a experiência até ocorrer "sucesso" pela primeira vez.

Naturalmente, tem-se que T é discreta e que $C_T = \{1, 2, \ldots\} = \mathbb{N}$. Para determinar a função massa de probabilidade de T, considerem-se os seguintes acontecimentos:

A_i:"ocorreu <u>insucesso</u> na i-ésima vez que se efetuou a experiência", $i = 1, 2, \ldots$. Note-se que $P(A_i) = 1 - p$ e $P(\overline{A_i}) = p$, para todo o i.

Usando estes acontecimentos, podemos calcular alguns dos valores da função massa de probabilidade de T:

$P(T = 1) = P(\overline{A_1}) = p$;

$P(T = 2) = P(A_1 \cap \overline{A_2}) = P(A_1) \times P(\overline{A_2}) = (1 - p)p$;

$P(T = 3) = P(A_1 \cap A_2 \cap \overline{A_3}) = P(A_1) \times P(A_2) \times P(\overline{A_3}) = (1 - p)^2 p$;

etc.

De uma forma geral, obtém-se que, para qualquer $k \in \mathbb{N}$,

$$P(T = k) = P(A_1 \cap A_2 \cap \ldots \cap A_{k-1} \cap \overline{A_k}) = p(1-p)^{k-1}.$$

Definição

Quando T é uma v.a. discreta, de contradomínio $\mathbb{N}$ e função massa de probababilidade dada por

$$P(T = k) = p(1-p)^{k-1},$$

diz-se que T *segue uma distribuição Geométrica com parâmetro* p, e abrevia-se por $T \sim Geo(p)$.

Observações: Se $T \sim Geo(p)$,
1) Facilmente se verifica que

$$P(T > k) = (1 - p)^k,$$

para todo o $k \in \mathbb{N}$;

2) [TPC] T tem a conhecida propriedade de falta de memória

$$P(T = k + n | T > k) = P(T = n),$$

para todo o $k, n \in \mathbb{N}$;

3) O valor médio e a variância são

$$E[T] = \frac{1}{p} \quad \text{e} \quad Var[T] = \frac{1 - p}{p^2},$$

respetivamente.

Considere uma v.a. contínua X cuja função densidade de probabilidade é constante num dado intervalo limitado $[a, b]$ e é nula fora desse intervalo. Nestas condições, a probabilidade de X assumir valores num dado sub-intervalo de $[a, b]$ será a mesma para qualquer subintervalo de igual amplitude.

Definição

Diz-se que uma v.a. contínua, X, segue a distribuição Uniforme no intervalo $[a,\ b]$, abrevia-se por $X \sim U([a,\ b])$, se a função densidade de probabilidade de X é dada por

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{b-a} & se \quad a \leq x \leq b \\ 0 & se \quad c.c. \end{cases}.$$

Observe que, de facto, esta distribuição atribuí igual probabilidade a intervalos com a mesma amplitude contidos em $[a,\ b]$: se $]c, d[\subseteq [a, b]$ tem-se que

$$P(X \in]c, d[) = \int_c^d f(x)dx = \left[\frac{x}{b-a}\right]_c^d = \frac{d-c}{b-a} = \frac{\text{amplitude de }]c,\ d[}{b-a}.$$

Observações:

1) Se $X \sim U([a,\, b])$, então a função de distribuição de X é dada por [TPC]

$$F(c) = P(X \leq c) = \int_{-\infty}^{c} f(x)dx = \begin{cases} 0 & se \quad c < a \\ \frac{c-a}{b-a} & se \quad a \leq c \leq b \\ 1 & se \quad c > b. \end{cases};$$

2) Se $X \sim U([a,\, b])$, então o valor médio e a variância são [TPC],

$$E[X] = \frac{a+b}{2} \text{ e } Var[X] = \frac{(b-a)^2}{12}.$$

3) Existe ainda a distribuição Uniforme discreta que é utilizada quando se escolhe ao acaso um elemento de um conjunto finito em que os diferentes elementos têm igual probabilidade de serem escolhidos. Temos então a seguinte definição: *Seja U um subconjunto real finito, com n elementos. Diz-se que Z tem lei Uniforme no conjunto U, abrevia-se por $Z \sim Uniforme(U)$, se sua a f.m.p. é dada por*

$$f(a) = \begin{cases} \frac{1}{n} & \text{se} \quad a \in U \\ 0 & \text{se} \quad \text{c.c.} \end{cases}.$$

Não confundir a Uniforme discreta com a Uniforme contínua!

A distribuição Exponencial é muito utilizada em estudos que envolvam tempos de espera até à ocorrência de um determinado acontecimento ou intervalos de tempo entre acontecimentos.

Definição

Diz-se que uma v.a. (absolutamente) contínua, T, segue a distribuição Exponencial com parâmetro $\lambda > 0$, abrevia-se por $T \sim Exp(\lambda)$, se a função densidade de probabilidade de T é dada por

$$f(x) = \begin{cases} 0 & se \quad x < 0 \\ \lambda e^{-\lambda x} & se \quad x \geq 0 \end{cases}.$$

Observações: Se $T \sim Exp(\lambda)$ então [TPC]:

1) a função de distribuição de T é dada por

$$F(c) = P(T \leq c) = \int_{-\infty}^{c} f(x)dx = \begin{cases} 0 & se \quad c < 0 \\ 1 - e^{-\lambda c} & se \quad c \geq 0 \end{cases};$$

2) T tem a conhecida propriedade de falta de memória, i.e.,

$$P(T > t + x | T > t) = P(T > x),$$

para quaisquer $t > 0$, $x > 0$;

3) o valor médio e a variância são

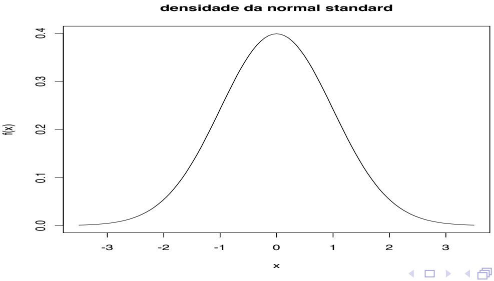
$$E[T] = \frac{1}{\lambda} \quad \text{e} \quad Var[T] = \frac{1}{\lambda^2},$$

respetivamente.

Nota: Provar 1), 2) e 3) já consta das Folhas Práticas 2 e 3. Cálculos em 3) exigem integração por partes.

7.6. Distribuição Normal, com parâmetros μ e σ^2

A distribuição Normal (ou Gaussiana) é a mais importante das distribuições contínuas, pois tem várias aplicações na modelação de situações reais e em inferência estatística. A função densidade de probabilidade desta distribuição tem uma forma de sino e é simétrica relativamente ao parâmetro μ. A título de exemplo, apresenta-se abaixo uma figura onde se pode ver a curva da função densidade de probabilidade da Normal com parâmetros 0 e 1, também conhecida por *Normal standard*.



Definição

Uma v.a. contínua X segue uma distribuição Normal com parâmetros μ e σ^2, com $\mu \in \mathbb{R}$ e $\sigma \in \mathbb{R}^+$, abrevia-se por $X \sim N(\mu, \sigma^2)$, se a sua função densidade de probabilidade é dada por

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} exp\left\{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2\right\}, \; x \in \mathbb{R}. \quad (3)$$

Como já foi referido atrás, no caso em que $\mu = 0$ e $\sigma = 1$, falamos em distribuição *Normal standard* ou distribuição *Normal centrada e reduzida* ou ainda distribuição *Normal padrão*.

Note-se que, qualquer que seja $a \in \mathbb{R}$, a função (3) verifica

$$f(\mu + a) = f(\mu - a)$$

mostrando-se assim que é simétrica relativamente ao parâmetro μ. Em particular, a função densidade de probabilidade da Normal standard é uma função par (i.e., é simétrica relativamente à origem).

Observações/Propriedades:

1) Se $X \sim N(\mu, \sigma^2)$ então o valor médio e a variância são, respectivamente,

$$E[X] = \mu \text{ e } Var[X] = \sigma^2.$$

2) Se $X \sim N(\mu, \sigma^2)$ então

$$Z = \frac{X - \mu}{\sigma} \sim N(0, 1).$$

Nota: A esta operação que se efetuou à v.a. X chama-se *centrar e reduzir* a variável.

3) Se $Z \sim N(0, 1)$ então, quaisquer que sejam $\mu \in \mathbb{R}$ e $\sigma \in \mathbb{R}^+$, tem-se

$$Y = \mu + \sigma Z \sim N(\mu, \sigma^2).$$

Observações/Propriedades:(continuação)

4) A função de distribuição de uma $N(\mu, \sigma^2)$ é, naturalmente, dada por

$$c \in \mathbb{R},\ F(c) = \int_{-\infty}^{c} \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} exp\left\{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2\right\} dx.$$

Apesar da existência do integral, não é possível obter a expressão exata desta função. É, no entanto, possível obter aproximações numéricas! Para a distribuição Normal standard, tais aproximações constam de tabelas como a que se encontra na página seguinte.

Há que fazer uma leitura atenta das tabelas que proliferam nos livros das mais variadas áreas, pois podem representar quantidades diferentes. Em particular, na tabela que vamos utilizar (ver página seguinte), está disponível a $P(0 < Z \leq c)$ para valores de $c \in \mathbb{R}_0^+$, quando $Z \sim N(0, 1)$. A simetria da função densidade de probabilidade de Z permite facilmente obter a função de distribuição de Z para qualquer valor de $c \in \mathbb{R}$.

Finalmente, para obter a função de distribuição de uma v.a. $X \sim N(\mu, \sigma^2)$ basta recorrer à propriedade 2) anterior, isto é, basta centrar e reduzir X.

7.6. Distribuição Normal, com parâmetros μ e σ^2

Tabela da Distribuição Normal Reduzida

z	0	0,01	0,02	0,03	0,04	0,05	0,06	0,07	0,08	0,09
0,0	0,0000	0,0040	0,0080	0,0120	0,0160	0,0199	0,0239	0,0279	0,0319	0,0359
0,1	0,0398	0,0438	0,0478	0,0517	0,0557	0,0596	0,0636	0,0675	0,0714	0,0753
0,2	0,0793	0,0832	0,0871	0,0910	0,0948	0,0987	0,1026	0,1064	0,1103	0,1141
0,3	0,1179	0,1217	0,1255	0,1293	0,1331	0,1368	0,1406	0,1443	0,1480	0,1517
0,4	0,1554	0,1591	0,1628	0,1664	0,1700	0,1736	0,1772	0,1808	0,1844	0,1879
0,5	0,1915	0,1950	0,1985	0,2019	0,2054	0,2088	0,2123	0,2157	0,2190	0,2224
0,6	0,2257	0,2291	0,2324	0,2357	0,2389	0,2422	0,2454	0,2486	0,2517	0,2549
0,7	0,2580	0,2611	0,2642	0,2673	0,2704	0,2734	0,2764	0,2794	0,2823	0,2852
0,8	0,2881	0,2910	0,2939	0,2967	0,2995	0,3023	0,3051	0,3078	0,3106	0,3133
0,9	0,3159	0,3186	0,3212	0,3238	0,3264	0,3289	0,3315	0,3340	0,3365	0,3389
1,0	0,3413	0,3438	0,3461	0,3485	0,3508	0,3531	0,3554	0,3577	0,3599	0,3621
1,1	0,3643	0,3665	0,3686	0,3708	0,3729	0,3749	0,3770	0,3790	0,3810	0,3830
1,2	0,3849	0,3869	0,3888	0,3907	0,3925	0,3944	0,3962	0,3980	0,3997	0,4015
1,3	0,4032	0,4049	0,4066	0,4082	0,4099	0,4115	0,4131	0,4147	0,4162	0,4177
1,4	0,4192	0,4207	0,4222	0,4236	0,4251	0,4265	0,4279	0,4292	0,4306	0,4319
1,5	0,4332	0,4345	0,4357	0,4370	0,4382	0,4394	0,4406	0,4418	0,4429	0,4441
1,6	0,4452	0,4463	0,4474	0,4484	0,4495	0,4505	0,4515	0,4525	0,4535	0,4545
1,7	0,4554	0,4564	0,4573	0,4582	0,4591	0,4599	0,4608	0,4616	0,4625	0,4633
1,8	0,4641	0,4649	0,4656	0,4664	0,4671	0,4678	0,4686	0,4693	0,4699	0,4706
1,9	0,4713	0,4719	0,4726	0,4732	0,4738	0,4744	0,4750	0,4756	0,4761	0,4767
2,0	0,4772	0,4778	0,4783	0,4788	0,4793	0,4798	0,4803	0,4808	0,4812	0,4817
2,1	0,4821	0,4826	0,4830	0,4834	0,4838	0,4842	0,4846	0,4850	0,4854	0,4857
2,2	0,4861	0,4864	0,4868	0,4871	0,4875	0,4878	0,4881	0,4884	0,4887	0,4890
2,3	0,4893	0,4896	0,4898	0,4901	0,4904	0,4906	0,4909	0,4911	0,4913	0,4916
2,4	0,4918	0,4920	0,4922	0,4925	0,4927	0,4929	0,4931	0,4932	0,4934	0,4936
2,5	0,4938	0,4940	0,4941	0,4943	0,4945	0,4946	0,4948	0,4949	0,4951	0,4952
2,6	0,4953	0,4955	0,4956	0,4957	0,4959	0,4960	0,4961	0,4962	0,4963	0,4964
2,7	0,4965	0,4966	0,4967	0,4968	0,4969	0,4970	0,4971	0,4972	0,4973	0,4974
2,8	0,4974	0,4975	0,4976	0,4977	0,4977	0,4978	0,4979	0,4979	0,4980	0,4981
2,9	0,4981	0,4982	0,4982	0,4983	0,4984	0,4984	0,4985	0,4985	0,4986	0,4986
3,0	0,4987	0,4987	0,4987	0,4988	0,4988	0,4989	0,4989	0,4989	0,4990	0,4990
3,1	0,4990	0,4991	0,4991	0,4991	0,4992	0,4992	0,4992	0,4992	0,4993	0,4993
3,2	0,4993	0,4993	0,4994	0,4994	0,4994	0,4994	0,4994	0,4995	0,4995	0,4995
3,3	0,4995	0,4995	0,4995	0,4996	0,4996	0,4996	0,4996	0,4996	0,4996	0,4997
3,4	0,4997	0,4997	0,4997	0,4997	0,4997	0,4997	0,4997	0,4997	0,4997	0,4998
3,5	0,4998	0,4998	0,4998	0,4998	0,4998	0,4998	0,4998	0,4998	0,4998	0,4998
3,6	0,4998	0,4998	0,4999	0,4999	0,4999	0,4999	0,4999	0,4999	0,4999	0,4999
3,7	0,4999	0,4999	0,4999	0,4999	0,4999	0,4999	0,4999	0,4999	0,4999	0,4999
3,8	0,4999	0,4999	0,4999	0,4999	0,4999	0,4999	0,4999	0,4999	0,4999	0,4999
3,9	0,5000	0,5000	0,5000	0,5000	0,5000	0,5000	0,5000	0,5000	0,5000	0,5000

Observações/Propriedades:(continuação)

5) Devido à simetria da função densidade de probabilidade da $N(0,1)$ é possível concluir que a respetiva função de distribuição, aqui denotada por $F_{N(0,1)}$, satisfaz a seguinte igualdade:

$$F_{N(0,1)}(-c) = 1 - F_{N(0,1)}(c), \; c \in \mathbb{R}.$$

Em particular, isto implica que é válida a seguinte relação entre o quantil de ordem p e o quantil de ordem $1-p$ da distribuição Normal standard: para todo o $0 < p < 1$,

$$\chi_p = -\chi_{1-p}.$$

6) A tabela aqui utilizada e a simetria da função densidade de probabilidade de uma v.a. $X \sim N(0,1)$ permitem facilmente calcular $P(|X| \leq b)$, $b \in \mathbb{R}^+$. Note que, neste caso,

$$P(|X| \leq b) = 2P(0 < Z \leq b).$$

Este tipo de cálculos surge frequentemente em problemas de inferência estatística, nomeadamente na dedução de intervalos de confiança e de testes de hipóteses paramétricos.

7.6. Distribuição Normal, com parâmetros μ e σ^2

Nota: O uso destas últimas propriedades, permite-nos deduzir o seguinte resultado e que é muito útil em inferência estatística:

Resultado

Dada uma **amostra aleatória** $X_1, X_2, \ldots, X_n$ **proveniente da uma v.a.** $X \sim N(\mu, \sigma^2)$ (i.e., $X_1, X_2, \ldots, X_n$ são v.a.'s independentes e têm todas a mesma distribuição que X), a v.a. habitualmente designada por **média amostral**, i.e.,

$$\overline{X}_n \equiv \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} X_i,$$

é tal que

$$\overline{X}_n \sim N\left(\mu \, , \, \frac{\sigma^2}{n}\right).$$

Este resultado é utilizado, por exemplo, na dedução de intervalos de confiança ou de testes de hipóteses que envolvam a estimação da média de uma população, relativamente à qual se assume que segue uma distribuição normal (com parâmetro μ desconhecido).

E terminamos com um dos resultados mais importantes em inferência estatística, que envolve a distribuição normal, conhecido por **Teorema Limite Central (TLC).**

Teorema Limite Central

Sejam $X_1, X_2, \ldots$ v.a.'s independentes e identicamente distribuídas (i.i.d.), com valor médio μ e variância finita σ^2, e considere-se a v.a. $S_n = X_1 + X_2 + \ldots + X_n$. Então, a função de distribuição da v.a.

$$\frac{S_n - n\mu}{\sqrt{n\sigma^2}}$$

converge, quando $n \to +\infty$, para a função de distribuição da $N(0,1)$, i.e.,

$$P\left(\frac{S_n - n\mu}{\sqrt{n\sigma^2}} \leq c\right) \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} F_{N(0,1)}(c),\ c \in \mathbb{R}.$$

Em palavras, o TLC diz que, independentemente da distribuição subjacente às v.a.'s X_i e desde que estas tenham variância finita, a v.a. S_n tem distribuição aproxidamente $N(n\mu, n\sigma^2)$.

Daqui podemos também concluir que

$$\overline{X}_n \equiv \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i$$

tem distribuição aproximadamente $N(\mu, \sigma^2/n)$, desde que n seja suficientemente grande.

Na prática, isto significa que podemos aproximar o valor de probabilidades de acontecimentos envolvendo a v.a. S_n (ou a v.a. $\overline{X}_n$) por probabilidades obtidas a partir da distribuição normal, desde que n seja suficientemente grande.

De um modo geral, basta $n \geq 30$ para termos uma boa aproximação.

Nota: Atendendo a que uma v.a. $X \sim Bin(n, p)$ pode ser decomposta como a soma de n v.a.'s independentes, todas identicamente distribuídas com $Bernoulli(p)$ (ver Secção 7.1.), o TLC permite-nos concluir que, se n for grande, a v.a. X tem, aproximadamente, distribuição

$$N(\,np, np(1-p)\,).$$

Em alternativa, também podemos concluir que, quando n é grande,

$$\frac{X}{n} \sim N\left(p, \frac{p(1-p)}{n}\right),$$

sendo esta distribuição aproximada. Este resultado é usada para obter intervalos de confiança e regras de decisão em testes de hipóteses relativos a proporções. Na literatura, tais intervalos de confiança e testes de hipóteses são conhecidos como assintóticos por fazerem uso de uma distribuição limite (e não exacta).