

# Métodos Numéricos e Otimização Não Linear

MIEI - Mestrado Integrado em Engenharia Informática

2020/21

## Folhas de Exercícios

Maria Teresa Torres Monteiro

Departamento de Produção e Sistemas

Universidade do Minho

1. Um medicamento L precisa, entre outros componentes, de duas substâncias A e B na sua composição. Após reação química, a massa  $m_L$  (g) de uma pastilha do medicamento, obedece à seguinte fórmula matemática:

$$m_L = (m_A)^2 + e^{m_B}$$

em que  $m_A$  e  $m_B$ , correspondem às massas das respetivas substâncias antes da reação química. Considerando  $m_A = 1.053$  e  $m_B = 0.31$  estime um limite superior do erro absoluto da massa da pastilha, devido ao facto de A e B não terem sido medidas exatamente. Qual o número de algarismos significativos da massa da pastilha,  $m_L$ ?

2. Calcule um limite superior do erro absoluto no cálculo da expressão

$$f(x, y, z) = -x + y^2 + \text{sen}(z)$$

sabendo que são usados os seguintes valores aproximados:

$$x = 1.1 \ (\delta_x = 0.05); \ y = 2.04 \ (\delta_y = 0.005); \ z = 0.5 \text{ rad.} \ (\delta_z = 0.05).$$

Quantos algarismos significativos apresenta o valor calculado de  $f$ ?

3. Com base no limite superior do erro absoluto do valor calculado da expressão

$$f(x, y, z) = \frac{2xy}{x^2 + z},$$

e sabendo que são usados os seguintes valores aproximados

$$x = 3.1416 \text{ de } \pi; \ y = 1.732 \text{ de } \sqrt{3}; \ z = 1.4142 \text{ de } \sqrt{2}$$

quantos algarismos significativos tem o valor calculado de  $f$ ?

4. A energia cinética,  $K$ , é a energia que está relacionada com o estado de movimento de um corpo. É uma grandeza escalar que depende da massa,  $m$ , e do módulo da velocidade do corpo em questão,  $v$ , sendo definida por:

$$K(m, v) = \frac{m v^2}{2}$$

Considerando um corpo com  $m = 0.793 \text{ Kg}$  e  $v = 12.5 \text{ m/s}$  estime um limite superior do erro absoluto da sua energia cinética, devido ao facto de  $m$  e  $v$  não terem sido medidas exatamente. Qual o número de algarismos significativos da energia cinética,  $K$ ?

5. Considere a matriz  $A$  e o vector  $b$ :

$$A = \begin{pmatrix} 2.4 & 6.0 & -2.7 & 5.0 \\ -2.1 & -2.7 & 5.9 & -4.0 \\ 3.0 & 5.0 & -4.0 & 6.0 \\ 0.9 & 1.9 & 4.7 & 1.8 \end{pmatrix} \quad b = \begin{pmatrix} 14.6 \\ -11.4 \\ 14.0 \\ -0.9 \end{pmatrix}$$

- (a) Resolva o sistema correspondente por um método directo e estável.
- (b) Calcule o determinante de  $A$  por um método directo e estável.
- (c) Calcule  $A^{-1}$  usando o método de eliminação de Gauss com pivotagem parcial.

6. Considere os três sistemas de equações lineares

$$A \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ 8 \\ 9 \end{pmatrix}, \quad A \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ y_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9 \\ 1 \\ 8 \\ 4 \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad A \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \\ z_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ -7 \\ 5 \end{pmatrix}$$

com

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 2 & 1 & -3 \\ 1 & 2 & -1 & 0 \\ 3 & -1 & 2 & 4 \\ 0 & 2 & 4 & 3 \end{pmatrix}.$$

Calcule as três soluções de uma só vez, usando um método directo e estável.

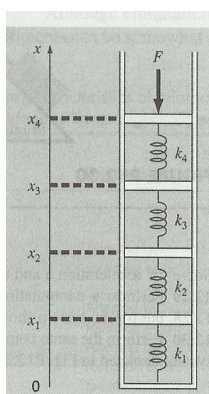
7. Um engenheiro supervisiona a produção de 3 modelos de automóveis. Para a sua produção, são necessários 3 tipos de materiais: metal, tecido e plástico. As quantidades

para produzir um carro de cada modelo são:

	metal (kg./carro)	tecido(kg./carro)	borracha(Kg./carro)
‘Jeep’	2.71	4.11	2.69
‘coupé’	1.63	2.44	1.64
‘V6’	0.32	0.19	0.36

Existem em *stock*, respectivamente 38.48, 56.69, 38.54 kg. de metal, tecido e borracha. Quantos automóveis podem ser produzidos com a quantidade de *stock* existente? Resolva o sistema por um método direto e estável usando 4 casas decimais nos cálculos.

8. Considere a figura representando um sistema de 4 molas ligadas em série sujeito a uma força  $F$  de 2000  $Kg$ .



Numa situação de equilíbrio, as equações força-balanço deduzidas definem inter-relações entre as molas:

$$\begin{cases} k_2(x_2 - x_1) = k_1 x_1 \\ k_3(x_3 - x_2) = k_2(x_2 - x_1) \\ k_4(x_4 - x_3) = k_3(x_3 - x_2) \\ F = k_4(x_4 - x_3) \end{cases}$$

em que  $k_1 = 150$ ,  $k_2 = 50$ ,  $k_3 = 75$  e  $k_4 = 225$  são as constantes das molas ( $kg/s^2$ ).

Resolva o sistema por um método direto e estável.

9. Uma equipa de três paraquedistas ligados por uma corda de peso desprezável é lançada em queda livre a uma velocidade  $v = 5 \text{ m/s}$  conforme a figura.

Considere os seguintes dados:

Paraquedista ( $i$ )	Massa ( $m_i$ ) ( $Kg$ )	Coef. de resistência ( $c_i$ ) ( $Kg/s$ )
1	70	10
2	60	14
3	40	17

O sistema linear resultante permite calcular a tensão em cada secção da corda ( $R$  e  $T$ ) e a aceleração da equipa ( $a$ ).

$$\begin{cases} m_1g & -T & -c_1v & & = m_1a \\ m_2g & +T & -c_2v & -R & = m_2a \\ m_3g & & -c_3v & +R & = m_3a \end{cases}$$

(considere  $g = 9.8 \text{ m/s}^2$ ).



Resolva o sistema por um método direto e estável.

10. Localize através do método gráfico as raízes das equações não lineares em  $x$ :

(a)  $f(x) \equiv x^3 - 3x + 1 = 0$ .

(b)  $f(x) \equiv \text{sen}(x) + x - 2 = 0$ .

(c)  $f(x) \equiv e^x + x - 1 = 0$ .

(d)  $f(x) \equiv x + \ln(x) = 0$ .

11. Baseado num trabalho de Frank-Kamenetski, em 1955, a temperatura no interior de um material, quando envolvido por uma fonte de calor, pode ser determinada se resolvermos a seguinte equação não linear em  $x$ :

$$\frac{e^{-0.5x}}{\cosh(e^{0.5x})} = \sqrt{0.5L}$$

Para  $L = 0.088$ , calcule a raiz da equação, usando um método que não recorra a derivadas.

Tome como aproximação inicial o intervalo  $[-1, 0]$  e pare o processo iterativo quando o critério de paragem for verificado para  $\varepsilon_1 = 0.5$  e  $\varepsilon_2 = 0.1$ , ou ao fim de 2 iterações.

**Nota:**  $\cosh(y) = \frac{e^y + e^{-y}}{2}$

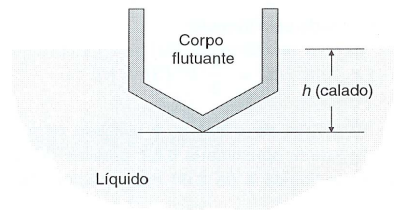
12. O volume  $v$  de um líquido num tanque esférico de raio  $r$  está relacionado com a profundidade  $h$  do líquido da seguinte forma:

$$v(h) = \frac{\pi h^2(3r - h)}{3}.$$

- (a) Calcule, utilizando um método que não recorre ao cálculo de derivadas, a profundidade  $h$ , num tanque de raio  $r = 1$  para um volume de 0.5. Utilize para aproximação inicial o intervalo  $[0.25, 0.5]$  e considere  $\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = 10^{-2}$  ou no máximo 3 iterações.
- (b) Repita os cálculos, nas mesmas condições da alínea anterior, mas utilizando para aproximação inicial o intervalo  $[2.5, 3]$ . Comente os resultados e analise a viabilidade da solução encontrada.
13. Pela aplicação do Princípio de Arquimedes para determinação do calado de embarcações, pretende determinar-se a profundidade  $h$  correspondente ao equilíbrio tal que

$$\gamma_s V_s = \gamma_l V_l(h)$$

com  $\gamma_s = 918.35 \text{ kg/m}^3$  (densidade do sólido),  $V_s = 1700 \text{ m}^3$  (volume do sólido),  $\gamma_l = 1.025 \text{ kg/m}^3$  (densidade do líquido) e  $V_l(h)$  volume do líquido deslocado (ver figura).



Utilize o método de Newton para calcular o valor de  $h$ , supondo  $V_l(h) = h(h - 40)^2$ . Utilize para aproximação inicial  $h^{(1)} = 140$  e  $\epsilon_1 = \epsilon_2 = 10^{-4}$ , ou no máximo 3 iterações.

14. O valor de  $\pi$  pode ser obtido através da resolução das seguintes equações:

a)  $\text{sen}(x) = 0;$   
 b)  $\text{cos}(x) + 1 = 0.$

Aplique o método de Newton com  $x_1 = 3$  e  $\epsilon_2 = 10^{-4}$  em cada caso a) e b).

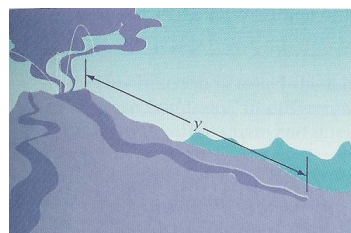
Compare os resultados obtidos e o número de iterações calculadas.

15. A concentração de uma bactéria  $c(t)$  num depósito decresce de acordo com a seguinte expressão

$$c(t) = 70e^{-1.5t} + 25e^{-0.075t}.$$

Utilize um método iterativo que recorre ao cálculo da derivada para determinar o tempo necessário até a concentração da bactéria ficar reduzida a 9. Use a seguinte aproximação inicial  $t_1 = 5$ . Para a paragem do processo iterativo use  $\epsilon_1 = \epsilon_2 = 0.05$  ou  $n_{\max} = 3$ .

16. A figura representa um vulcão em erupção.



A relação entre a distância  $y$  (milhas) percorrida pela lava e o tempo  $t$  (horas) é dada por:

$$y(t) = 7 (2 - 0.9^t).$$

Existe uma aldeia no sopé da montanha a uma distância de  $y = 10$ . O gabinete de protecção civil advertiu os moradores da aldeia de que a lava chegaria às suas casas em menos de 6 horas. Calcule utilizando um método iterativo que recorre ao cálculo de derivadas o instante de tempo em que a lava do vulcão atinge a aldeia. Considere  $\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = 10^{-3}$  ou no máximo 3 iterações.

**Nota:**  $(a^x)' = a^x \ln(a)$

17. Uma das soluções para os resíduos de material nuclear é colocá-los em barris especiais que serão mais tarde depositados no fundo do oceano. Se os recipientes permanecerem intactos, a contaminação do ambiente circundante é mínima. Resolvendo as equações de movimento para os barris à medida que eles descem na água, chega-se à seguinte relação entre a velocidade de impacto,  $v$ , e a profundidade da água,  $D$ :

$$D = \frac{1}{k^2 g} \left[ W(W - B) \ln \left( 1 + \frac{kv}{W - B} \right) - Wkv \right],$$

em que  $W$  é o peso dos barris,  $B$  é a sua flutuabilidade,  $g$  é a constante gravitacional e  $k$  é o coeficiente de atrito. A flutuabilidade dos barris pode ser determinada através do seu volume, sendo igual a 470. O coeficiente de atrito é determinado experimentalmente e é dado por  $k = 0.08$ . A constante gravitacional é  $g = 32$  e o peso dos barris  $W = 527$ .

- (a) Determine a velocidade de impacto  $v$  usando o método da secante, quando os barris são lançados numa zona cuja profundidade é  $D = -300$ . Utilize como aproximações iniciais  $v_1 = 40$  e  $v_2 = 45$ , e no critério de paragem  $\varepsilon_1 = 0.05$ ,  $\varepsilon_2 = 0.05$  ou  $n_{\max} = 2$ .
- (b) Através de experiências, mostrou-se que os barris se danificam se a velocidade de impacto com o fundo do oceano for superior a 40. Na situação da alínea anterior, haverá risco de contaminação?



18. Um certo equipamento de 20000 euros vai ser pago durante 6 anos. O pagamento anual é de 4000 euros. A relação entre o custo do equipamento  $P$ , o pagamento anual  $A$ , o número de anos  $n$  e a taxa de juro  $i$  é a seguinte:

$$A = P \frac{i(1+i)^n}{(1+i)^n - 1}.$$

Utilize o método iterativo mais adequado para determinar a taxa de juro utilizada nos cálculos. O valor da taxa de juro pertence ao intervalo  $[0.05, 0.15]$ . Para a paragem do processo iterativo use  $\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = 0.05$  ou  $n_{max} = 3$ .

19. A velocidade ascendente,  $v$ , de um foguetão pode ser calculada pela seguinte expressão:

$$v(t) = u \ln\left(\frac{m_0}{m_0 - q t}\right) - g t$$

em que  $u$  é a velocidade relativa a que o combustível é expelido,  $m_0$  é a massa inicial do foguetão no instante  $t = 0$ ,  $q$  é a taxa de consumo de combustível e  $g$  é a aceleração da gravidade. Considerando  $u = 2200 \text{ m/s}$ ,  $g = 9.8 \text{ m/s}^2$ ,  $m_0 = 1.6 \times 10^5 \text{ Kg}$  e  $q = 2680 \text{ Kg/s}$ , calcule o tempo para o qual o foguetão atinge a velocidade  $v = 1000 \text{ m/s}$ , sabendo que esse instante está entre 20 s e 30 s.

Utilize o método que achar mais adequado, com  $\varepsilon_1 = 10^{-2}$  e  $\varepsilon_2 = 10^{-1}$  ou no máximo 3 iterações.

20. Escreva o sistema das equações não lineares

$$\begin{cases} f_1(x_1, x_2) = 0 \\ f_2(x_1, x_2) = 0 \end{cases}$$

que surge quando se pretende calcular um dos pontos de intersecção da circunferência de centro em  $(0, 0)$  e raio 3 com a recta que passa pelos pontos  $(0, 1)$  e  $(1, 0)$ .

A partir da aproximação inicial  $(0, 0)$ , implemente o método iterativo de Newton para calcular uma solução do sistema. Comente o resultado. Recomece o processo iterativo com o ponto  $(2, 0)$ .

21. Usando o método iterativo de Newton, determine um dos pontos de intersecção da circunferência

$$x_1^2 + x_2^2 = 2$$

com a hipérbole

$$x_1^2 - x_2^2 = 1.$$

Considere os valores iniciais  $(x_1, x_2)^{(1)} = (1.5, 0.5)$  e para a paragem do processo iterativo use  $\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = 0.05$  ou  $n_{max} = 2$ .

22. Considere o seguinte sistema

$$\begin{cases} -x_2 + 2x_1^n = 4 \\ -x_2 - x_2^m - x_1 = 8 \end{cases}$$

em que  $m$  e  $n$  são parâmetros.

Considere  $m = 3$  e  $n = 2$ . Resolva o sistema utilizando para aproximação inicial o ponto  $x^{(1)} = (1, -2)^T$ . Para o critério de paragem use  $\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = 10^{-2}$  (ou no máximo 2 iterações).

23. Pensei em dois números  $x$  e  $y$ . O produto dos dois somado ao cubo do segundo é igual a 3 e o logaritmo neperiano do segundo adicionado à metade do primeiro é 1. Em que números pensei?

(a) Formule o problema como um sistema de equações.

(b) Resolva-o utilizando para aproximação inicial o ponto  $(1.9, 1.1)$ . Apresente o resultado obtido no final de uma iteração e a correspondente estimativa do erro relativo.

24. Num colector solar, um balanço de energia na placa absorvente e na placa de vidro produz o seguinte sistema de equações não lineares nas temperaturas absolutas da placa absorvente  $(x_1)$  e da placa de vidro  $(x_2)$

$$\begin{cases} x_1^4 + 0.068x_1 - x_2^4 - 0.058x_2 &= 0.015 \\ x_1^4 + 0.058x_1 - 2x_2^4 - 0.117x_2 &= 0 \end{cases}.$$

Considerando a seguinte aproximação inicial  $(x_1, x_2)^{(1)} = (0.3, 0.3)$ , implemente uma iteração do método de Newton. Apresente uma estimativa do erro relativo da aproximação calculada.

25. Use o método iterativo de Newton para determinar um ponto do espaço  $(x_1, x_2, x_3)$  que, pertence à esfera de raio 2 de equação

$$x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 4,$$

está sobre o plano  $x_3 = 1$  e dista uma unidade do ponto  $(0, 1, 1)$ .

Tome como aproximação inicial o ponto  $(1, 1, 1)$ . No critério de paragem use  $\varepsilon_1 = 0.1$  e  $\varepsilon_2 = 0.05$  (2 iterações).

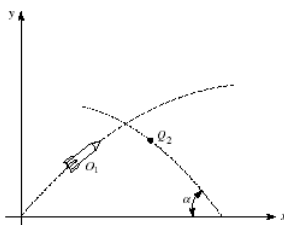
26. A posição de um determinado objecto  $O_1$  no plano  $xy$  é descrita em função do tempo  $(t)$  pelas seguintes equações:

$$x_1(t) = t \quad y_1(t) = 1 - e^{-t}$$

A posição de um segundo objecto  $O_2$  é descrita pelas seguintes equações:

$$x_2(t) = 1 - t \cos(\alpha) \quad y_2(t) = -0.1t^2 + t \sin(\alpha)$$

em que  $\alpha$  representa o ângulo, como mostra a figura

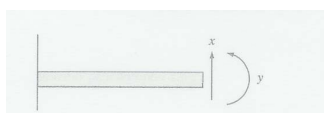


Determine os valores de  $t$  e  $\alpha$  na posição em que os dois objectos colidem, *i.e.*, na posição em que se igualam as coordenadas  $x$  e  $y$ :

$$\begin{aligned} t &= 1 - t \cos(\alpha) \\ 1 - e^{-t} &= -0.1t^2 + t \sin(\alpha) \end{aligned}$$

Considere os valores iniciais  $(t, \alpha)^{(1)} = (4.3, 2.4)$  e  $\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = 0.015$  ou no máximo duas iterações.

27. Considere a seguinte figura de uma viga em balanço:



Um modelo de elementos finitos de uma viga em balanço sujeita a carga e momentos é obtido pela optimização de

$$f(x, y) = 5x^2 - 5xy + 2.5y^2 - x - 1.5y,$$

em que  $x$  e  $y$  são o deslocamento e o momento da extremidade, respectivamente. Calcule os valores de  $x$  e  $y$  que minimizam  $f(x, y)$ , utilizando o método iterativo de Newton. Para aproximação inicial use  $(1, 1)$  e  $\epsilon_1 = \epsilon_2 = 10^{-6}$  ou no máximo duas iterações. Comente os resultados.

28. Duas estações eléctricas vão fornecer energia a uma certa região da forma mais económica possível. O custo total de operação das duas estações é dado por

$$f(x_1, x_2) = 0.1 + 0.01x_1x_2 + 0.15x_2^4 + 0.01x_1^4 - 0.25(x_1 + x_2 - 100)$$

em que  $x_1$  é a energia fornecida pela primeira estação e  $x_2$  é a energia fornecida pela segunda estação. Determine os valores de  $x_1$  e  $x_2$  por forma a minimizar o custo total de operação das duas estações. Utilize como aproximação inicial o ponto  $(2.0, 0.5)$  e  $\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = 0.2$  (uma iteração).

29. A tabela seguinte apresenta a população dos Estados Unidos da América (em milhões) de 1940 a 1980.

Ano	1940	1950	1960	1970	1980
População	132.165	151.326	179.323	203.302	226.542

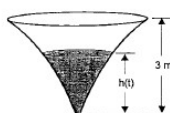
- (a) Construa o polinómio interpolador de Newton de grau 4 para estimar a população no ano 1965.
- (b) A população em 1930 foi 123.203. Qual a precisão do valor calculado na alínea a)?
30. Considere a seguinte tabela da função  $f(x)$

$x$	-2	-1	0	1	2
$f(x)$	$a$	2	1	0	4

$a \in \mathbb{R}.$

Determine  $a$  de modo a que o polinómio interpolador de  $f(x)$  nos pontos da tabela dada seja de grau 3. Justifique.

31. A figura representa um reservatório com 2.1 metros de altura. Considere que, no início, o reservatório está cheio de água. Num certo instante abre-se a válvula e o reservatório começa a ser esvaziado.



A altura (em metros) de água do reservatório,  $t$  horas depois de este ter começado a ser esvaziado, é dada por  $h(t)$ , de acordo com a tabela

Instante, $t_i$	0	1	4	7	8	10	14
Altura de água, $h(t_i)$	2.1	2.0	1.8	1.5	1.4	1.1	0

Use um polinómio interpolador de grau 2 para estimar a altura de água no reservatório ao fim de 5 horas.

30. Considere a seguinte tabela da função  $f(x)$

$x$	$-2$	$-1$	$0$	$1$	$2$
$f(x)$	$a$	$2$	$1$	$0$	$4$

$a \in \mathbb{R}.$

Determine  $a$  de modo a que o polinómio interpolador de  $f(x)$  nos pontos da tabela dada seja de grau 3. Justifique.

$x$	$f(x)$
$-2$	$a$
$-1$	$2$
$0$	$1$
$1$	$0$
$2$	$4$

$2-a$

$\frac{3-a}{-2}$

$\frac{3-a}{6}$

$-1$

$0$

$2,5$

$\frac{3-a}{6}$

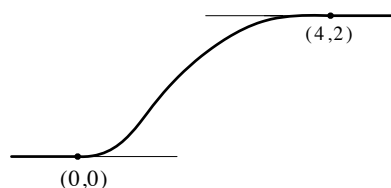
$0,8\bar{3}$

$\implies \frac{3-a}{6} = 0,8\bar{3} \iff a = -2$

32. A tabela seguinte apresenta a velocidade de queda de um paraquedista em função do tempo:

<i>tempo (seg)</i>	1	3	5	7	20
<i>vel (cm/seg)</i>	800	2310	3090	3940	8000

- (a) Estime o valor da velocidade no instante de tempo  $t = 10\text{seg}$ , utilizando um polinómio interpolador de grau 3.
- (b) Calcule uma aproximação do erro cometido na alínea anterior.
33. Pretende-se construir um desvio entre duas linhas de caminho de ferro paralelas. O desvio deve corresponder a um polinómio de grau três que une os pontos  $(0,0)$  e  $(4,2)$ , como mostra a figura



Com base nos quatro pontos da tabela

$x_i$	-1	0	4	5
$f_i = f(x_i)$	0.4375	0	2	1.5625

- construa uma *spline* cúbica natural para definir a trajetória do desvio e calcular  $f(2)$ .
34. A resistência de um certo fio de metal,  $f(x)$ , varia com o diâmetro desse fio,  $x$ . Foram medidas as resistências de 6 fios de diversos diâmetros:

$x_i$	1.5	2.0	2.2	3.0	3.8	4.0
$f(x_i)$	4.9	3.3	3.0	2.0	1.75	1.5

Como se pretende estimar a resistência de um fio de diâmetro 1.75, use uma “spline” cúbica natural para calcular esta aproximação.

32. A tabela seguinte apresenta a velocidade de queda de um paraquedista em função do tempo:

<i>tempo (seg)</i>	1	3	5	7	20
<i>vel (cm/seg)</i>	800	2310	3090	3940	8000

- (a) Estime o valor da velocidade no instante de tempo  $t = 10\text{seg}$ , utilizando um polinómio interpolador de grau 3.
- (b) Calcule uma aproximação do erro cometido na alínea anterior.

grau 3  $\rightarrow$  4 pontos

$f(10) = ?$

$x$	$f(x)$	pol. int. Newton usando DD
$x_0 \rightarrow 3$	2310	
$x_1 \rightarrow 5$	3090	$\frac{3090-2310}{5-3} = 390$
$x_2 \rightarrow 7$	3940	$\frac{3940-3090}{7-5} = 425$
$x_3 \rightarrow 20$	8000	$\frac{8000-3940}{20-7} = 312,3097$
$x \rightarrow 1$	800	DD1

$\rightarrow$  fórmula no formulário

DD1  $\rightarrow \frac{8000-800}{20-1} = 378,9474$

DD2  $\rightarrow \frac{425-312,3097}{5-20} = -7,5128$

DD3  $\rightarrow \frac{8,75-(-7,5128)}{3-20} = -0,95664$

DD4  $\rightarrow -0,8651$

$$P_3(x) = 2310 + \frac{(x-3)(390)}{1} + \frac{(x-3)(x-5)(8,75)}{2} + \frac{(x-3)(x-5)(x-7)(-0,95664)}{6}$$

$$P_3(10) = 5245,8 \approx f(10)$$

erro  $\Rightarrow R_3(x) = \frac{(x-3)(x-5)(x-7)(x-20)DD4}{4!}$

$\rightarrow R_3(10) = \frac{7 \cdot 5 \cdot 3 \cdot (-10) \cdot (-0,8651)}{24} = 973,9191$

$$f(10) = 5245,8 \pm 973,9191$$



35. A distância requerida para parar um automobilista é função da velocidade a que ele se desloca. Os seguintes dados experimentais foram recolhidos para quantificar essa relação:

<i>vel</i> ( <i>Km/h</i> )	15	20	25	30	40	50
<i>distância</i> ( <i>m</i> )	16	20	34	40	60	90

Estime a distância necessária para parar um carro que se desloca a uma velocidade de 45 *Km/h*, utilizando uma spline cúbica completa.

36. Num certo campeonato regional de futebol há 7 equipas. No fim da temporada, o número de pontos ganhos e o número de golos sofridos por 6 das equipas estão representados na tabela

Equipa	F.C.Sol	F.C.Lá	S.C.Gato	Nova F.C.	Vila F.C.	F.C.Chão
Nº de pontos, $x_i$	10	12	18	27	30	34
Nº de golos, $f(x_i)$	20	18	15	9	12	10

- (a) Use uma spline cúbica completa para descrever a relação entre o número de pontos e o número de golos sofridos pelas equipas no campeonato. Sabendo que a 7ª equipa terminou o campeonato com 29 pontos, estime o número de golos que terá sofrido.
- (b) Calcule uma estimativa do erro de truncatura cometido na alínea anterior.
37. Considere a função  $f(x)$  definida por

$x$	-2	0	1	2
$f(x)$	-8	0	1	8

Sabendo que  $s_3^{1''}(-2) = 12$  e  $s_3^{n''}(2) = 20$  estime o valor de  $f(-1)$  através de uma 'spline' cúbica.

38. A seguinte função segmentada  $s_3(x)$  no intervalo  $[0, 3]$ , poderá representar uma spline cúbica? Justifique.

$$s_3(x) = \begin{cases} s_3^1(x) = 3x^3 - x^2 + x - 2, & 0 \leq x \leq 1 \\ s_3^2(x) = 2x^3 + 2x - 3, & 1 \leq x \leq 3 \end{cases}$$

39. Um braço de um robô deve passar nos instantes  $t_0, t_1, t_2, t_3, t_4$  e  $t_5$  por posições pré-definidas  $\theta(t_0), \theta(t_1), \theta(t_2), \theta(t_3), \theta(t_4)$  e  $\theta(t_5)$ , onde  $\theta(t)$  é o ângulo (em radianos) que o braço do robô faz com o eixo dos X's.

$t_i$	1	2	3	4	5	6
$\theta_i = \theta(t_i)$	1	1.25	1.75	2.25	3	3.15

- (a) Com base nos dados da tabela, aproxime a trajectória do robô por uma *spline* cúbica completa. Indique também uma aproximação da posição do robô no instante  $t = 1.5$ .
- (b) Calcule uma aproximação à velocidade do robô no instante  $t = 1.5$
- (c) Calcule um limite superior do erro de truncatura que se comete quando se usa a derivada da *spline* calculada para aproximar a velocidade do robô.
40. Foram registados os consumos,  $f(x_i)$ , de um aparelho em determinados instantes,  $x_i$  (em segundos):

$x_i$	0	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6	3.6	6.6	9.6	9.8	10
$f(x_i)$	0	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6	0.65	0.6	0.6	0.7	0.8

- (a) Estime o consumo total ao fim de 10 segundos.
- (b) Estime o erro cometido no intervalo  $[0.6, 9.6]$ .
41. A função  $F(t)$  surge na determinação da tensão à superfície de um líquido que rodeia uma bolha esférica de gás:

$$F(t) = \int_0^t \frac{P(x)}{Q(x)} dx \quad \text{para } 0 \leq t \leq 1$$

em que

$$P(x) = 3 + 3x + x^2$$

$$Q(x) = 3 + 6x + 6x^2 + 2x^3$$

Determine  $F(1)$  considerando apenas os seguintes valores de  $x$  no cálculo do integral

$$0, 0.25, 0.5, 0.6, 0.7, 0.8, 0.9, 1.0$$

42. O comprimento do arco da curva  $y = f(x)$  ao longo do intervalo  $[a, b]$  é dado por

$$\int_a^b \sqrt{1 + (f'(x))^2} dx.$$

Calcule uma aproximação numérica ao comprimento do arco da curva  $f(x) = e^{-x}$  no intervalo  $[0, 1]$ , usando 5 pontos igualmente espaçados no intervalo.

43. A resposta de um transdutor a uma onda de choque causada por uma explosão é dada pela função  $F(t) = 8e^{-t} \frac{I(a)}{\pi}$  para  $t \geq a$ , em que

$$I(a) = \int_1^2 f(x, a) dx \quad \text{com } f(x, a) = \frac{e^{ax}}{x}$$

Calcule  $I(1)$  usando a fórmula composta do trapézio com erro de truncatura inferior a 0.05.

44. O valor de  $\pi$  pode ser calculado através do seguinte integral:

$$\pi = \int_0^1 \frac{4}{1+x^2} dx.$$

Estime o valor de  $\pi$  utilizando a fórmula composta do trapézio com erro de truncatura inferior a 0.01.

45. Determine uma aproximação ao valor do integral definido

$$\int_0^1 \left( x^2 + \frac{1}{x+1} \right) dx$$

através da fórmula de Simpson, com um erro de truncatura, em valor absoluto, inferior a 0.0005

46. O tempo  $t$  (seg) para um carro acelerar desde 40 mph até a velocidade  $v$  (mph) é dado, para seis valores de  $v$ , pela seguinte tabela:

$i$	1	2	3	4	5	6
$v_i(\text{mph})$	40	45	50	55	60	70
$t_i(\text{seg})$	0.00	0.69	1.40	2.15	3.00	3.90

Estime a distância  $x$  ( $ft$ ) que o carro percorre desde a aceleração de  $40\text{ mph}$  até  $70\text{ mph}$ , através da seguinte expressão:

$$x = \frac{22}{15} \left[ t_6 v_6 - \int_{40}^{70} t \, dv \right]$$

Estime o erro de truncatura cometido no período  $[60, 70]$ .

47. O trabalho realizado por uma força  $F(x)$  cujo ângulo entre a direcção do movimento e a força é dado por  $\theta(x)$ , pode ser obtido pela seguinte fórmula:

$$W = \int_{x_0}^{x_n} F(x) \cos(\theta(x)) dx$$

em que  $x_0$  e  $x_n$  são a posição inicial e final, respectivamente.

- (a) Calcule a melhor aproximação ao trabalho realizado,  $W$ , ao puxar um bloco da posição  $0\text{ ft}$  até à posição  $30\text{ ft}$  sabendo que a força aplicada e o ângulo usado são dados na tabela seguinte.

$x$	0	2.5	5	15	20	25	30
$F(x)$	0.0	7.0	9.0	14.0	10.5	12.0	5.0
$\theta(x)$	0.5	0.9	1.4	0.9	1.3	1.48	1.5

- (b) Calcule uma estimativa do erro de truncatura cometido no intervalo  $[5, 15]\text{ft}$ .

48. O cálculo da entalpia,  $H$  ( $J\text{ mol}^{-1}$ ), para um determinado composto, pode ser realizado através do seguinte integral

$$H(T) = \int_{T_{ref}}^{T_f} C_p(T) \, dT$$

onde os limites inferior e superior do integral são, respectivamente, a temperatura de referência e a temperatura final para a qual se pretende calcular a entalpia. Para o Azoto (supondo comportamento de gás ideal), a variação da capacidade calorífica,  $C_p(T)$  ( $J\text{ mol}^{-1}\text{ K}^{-1}$ ), com a temperatura  $T$  (K), é dada por:

$$C_p(T) = 31.150 - 1.356 \times 10^{-2}T + 2.679 \times 10^{-5}T^2 - 1.168 \times 10^{-8}T^3.$$

Considere a temperatura de referência  $T_{ref} = 273.0$ .

- (a) Estime o valor da entalpia do Azoto para  $T_f = 278$ , utilizando a fórmula composta do trapézio com erro de truncatura em valor absoluto inferior a  $0.15 \times 10^{-4}$ .
- (b) Considerando o mesmo espaçamento  $h$  usado na alínea anterior, calcule, usando a fórmula de integração numérica mais adequada, o seguinte integral:

$$\int_{T_{ref}}^{T_f-h} C_p(T) dT$$

**NOTA:** use  $h = 1$  caso não tenha resolvido a alínea anterior.

- (c) Comente a precisão do valor calculado na alínea anterior.

49. A velocidade de subida de um foguetão pode ser calculada com base na seguinte fórmula

$$v(t) = u \ln \left( \frac{m_0}{m_0 - qt} \right) - gt$$

onde  $v(t)$  é a velocidade de subida,  $u$  é a velocidade a que o combustível é expelido relativamente ao foguetão,  $m_0$  é a massa inicial do foguetão no instante  $t = 0$ ,  $q$  é a taxa de consumo do combustível e  $g$  é a constante gravitacional (assuma  $g = 9.8ms^{-1}$ ). Se  $u = 2200ms^{-1}$ ,  $m_0 = 160000kg$  e  $q = 2680kgs^{-1}$ ,

- (a) indique quantos pontos seriam necessários para determinar a altitude do foguetão, com erro inferior a  $100m$ , após voar  $30s$  se fosse aplicar uma regra do trapézio.
- (b) determine a altitude após  $30s$  usando 15 pontos.

50. Pretende-se calcular

$$\int_1^2 \frac{1}{x} dx$$

com erro, em valor absoluto, inferior a  $\frac{1}{600}$  usando a fórmula composta do trapézio.

- (a) Qual deve ser o passo escolhido?
- (b) Baseado na alínea a) calcule uma estimativa do integral.

51. A velocidade vertical ( $ms^{-1}$ ) de um foguetão é dada por

$$v(t) = \begin{cases} 10t^2, & 0 \leq t \leq 10 \\ 1000 - 5t, & 10 < t \leq 20 \\ 45t + 2(t - 20)^2, & 20 < t \leq 30 \end{cases}$$

(a) Calcule a distância percorrida ao fim de 30s com base nos seguintes pontos:

$$0 \quad 5 \quad 10 \quad 12 \quad 14 \quad 16 \quad 18 \quad 20 \quad 22.5 \quad 25 \quad 27.5 \quad 30 \quad .$$

(b) Calcule uma estimativa do erro de truncatura cometido no cálculo da distância. Comente o valor obtido.

52. A função distribuição normal acumulada é uma função importante em estatística. Sabendo que

$$F(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^z e^{-x^2/2} dx = \frac{1 + \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-z}^z e^{-x^2/2} dx}{2}$$

Calcule uma estimativa de  $F(1)$ , usando a fórmula composta do trapézio com 5 pontos no cálculo do integral.

53. Suponha que na construção de um templo egípcio com 150 m de altura foram necessários muitos anos, durante os quais cada operário realizou  $1.742 \times 10^6$  Kg m de quantidade de trabalho. Sabe-se que a secção transversal horizontal do edifício, à altura  $x$ , é um quadrado cuja área é dada por  $A(x) = \frac{9}{4}(200 - x)^2$ .

Através da fórmula que dá a quantidade total de trabalho realizado

$$T = \rho \int_a^b x A(x) dx$$

em que  $\rho = 2014$  Kg/m<sup>3</sup> representa a densidade da rocha, calcule:

- (a)  $T$ , usando separadamente duas fórmulas compostas de integração, com base em 5 pontos;
- (b) os erros de truncatura cometidos na alínea a) e comente os resultados;

(c) o número de operários utilizados na construção do templo.

54. Um carro inicia a sua marcha num dia frio de inverno e um aparelho mede o consumo de gasolina verificado no instante em que percorreu  $x$  Km. Os resultados obtidos foram:

$x$ distância em Km	0	1.25	2.5	3.75
$f(x)$ consumo em $\frac{l}{Km}$	0.260	0.208	0.172	0.145

- (a) Construa um *modelo quadrático*, para descrever o consumo de gasolina em função da distância percorrida, usando a técnica dos mínimos quadrados.
- (b) Avalie o modelo.
55. A docente responsável pela disciplina de Métodos Numéricos I registou para 8 alunos, os resultados obtidos nos mini-testes e a respectiva classificação final obtida na disciplina

mini-testes	1.2	1.75	1.1	2.0	0.5	0.8	1.0	1.5
classificação final	16	18	16	19	10	11	14	16

- (a) Determine no sentido dos mínimos quadrados a recta que melhor aproxima os dados da tabela.
- (b) Qual será a estimativa do resultado a ter nos mini-testes para poder obter uma classificação final de 17?
56. A velocidade do som na água varia com a temperatura de acordo com a tabela abaixo:

Temperatura ( $^{\circ}C$ )	86.0	93.3	98.9	104.4	110.0
Velocidade ( $m/s$ )	1552	1548	1544	1538	1532

Pretende-se estimar a velocidade do som na água a uma temperatura de  $100^{\circ}C$ , utilizando:

- (a) um polinómio interpolador de Newton de grau dois;
- (b) um polinómio de grau dois no sentido dos Mínimos Quadrados, usando os mesmos pontos que utilizou na alínea a).

Comente e justifique os resultados.

57. A resistência de um certo fio (de uma certa substância),  $f(x)$ , varia com o diâmetro desse fio,  $x$ . A partir de uma experiência registaram-se os seguintes valores:

$x_i$	1.5	2.0	3.0	4.0
$f(x_i)$	4.9	3.3	2.0	1.5

Foram sugeridos os seguintes modelos para ajustar os valores de  $f(x)$ , no sentido dos mínimos quadrados:

- uma recta
  - o modelo linear:  $M(x, c_1, c_2) = \frac{c_1}{x} + c_2x$
- (a) Calcule a recta.
  - (b) Calcule o modelo  $M(x)$ .
  - (c) Qual dos modelos escolheria? Justifique a sua escolha

58. Em sistemas de transportes urbanos, o preço das viagens depende da procura. Quanto maior é a procura,  $x$ , mais baixo é o preço,  $P(x)$  (em euros). Os registos obtidos nos últimos quatro meses foram:

$x_i$	30	35	45	50
$P(x_i)$	12	12	10	8

Pretende-se construir um modelo que descreva o comportamento de  $P$  em função de  $x$ . Com base no modelo  $M(x)$



$$M(x; c_1, c_2) = c_1 x + c_2 e^{-x},$$

determine  $c_1$  e  $c_2$  de tal forma que

$$\min_{c_1, c_2} \sum_{i=1}^4 (P(x_i) - M(x_i))^2.$$

59. A tabela seguinte contém os registos efectuados dos valores médios da radiação solar numa região de Portugal:

mês ( $x_i$ )	J(1)	F(2)	M(3)	A(4)	M(5)	J(6)	J(7)	A(8)	S(9)	O(10)	N(11)	D(12)
Radiação	122	-	188	-	-	270	-	-	-	160	-	120

- (a) Ajuste o modelo  $M(x) = c_1 x + c_2 \sin(x)$  aos valores da tabela, no sentido dos mínimos quadrados;
- (b) Use o modelo encontrado para prever a radiação média no mês de Agosto;
- (c) Avalie o modelo.
60. O custo de investimento ( $C$ ) em construção civil de um arejador num sistema de lamas activadas numa Estação de Tratamento de Águas Residuais depende do volume ( $v$ ) do tanque da seguinte forma

$$C(v; c_1, c_2) = c_1 v^{c_2}$$

em que  $c_1$  e  $c_2$  são parâmetros a estimar pela técnica dos mínimos quadrados a partir dos dados recolhidos de uma construtora

$v_i$ (em mil $m^3$ )	0.4	0.6	1	1.3
$C_i$ (em milhares de euros)	87	160	190	366

Estime os parâmetros  $c_1$  e  $c_2$  do modelo dado anteriormente, recorrendo à seguinte transformação que transforma o modelo dado num modelo polinomial de grau um:

$$\ln(C(v; c_1, c_2)) = \ln(c_1) + c_2 \ln(v)$$

$$\overline{C} = \overline{c_1} + c_2 \overline{v}$$

Comece por calcular os parâmetros  $\bar{c}_1$  e  $c_2$  do modelo polinomial usando a técnica dos mínimos quadrados, com base nos valores da tabela

$\bar{v}_i = \ln(v_i)$	-0.916	-0.511	0	0.262
$\bar{C}_i = \ln(C_i)$	4.466	5.075	5.247	5.903

e posteriormente apresente os valores solicitados.

61. Dada a função  $f(x) = x^3 - 6x^2 + 9x + 4$  calcule os seus pontos estacionários e classifique-os.
62. Na cidade de Ulam Bator surgiu uma epidemia de gripe asiática. A evolução da doença foi descrita pela fórmula

$$P(t) = e^{0.4t - 0.01t^2}$$

onde  $P(t)$  representa a percentagem de pessoas doentes e  $t$  é o tempo em dias.

Usando o método DSC (baseado em interpolação quadrática), calcule o pior momento da epidemia identificando a percentagem de doentes nesse momento. Inicie o processo iterativo com  $t_1 = 30$  dias. Considere ainda  $\delta = 2$ ,  $M = 0.05$  e  $\varepsilon = 0.1$  (duas iterações). Use 4 casas decimais nos cálculos.

63. Uma empresa precisa de usar  $x_1$  horas de equipamento ao preço (unitário) de 6 unidades monetárias (u.m.) e  $x_2$  horas de mão-de-obra ao preço (unitário) de 4 u.m. para colocar no mercado um certo número fixo de produtos. As horas utilizadas de equipamento e mão-de-obra verificam a relação

$$x_1^2 + x_1x_2 = 2500.$$

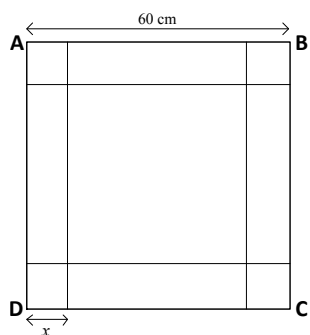
Calcule  $x_1$  e  $x_2$  de modo a minimizar os custos da empresa.

- a) Comece por formular esta situação como um problema de otimização sem restrições de uma só variável (por exemplo, em função de  $x_1$ ).

- b) Resolva o problema resultante usando o método DSC (baseado em interpolação quadrática). Na implementação do DSC inicie o processo iterativo com a aproximação inicial  $x_1 = 50$ . Use  $\delta = 5$ ,  $\varepsilon = 0.05$  e  $M = 0.1$ .

Com a aproximação calculada identifique os valores obtidos para as duas variáveis e o custo mínimo.

64.  $[ABCD]$  representa uma cartolina quadrada de lado 60 cm. Pretende-se montar uma caixa de volume máximo cortando em cada canto um quadrado de lado  $x$ , como mostra a figura.

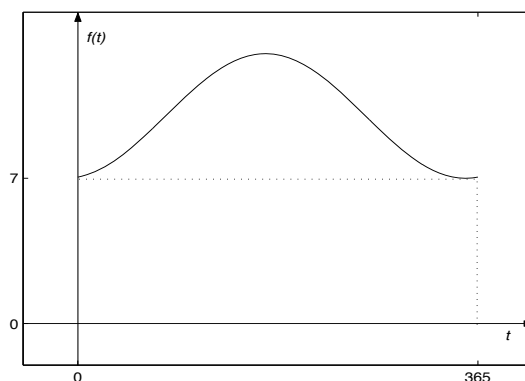


Usando o método DSC (baseado em interpolação quadrática), calcule  $x$ . Use duas casas decimais nos cálculos e inicie o processo iterativo com  $x_1 = 5$ . Considere ainda  $\delta = 1$ ,  $M = 0.5$  e  $\varepsilon = 0.5$  (duas iterações).

65. A função

$$f(t) = 10 + 3 \sin\left(\frac{2\pi}{365}(t - 80)\right)$$

dá o número de horas com luz do dia numa certa região do país.



O dia 1 de Janeiro corresponde a  $t = 0$ . Determine o dia do ano ( $t$ ) em que o número de horas com luz do dia é máximo, usando o método DSC (baseado em interpolação quadrática). Use 2 casas decimais nos cálculos,  $\pi = 3.14$  e inicie o processo iterativo com  $t_1 = 200$ . Considere ainda  $\delta = 10$ ,  $M = 0.1$  e  $\varepsilon = 2$  (duas iterações). Use radianos nos cálculos.

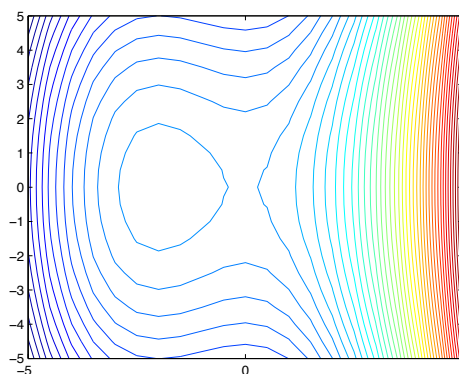
66. Dada a função  $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  definida por

$$f(x_1, x_2) = x_1^2(1 - x_1)^2 + x_1x_2$$

verifique se tem maximizantes, minimizantes e/ou pontos sela.

67. Considere a função

$$f(x, y) = 3x^2 - y^2 + x^3$$



Mostre que a função dada tem um máximo local em  $(-2, 0)$ , tem um ponto sela em  $(0, 0)$ ; e não tem mínimos.

68. Dada a função  $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$  definida por

$$f(x_1, x_2, x_3) = 5x_1^2 + 2x_2^2 + x_3^4 - 32x_3 + 6x_1x_2 + 5x_2$$

verifique que ela tem apenas um ponto estacionário. Classifique-o.

69. Mostre que qualquer ponto da linha  $x_2 - 2x_1 = 0$  é um mínimo de  $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  definida por

$$f(x_1, x_2) = 4x_1^2 - 4x_1x_2 + x_2^2.$$

70. Considere a função

$$f(x_1, x_2) = -\sin(x_1 - 1) - x_2^4.$$

Implemente, no máximo, duas iterações do método de segurança de Newton para determinar o máximo da função  $f(x_1, x_2)$ . Considere  $\eta = 10^{-6}$ ,  $\mu = 10^{-6}$ ,  $\varepsilon = 1$  e  $x^{(1)} = (1, 1)^T$ .

71. A soma de três números  $(x_1, x_2$  e  $x_3)$  positivos é igual a 40. Determine esses números de modo que a soma dos seus quadrados seja mínima.

Use a relação da soma para colocar  $x_3$  em função das outras 2 variáveis. Formule o problema como um problema de otimização sem restrições.

A partir da aproximação inicial  $(x_1, x_2)^{(1)} = (10, 10)$ , use o método de Segurança de Newton (com  $\eta = 0.00001$ ) para calcular esses números, considerando no critério de paragem  $\varepsilon = 0.001$ . Na condição de Armijo tome  $\mu = 0.001$ .

72. Uma empresa fabrica e comercializa dois tipos de computadores portáteis. O custo de fabrico de cada um deles decresce à medida que o número de unidades produzidas aumenta e é dado pelas seguintes relações empíricas:

$$c_1 = 5 + \frac{1500}{x_1} \quad c_2 = 7 + \frac{2500}{x_2},$$

em que  $x_1$  e  $x_2$  são o número de unidades de cada um dos portáteis produzidos. O preço de venda dos computadores é tanto menor quanto maior for o número de unidades produzidas, de acordo com as seguintes relações:

$$p_1 = 15 - 0.001x_1 \quad \text{e} \quad p_2 = 25 - 0.0015x_2.$$

- a) Formule o problema de otimização que consiste em determinar quantas unidades de cada computador a firma deve produzir de modo a maximizar os lucros.

70 - Isto é apenas para fingir que faço alguma coisa nas aulas de MNOI. Eu sou o Pedro e sou um viciado em Pokéto League, Overwatch 1 e 2, Ludo, Football Manager, Minecraft, Twitch, Felipe Neto e na minha namorada.

$$\nabla f(\overset{\text{Eu}}{x_1}, \overset{\text{Namorada}}{x_2}) = y \quad y = \{0, 1\}$$

↓  
relacionante

Eu sou o Pedro e adoro APPLE, mas agora ortou com inveja da minha irmã, porque ela vai ter o novo iPad Air, tem bordas, que é muito fiiiio.

Em relação aos meus amigos, só o Rodrigo é que lo aparece, embora que ele vai trair a nossa amizade para ficar com o Rush no trabalho de SO, no ano 2022/2023.

Por fim, adoro trabalhos de TI, nomeadamente, os stories, pois incentivam ao trabalho autónomo e em ajudas.

Trabalhos do ano 2023/2022:

BC	IO	POO	SO
Riana	EU	Riana	Rodrigo
Inês	Ricardo	Riana M.	EU
EU	Riana	EU	Riana M.
	Rodrigo		

b) Resolva o problema usando o método de Segurança de Newton (com  $\eta = 0.00001$ ). Considere a seguinte aproximação inicial  $(x_1, x_2)^{(1)} = (20, 30)$  e  $\varepsilon = 0.001$ . Na condição de Armijo tome  $\mu = 0.001$ .

c) Com base na aproximação calculada na alínea anterior ao número de computadores produzidos, a empresa terá lucro?

73. Três estações elétricas vão fornecer energia a uma certa região da forma mais econômica possível. Os custos individuais de operação de cada uma das estações são dados por

$$f_1 = 0.1 + 0.25x$$

$$f_2 = 0.08 + 0.12y + 0.00125y^2$$

$$f_3 = 0.05 + 0.09z + 0.001z^2 + 0.0001z^3$$

em que  $x$ ,  $y$  e  $z$  são as energias fornecidas pelas três estações (em MWatt). Determine os valores de  $x$ ,  $y$  e  $z$  que minimizam o custo total, se a energia a ser fornecida for de 100 MWatt, recorrendo ao método de segurança de Newton.

Como valores iniciais use  $(x, y)^{(1)} = (30, 50)$ , no critério de paragem considere  $\varepsilon = 0.05$  e tome  $\eta = 0.0001$ . Como estratégia de procura unidimensional utilize o critério de Armijo com  $\mu = 0.01$ . Use a relação relacionada com a energia a fornecer para eliminar uma das variáveis, por exemplo,  $x = 100 - y - z$ .

74. Numa situação monopolista, o rendimento de uma empresa face à venda de um produto ou serviço depende do nível de produção  $z$ . O rendimento é uma função crescente de  $z$  mas tende em direção a uma assíntota assim que o mercado fica saturado.

Considere a seguinte função rendimento

$$R(z) = z^2/(1 + z^2)$$

que depende da produção  $z$  dada por  $z = x_1^{1/2}x_2^{1/2}$ , em que  $x_1$  representa o capital e  $x_2$  o trabalho.

Supondo que a função lucro é dada por

$$\pi(x_1, x_2) = R(z) - 0.04x_1 - 0.06x_2$$

calcule o lucro máximo que a empresa pode ter. Use o método quasi-Newton (com fórmula BFGS). Como aproximação inicial considere o ponto  $(2, 1)$ . Use na paragem do processo iterativo  $\varepsilon = 0.1$ . No critério de Armijo use  $\mu = 0.001$ .

75. Suponha que pretendia representar um número  $A$  positivo na forma de um produto de quatro fatores positivos  $x_1, x_2, x_3$  e  $x_4$ . Para  $A = 2401$ , determine esses fatores de tal forma que a sua soma seja a menor possível.

Formule o problema como um problema de otimização sem restrições em função das 3 variáveis  $x_1, x_2$  e  $x_3$ .

A partir da aproximação inicial  $(x_1, x_2, x_3)^{(1)} = (6, 7, 5)$ , use o método quasi-Newton (com fórmula DFP), para calcular esses fatores. Na paragem do processo iterativo use  $\varepsilon = 0.1$ . No critério de Armijo use  $\mu = 0.001$ .

76. O lucro, em milhares de euros, da colocação de um sistema elétrico é dado por

$$\mathcal{L}(x_1, x_2) = 20x_1 + 26x_2 + 4x_1x_2 - 4x_1^2 - 3x_2^2$$

em que  $x_1$  e  $x_2$  designam, respectivamente, o custo da mão de obra e do material. Calcule o lucro máximo usando o método quasi-Newton baseado na fórmula DFP, considerando na paragem do processo iterativo  $\varepsilon = 0.0001$ . Tome a seguinte aproximação inicial  $(0, 0)$ . No critério de Armijo use  $\mu = 0.001$ .

77. Considere um sistema de duas molas em que é aplicada uma força de deformação  $P$  com duas componentes  $P_1$  e  $P_2$ . Pretende-se determinar os deslocamentos  $x_1$  e  $x_2$  das molas que minimizam a energia potencial total  $EP$ , definida pela seguinte expressão:

$$EP(x_1, x_2) = \frac{1}{2}K_1 \left( \sqrt{x_1^2 + (l_1 - x_2)^2} - l_1 \right)^2 + \frac{1}{2}K_2 \left( \sqrt{x_1^2 + (l_2 + x_2)^2} - l_2 \right)^2 - P_1x_1 - P_2x_2.$$

Sabendo que as características do sistema são:  $l_1 = 10$ ,  $l_2 = 10$ ,  $K_1 = 8$ ,  $K_2 = 1$ ,  $P_1 = 5$  e  $P_2 = 5$ , resolva o problema através do método de Nelder-Mead com  $\varepsilon = 0.5$  (ou duas iterações). Considere os seguintes pontos iniciais:  $(5, 2)$ ,  $(3.25, 2.5)$  e  $(0, 0)$ .



78. Calcule o mínimo da função  $f(x)$  definida por

$$f(x_1, x_2) = \max((x_1 - 1)^2, x_1^2 + 4(x_2 - 1)^2)$$

implementando o método de Nelder-Mead, tomando para conjunto inicial os vetores

$$\left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\rangle.$$

e  $\varepsilon = 0.5$ .

79. Calcule o mínimo da função  $f(x)$  definida por

$$f(x_1, x_2) = \max(|x_1|, |x_2 - 1|)$$

implementando o método de Nelder-Mead, tomando para conjunto inicial os vetores

$$\left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0.5 \\ 0 \end{pmatrix} \right\rangle.$$

e  $\varepsilon = 0.5$ .

80. Calcule o máximo da seguinte função não diferenciável

$$f(x_1, x_2) = -|x_1 x_2| - x_2^2$$

usando o método de Nelder-Mead. Inicie o processo iterativo com o seguinte simplex:

$$\left\langle \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \end{pmatrix} \right\rangle.$$

Para a paragem do processo iterativo use  $\varepsilon = 0.5$  ou  $n_{\max} = 4$ .