Elementos de Probabilidades - Folha 1

---

1. Para cada uma das experiências aleatórias abaixo indicadas, indentifique o espaço amostral, dê exemplos de acontecimentos (pelo menos um elementar e um composto, que não seja o universal) e identifique os correspondentes subconjuntos do espaço amostral. Calcule ainda a probabilidade de cada um dos acontecimentos que indicou.

   (a) Lançamento de uma moeda equilibrada duas vezes consecutivas;

   (b) Lançamento de uma moeda seguido do lançamento de um dado, ambos equilibrados;

   (c) Lançamento de um dado equilibrado três vezes consecutivas.

   Para cada uma das experiências dê ainda exemplos de dois acontecimentos disjuntos (ambos diferentes de $\varnothing$).

2. Considere a experiência aleatória que consiste em lançar um dado viciado em que a probabilidade de sair face i é o dobro da probabilidade de sair a face $i-1$, i, $i=2,\ldots,6$. Seja A o acontecimento "saiu uma face par", B o acontecimento "saiu uma face com um número múltiplo de 3" e C o acontecimento "saiu uma face ímpar".

   (a) Identifique o espaço amostral desta experiência e determine a probabilidade de cada um dos acontecimentos elmentares.

   (b) Pode usar a probabilidade de Laplace para o cálculo de probabilidades de acontecimentos decorrentes desta experiência? Justifique.

   (c) Identifique os subconjuntos do espaço amostral correspondentes aos acontecimentos A, B, $\overline{B}$, C, $A\cap B$, $A\cup B$, $A\setminus B\equiv A\cap\overline{B}$, $A\cup B\cup C$ e determine as respetivas probabilidades.
   Obs.: $\overline{B}$ denota o complementar de B, i.e., $\overline{B}=\{\omega\in\Omega:\omega\notin B\}$. É o subconjunto de Ω formado pelos elementos que não pertencem a B.

3. Considere a experiência aleatória que consiste em extrair, ao acaso e sem reposição, 3 bolas de uma caixa que contém 2 bolas brancas e 3 bolas vermelhas.

   (a) Identifique os acontecimentos:

   i) "todas as bolas extraídas são brancas"; iii) "saiu pelo menos uma bola vermelha";
   ii) "não saiu qualquer bola vermelha"; iv) "saíram no máximo duas bolas brancas".

   (b) Considere os seguintes acontecimentos:

   - A: "a primeira bola extraída é branca";
   - B: "a segunda bola extraída é branca";
   - C: "a terceira bola extraída é branca".

   Escreva os acontecimentos abaixo indicados usando operações entre A, B e C:

   i) D: "as duas primeiras bolas são brancas"; iii) F: "saiu pelo menos uma bola branca";
   ii) E: "as duas últimas bolas são brancas"; iv) G: "saiu uma e uma só bola branca".

1.

a) espaço amostral = {(cara, croa), (cara, cara), (croa, cara)(croa, croa)} =

= {(cara, croa)} × {(cara, croa)}

$P(A) = \frac{\#A}{\#\Omega}$

acontecimento elementar: A = {(cara, croa)} ⇒ $P(A) = \frac{1}{4}$

acontecimento composto: B = {(cara, croa), (croa, croa)} ⇒ $P(B) = \frac{1}{2}$

B - sair croa no segundo lançamento → acontecimento composto

A - sair croa no primeiro lançamento e cara no segundo → acontecimento elementar

b)

Ω = {(cara, 1), (cara, 2), (cara, 3), (cara, 4), (cara, 5), (cara, 6)
(croa, 1)(croa, 2), (croa, 3), (croa, 4), (croa, 5), (croa, 6)}

A: sair cara e 1 = {(cara, 1)} → acontecimento elementar

B: sair 1 no lançamento do dado = {(cara, 1), (croa, 1)}

C: sair um numero impar = {(cara, 1), (croa, 1), (cara, 3)(croa, 3)
(cara, 5), (croa, 5)}

→ acontecimentos compostos

$P(A) = \frac{1}{12}$ $P(B) = \frac{1}{6}$ $P(C) = \frac{1}{2}$

c)

Ω = {1, 2, 3, 4, 5, 6} × {1, 2, 3, 4, 5, 6} × {1, 2, 3, 4, 5, 6}

A: sair 1 nos três lançamentos = {(1, 1, 1)} $P(A) = \frac{1}{36}$

B: sair 1 no primeiro lançamento e 2 no segundo = {...} = $P(B) = \frac{1}{6}$

2.

a) $P(2) = 2 \cdot P(1)$

$P(3) = 2 \cdot P(2) = 4 \cdot P(1)$

$P(4) = 2 \cdot P(3) = 8 \cdot P(1)$

$P(5) = 2 \cdot P(4) = 16 \cdot P(1)$

$P(6) = 2 \cdot P(5) = 32 \cdot P(1)$

Ω = {1, 2, 3, 4, 5, 6}

P (total) = 1

↳ $P(1) + P(2) + P(3) + P(4) + P(5) + P(6) = 1 \Leftrightarrow$

$P(1) + 2P(1) + 4P(1) + 8P(1) + 16P(1) + 32P(1) = 1 \Leftrightarrow$

$63P(1) = 1 \Leftrightarrow P(1) = \frac{1}{63}$

• $P(2) = \frac{2}{63}$ • $P(3) = \frac{4}{63}$ • $P(4) = \frac{8}{63}$ • $P(5) = \frac{16}{63}$ • $P(6) = \frac{32}{63}$

b) Não. A formula de Laplace só pode ser usada quando os acontecimentos são equiprovaveis.

c) A: {sair face par}
{2, 4, 6}

B: {sair uma face multipla de 3}
{3, 6}

C: {sair uma face impar}
{1, 3, 5}

• $P(A) = P(2) + P(4) + P(6) = \frac{2+8+32}{63} = \frac{42}{63}$

• $P(B) = P(3) + P(6) = \frac{4+32}{63} = \frac{36}{63}$

• $P(C) = P(1) + P(3) + P(5) = \frac{1+4+16}{63} = \frac{21}{63}$ $(1 - P(A))$

- $P(\bar{B}) = 1 - P(B) = 1 - \frac{36}{63} = \frac{27}{63}$
- $P(A \cap B) = P(6) = \frac{32}{63}$

- $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$

3. a) $\Omega = \{(b,b,v), (v,v,v), (b,v,v), (v,b,v), (v,v,b), (b,v,b), (v,b,b)\}$

   i) $\emptyset$

   ii) $\emptyset$

   iii) Ω

   iv) Ω

   b) A: {a primeira bola extraída é branca}

   B: {a segunda " " " "}

   C: {a terceira " " " "}

$D = \{A \cap B\}$ $\quad E = \{B \cap C\}$ $\quad F = \{A \cup B \cup C\}$

$G = \{(A \cap \bar{B} \cap \bar{C}) \cup (\bar{A} \cap B \cap \bar{C}) \cup (\bar{A} \cap \bar{B} \cap C)\}$

4. Sejam A e B dois quaisquer acontecimentos e considere o acontecimento

$$A \Delta B \equiv (A \setminus B) \cup (B \setminus A).$$

Identifique, em palavras, o acontecimento $A\Delta B$ e exprima a sua probabilidade em função de $P(A)$, $P(B)$ e $P(A \cap B)$. Interprete o resultado obtido.

5. Escolheu-se, ao acaso, um aluno numa escola que tem 630 alunos. Sobre os alunos desta escola, é sabido que 350 estudam Italiano, 210 estudam Espanhol e 90 estudam as duas línguas (Italiano e Espanhol). Qual a probabilidade de o aluno escolhido:

   (a) estudar apenas Italiano? (i.e., estudar Italiano mas não estudar Espanhol)
   (b) estudar apenas Espanhol? (i.e., estudar Espanhol mas não estudar Italiano)
   (c) estudar Italiano ou Espanhol?
   (d) não estudar nenhuma destas línguas?
   (e) estudar uma e uma só destas línguas?

6. Durante um surto epidémico, 20% da população de uma cidade contraiu a doença em causa. Um ano mais tarde, há um novo surto epidémico, com a mesma incidência de 20%, e verificou-se que 8% da população da cidade contraiu a doença em ambos os surtos. Escolheu-se um indivíduo ao acaso nesta população. Qual a probabilidade de:

   (a) o indivíduo nunca ter contraído a doença?
   (b) o indivíduo ter contraído a doença apenas no segundo surto?
   (c) o indivíduo ter contraído a doença em apenas um dos surtos?

7. São conhecidas as seguintes percentagens relativas à utilização (ou não) de três medicamentos distintos, A, B e C, recomendados para o tratamento de uma doença numa certa população:

10%	toma A;	40%	toma B;	20%	toma C;		
5%	toma A e B;	4%	toma A e C;	15%	toma B e C;	2.5%	toma A, B e C.

Determine a probabilidade de um indivíduo, escolhido ao acaso nesta população,

   (a) tomar pelo menos um dos três medicamentos;
   (b) não tomar qualquer medicamento;
   (c) tomar os medicamentos A e B, mas não tomar o medicamento C;
   (d) tomar apenas o medicamento A;
   (e) tomar um e um só dos 3 medicamentos.

8. Suponha que são conhecidas as seguintes percentagens relativas à utilização (ou não) de três *softwares* de tratamento estatístico (SPlus, SPSS e R) num certo grupo de estudantes:

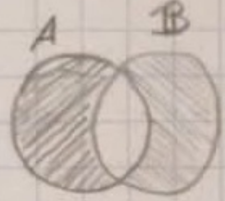
SPlus: 10%	SPSS: 23%	R: 12%
SPlus e SPSS: 5%	SPlus e R: 4%	SPSS e R: 6%
SPlus, SPSS e R: 2%		

Qual a probabilidade de um estudante escolhido ao acaso neste grupo:

   (a) usar pelo menos um dos *software* de tratamento estatístico?
   (b) não usar qualquer *software* de tratamento estatístico?
   (c) usar o SPlus e o SPSS, mas não o R?
   (d) usar o SPlus, mas não o SPSS nem o R?

4.

A, B acontecimentos



$$A \Delta B \equiv (A \setminus B) \cup (B \setminus A) = P(A) + P(B) - 2P(A \cap B)$$

5. $\Omega = 630$ alunos

A: {estudar italiano} = 350
B: {estudar espanhol} = 210
$A \cap B$: {estudar italiano e espanhol} = 90

a) $P(A \cap \overline{B}) = P(A \setminus B) = P(A) - P(A \cap B) = \frac{350}{630} - \frac{90}{630} = \frac{260}{630}$

b) $P(B \cap \overline{A}) = P(B \setminus A) = P(B) - P(B \cap A) = \frac{210}{630} - \frac{90}{630} = \frac{120}{630}$

c) $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) = \frac{350}{630} + \frac{210}{630} - \frac{90}{630} = \frac{470}{630}$

d) $P(\overline{A} \cap \overline{B}) = 1 - P(A \cup B) = 1 - \frac{470}{630} = \frac{160}{630}$

e) $P((A \cap \overline{B}) \cup (B \cap \overline{A})) = P(A) + P(B) - 2P(A \cap B) = \frac{350 + 210 - 2 \times 90}{630} = \frac{380}{630}$

6.

A: {contrair a doença em causa}

8. A: "usar SPlus" $P(A) = 10\%$ $P(A \cap B) = 5\%$ $P(A \cap C) = 4\%$ $P(B \cap C) = 6\%$
B: "usar SPSS" $P(B) = 23\%$ $P(A \cap B \cap C) = 2\%$
C: "usar o R" $P(C) = 12\%$

a) $P(A \cup B \cup C) = P(A) + P(B) + P(C) - P(A \cap B) - P(B \cap C) - P(A \cap C) + P(A \cap B \cap C) =$

$= 0.1 + 0.23 + 0.12 - 0.05 - 0.06 - 0.04 + 0.02 = 0.32 \Rightarrow 32\%$

b) $P(\overline{A} \cap \overline{B} \cap \overline{C}) = 1 - P(A \cup B \cup C) = 1 - 0.32 = 0.58 \Rightarrow 58\%$

c) $P(A \cap B \cap \overline{C}) = P((A \cap B) \setminus C) = P(A \cap B) - P(A \cap B \cap C) = 0.05 - 0.02 = 0.03 = 3\%$

d) $P(A \cap \overline{B} \cap \overline{C}) = P(A \cap \overline{B} \setminus C) = P(A \setminus B) - P(A \cap \overline{B} \cap C) = P(A \setminus B) - P(A \cap C \setminus B)$

$= P(A) - P(A \cap B) - (P(A \cap C) - P(A \cap C \cap B))$

$= 0.1 - 0.05 - 0.04 + 0.02 = 0.03 \Rightarrow 3\%$

9. Consideremos que um homem tem na sua mão 5 cartas vermelhas que foram escolhidas, ao acaso, num baralho de 52 cartas. Qual a probabilidade de as cartas serem todas do mesmo naipe, isto é, todas copas ou todas ouros?

10. Os clientes de uma óptica, divididos conforme o sexo e o uso ou não de lentes contacto, existem nas seguintes proporções:

	homens	mulheres
usam lentes	17%	38%
não usam lentes	30%	15%

    (a) Escolhendo ao acaso um cliente desta óptica, determine a probabilidade de ser:
        i) um homem; iii) um homem ou uma pessoa que usa lentes;
        ii) uma pessoa que usa lentes; iv) uma mulher ou uma pessoa que não usa lentes.
    (b) Represente a informação contida na tabela através de uma árvore de probabilidades adequada (note que há pelo menos duas representações possíveis/adequadas).

11. Numa dada população, certa doença está presente sob a forma grave em 5% dos indivíduos, sob a forma moderada em 10% e ausente nos restantes 85%. Um exame clínico dá resultado positivo (i.e., diz que o indíviduo tem a doença) em 90% dos casos graves, em 70% dos casos moderados e em 10% dos casos saudáveis. Um indíviduo é escolhido ao acaso na população e é submetido a este exame.
    (a) Qual a probabilidade de o seu exame dar positivo?
    (b) Se o resultado do exame for positivo, qual a probabilidade de ele ter realmente a doença?
    (c) Se o resultado do exame for negativo, qual a probabilidade de ele ter a doença?

12. Retiro uma carta de um baralho com 52 cartas. Os acontecimentos "a carta é um 7" e "a carta é uma espada" são independentes? Os acontecimentos "a carta é de copas" e "a carta é um ás" são independentes? E se o baralho não contém o 7 de copas (e portanto tem apenas 51 cartas)?

13. Considere a experiência aleatória que consiste em lançar um dado equilibrado duas vezes consecutivas.
    (a) Diga se os seguintes 3 acontecimentos, A, B e C, são independentes:

        A: "saiu face par no primeiro lançamento",
        B: "saiu face ímpar no segundo lançamento",
        C: "a soma das faces obtidas é um número par",

    (b) Diga, justificando, se a seguinte afirmação é verdadeira ou falsa: "Se n acontecimentos são independentes 2 a 2, com $n > 2$, então os n acontecimentos são independentes."

14. Considere a experiência aleatória ξ: "lançamento de uma moeda equilibrada $n-1$ vezes consecutivas", com $n \geq 3$.
    (a) Identifique o espaço amostral associado a esta experiência aleatória.
    (b) Considere os seguintes n acontecimentos

$$E_j = \begin{cases} \text{"ocorre cara no } j\text{-ésimo lançamento"} & \text{se } j \in \{1, \ldots, n-1\} \\ \text{"ocorrem uma cara e uma coroa nos 2 primeiros lançamentos"} & \text{se } j = n \end{cases}.$$

        i. Prove que $P(E_i \cap E_j) = P(E_i)P(E_j)$, para todo o $i, j \in \{1, \ldots, n\}, i \neq j$.
        ii. Calcule $P\left(\bigcap_{j=1}^{n} E_j\right)$ e diga se os n acontecimentos são independentes.

10. Os clientes de uma óptica, divididos conforme o sexo e o uso ou não de lentes contacto, existem nas seguintes proporções:

	homens	mulheres
usam lentes	17%	38%
não usam lentes	30%	15%

(a) Escolhendo ao acaso um cliente desta óptica, determine a probabilidade de ser:
i) um homem; iii) um homem ou uma pessoa que usa lentes;
ii) uma pessoa que usa lentes; iv) uma mulher ou uma pessoa que não usa lentes.

(b) Represente a informação contida na tabela através de uma árvore de probabilidades adequada (note que há pelo menos duas representações possíveis/adequadas).

Defina-se os seguintes acontecimentos:

H: "Cliente escolhido é um homem"
M: " " " uma mulher" $= \overline{H}$
L: " " " usa lente de contacto"
NL: " " " não usa " " " " $= \overline{L}$

→ $P(H \cap L) = 0{,}17$
→ $P(M \cap L) = 0{,}38$
→ $P(\overline{L} \cap H) = 0{,}3$
→ $P(\overline{L} \cap M) = 0{,}15$

a) i) $P(H) = P(H \cap L) + P(H \cap \overline{L}) = 0{,}17 + 0{,}3 = 0{,}47$

$H = \underbrace{(H \cap L) \cup (H \cap \overline{L})}_{\text{disjunto}}$

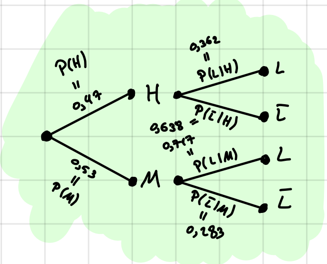
ii) $P(L) = P(L \cap H) + P(L \cap M) = 0{,}17 + 0{,}38 = 0{,}55$

$L = \underbrace{(L \cap H) \cup (L \cap M)}_{\text{disjuntos}}$

iii) $P(H \cup L) = P(H) + P(L) - P(L \cap H) = 0{,}47 + 0{,}55 - 0{,}17 = 0{,}25$

iv) $P(M \cup \overline{L}) = P(M) + P(\overline{L}) - P(H \cap \overline{L}) = 1 - P(H) + 1 - P(L) - 0{,}15 = 0{,}83$

b)



$$P(L|H) = \frac{P(L \cap H)}{P(H)} = \frac{0{,}17}{0{,}47} = 0{,}362$$

$$P(L|M) = \frac{P(L \cap M)}{P(M)} = \frac{0{,}38}{0{,}53} = 0{,}717$$

11. Numa dada população, certa doença está presente sob a forma grave em 5% dos indivíduos, sob a forma moderada em 10% e ausente nos restantes 85%. Um exame clínico dá resultado positivo (i.e., diz que o indíviduo tem a doença) em 90% dos casos graves, em 70% dos casos moderados e em 10% dos casos saudáveis. Um indíviduo é escolhido ao acaso na população e é submetido a este exame.

   (a) Qual a probabilidade de o seu exame dar positivo?

   (b) Se o resultado do exame for positivo, qual a probabilidade de ele ter realmente a doença?

   (c) Se o resultado do exame for negativo, qual a probabilidade de ele ter a doença?

a) $P(+) = P(+ \cap A) + P(+ \cap G) + P(+ \cap M)$

$= P(+|A)P(A) + P(+|G)P(G) + P(+|M)P(G) = 92$

15. Um míssel é lançado e acerta no alvo com probabilidade 0.5. Quantos mísseis devem ser lançados para que a probabilidade de pelo menos um deles acertar no alvo seja superior a 0.99? (Assuma que os diferentes mísseis são lançados sempre nas mesmas condições)

16. Uma família tem n filhos. Cada filho tem, independentemente dos outros, igual probabilidade de ser menino ou menina. Sejam A e B os acontecimentos "a família tem no máximo uma menina" e "a família tem pelo menos uma menina e um menino", respectivamente. A e B são independentes se $n = 2$? E se $n = 3$?

17. Uma determinada caixa automática da UM está 10% das vezes fora de serviço. Mesmo quando está em serviço, nem todas as opções estão disponíveis. Em particular sabe-se que, quando a caixa está em serviço, em 20% das vezes não é possível consultar o saldo. Suponha que um aluno da UM, escolhido ao acaso, vai utilizar esta caixa automática.

    (a) Determine a probabilidade de ele conseguir consultar o saldo.

    (b) Sabendo que ele não conseguiu consultar o saldo, qual a probabilidade de a caixa estar fora de serviço?

    (c) Os acontecimentos "aluno não conseguiu consultar o saldo" e "o aluno encontrou a máquina fora de serviço" são independentes?

18. No tratamento de uma doença, um médico receita aos doentes <u>pelo menos um</u> de dois medicamentos A e B. Em 70% dos casos o médico receita o medicamento A e receita o medicamento B em 40% dos casos. É introduzido no mercado um novo medicamento, C, para complementar o efeito dos medicamentos já existentes mas que só pode ser usado com <u>um e um só</u> dos outros dois medicamentos, i.e., não é compatível com a utilização em simultâneo de A e B. O médico receita C a 30% dos doentes que só tomam A e a 60% dos que só tomam B.

    (a) Determine a percentagem de doentes que:

        i. toma ambos os medicamentos A e B;
        ii. toma A mas não toma B;
        iii. toma B mas não toma A;
        iv. toma o medicamento C;
        v. só toma o medicamento A;

    (b) Sabendo que o médico não receitou o medicamento C a um certo doente, qual a probabilidade de este utilizar o medicamento A?

19. Numa certa população, 30% dos indivíduos possuem uma certa doença e os restantes são saudáveis. Dos que têm a doença, 40% têm na forma contagiosa e os restantes são não contagiosos. Escolheu-se ao acaso um indíviduo nesta população.

    (a) Mostre que a probabilidade de o indivíduo ter a doença na forma não contagiosa é 0.18.

    (b) Um exame clínico dá resultado positivo (i.e., diz que o indivíduo tem a doença) em todos os casos contagiosos e em apenas 70% dos casos de doentes não contagiosos. O exame clínico dá negativo em 95% dos casos em que o indivíduo é saudável. Escolheu-se, ao acaso, um indivíduo desta população que foi submetido a este exame.

        i. Calcule a probabilidade de o exame dar negativo.
        ii. Se o resultado do exame der negativo, qual a probabilidade de o indivíduo ser saudável?
        iii. Se o resultado do exame der positivo, qual a probabilidade de o indivíduo ser doente?