Métodos Numéricos

Sistemas de equações lineares - Métodos diretos

Teresa Monteiro

Departamento de Produção e Sistemas

Escola de Engenharia

Universidade do Minho

tm@dps.uminho.pt

Objectivo

Resolução do sistema de n equações lineares com n incógnitas usando métodos diretos:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 & + a_{12}x_2 & + \dots & + a_{1n}x_n & = b_1 \\ a_{21}x_1 & + a_{22}x_2 & + \dots & + a_{2n}x_n & = b_2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & = \vdots \\ a_{n1}x_1 & + a_{n2}x_2 & \dots & + a_{nn}x_n & = b_n \end{cases}$$

Em termos matriciais:

$$Ax = b$$

Sumário

- Introdução
- Existência e unicidade de solução
- Métodos diretos
- Eliminação de Gauss com pivotagem parcial
- Determinante e inversa de uma matriz
- Exercícios de aplicação

Entidades

- $A_{n\times n}$ - matriz dos coeficientes do sistema com n linhas e n colunas (matriz quadrada)
- $x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ \dots \\ x_n \end{bmatrix}$ - vetor solução (coluna)
- $b = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \\ \dots \\ b_n \end{bmatrix}$ - termo independente (coluna)
- $[A|b]$ - matriz ampliada do sistema ($n \times (n+1)$).

Método directo *vs* Método iterativo

Directo

A solução do sistema é obtida após um número **finito** de operações

Iterativo

$$\lim_{k\to\infty} x^{(k)} = x^*$$

A partir de uma estimativa inicial $x^{(1)}$ da solução, gera-se uma sucessão de vetores $x^{(2)}, x^{(3)}, \ldots, x^{(k)}$ que se pretende que convirja para a solução exata x^*. A solução do sistema é obtida após um número **infinito** de operações

Existência e unicidade da solução do sistema $Ax = b$

- O sistema de equações lineares tem sempre solução?
- A solução é única ?

→ Matriz estando em escada → nº de linhas não nulas

- Depende de $c(A)$ - caraterística da matriz A - número de linhas ou colunas linearmente independentes.
- Seja $c\,(A|b)$ a caraterística da matriz ampliada.

Existência e unicidade da solução

Relação direta entre $c(A)$, $det(A)$ e a existência de A^{-1}:

$$\text{se } c(A) = n \begin{cases} det(A) \neq 0 \\ A^{-1} \text{ existe} \\ \text{sistema possível determinado (solução única)} \end{cases}$$

$$\text{se } c(A) < n \begin{cases} det(A) = 0 \\ A^{-1} \text{ não existe} \\ \text{se} \begin{cases} c(A) = c(A|b) \begin{cases} \text{sistema possível indeterminado} \\ \text{(infinidade de soluções)} \end{cases} \\ c(A) < c(A|b) \begin{cases} \text{sistema impossível} \\ \text{(não tem solução)} \end{cases} \end{cases} \end{cases}$$

Exemplos - análise da caraterística

- Sistema com $c(A) = 2$ (as linhas de A são linearmente independentes)

$$\left[\begin{array}{ccc} 2 & 1 & |3 \\ 1 & 4 & |5 \end{array}\right]$$ (possível determinado)

- Sistema com $c(A) < 2$ e $c(A) = c(A|b) = 1$ (a 1^a linha de $[A|b]$ é o dobro da segunda)

$$\left[\begin{array}{ccc} 2 & 4 & |2 \\ 1 & 2 & |1 \end{array}\right]$$ (possível indeterminado)

- Sistema com $c(A) < 2\ (= 1)$ e $c(A) < c(A|b)\ (= 2)$ (a 1^a linha de $[A]$ é o dobro da segunda, mas a de $[A|b]$ não)

$$\left[\begin{array}{ccc} 2 & 4 & |2 \\ 1 & 2 & |2 \end{array}\right]$$ (impossível)

EGPP - Método de eliminação de Gauss com pivotagem parcial

O método a estudar baseia-se na ideia de transformar o sistema noutro mais fácil de resolver, constituído por uma matriz triangular.

Este método transforma o sistema $Ax = b$ noutro equivalente $Ux = c$, cuja matriz dos coeficientes é triangular superior:

$$U = \begin{bmatrix} u_{11} & u_{12} & \dots & u_{1n} \\ 0 & u_{22} & \dots & u_{2n} \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & u_{nn} \end{bmatrix}$$

$$A\,x = b \;\dots\;\dots\; U\,x = c$$

Os sistemas $Ax = b$ e $Ux = c$, são equivalentes, têm a mesma solução mas...U é **triangular**!!!

Operações elementares sobre matrizes

Troca de duas linhas

Multiplicação de uma linha por um escalar $\neq 0$

Substituição de uma linha pela que dela se obtém adicionando o produto de outra linha paralela por um escalar

Este processo tem $n-1$ etapas:

- na primeira etapa anulam-se todos os elementos de A abaixo do elemento a_{11}
- na segunda etapa anulam-se todos os elementos abaixo de a_{22}
- ...
- na última etapa (etapa $n-1$) anulam-se os elementos abaixo de $a_{n-1,n-1}$, *i.e.*, o elemento $a_{n,n-1}$

Resolução de $Ux = c$ - substituição inversa

Após este processo a matriz A e o termo independente b são transformados em U e c, respetivamente. O sistema resultante é agora de fácil resolução - substituição inversa.

$$\left\{\begin{array}{llllll} u_{11}x_1 & +u_{12}x_2 & +\dots & & +u_{1n}x_n & = c_1 \\ & u_{22}x_2 & +\dots & & +u_{2n}x_n & = c_2 \\ & & \vdots & & \vdots & \vdots \\ & & u_{n-1n-1}x_{n-1} & & +u_{n-1n}x_n & = c_{n-1} \\ & & & & u_{nn}x_n & = c_n \end{array}\right.$$

$$x_n = \frac{c_n}{u_{nn}}$$

$$x_i = \left(c_i - \sum_{j=i+1}^{n} u_{ij}x_j\right)/u_{ii}, \quad i = n-1, \dots 2, 1$$

1. Para ($i = 1$ até $n-1$) fazer (etapa i):

   - cálculo do elemento $pivot_i$:
     $pivot_i = max(|a_{ii}|, |a_{ji}| j = i+1, \ldots, n)$

     se o máximo for $|a_{ii}|$ não há troca de linhas, senão a linha i é trocada com a linha j

   - cálculo dos $(n-i)$ multiplicadores m_{ji}, $j = i+1, \ldots, n$:
     $m_{ji} = -\frac{a_{ji}}{pivot_i}$

   - multiplicador m_{ji} vai multiplicar a linha pivot i e somar o resultado à linha j (a linha pivot não se altera).

2. Resolução do sistema resultante por substituição inversa.

Pivotagem - porquê?

A pivotagem, *i.e.*, a escolha de pivot, tem como objectivo evitar a propagação do erro de arredondamento resultante das várias operações aritméticas de que o sistema vai sendo alvo, evitando a instabilidade do processo numérico.

A escolha para pivot do maior elemento em valor absoluto, poderá levar à troca de linhas, originando multiplicadores, que em valor absoluto vão ser inferiores ou iguais a um.

$$\begin{cases} x_1 & +3x_2 & +5x_3 & = 22 \\ -5x_1 & -2x_2 & +x_3 & = -6 \\ 2x_1 & -10x_2 & +2x_3 & = -12 \end{cases}$$

Resolução:

$\boxed{\text{Etapa 1:}}$

$|-5| > |1| > |2|$

↳ o maior assolcto

↳ em cima

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & 5 & 22 \\ -5 & -2 & 1 & -6 \\ 2 & -10 & 2 & -12 \end{array}\right]$$

Troca linha 1 com 2:

$$\left[\begin{array}{ccc|c} \mathbf{-5} & \mathbf{-2} & \mathbf{1} & \mathbf{-6} \\ 1 & 3 & 5 & 22 \\ 2 & -10 & 2 & -12 \end{array}\right]$$

$\underline{-5\times 0{,}2+1}$ $\underline{-2\times 0{,}2+3}$ $\underline{1\times 0{,}2+5}$

$\underline{-5\times 0{,}2+2}$ $\underline{-2\times 0{,}2+(-10)}$ $\underline{1\times 0{,}2+2}$

$$m_{21} = -\frac{1}{-5} = 0.2, \quad m_{31} = -\frac{2}{-5} = 0.4$$

Resolução de um sistema por EGPP

Etapa 2:

$|-10,8| > |2,6|$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} -5 & -2 & 1 & -6 \\ & 2.6 & 5.2 & 20.8 \\ & -10.8 & 2.4 & -14.4 \end{array}\right]$$

Troca linha 2 com 3:

$$\left[\begin{array}{ccc|c} -5 & -2 & 1 & -6 \\ & \mathbf{-10.8} & \mathbf{2.4} & \mathbf{-14.4} \\ & 2.6 & 5.2 & 20.8 \end{array}\right]$$

$$m_{32} = -\frac{2.6}{-10.8} = 0.240741$$

A matriz já é triangular:

$$\left[\begin{array}{ccc|c} -5 & -2 & 1 & -6 \\ 0 & -10.8 & 2.4 & -14.4 \\ 0 & 0 & 5.(7) & 17.(3) \end{array}\right]$$

Solução (obtida por substituição inversa):

$$\left[\begin{array}{c} x_1 = (-6 - 3 + 2 \times 2)/-5 = 1 \\ x_2 = (14.4 - 2.4 \times 3)/-10.8 = 2 \\ x_3 = 17.(3)/5.(7) = 3 \end{array}\right]$$

Cálculo do determinante de uma matriz

Determinante de A

Começa-se por transformar A em U,

$$\begin{aligned} det(A) &= det(U) \times (-1)^t = \\ &= \prod_{i=1}^{n} u_{ii} \times (-1)^t = \\ &= u_{11} \times u_{22} \times \ldots \times u_{nn} \times (-1)^t \end{aligned}$$

(t é o número de troca de linhas efetuado)

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 5 \\ -5 & -2 & 1 \\ 2 & -10 & 2 \end{bmatrix}$$

$$U = \begin{bmatrix} -5 & -2 & 1 \\ 0 & -10.8 & 2.4 \\ 0 & 0 & 5.(7) \end{bmatrix}$$

$$det(A) = det(U) \times (-1)^2 = (-5) \times (-10.8) \times 5.(7) \times (-1)^2 = 312$$

($t = 2$ - houve duas trocas de linhas).

Calcule a matriz inversa de A:

$$[A|I] = \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 3 & 5 & 1 & 0 & 0 \\ -5 & -2 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & -10 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

Aplicando EGPP ao conjunto:

$$[A|I] \rightarrow (EGPP) \rightarrow [U|J]$$

(*) → até A ficar em escada

$$[U|J] = \left[\begin{array}{ccc|ccc} -5 & -2 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -10.8 & 2.4 & 0 & 0.4 & 1 \\ 0 & 0 & 5.(7) & 1 & 0.296296 & 0.240741 \end{array}\right]$$

2 Para calcular a 1^a coluna de A^{-1} resolve-se o sistema:

$$\left[\begin{array}{ccc|c} -5 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & -10.8 & 2.4 & 0 \\ 0 & 0 & 5.(7) & 1 \end{array}\right]$$

Cuja solução é:

$$x = \begin{bmatrix} 0.019231 \\ 0.038462 \\ 0.173077 \end{bmatrix}$$ (1^a coluna de A^{-1})

Cálculo da matriz inversa

2 Para calcular a 2^a coluna de A^{-1} resolve-se o sistema:

$$\left[\begin{array}{ccc|c} -5 & -2 & 1 & 1 \\ 0 & -10.8 & 2.4 & 0.4 \\ 0 & 0 & 5.(7) & 0.296296 \end{array}\right]$$

Cuja solução é: $x = \begin{bmatrix} -0.179487 \\ -0.025641 \\ 0.051282 \end{bmatrix}$ (2^a coluna de A^{-1})

2 Para calcular a 3^a coluna de A^{-1} resolve-se o sistema:

$$\left[\begin{array}{ccc|c} -5 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & -10.8 & 2.4 & 1 \\ 0 & 0 & 5.(7) & 0.240741 \end{array}\right]$$

Cuja solução é: $x = \begin{bmatrix} 0.041667 \\ -0.083333 \\ 0.041667 \end{bmatrix}$ (3^a coluna de A^{-1})

Cálculo da matriz inversa

3 A matriz inversa de A é:

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} 0.019231 & -0.179487 & 0.041667 \\ 0.038462 & -0.025641 & -0.083333 \\ 0.173077 & 0.051282 & 0.041667 \end{bmatrix}$$