



Programação Linear - resolução gráfica

Investigação Operacional

J.M. Valério de Carvalho
`vc@dps.uminho.pt`

Departamento de Produção e Sistemas
Escola de Engenharia, Universidade do Minho

2 de outubro de 2020

Programação Linear - Resolução Gráfica

antes

- Um modelo de programação linear tem restrições, que descrevem as soluções admissíveis do problema,
- e uma função objectivo, que associa um valor a cada solução admissível.

Guião

- Para um exemplo, vamos representar o modelo de programação linear (restrições e função objectivo) no plano cartesiano (o conjunto de soluções admissíveis é sempre um poliedro convexo).
- Depois, vamos identificar a solução óptima graficamente (há sempre um vértice do poliedro que é uma solução óptima (*)).

depois

- Esta caracterização está na base da estratégia do algoritmo *Simplex*, que apenas explora vértices.

(*) quando o poliedro tem vértices (o que acontece sempre quando há restrições do tipo ≥ 0) e quando a solução óptima não é ilimitada.

- Modelo de programação linear: exemplo
- Conjuntos convexos e caracterização de domínio
- Função objectivo e vector gradiente
- Caracterização da solução óptima
- Apêndices
 - Representação gráfica do domínio

Exemplo: modelo de programação linear

- Função objectivo: $\max z = 12x_1 + 10x_2$
- Restrições:
$$\begin{array}{rcl} 3x_1 + 2x_2 & \leq & 120 \\ 1x_1 + 2x_2 & \leq & 80 \\ 1x_1 & \leq & 30 \\ x_1, x_2 & \geq & 0 \end{array}$$

Forma geral

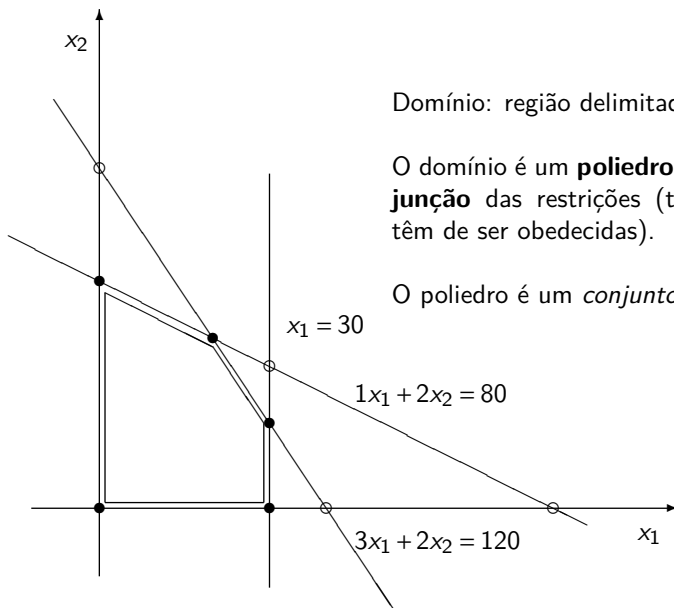
$$\begin{array}{ll} \max z & = \quad cx \\ \text{subj. a} & \quad Ax \leq b \\ & \quad x \geq 0 \end{array}$$

sendo $A \in \mathbb{R}^{m \times n}, b \in \mathbb{R}^{m \times 1}, c \in \mathbb{R}^{1 \times n}, x \in \mathbb{R}_+^{n \times 1}$.

Definição: Solução admissível

Uma solução é admissível se obedecer a todas as restrições do problema.

Domínio: conjunto de soluções admissíveis do problema



Domínio: região delimitada a duplo traço.

O domínio é um **poliedro** definido pela **conjunção** das restrições (todas as restrições têm de ser obedecidas).

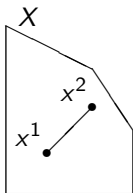
O poliedro é um *conjunto convexo*.

Conjuntos convexos

Definição:

Um *conjunto* X é *convexo*, se, dados 2 quaisquer pontos de X , designados por x^1 e x^2 , todos os pontos do segmento que os une também pertencerem a X :

$$\forall x^1, x^2 \in X, x = \lambda x^1 + (1 - \lambda)x^2 \in X, 0 \leq \lambda \leq 1.$$



A *combinação convexa* dos pontos $x^1, x^2 \in X$ é o conjunto de pontos do segmento:

$$\{x : x = \lambda x^1 + (1 - \lambda)x^2, 0 \leq \lambda \leq 1\}$$

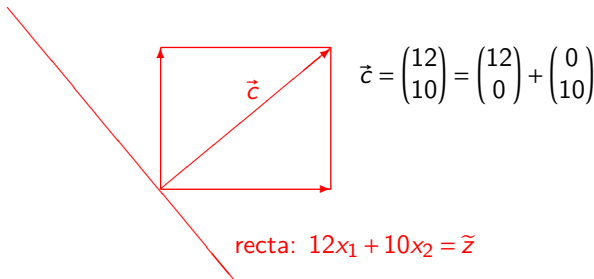
Teorema

O conjunto de soluções admissíveis $X = \{x : Ax \leq b, x \geq 0\}$ de um problema de programação linear é um conjunto convexo.

► Prova

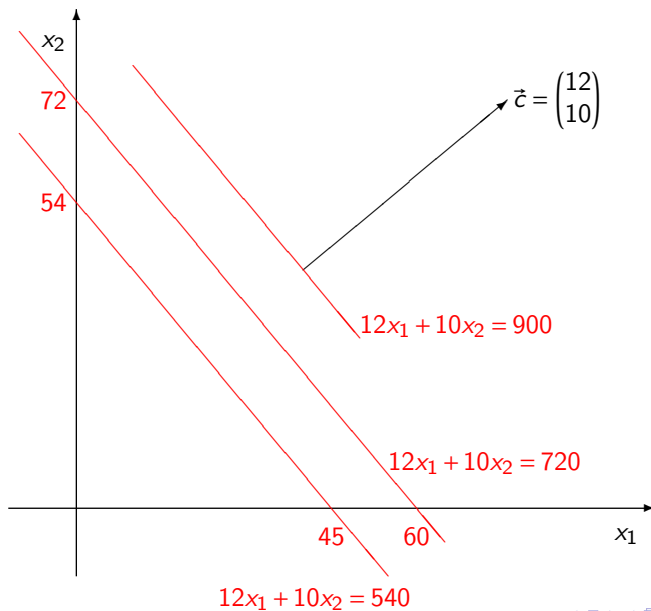
Função objectivo e vector gradiente

- O *gradiente da função objectivo*, $\vec{c} = \nabla z = \frac{\partial z}{\partial \mathbf{x}}$, é o vector que indica a direcção em que a função objectivo aumenta mais por unidade de espaço.
- O vector gradiente \vec{c} é perpendicular à recta $c\mathbf{x} = \tilde{z}$, qualquer que seja o valor da constante \tilde{z} .
- Exemplo: $z = c\mathbf{x} = 12x_1 + 10x_2 \rightarrow \nabla z = \left(\frac{\partial z}{\partial x_1}, \frac{\partial z}{\partial x_2} \right)^T = \begin{pmatrix} 12 \\ 10 \end{pmatrix}$

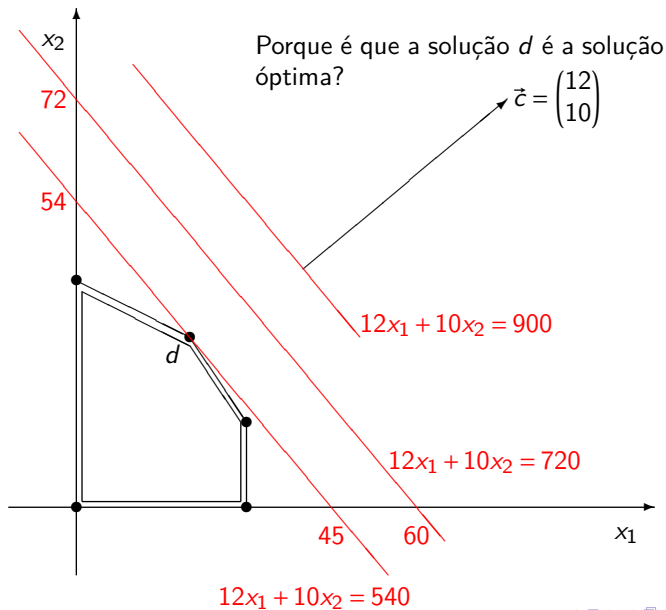


► Ver Notas

Exemplo: rectas com igual valor de função objectivo



Exemplo: solução ótima



Discussão: a solução óptima é sempre um vértice?

- Um vértice pode ser a solução óptima.
- E os pontos de uma aresta (na generalidade, de uma face do poliedro) podem ser?
- E um ponto no interior do domínio pode ser um ponto óptimo?

∴ Existe **sempre** um vértice que é uma solução óptima.

- Os vértices são pontos extremos do poliedro.

Definição:

Um ponto extremo de um poliedro X é um ponto x que não pode ser expresso como uma combinação convexa estrita (i.e., $0 < \lambda < 1$) de outros 2 pontos do poliedro.

$$\nexists \lambda \in (0,1) : x = \lambda x^1 + (1 - \lambda)x^2, \forall x^1, x^2 \in X, x \neq x^1, x \neq x^2.$$

Caracterização da solução óptima

Teorema

Se o domínio tiver um vértice e a solução óptima tiver um valor finito, então existe um vértice (ponto extremo) que é uma solução óptima.

► Prova

Soluções óptimas alternativas:

Se 2, ou mais, vértices forem soluções óptimas, os pontos da combinação convexa desses vértices (aresta, ou face) são também soluções óptimas.

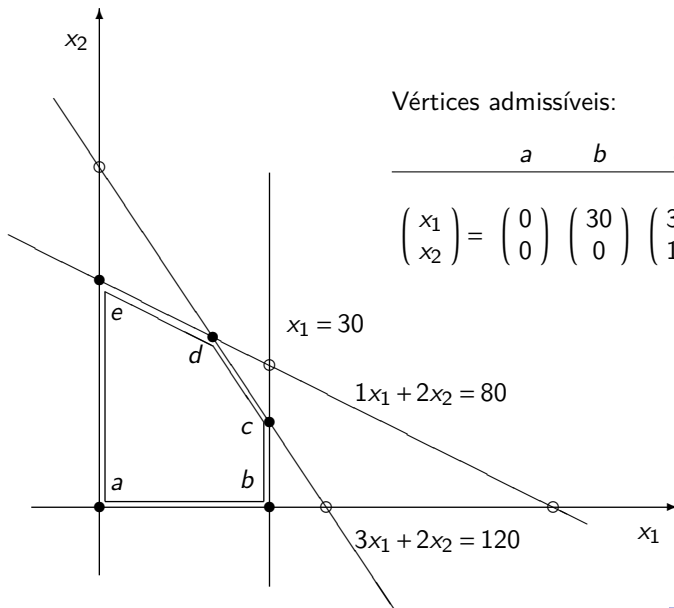
Método Simplex (antevisão do algoritmo)

- seleccionar um vértice admissível inicial
- enquanto (existir um vértice admissível adjacente melhor)
mudar para vértice admissível adjacente melhor

Uma (má) estratégia de resolução: enumeração de vértices

- Como há um vértice que é uma solução óptima, é possível determinar a solução óptima enumerando todos os vértices.
- As coordenadas de cada vértice podem ser determinadas através da intersecção de rectas, e o respectivo valor da função objectivo também pode ser calculado.
- A dificuldade é que é necessário enumerar $\binom{n+m}{n}$ vértices, as combinações de $n+m$ restrições (que incluem as restrições de não-negatividade) n a n .
- O esforço de cálculo é muito grande.
- O método simplex é um algoritmo mais eficiente.

Resolução gráfica: vértices como intersecção de rectas



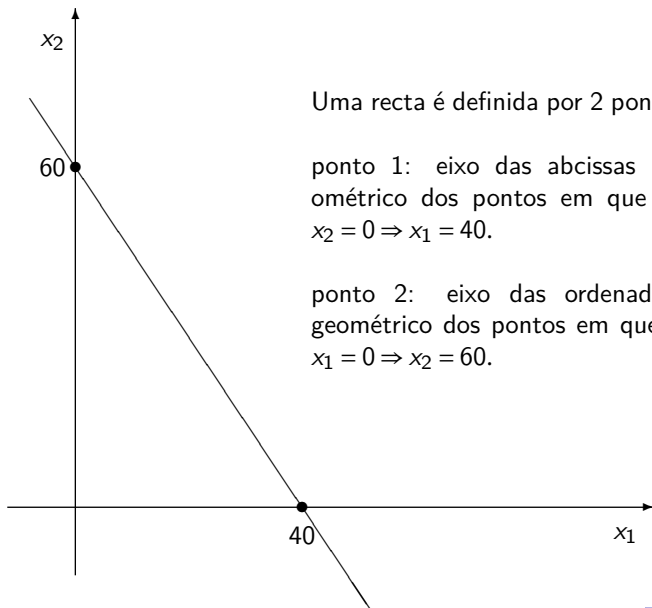
Vértices admissíveis:

| | a | b | c | d | e |
|--|--|---|--|--|---|
| $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} =$ | $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ | $\begin{pmatrix} 30 \\ 0 \end{pmatrix}$ | $\begin{pmatrix} 30 \\ 15 \end{pmatrix}$ | $\begin{pmatrix} 20 \\ 30 \end{pmatrix}$ | $\begin{pmatrix} 0 \\ 40 \end{pmatrix}$ |

- Problemas com 2 ou 3 variáveis de decisão podem ser resolvidos graficamente.
- O conjunto de soluções admissíveis de um modelo de programação linear é um poliedro convexo.
- Os vértices do poliedro são importantes, porque existe uma solução ótima de um problema de programação linear que é um vértice.
- Para problemas com um maior número de variáveis de decisão, é necessário usar álgebra para caracterizar um vértice.

- Representação de uma restrição no plano cartesiano
 - Representação da recta que delimita a restrição
 - Identificação do sub-espaco que corresponde à restrição

Representação da recta: $3x_1 + 2x_2 = 120$

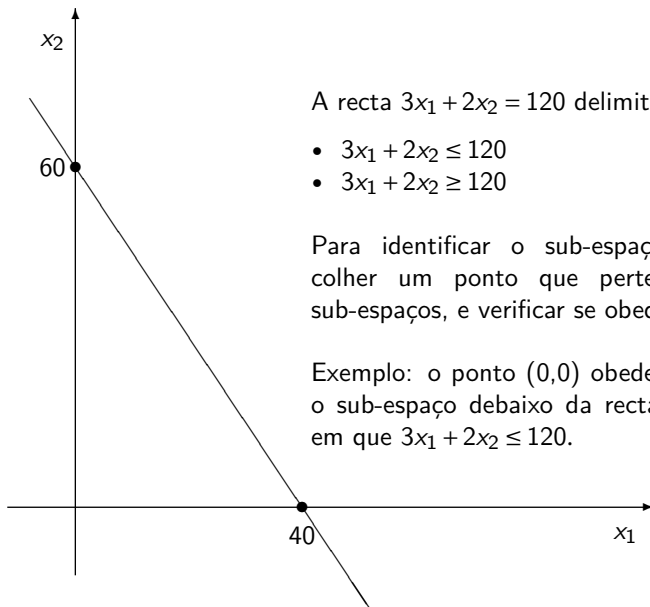


Uma recta é definida por 2 pontos, por exemplo:

ponto 1: eixo das abcissas (x_1) \equiv lugar geométrico dos pontos em que $x_2 = 0$: quando $x_2 = 0 \Rightarrow x_1 = 40$.

ponto 2: eixo das ordenadas (x_2) \equiv lugar geométrico dos pontos em que $x_1 = 0$: quando $x_1 = 0 \Rightarrow x_2 = 60$.

Identificação do sub-espaço definido por $3x_1 + 2x_2 \leq 120$



A recta $3x_1 + 2x_2 = 120$ delimita 2 sub-espacos:

- $3x_1 + 2x_2 \leq 120$
- $3x_1 + 2x_2 \geq 120$

Para identificar o sub-espaço desejado, escolher um ponto que pertença a um dos sub-espacos, e verificar se obedece à restrição.

Exemplo: o ponto $(0,0)$ obedece à restrição \Rightarrow o sub-espaço debaixo da recta é o sub-espaço em que $3x_1 + 2x_2 \leq 120$.

Restrições lineares e conjuntos convexos

Teorema

O conjunto de soluções admissíveis $X = \{x : Ax \leq b, x \geq 0\}$ de um problema de programação linear é um conjunto convexo.

Prova: dados 2 pontos quaisquer $x^1, x^2 \in X$ (obedecem às restrições), todos os pontos x da sua combinação convexa também obedecem:

i.e., dados $x^1, x^2 : Ax^1 \leq b, x^1 \geq 0$ e $Ax^2 \leq b, x^2 \geq 0$, todos os pontos $x = \lambda x^1 + (1 - \lambda)x^2$, $0 \leq \lambda \leq 1$, também obedecem:

$$\begin{array}{rcl} \lambda Ax^1 & \leq & \lambda b \quad (\text{válido, porque } \lambda \geq 0) \\ (1 - \lambda)Ax^2 & \leq & (1 - \lambda)b \quad (\text{válido, porque } 1 - \lambda \geq 0) \\ \hline \lambda Ax^1 + (1 - \lambda)Ax^2 & \leq & \lambda b + (1 - \lambda)b \\ A[\lambda x^1 + (1 - \lambda)x^2] & \leq & b \\ Ax & \leq & b \end{array}$$

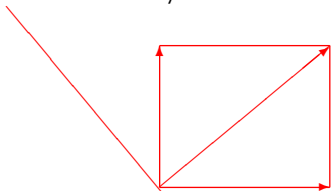
O mesmo se pode mostrar para as restrições $x^1 \geq 0$ e $x^2 \geq 0$

◀ Voltar



Vector gradiente: notas

- A função objectivo também aumenta nas direcções que fazem um ângulo agudo com o gradiente: o aumento é dado pela *projecção* do gradiente nessa direcção.



$$\vec{c} = \begin{pmatrix} 12 \\ 10 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 12 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 10 \end{pmatrix}$$

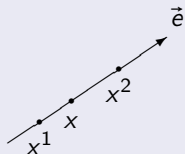
- A projecção do vector gradiente no eixo de x_1 é o vector $(12, 0)^T$.
- Na direcção do eixo de x_1 , o aumento de z por unidade de aumento de x_1 é 12, $\frac{\partial z}{\partial x_1} = 12$.
- A projecção do vector gradiente na direcção da recta vermelha (ortogonal ao gradiente) é o vector nulo (\Rightarrow o valor da função objectivo não varia quando nos deslocamos em cima da recta).

Caracterização da solução ótima

Teorema

Se o domínio tiver um vértice e a solução ótima tiver um valor finito, então existe um vértice (ponto extremo) que é uma solução ótima.

Prova: vamos supor que x é um ponto não-extremo. Se x for um ponto interior do domínio, podemos escolher pontos x_1 e x_2 na direcção do vector gradiente \vec{c} ($\vec{c} \neq \vec{0}$), pelo que $cx^1 < cx < cx^2$, e x não é ótimo. Se x pertencer a uma aresta (face), seja \vec{e} a projecção do vector gradiente \vec{c} ($\vec{c} \neq \vec{0}$) na aresta (face) como na figura. Se $\vec{e} \neq \vec{0}$, aplica-se o mesmo de cima. Se $\vec{e} = \vec{0}$, então \vec{c} é ortogonal à face (aresta) definida pelos 3 pontos, e $cx^1 = cx = cx^2$; todos os pontos da face têm o mesmo valor de função objectivo, incluindo os vértices.



◀ Voltar

Fim