

Programação Linear - dualidade

Investigação Operacional

J.M. Valério de Carvalho

`vc@dps.uminho.pt`

Departamento de Produção e Sistemas
Escola de Engenharia, Universidade do Minho

10 de novembro de 2020

antes

- O preço-sombra é um conceito fundamental na análise pós-otimização, relacionado com o valor dos recursos.

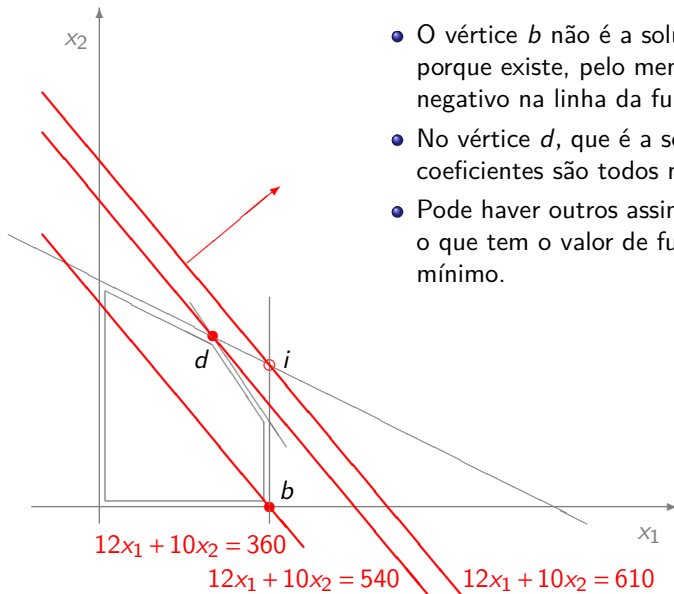
Guião

- Os preços-sombra são os valores óptimos das variáveis de um problema, que se designa por *problema dual*, que tem relações fortes com o problema (*primal*).
- Quando se resolve um deles, também se resolve o outro.
- Pode dizer-se que são o mesmo problema, visto de perspectivas diferentes.

depois

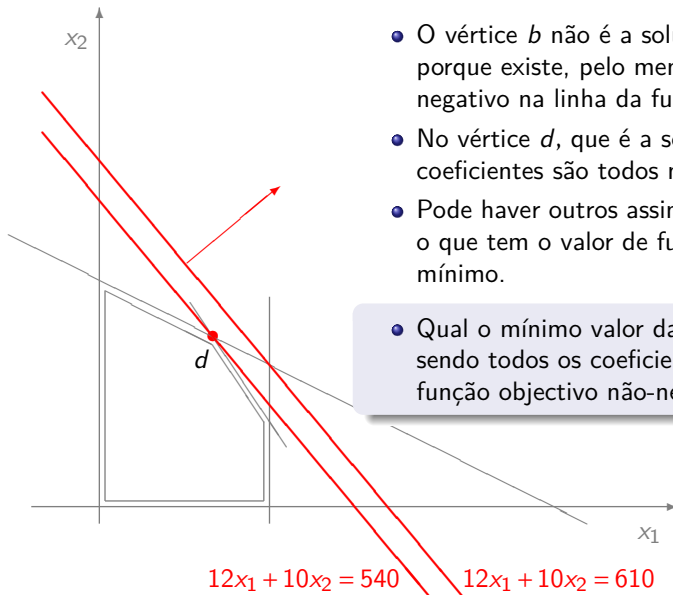
- Dualidade é usada no cálculo de limites (majorantes ou minorantes) para o valor da solução óptima, muito úteis em programação inteira.

Motivação: relembrar a resolução gráfica do exemplo



- O vértice b não é a solução ótima, porque existe, pelo menos, um coeficiente negativo na linha da função objectivo.
- No vértice d , que é a solução ótima, os coeficientes são todos não-negativos.
- Pode haver outros assim, mas o vértice d é o que tem o valor de função objectivo mínimo.

Motivação: relembrar a resolução gráfica do exemplo



- O vértice b não é a solução óptima, porque existe, pelo menos, um coeficiente negativo na linha da função objectivo.
- No vértice d , que é a solução óptima, os coeficientes são todos não-negativos.
- Pode haver outros assim, mas o vértice d é o que tem o valor de função objectivo mínimo.
- Qual o mínimo valor da função objectivo sendo todos os coeficientes da linha da função objectivo não-negativos?

Valor de uma solução e condição de optimalidade

- O quadro simplex associado ao vértice definido pela matriz B (resultante de um conjunto de variáveis básicas) é:

$B^{-1}A$	B^{-1}	$B^{-1}b$
$c_B B^{-1}A - c$	$c_B B^{-1}$	$c_B B^{-1}b$

- O valor da função objectivo do vértice é $c_B B^{-1}b$.

É condição de optimalidade, num problema de maximização,

- todos os elementos dos vectores $c_B B^{-1}A - c$ e $c_B B^{-1}$ serem ≥ 0 .

Objectivo:

- Encontrar o valor mínimo da função objectivo quando o domínio é o conjunto de soluções que cumprem esta condição de optimalidade.

- Na linha da função objectivo, A, b e c são dados do problema.
- Só $c_B B^{-1}$ é que representa uma escolha, que resulta da matriz B .

$B^{-1}A$	B^{-1}	$B^{-1}b$
$c_B B^{-1}A - c$	$c_B B^{-1}$	$c_B B^{-1}b$

- Vamos designar por y as variáveis de decisão que representam os elementos do vector $c_B B^{-1} = y = (y_1, \dots, y_m)$.
- As restrições que garantem que a solução cumpre a condição de optimalidade são: $yA - c \geq 0$ e $y \geq 0$.
- A função objectivo que associa um valor a cada solução y é yb .
- O modelo para encontrar o valor mínimo é:

$$\begin{aligned} \min \quad & yb \\ & yA \geq c \\ & y \geq 0 \end{aligned}$$

Exemplo

$\begin{array}{ll} \max & cx \\ & Ax \leq b \\ & x \geq 0 \end{array}$	$\begin{array}{llll} \max & 30x_1 & +20x_2 & +10x_3 \\ & 1x_1 & +1x_2 & +2x_3 \leq 40 \\ & 2x_1 & +2x_2 & +1x_3 \leq 150 \\ & 2x_1 & +1x_2 & \leq 20 \\ & x_1, x_2, x_3 \geq 0 \end{array}$
$\begin{array}{ll} \min & yb \\ & yA \geq c \\ & y \geq 0 \end{array}$	$\begin{array}{ll} \min & [y_1 \ y_2 \ y_3] * \begin{bmatrix} 40 \\ 150 \\ 20 \end{bmatrix} \\ & [y_1 \ y_2 \ y_3] * \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \end{bmatrix} \geq [30 \ 20 \ 10] \\ & y_1, y_2, y_3 \geq 0 \end{array}$
	$\begin{array}{llll} \min & 40y_1 & +150y_2 & +20y_3 \\ & 1y_1 & +2y_2 & +2y_3 \geq 30 \\ & 1y_1 & +2y_2 & +1y_3 \geq 20 \\ & 2y_1 & +1y_2 & \geq 10 \\ & y_1, y_2, y_3 \geq 0 \end{array}$

- Problema dual
- Informação primal e dual num quadro simplex
- Relação entre os problemas primal e dual
 - Teorema da dualidade fraca
 - Teorema da dualidade forte
 - Teorema da folga complementar

Problema Dual

- Dado um problema (*primal*) de programação linear:

$$\begin{aligned} \max \quad & cx \\ & Ax \leq b \\ & x \geq 0 \end{aligned}$$

sendo $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$, $b \in \mathbb{R}^{m \times 1}$, $c \in \mathbb{R}^{1 \times n}$, $x \in \mathbb{R}^{n \times 1}$,

- o *problema dual* é construído associando a cada restrição i do problema (primal), $i = 1, \dots, m$, uma variável de decisão dual y_i :

$$\begin{aligned} \min \quad & yb \\ & yA \geq c \\ & y \geq 0 \end{aligned}$$

sendo $y = (y_1, \dots, y_i, \dots, y_m) \in \mathbb{R}^{1 \times m}$ um vector de *variáveis duais*.

Para construir o problema dual,

PRIMAL		DUAL	
max	cx $Ax \leq b$ $x \geq 0$	min	yb $yA \geq c$ $y \geq 0$
max	$30x_1 + 20x_2 + 10x_3$ $1x_1 + 1x_2 + 2x_3 \leq 40$ $2x_1 + 2x_2 + 1x_3 \leq 150$ $2x_1 + 1x_2 \leq 20$ $x_1, x_2, x_3 \geq 0$	min	$40y_1 + 150y_2 + 20y_3$ $1y_1 + 2y_2 + 2y_3 \geq 30$ $1y_1 + 2y_2 + 1y_3 \geq 20$ $2y_1 + 1y_2 \geq 10$ $y_1, y_2, y_3 \geq 0$

o problema original deve estar na *Forma Canónica*:

- Problema de max com todas as restrições do tipo de \leq .

- no Apêndice, mostra-se como tratar as restrições de igualdade.

O dual do dual é o primal

- Partindo do problema dual, e colocando-o na Forma Canónica:

DUAL	DUAL
$\min \quad yb$ $yA \geq c$ $y \geq 0$	$-\max \quad -yb$ $-yA \leq -c$ $y \geq 0$
$\min \quad 40y_1 + 150y_2 + 20y_3$ $1y_1 + 2y_2 + 2y_3 \geq 30$ $1y_1 + 2y_2 + 1y_3 \geq 20$ $2y_1 + 1y_2 \geq 10$ $y_1, y_2, y_3 \geq 0$	$\max \quad -40y_1 - 150y_2 - 20y_3$ $-1y_1 - 2y_2 - 2y_3 \leq -30$ $-1y_1 - 2y_2 - 1y_3 \leq -20$ $-2y_1 - 1y_2 \leq -10$ $y_1, y_2, y_3 \geq 0$

- se se usar a regra do *slide* anterior, obtém-se o problema primal.

Portanto, basta usar a seguinte regra:

- O dual de um Problema de min com todas as restrições de \geq é um Problema de max com todas as restrições de \leq .

Elementos do vector $c_B B^{-1} A - c$ são as folgas do dual

Problema dual

$$\begin{array}{ll} \min z = yb & \min z = yb \\ yA \geq c & \rightarrow yA - u = c \\ y \geq 0 & y, u \geq 0 \end{array}$$

sendo $u \in \mathbb{R}_+^{1 \times n}$ um vector de variáveis de folga da mesma dimensão que $c \in \mathbb{R}^{1 \times n}$.

As variáveis do problema dual são:

- variáveis de decisão: $y = c_B B^{-1}$,
 - variáveis de folga: $u = c_B B^{-1} A - c$ ($u = yA - c$).
-
- Solução do problema dual é admissível quando $y, u \geq 0$.

Resolver o primal também resolve o dual,

porque o quadro simplex da resolução do primal fornece os valores das:

- variáveis de decisão do dual: $c_B B^{-1} = y = (y_1, y_2, y_3) = (5, 0, 15)$,
- variáveis de folga do dual: $c_B B^{-1} A - c = u = (u_1, u_2, u_3) = (5, 0, 0)$,
- e da função objectivo da solução dual: $y b = (c_B B^{-1}) b = 500$.

	x_1	x_2	x_3	s_1	s_2	s_3	
x_3	$-1/2$	0	1	$1/2$	0	$-1/2$	10
s_2	$-3/2$	0	0	$-1/2$	1	$-3/2$	100
x_2	2	1	0	0	0	1	20
	5	0	0	5	0	15	500

- Nota: resolver o problema dual do exemplo de motivação, além de fornecer o valor do vértice óptimo, também permite saber as suas coordenadas (que são os valores das variáveis de decisão e de folga do dual do dual).

Teoremas da dualidade ilustrados com um exemplo

Relação entre os problemas primal e o dual:

- Teorema da dualidade fraca
- Teorema da dualidade forte
- Teorema da folga complementar

Vamos ilustrá-los com o seguinte par:

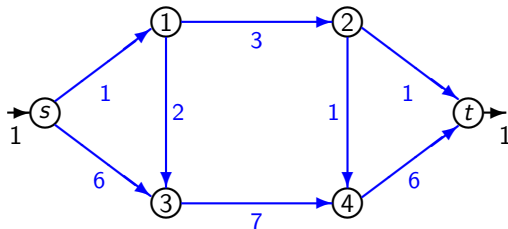
- Problema do caminho mais curto entre os vértices s e t
 - Problema do afastamento máximo dos vértices s e t
-
- Designaremos o problema de maximização por primal e o de minimização por dual.

Assim:

- o dual é o de minimização: caminho mais curto
- o primal é o de maximização: afastamento máximo dos vértices

Exemplo: caminho mais curto

- Formulação: injectar uma unidade no vértice s que vai usar a sequência de custo mínimo de arcos de custo c_{ij} até chegar a t .



	x_{s1}	x_{s3}	x_{12}	x_{13}	x_{24}	x_{2t}	x_{34}	x_{4t}	
s	+1	+1							= +1
v_1	-1		+1	+1					= 0
v_2			-1		+1	+1			= 0
v_3		-1		-1			+1		= 0
v_4					-1		-1	+1	= 0
t						-1		-1	= -1
min	1	6	3	2	1	1	1	6	

- Para evidenciar o significado do prob. primal, vamos i) multiplicar as restrições por -1 , e ii) substituí-las por restrições \geq (OK neste caso).

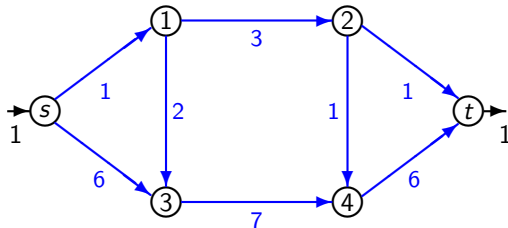
Construção do problema primal (dual do dual)

	x_{s1}	x_{s3}	x_{12}	x_{13}	x_{24}	x_{2t}	x_{34}	x_{4t}		<i>var.primal</i>
s	-1	-1							≥ -1	(d_s)
v_1	+1		-1	-1					≥ 0	(d_1)
v_2			+1		-1	-1			≥ 0	(d_2)
v_3		+1		+1			-1		≥ 0	(d_3)
v_4					+1		+1	-1	≥ 0	(d_4)
t						+1		+1	$\geq +1$	(d_t)
min	1	6	3	2	1	1	1	6		

- Variáveis primais: d_j : valor do afastamento do vértice j e $s, \forall j \in V$

	d_s	d_1	d_2	d_3	d_4	d_t	
$(s,1)$	-1	+1					≤ 1
$(s,3)$	-1			+1			≤ 6
$(1,2)$		-1	+1				≤ 3
$(1,3)$		-1		+1			≤ 2
$(2,4)$			-1		+1		≤ 1
$(2,t)$			-1			+1	≤ 1
$(3,4)$				-1	+1		≤ 1
$(4,t)$					-1	+1	≤ 6
max	-1					+1	

Exemplo: interpretação do modelo do problema primal



Restrição do arco (i, j) : $d_j \leq d_i + c_{ij}$:

- o afastamento de j e s não pode exceder o afastamento de i e s adicionado do comprimento do arco (i, j) .

Função objectivo: $d_t - d_s$:

- afastamento dos vértices t e s , que se pretende maximizar.
- Qual o afastamento máximo no exemplo?

Teorema

O valor da função objectivo ($c\hat{x}$) de qualquer solução admissível \hat{x} do problema primal (de maximização) e

o valor de função objectivo ($\hat{y}b$) de qualquer solução admissível \hat{y} do problema dual (de minimização)

obedecem à seguinte relação: $c\hat{x} \leq \hat{y}b$

Prova:

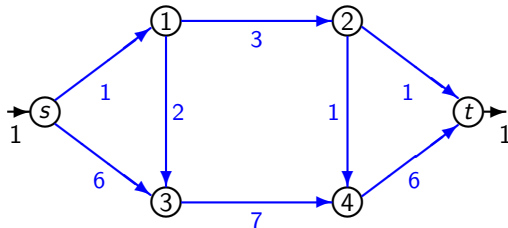
- Se \hat{y} é uma solução admissível do dual, então $\hat{y} \geq 0$, e podemos pré-multiplicar por \hat{y} as restrições $A\hat{x} \leq b$, obtendo $\hat{y}A\hat{x} \leq \hat{y}b$.
- Se \hat{x} é uma solução admissível do primal, então $\hat{x} \geq 0$, e podemos pós-multiplicar por \hat{x} as restrições $\hat{y}A \geq c$, obtendo $\hat{y}A\hat{x} \geq c\hat{x}$.
- Conjugando as duas relações, obtém-se $c\hat{x} \leq \hat{y}A\hat{x} \leq \hat{y}b$. □

Teorema da dualidade fraca: exemplo 1

PRIMAL		DUAL	
max	cx $Ax \leq b$ $x \geq 0$	min	yb $yA \geq c$ $y \geq 0$
max	$30x_1 + 20x_2 + 10x_3$ $1x_1 + 1x_2 + 2x_3 \leq 40$ $2x_1 + 2x_2 + 1x_3 \leq 150$ $2x_1 + 1x_2 \leq 20$ $x_1, x_2, x_3 \geq 0$	min	$40y_1 + 150y_2 + 20y_3$ $1y_1 + 2y_2 + 2y_3 \geq 30$ $1y_1 + 2y_2 + 1y_3 \geq 20$ $2y_1 + 1y_2 \geq 10$ $y_1, y_2, y_3 \geq 0$

- $(\hat{x}_1, \hat{x}_2, \hat{x}_3)^\top = (10, 0, 0)^\top$ é um ponto admissível do primal.
- $(\hat{y}_1, \hat{y}_2, \hat{y}_3) = (30, 0, 0)$ é um ponto admissível do dual.
- $c\hat{x} = 30(10) + 20(0) + 10(0) = 300$
- $\hat{y}b = 40(30) + 150(0) + 20(0) = 1200$
- este par de pontos verifica o teorema da dualidade fraca: $c\hat{x} \leq \hat{y}b$, i.e., $300 \leq 1200$.

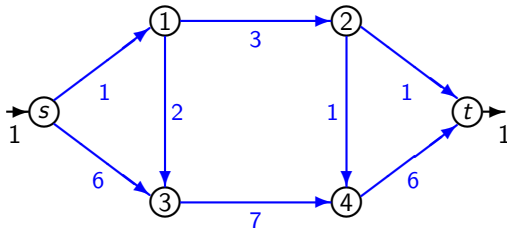
Teorema da dualidade fraca: exemplo 2



- Uma solução do dual é um caminho, e o valor da solução é o comprimento do caminho.
- Uma solução do primal é um conjunto de valores de \hat{d}_j , $\forall j \in V$, e o valor da solução é o afastamento é $\hat{d}_t - \hat{d}_s$.

Portanto, ...

Teorema da dualidade fraca: exemplo 2



- Uma solução do dual é um caminho, e o valor da solução é o comprimento do caminho.
- Uma solução do primal é um conjunto de valores de \hat{d}_j , $\forall j \in V$, e o valor da solução é o afastamento $\hat{d}_t - \hat{d}_s$.

Portanto, ...

- o afastamento $\hat{d}_t - \hat{d}_s$ de qualquer solução primal admissível \leq o comprimento de qualquer caminho.

Corolário da dualidade fraca: valor ótimo ilimitado

Corolário (do teorema da dualidade fraca)

Se o problema primal de maximização tiver uma solução ótima ilimitada, então o problema dual é impossível.

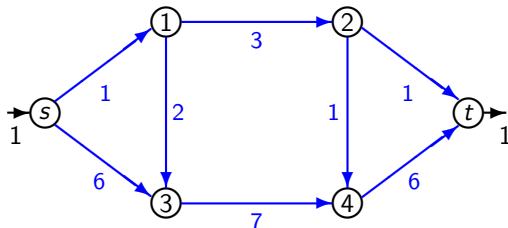
Prova:

- Não pode haver nenhuma solução admissível do dual com um valor de função objectivo maior do que o valor da solução ótima ilimitada do primal.
- Portanto, o domínio do dual tem de ser vazio, e o problema dual é impossível.

e reciprocamente:

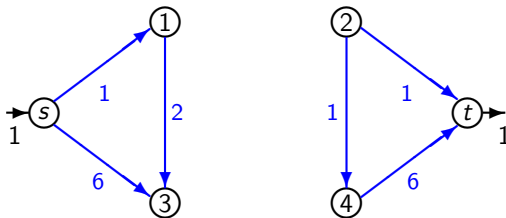
Se o problema dual de minimização tiver uma solução ótima ilimitada, então o problema primal é impossível.

Corolário da dualidade fraca: exemplo 2



- Corolário: se a solução óptima do problema primal do afastamento tiver um valor $d_t^* - d_s^*$ ilimitado, então o problema dual é impossível.
- Isso acontece quando ...

Corolário da dualidade fraca: exemplo 3



- Corolário: se a solução óptima do problema primal do afastamento tiver um valor $d_t^* - d_s^*$ ilimitado, então o problema dual é impossível.
- Isso acontece quando, por exemplo, o grafo tem dois componentes, estando o vértice s num deles e t no outro:
- não havendo restrições que limitem o afastamento dos vértices do mesmo componente que t , o vértice t pode ser colocado a uma distância ilimitada de s ;
- o problema dual é impossível: não há caminho entre s e t .

Teorema da dualidade forte

Teorema

Se o problema primal tiver uma solução óptima com valor finito, então o problema dual tem, pelo menos, uma solução óptima com valor finito, e os valores das soluções óptimas são iguais, $cx^ = y^*b$.*

sendo

- x^* : solução óptima do primal
- y^* : solução óptima do dual

Prova: O quadro simplex óptimo apresenta soluções admissíveis para o problema primal e para o problema dual com o mesmo valor finito de função objectivo:

$$y^*b = (c_B B^{-1})b = c_B(B^{-1}b) = cx^*.$$



Teorema da dualidade forte: quadro óptimo

	x_1	x_2	x_3	s_1	s_2	s_3	
x_3	-1/2	0	1	1/2	0	-1/2	10
s_2	-3/2	0	0	-1/2	1	-3/2	100
x_2	2	1	0	0	0	1	20
	5	0	0	5	0	15	500

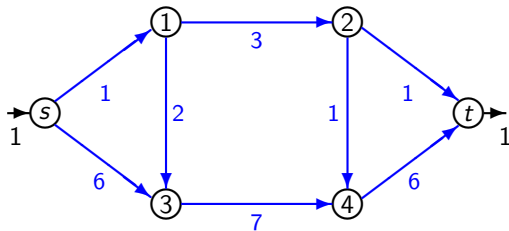
- Solução é admissível para o problema primal se:
 - variáveis de decisão e de folga do primal: $B^{-1}b \geq 0$,
 - i.e., todos os elementos do lado direito do quadro simplex não-negativos.
 - Solução é admissível para o problema dual se:
 - variáveis de decisão do dual: $y = c_B B^{-1} \geq 0$
 - variáveis de folga do dual: $u = c_B B^{-1}A - c \geq 0$,
 - i.e., todos os elementos da linha da função objectivo do quadro simplex não-negativos.
 - No quadro óptimo, há pontos admissíveis dos problemas primal e do dual que têm o mesmo valor de função objectivo.
- ∴ São as soluções óptimas dos respectivos problemas.

Teorema da dualidade forte: exemplo 1

PRIMAL		DUAL	
max	cx $Ax \leq b$ $x \geq 0$	min	yb $yA \geq c$ $y \geq 0$
max	$30x_1 + 20x_2 + 10x_3$ $1x_1 + 1x_2 + 2x_3 \leq 40$ $2x_1 + 2x_2 + 1x_3 \leq 150$ $2x_1 + 1x_2 \leq 20$ $x_1, x_2, x_3 \geq 0$	min	$40y_1 + 150y_2 + 20y_3$ $1y_1 + 2y_2 + 2y_3 \geq 30$ $1y_1 + 2y_2 + 1y_3 \geq 20$ $2y_1 + 1y_2 \geq 10$ $y_1, y_2, y_3 \geq 0$

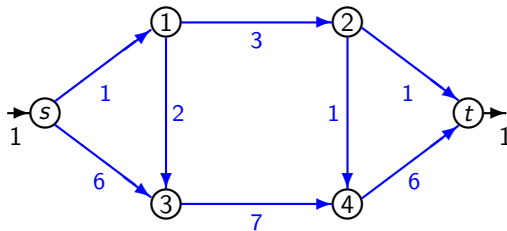
- $x^* = (x_1, x_2, x_3)^T = (0, 20, 10)^T$ é o ponto óptimo do primal.
- $y^* = (y_1, y_2, y_3) = (5, 0, 15)$ é o ponto óptimo do dual.
- $cx^* = 30(0) + 20(20) + 10(10) = 500$
- $y^*b = 40(5) + 150(0) + 20(15) = 500$
- este par de pontos verifica o teorema da dualidade forte: $cx^* = y^*b$, i.e., $500 = 500$.

Teorema da dualidade forte: exemplo 2



Portanto, ...

Teorema da dualidade forte: exemplo 2



Portanto, ...

- Afastamento máximo dos vértices s e t = Comprimento do caminho mais curto entre s e t

Teorema da folga complementar

Teorema

No ponto óptimo, se uma variável for positiva, a variável dual correspondente é nula.

Regra de correspondência:

var. folga de uma restrição $\hat{=}$ var. decisão dual associada à restrição

PRIMAL		DUAL	
max	cx $Ax + s = b$ $x \geq 0$	min	yb $yA - u = c$ $y \geq 0$
	(y)		(x)
max	$30x_1 + 20x_2 + 10x_3$ $1x_1 + 1x_2 + 2x_3 + s_1 = 40$ $2x_1 + 2x_2 + 1x_3 + s_2 = 150$ $2x_1 + 1x_2 + s_3 = 20$ $x_1, x_2, x_3, s_1, s_2, s_3 \geq 0$	min	$40y_1 + 150y_2 + 20y_3$ $1y_1 + 2y_2 + 2y_3 - u_1 = 30$ $1y_1 + 2y_2 + 1y_3 - u_2 = 20$ $2y_1 + 1y_2 - u_3 = 10$ $y_1, y_2, y_3, u_1, u_2, u_3 \geq 0$
	(y ₁) (y ₂) (y ₃)		(x ₁) (x ₂) (x ₃)

Folga complementar no quadro simplex óptimo: exemplo 1

- Se uma variável é básica no problema primal (≥ 0) \Rightarrow coeficiente da linha da função objectivo (variável dual correspondente) é 0.
- Se um coeficiente da linha da função objectivo (variável do problema dual) $\geq 0 \Rightarrow$ variável primal correspondente é não-básica (igual a 0).

	x_1	x_2	x_3	s_1	s_2	s_3	
x_3	-1/2	0	1	1/2	0	-1/2	10
s_2	-3/2	0	0	-1/2	1	-3/2	100
x_2	2	1	0	0	0	1	20
	5	0	0	5	0	15	500

PRIMAL			DUAL		
var. folga	$s_1 =$	0	$y_1 =$	5	var. decisão
	$s_2 =$	100	$y_2 =$	0	
	$s_3 =$	0	$y_3 =$	15	
var. decisão	$x_1 =$	0	$u_1 =$	5	var. folga
	$x_2 =$	20	$u_2 =$	0	
	$x_3 =$	10	$u_3 =$	0	

Prova do teorema da folga complementar

Teorema

No ponto óptimo, se uma variável for positiva, a variável dual correspondente é nula.

Prova:

- No óptimo, $cx^* = y^*Ax^* = y^*b$. Há duas equações:

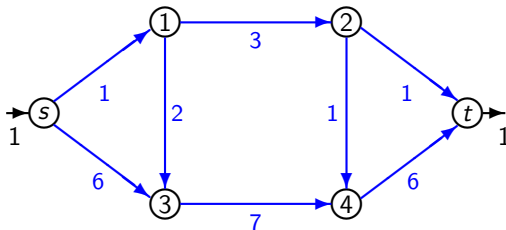
$$\begin{cases} y^*Ax^* &= y^*b \\ cx^* &= y^*Ax^* \end{cases} \quad \begin{cases} y^*(b - Ax^*) &= 0 \\ (y^*A - c)x^* &= 0 \end{cases} \quad \begin{cases} y^*s^* &= 0 \\ u^*x^* &= 0 \end{cases}$$

- Para o produto escalar $y^*s^* = 0$, como $y^* \geq 0$ e $s^* \geq 0$, então necessariamente, $i = 1, \dots, m$:

$$\begin{cases} \text{se } y_i^* > 0 \Rightarrow s_i^* = 0 \\ \text{se } s_i^* > 0 \Rightarrow y_i^* = 0 \end{cases}$$

- O mesmo resultado aplica-se à segunda equação $u^*x^* = 0$.

Teorema da folga complementar: exemplo 2



- Se arco (i,j) pertence ao caminho mais curto ($x_{ij}^* = 1$ no problema dual), então a folga da restrição primal ($d_j \leq d_i + c_{ij}$) é nula.
 - Caminho mais curto: $x_{s1}^* = x_{12}^* = x_{2t}^* = 1$, restantes vars = 0.
 - Folgas restrições nulas: $d_1^* = d_s^* + 1$, $d_2^* = d_1^* + 3$, $d_t^* = d_2^* + 1$, i.e.,
 $d_1^* = d_s^* + 1$, $d_2^* = d_s^* + 4$, $d_t^* = d_s^* + 5$.
- Há mais relações de folga complementar.

Em síntese, o teorema fundamental da programação linear:

Teorema (Condições de optimalidade)

Uma solução de um problema de programação linear é ótima se:

- *for admissível para o problema primal,*
- *for admissível para o problema dual, e*
- *obedecer à folga complementar.*

- Existem relações muito fortes entre um problema e o seu dual.
- Eles mostram duas perspectivas diferentes da mesma realidade; até podemos resolver um para obter a solução do outro.
- Há outros exemplos de pares de problemas primal-dual. O problema do produtor de rações é o problema dual do problema da dieta (ver Quiz sobre dualidade).

Variáveis duais associadas a restrições de igualdade

- A variável dual associada a uma restrição de igualdade não tem restrição de sinal, *i.e.*, pode ter valor positivo, nulo ou negativo.
- No LPSolve, a sua declaração seria, por exemplo, `Free y1`;
- Isto pode ser provado desdobrando a restrição de $=$ em 2 restrições de \leq , e identificando que, no modelo dual, a variável dual é a diferença de 2 variáveis, o que corresponde a uma variável `Free`.

Uma perspectiva dual da solução do problema primal

- O problema dual encontra os melhores valores que podem ser atribuído aos recursos usados nas actividades.
- As variáveis duais (os preços-sombra) traduzem o valor dos recursos, e explicam como se forma o valor de uma actividade.
- As actividades seleccionadas (no problema primal) são aquelas que atribuem um maior valor aos recursos.

Solução ótima: uso de recursos e valor dos recursos

max: $30x_1 + 20x_2 + 10x_3$;
 restricao1: $1x_1 + 1x_2 + 2x_3 \leq 40$;
 restricao2: $2x_1 + 2x_2 + 1x_3 \leq 150$;
 restricao3: $2x_1 + 1x_2 \leq 20$;

Quadro Ótimo

	z	x_1	x_2	x_3	s_1	s_2	s_3	
x_3	0	-1/2	0	1	1/2	0	-1/2	10
s_2	0	-3/2	0	0	-1/2	1	-3/2	100
x_2	0	2	1	0	0	0	1	20
z	1	5	0	0	5	0	15	500

- Uso de recursos e *valor dos recursos*:

	act.1	act.2	act.3	folga	qtd.rec.	valor rec.
recurso 1:	1(0)	+1(20)	+2(10)		= 40	40(5)
recurso 2:	2(0)	+2(20)	+1(10)	+100	= 150	+150(0)
recurso 3:	2(0)	+1(20)			= 20	+20(15)
valor f.obj.:	30(0)	+20(20)	+10(10)			= 500

Como se forma o valor da solução óptima, $c_B B^{-1}b$?

Perspectiva primal:

$c_B (B^{-1}b) = f(\text{valor das vars decisão } (c_{ij}), \text{ nível das vars decisão } (x_{ij}))$

exemplo:

$$c_B (B^{-1}b) = \begin{bmatrix} 10 & 0 & 20 \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} 10 \\ 100 \\ 20 \end{bmatrix} = 500$$

Perspectiva dual:

$(c_B B^{-1}) b = f(\text{valor dos recursos } (y_i), \text{ nível dos recursos } (b_i))$

exemplo:

$$(c_B B^{-1}) b = \begin{bmatrix} 5 & 0 & 15 \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} 40 \\ 150 \\ 20 \end{bmatrix} = 500$$

O que significa o valor $c_B B^{-1} A_j - c_j$ da actividade j ?

$$c_B B^{-1} A_j = \sum_{i=1}^m (c_B B^{-1})_i \times a_{ij}, \quad \forall j,$$

- $(c_B B^{-1})_i$ é o valor para o decisor de uma unidade de recurso i ,
 - a_{ij} é a quantidade de recurso i usado numa unidade da actividade j .
 - Portanto, $c_B B^{-1} A_j$ é o valor dos recursos usados numa unidade da actividade j .
- c_j é o valor de venda de uma unidade da actividade j .

Na solução óptima de um problema de maximização,

- se $c_B B^{-1} A_j - c_j > 0$, o valor dos recursos usados é maior do que o valor da venda; é melhor não fazer esta actividade (variável não-básica); há outras actividades que usam melhor os recursos,
- se $c_B B^{-1} A_j - c_j = 0$, o valor de venda iguala o valor dos recursos usados; esta actividade (variável básica) dá o maior valor possível aos recursos.

Exemplo

Quadro Inicial		z	x_1	x_2	x_3	s_1	s_2	s_3	
	s_1	0	1	1	2	1	0	0	40
	s_2	0	2	2	1	0	1	0	150
	s_3	0	2	1	0	0	0	1	20
	z	1	-30	-20	-10	0	0	0	0
Quadro Óptimo		z	x_1	x_2	x_3	s_1	s_2	s_3	
	x_3	0	-1/2	0	1	1/2	0	-1/2	10
	s_2	0	-3/2	0	0	-1/2	1	-3/2	100
	x_2	0	2	1	0	0	0	1	20
	z	1	5	0	0	5	0	15	500

$$\text{Actividade 1: } c_B B^{-1} A_1 - c_1 = \boxed{5 \quad 0 \quad 15} * \boxed{\begin{matrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{matrix}} - 30 = 5$$

$$\text{Actividade 2: } c_B B^{-1} A_2 - c_2 = \boxed{5 \quad 0 \quad 15} * \boxed{\begin{matrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{matrix}} - 20 = 0$$

Fim