Álgebra Linear

Mestrado Integrado em Engenharia Informática

Teste 2 - $\boxed{\text{A}}$

Universidade do Minho
Escola de Ciências
Departamento de Matemática e Aplicações

7 janeiro 2017 Duração: 2 horas

Nome: ______________________ Número: ________

I

Relativamente às questões deste grupo, indique, para cada alínea, se a afirmação é verdadeira (V) *ou falsa* (F), *assinalando a opção conveniente.*

As respostas incorretamente assinaladas têm cotação negativa.

Questão 1.

	V	F
a) O subespaço $\mathcal{S} = \langle(1,0,-1,0),(2,0,-1,1),(1,0,0,1),(0,0,1,1)\rangle$ tem dimensão 2.	$\otimes$	$\bigcirc$
b) $\langle(1,1,1),(1,2,0)\rangle = \langle(0,1,-1),(2,1,0),(2,3,1)\rangle$.	$\bigcirc$	$\otimes$
c) As coordenadas do vetor $(1,-1,3)$ na base $((1,1,1),(0,-1,1))$ são $(1,2)$.	$\otimes$	$\bigcirc$
d) O vetor $x^2-x+5 \in \mathcal{P}_2$ é combinação linear dos vetores x^2+x+1 e $x-2$.	$\otimes$	$\bigcirc$
e) $((1,0,0,0),(0,1,0,0))$ é uma base do subespaço $\mathcal{S} = \{(x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4 : t = 0\}$.	$\bigcirc$	$\otimes$

Questão 2. Seja f uma aplicação linear de $\mathbb{R}^2$ em $\mathbb{R}^3$ tal que

$$f(1,-2) = (1,1,0) \quad \text{e} \quad f(-1,1) = (1,0,-1).$$

	V	F
a) $f(1,0) = (-3,-1,2)$.	$\otimes$	$\bigcirc$
b) $f(0,0) = (1,-1,1)$.	$\bigcirc$	$\otimes$
c) A matriz da aplicação f é de ordem 3×2.	$\otimes$	$\bigcirc$
d) f é uma aplicação sobrejetiva.	$\bigcirc$	$\otimes$
e) $\dim \operatorname{Nuc} f \leq 1$.	$\otimes$	$\bigcirc$

Questão 3. Seja

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad b = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

	V	F
a) O polinómio característico de A é $p(\lambda) = \lambda(\lambda-1)(2-\lambda)$.	$\otimes$	$\bigcirc$
b) A matriz A é diagonalizável.	$\otimes$	$\bigcirc$
c) A matriz $A^2 - 4I$ é invertível.	$\bigcirc$	$\otimes$
d) O sistema $(A-3I)x = b$ é um sistema de Cramer.	$\otimes$	$\bigcirc$
e) $(-2,1,1)$ é um vetor próprio de A.	$\otimes$	$\bigcirc$

(continua)

Questão 4. Seja

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

	V	F
a) A matriz adj A tem duas linhas nulas.	○	⊗
b) $(1,0,1) \in \mathcal{C}(A)$.	○	⊗
c) A matriz A é a matriz da aplicação linear $f(x,y,z) = (x+2y+3z, 4x+5y+6z, 0)$ relativamente à base canónica de $\mathbb{R}^3$.	⊗	○
d) As colunas de A são vetores linearmente independentes de $\mathbb{R}^3$.	○	⊗
e) $\mathcal{L}(A) = \mathbb{R}^2$.	○	⊗

II

Responda às questões deste grupo numa folha de teste.

Questão 1. Considere as matrizes

$$A_k = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ k & 1+k & 0 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}, \quad k \in \mathbb{R}.$$

a) Discuta, em função de k, a dimensão de $\mathcal{C}(A_k)$ e indique uma base de $\mathcal{C}(A_{-1})$ e $\mathcal{L}(A_{-1})$.

$\begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ k & 1+k & 0 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1+k & -2k \\ 0 & 0 & -3 \end{pmatrix}$; se $k \neq -1$ a matriz está em escada e $\text{car}(A_k) = 3$.

Se $k = -1$, tem-se $A_{-1} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \Longrightarrow \text{car}(A_{-1}) = 2.$

Logo $\dim \mathcal{C}(A_k) = \text{car}(A_k) = \begin{cases} 3, & \text{se } k \neq -1 \\ 2, & \text{se } k = -1 \end{cases}$

base $\mathcal{C}(A_{-1}) = ((2,-1,1),(1,0,2))$ base $\mathcal{L}(A_{-1}) = ((1,0,2),(0,0,1))$

b) Determine os valores próprios de A_0 e o subespaço próprio associado ao menor valor próprio desta matriz.

$p(\lambda) = \det(A_0 - \lambda I) = (1-\lambda)^2(3-\lambda)$.

Logo a matriz tem como valores próprios: 1 (duplo) e 3 (simples).

$V_{\lambda=1} = \{x \in \mathbb{R}^3 : (A_0 - I)\,x = 0\} = \langle (1,0,-1),(0,1,0) \rangle$

c) Diga, justificando, se existe algum número real α para o qual a matriz A_0 é semelhante à matriz

$$\begin{pmatrix} \alpha & 0 & 0 \\ 0 & \alpha-2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Como $\dim V_{\lambda=1} = 2$, as multiplicidades geométricas e algébricas de cada valor próprio coincidem. A matriz é, por isso, diagonalizável, isto é, é semelhante a uma matriz diagonal, com os valores próprios dispostos na diagonal. Facilmente se vê que a matriz dada está nesta condições se $\alpha = 3$.

Questão 1. Considere as matrizes

$$A_k = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ k & 1+k & 0 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}, \ k \in \mathbb{R}.$$

a) Discuta, em função de k, a dimensão de $\mathcal{C}(A_k)$ e indique uma base de $\mathcal{C}(A_{-1})$ e $\mathcal{L}(A_{-1})$.

$$A_K = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ K & 1+K & 0 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ K & 1+K & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1+K & -2K \\ 0 & 0 & -3 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{array}{l} \dim \mathcal{C}(A_K) = 3 \\ \text{se } K \neq -1 \end{array}$$

$$A_{-1} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ -1 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & -3 \end{pmatrix}$$

$$\to \begin{pmatrix} \boxed{1} & 0 & 2 \\ 0 & 0 & \boxed{1} \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$\mathcal{L}(A_{-1}) = ((1,0,2),(0,0,1))$

$\mathcal{C}(A_{-1}) = ((2,-1,1),(1,0,2))$

b) Determine os valores próprios de A_0 e o subespaço próprio associado ao menor valor próprio desta matriz.

$$P_{A_0}(\lambda) = \begin{vmatrix} 2-\lambda & 0 & 1 \\ 0 & 1-\lambda & 0 \\ 1 & 0 & 2-\lambda \end{vmatrix} = (1-\lambda) \begin{vmatrix} (2-\lambda) & 1 \\ 1 & (2-\lambda) \end{vmatrix} = (1-\lambda)\left((2-\lambda)^2 - 1\right)$$

$$= (1-\lambda)(4 - 4\lambda + \lambda^2 - 1)$$

$$= (1-\lambda)(3 - 4\lambda + \lambda^2)$$

$$= (1-\lambda)(\lambda - 3)(\lambda - 1)$$

$\rightarrow$ valores próprios 1 (duplo) e 3 (simples)

V_1?

$$\Rightarrow A - I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{array}{l} 3 - 1 = 2 \\ mg(1) = 2 \end{array}$$

$$x + z = 0 \Leftrightarrow x = -z$$

$$V_1 = \{(-z, y, z) : y, z \in \mathbb{R}\}$$

$$= \langle (-1,0,1), (0,1,0) \rangle$$

c) Diga, justificando, se existe algum número real α para o qual a matriz A_0 é semelhante à matriz

$$\begin{pmatrix} \alpha & 0 & 0 \\ 0 & \alpha-2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

valores próprios 1, 1, 3

$\begin{cases} a = 3 \\ a-2 = 1 \end{cases} \vee \cancel{\begin{cases} a = 1 \\ a-2 = 3 \end{cases}}$

d) Considere, para cada k, a aplicação linear ϕ_k definida pela matriz A_k.

i. Determine Nuc(ϕ_{-1}).

Nuc$(\phi_{-1}) = \mathcal{N}(A_{-1}) = \{x \in \mathbb{R}^3 : A_{-1}x = 0\} = \langle(0,1,0)\rangle$

ii. Diga, justificando, se $(1,2,3) \in$ Im(ϕ_2);

Como dim Im$(\phi_2) =$ car $A_2 = 3$, conclui-se que Im$(\phi_2) = \mathbb{R}^3$ e a afirmação é, por isso, verdadeira.

iii. Existe algum valor de k para o qual ϕ_k é bijetiva? Justifique.

Como a matriz da aplicação é quadrada, dizer que a aplicação é bijetiva é equivalente a dizer que é sobrejetiva, ou ainda que car $A_k = 3$. Pela alínea a), isto acontece quando $k \neq -1$.

Questão 2. Para cada uma das alíneas seguintes, diga, **justificando**, se a afirmação é verdadeira ou falsa.

a) O conjunto das matrizes reais simétricas de ordem 2 com traço nulo não é um subespaço vetorial de $\mathbb{R}^{2\times 2}$. Seja $\mathcal{S}$ conjunto das matrizes reais simétricas de ordem 2 com traço nulo, i.e.

$$\mathcal{S} = \left\{\begin{pmatrix}\alpha & \beta\\ \gamma & \delta\end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{2\times 2} : \alpha+\delta = 0 \text{ e } \gamma = \beta\right\} = \left\{\begin{pmatrix}\alpha & \beta\\ \beta & -\alpha\end{pmatrix} : \alpha, \beta \in \mathbb{R}\right\}.$$

Vamos mostrar que este conjunto é um subespaço vetorial de $\mathbb{R}^{2\times 2}$:

1. A matriz nula pertence a $\mathcal{S}$, logo este conjunto é não vazio.
2. Sejam $A_1 = \begin{pmatrix}\alpha_1 & \beta_1\\ \beta_1 & -\alpha_1\end{pmatrix}$ e $A_2 = \begin{pmatrix}\alpha_2 & \beta_2\\ \beta_2 & -\alpha_2\end{pmatrix}$ matrizes de $\mathcal{S}$. Então

$$A_1 + A_2 = \begin{pmatrix}\alpha_1+\alpha_2 & \beta_1+\beta_2\\ \beta_1+\beta_2 & -\alpha_1-\alpha_2\end{pmatrix} \Longrightarrow A_1 + A_2 \in \mathcal{S}.$$

3. Seja $A = \begin{pmatrix}\alpha & \beta\\ \beta & -\alpha\end{pmatrix}$ uma matriz de $\mathcal{S}$ e seja $k \in \mathbb{R}$. Então

$$kA = \begin{pmatrix}k\alpha & k\beta\\ k\beta & -k\alpha\end{pmatrix} \Longrightarrow kA \in \mathcal{S}.$$

A afirmação é **falsa**.

b) Se P é uma matriz invertível de ordem n, a aplicação $\phi : \mathbb{R}^{n\times n} \to \mathbb{R}^{n\times n}$ definida por $\phi(A) = P^{-1}AP$ é uma aplicação linear.

Sejam A e B matrizes reais de ordem n e seja $\alpha \in \mathbb{R}$.

1. $\phi(A+B) = P^{-1}(A+B)P = (P^{-1}A + P^{-1}B)P = P^{-1}AP + P^{-1}BP = \phi(A) + \phi(B)$;
2. $\phi(\alpha A) = P^{-1}(\alpha A)P = \alpha(P^{-1}AP) = \alpha\phi(A)$.

A afirmação é **verdadeira**.

c) Seja A uma matriz diagonalizável cujos valores próprios são 0 e 1. A matriz A é uma matriz idempotente, isto é, $A^2 = A$.

Se A é diagonalizável, então é semelhante a uma matriz diagonal D, isto é, existe uma matriz invertível P tal que $A = P^{-1}DP$. A matriz diagonal D tem na diagonal os elementos 0 e 1, donde resulta de imediato que $D^2 = D$. Logo

$$A^2 = (P^{-1}DP)^2 = (P^{-1}DP)(P^{-1}DP) = P^{-1}D(PP^{-1})DP = P^{-1}D^2P = P^{-1}DP = A.$$

A afirmação é **verdadeira**.

Cotação: I - 10 valores; II - 1) 7 valores; 2) 3 valores.

d) Considere, para cada k, a aplicação linear ϕ_k definida pela matriz A_k.

i. Determine Nuc(ϕ_{-1}).

Nuc(ϕ_{-1}) $= \mathcal{N}(A_{-1}) = \{x \in \mathbb{R}^3 : A_{-1}x = 0\} = \langle(0,1,0)\rangle$

ii. Diga, justificando, se $(1,2,3) \in$ Im(ϕ_2);

Como dim Im(ϕ_2) $=$ car $A_2 = 3$, conclui-se que Im(ϕ_2) $= \mathbb{R}^3$ e a afirmação é, por isso, verdadeira.

iii. Existe algum valor de k para o qual ϕ_k é bijetiva? Justifique.

Como a matriz da aplicação é quadrada, dizer que a aplicação é bijetiva é equivalente a dizer que é sobrejetiva, ou ainda que car $A_k = 3$. Pela alínea a), isto acontece quando $k \neq -1$.

i)

$$A_k = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ k & 1+k & 0 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}, \; k \in \mathbb{R}.$$

$$A_{-1} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ -1 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & -3 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$Nuc(\varphi_{-1}) = \mathcal{N}(A_{-1}) \Rightarrow \{(0, \alpha, 0) : \alpha \in \mathbb{R}\}$

$\Leftrightarrow \langle(0,1,0)\rangle$

$$\begin{matrix} x + 2z = 0 \\ z = 0 \\ y = \alpha \end{matrix} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y = \alpha \\ z = 0 \end{cases}$$

ii)

$$A_2 = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 2 & 3 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & 3 & -1 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 3 & -1 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 3 & -1 \\ 0 & 0 & -3 \end{pmatrix}$$

$Im(\varphi_2) = C(A_2) = \langle(2,2,1),(0,3,0),(1,0,2)\rangle$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 0 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & 2 & 3 \end{array}\right) \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 3 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 2 & 3 \end{array}\right) \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 2 & 3 \\ 0 & 3 & -1 & 1 \\ 2 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right)$$

$$\rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 2 & 3 \\ 0 & 3 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -3 & -5 \end{array}\right)$$

iii)

$$A_k = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ k & 1+k & 0 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}, \; k \in \mathbb{R}.$$

injetiva $\Rightarrow$ dim Nuc $f = 0$

sobrejetiva $\Rightarrow$ dim Im $f = 3$

$$A_k = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ k & 1+k & 0 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ k & 1+k & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} \boxed{1} & 0 & 2 \\ 0 & \boxed{1+k} & -2k \\ 0 & 0 & \boxed{-3} \end{pmatrix}$$

dim $\mathcal{N} = 3 - 3 = 0$

$\Leftarrow$

para a car ser 3

$\hookrightarrow \boxed{k \neq -1}$