Programação Linear - definição matricial

Investigação Operacional

J.M. Valério de Carvalho
vc@dps.uminho.pt

Departamento de Produção e Sistemas
Escola de Engenharia, Universidade do Minho

3 de novembro de 2020

Programação Linear - definição matricial

antes

- O algoritmo simplex foi implementado usando quadros.

Guião

- As operações realizadas podem ser descritas usando matrizes.
- A definição matricial das operações oferece uma nova perspectiva, que permite conceber operações mais complexas, como:
- mudar directamente de um quadro inicial para qualquer outro quadro final, efectuando simultaneamente um conjunto dos pivôs; ou
- implementar uma forma matricial do algoritmo simplex, muito mais eficiente do que a resolução usando quadros.

depois

- A definição matricial será usada em análise de sensibilidade.

Conteúdo

- Sistema de equações e soluções básicas
- Operação matricial de mudança de base
- Forma matricial do algoritmo simplex

Problema de PL e representação matricial

Geral	Exemplo
$\begin{array}{ll} max & cx \\ & Ax + Is = b \\ & x \geq 0 \end{array}$	$\begin{array}{lrcl} \text{max} & 30x_1 + 20x_2 + 10x_3 & & \\ \text{suj.} & 1x_1 + 1x_2 + 2x_3 + s_1 & = & 40 \\ & 2x_1 + 2x_2 + 1x_3 + s_2 & = & 150 \\ & 2x_1 + 1x_2 \qquad\quad + s_3 & = & 20 \\ & x_1,\ x_2,\ x_3 \geq 0 & & \end{array}$
$\begin{array}{c\|c\|c} A & I & b \\ \hline -c & \tilde{0} & 0 \end{array}$	$\begin{array}{c\|cccc\|ccc\|c} & z & x_1 & x_2 & x_3 & s_1 & s_2 & s_3 & \\ \hline s_1 & 0 & 1 & 1 & 2 & 1 & 0 & 0 & 40 \\ s_2 & 0 & 2 & 2 & 1 & 0 & 1 & 0 & 150 \\ s_3 & 0 & 2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 20 \\ \hline z & 1 & -30 & -20 & -10 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}$

Sistema de equações e soluções básicas

- Dada uma qualquer escolha de variáveis básicas, o problema $\max z = cx$, suj. a $Ax = b, x \geq 0$ é equivalente a:

$$\begin{array}{lclll} \max z & = & c_B x_B & + c_N x_N & \\ \text{suj. a} & & B x_B & + \; N x_N & = b \\ & & x_B, x_N \geq 0 & & \end{array}$$

- em que o vector de variáveis x é partido em dois subvectores:

$$\begin{array}{ll} x_B \in \mathrm{IR}_+^{m \times 1} & : \text{subvector de } x \text{ com as variáveis básicas,} \\ x_N \in \mathrm{IR}_+^{(n-m) \times 1} & : \text{subvector de } x \text{ com as variáveis não-básicas,} \end{array}$$

- o vector de custos c é partido em dois subvectores:

$$\begin{array}{ll} c_B \in \mathrm{IR}^{1 \times m} & : \text{subvector de } c \text{ com os custos das variáveis básicas,} \\ c_N \in \mathrm{IR}^{1 \times (n-m)} & : \text{subvector de } c \text{ com os custos das variáveis não-básicas} \end{array}$$

- a matriz A é partida em duas submatrizes:

$$\begin{array}{ll} B \in \mathrm{IR}^{m \times m} & : \text{submatriz de } A \text{ das variáveis básicas (não-singular),} \\ N \in \mathrm{IR}^{m \times (n-m)} & : \text{submatriz de } A \text{ das variáveis não-básicas.} \end{array}$$

Resolve-se o sistema de equações em ordem a x_B...

- pré-multiplicando o sistema de equações por B^{-1}:

$$\begin{aligned} B^{-1}(Bx_B + Nx_N) &= B^{-1}b \\ x_B + B^{-1}Nx_N &= B^{-1}b \\ x_B &= B^{-1}b - B^{-1}Nx_N \end{aligned}$$

- Substituindo x_B na função objectivo, obtém-se:

$$\begin{aligned} z &= c_Bx_B + c_Nx_N = \\ &= c_B(B^{-1}b - B^{-1}Nx_N) + c_Nx_N = \\ &= c_BB^{-1}b + (c_N - c_BB^{-1}N)x_N \end{aligned}$$

Quando $\tilde{x}_N = 0$, a solução do sistema de equações é a *solução básica* $\tilde{x}$:

- $\tilde{x} = \begin{pmatrix} \tilde{x}_B \\ \tilde{x}_N \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} B^{-1}b \\ 0 \end{pmatrix}$
- que tem um valor de função objectivo $\tilde{z} = c_BB^{-1}b = c_B\tilde{x}_B$

- Se $\tilde{x}_B \geq 0$ então $\tilde{x}$ é uma *solução básica admissível*.

Exemplo 1: um pivô ...

- para uma base adjacente, entrando x_1 na base, e saindo s_3,

	z	x_1	x_2	x_3	s_1	s_2	s_3	
s_1	0	1	1	2	1	0	0	40
s_2	0	2	2	1	0	1	0	150
s_3	0	$\boxed{2}$	1	0	0	0	1	20
z	1	-30	-20	-10	0	0	0	0

- equivale a resolver o sistema de equações em ordem às variáveis básicas s_1, s_2 e x_1; as matrizes B, N e os vectores c_B e c_N são:

$$B = \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} s_1 & s_2 & x_1 \end{array} \\ \left[\begin{array}{ccc} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 2 \end{array}\right] \end{array} \qquad N = \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} x_2 & x_3 & s_3 \end{array} \\ \left[\begin{array}{ccc} 1 & 2 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{array}\right] \end{array}$$

$$c_B = \left[\begin{array}{ccc} 0 & 0 & 30 \end{array}\right] \qquad c_N = \left[\begin{array}{ccc} 20 & 10 & 0 \end{array}\right]$$

- Notar que as colunas da matriz B e do vector c_B estão ordenadas na mesma sequência das variáveis básicas no quadro seguinte.

Exemplo 2: vários pivôs simultaneamente ...

- para uma base não adjacente, que vamos resolver com detalhe.

	z	x_1	x_2	x_3	s_1	s_2	s_3	
s_1	0	1	1	2	1	0	0	40
s_2	0	2	2	1	0	1	0	150
s_3	0	2	1	0	0	0	1	20
z	1	-30	-20	-10	0	0	0	0

- Para resolver o sistema de equações em ordem às variáveis básicas x_3, s_2 e x_2, as matrizes B, N e os vectores c_B e c_N são:

$$B = \begin{array}{ccc} x_3 & s_2 & x_2 \\ \hline 2 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{array} \qquad N = \begin{array}{ccc} x_1 & s_1 & s_3 \\ \hline 1 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{array}$$

$$c_B = \boxed{10 \quad 0 \quad 20} \qquad c_N = \boxed{30 \quad 0 \quad 0}$$

- De novo, as colunas da matriz B e do vector c_B estão ordenadas na sequência pretendida para as variáveis básicas no quadro final.

Exemplo 2: cálculo de B^{-1} e $c_B B^{-1}$

- A matriz B^{-1} e o vector $c_B B^{-1}$ aparecem várias vezes nos cálculos:

$$
B = \begin{array}{ccc} x_3 & s_2 & x_2 \\ \hline 2 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{array}
\qquad
B^{-1} = \begin{array}{|ccc|} \hline 1/2 & 0 & -1/2 \\ -1/2 & 1 & -3/2 \\ 0 & 0 & 1 \\ \hline \end{array}
$$

$$
c_B = \begin{array}{|ccc|} \hline 10 & 0 & 20 \\ \hline \end{array}
\qquad
c_B B^{-1} = \begin{array}{|ccc|} \hline 5 & 0 & 15 \\ \hline \end{array}
$$

Perspectiva

- A matriz B^{-1} pode ser vista como a matriz que guarda informação sobre todos os pivôs efectuados para fazer entrar na base as variáveis básicas pretendidas.

Exemplo 2: cálculo da solução, determinando $\widetilde{x}_B$

$$x_B \quad = \quad B^{-1}b \quad - \quad B^{-1}N\ x_N$$

$$\begin{bmatrix} x_3 \\ s_2 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1/2 & 0 & -1/2 \\ -1/2 & 1 & -3/2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} 40 \\ 150 \\ 20 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1/2 & 0 & -1/2 \\ -1/2 & 1 & -3/2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} x_1 \\ s_1 \\ s_3 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} x_3 \\ s_2 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 10 \\ 100 \\ 20 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} -1/2 & 1/2 & -1/2 \\ -3/2 & -1/2 & -3/2 \\ 2 & 0 & 1 \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} x_1 \\ s_1 \\ s_3 \end{bmatrix}$$

- A solução é admissível: $\widetilde{x}_B$ têm coordenadas não-negativas.
- Os valores das variáveis básicas são: $\widetilde{x}_B = (x_3, s_2, x_2)^\top = (10, 100, 20)^\top$
- Os valores das vars não-básicas são: $\widetilde{x}_N = (x_1, s_1, s_3)^\top = (0, 0, 0)^\top$
- $\widetilde{x} = (x_1, x2, x3, s_1, s_2, s_3)^\top = (0, 20, 10, 0, 100, 0)^\top$

Exemplo 2: cálculo do valor da solução, $\tilde{z}$

$$z = \quad c_B B^{-1} \quad b \quad + (c_N - c_B B^{-1} N) \; x_N$$

$$z = [5 \;\; 0 \;\; 15] * \begin{bmatrix} 40 \\ 150 \\ 20 \end{bmatrix} + \left([30 \;\; 0 \;\; 0] - [5 \;\; 0 \;\; 15] * \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{bmatrix} \right) * \begin{bmatrix} x_1 \\ s_1 \\ s_3 \end{bmatrix} =$$

$$z = \quad 500 \quad + [-5 \;\; -5 \;\; -15] * \begin{bmatrix} x_1 \\ s_1 \\ s_3 \end{bmatrix} =$$

- O valor da função objectivo da solução obtida, $\tilde{z}$, é 500.
- A solução também é óptima para o problema de maximização (dado que $z = 500 - 5x_1 - 5s_1 - 15s_3$).

Exemplo 2: o quadro inicial e o quadro final

- A informação dos diapositivos anteriores pode ser usada para construir o quadro final, reordenando as colunas.

quadro inicial

	z	x_1	x_2	x_3	s_1	s_2	s_3	
s_1	0	1	1	2	1	0	0	40
s_2	0	2	2	1	0	1	0	150
s_3	0	2	1	0	0	0	1	20
z	1	-30	-20	-10	0	0	0	0

quadro final

	z	x_1	x_2	x_3	s_1	s_2	s_3	
x_3	0	-1/2	0	1	1/2	0	-1/2	10
s_2	0	-3/2	0	0	-1/2	1	-3/2	100
x_2	0	2	1	0	0	0	1	20
z	1	5	0	0	5	0	15	500

Motivação

- De seguida vamos representar estas operações matriciais no quadro simplex.
- Iremos usá-las em Análise de sensibilidade, também designada por Análise pós-optimização.
- Nesse contexto, dispomos do quadro inicial e do quadro óptimo, e
- podemos estudar os efeitos que uma alteração de dados no quadro inicial tem sobre o quadro óptimo,
- usando a matriz que opera a mudança directa do quadro inicial para o quadro óptimo.

Operação matricial de mudança de base - i

- No quadro simplex inicial, o sistema de equações:

$$Ax + Is = [\ A \mid I\ ] * [\ x \mid s\ ]^\top = b$$

  está resolvido em ordem às variáveis s.
- Para obter um quadro simplex final em que as variáveis básicas sejam as variáveis do conjunto x_B, temos de identificar:
  - a matriz B, que é a submatriz de $[\ A \mid I\ ]$ com as colunas das variáveis básicas do conjunto x_B, e
  - o vector c_B, com os coeficientes do vector c das mesmas variáveis.

A matriz que opera a mudança do quadro inicial para o final é:

$$\begin{array}{|c|c|} \hline B^{-1} & \tilde{0} \\ \hline c_B B^{-1} & 1 \\ \hline \end{array} \in \mathrm{IR}^{(m+1)\times(m+1)}$$

Operação matricial de mudança de base - ii

Prova:

- No quadro simplex final, as variáveis básicas são as pretendidas, porque:
  - a matriz identidade I aparece nas posições da matriz B, e
  - o vector nulo aparece na linha da função objectivo.

$$\left[\begin{array}{c|c} B^{-1} & \tilde{0} \\ \hline c_B B^{-1} & 1 \end{array}\right] * \left[\begin{array}{c} B \\ \hline -c_B \end{array}\right] = \left[\begin{array}{c} I \\ \hline \tilde{0} \end{array}\right]$$

- A regra de multiplicação de matrizes partidas (em submatrizes) é semelhante à da multiplicação de matrizes.

Operação matricial de mudança de base - iii

- O Quadro Final obtém-se pré-multiplicando o Quadro Inicial pela matriz que opera a mudança de base:

$$\begin{array}{|c|c|} \hline B^{-1} & \tilde{0} \\ \hline c_B B^{-1} & 1 \\ \hline \end{array} * \begin{array}{|c|c|c|} \hline A & I & b \\ \hline -c & \tilde{0} & 0 \\ \hline \end{array} =$$

$$= \begin{array}{|c|c|c|} \hline B^{-1}A & B^{-1} & B^{-1}b \\ \hline c_B B^{-1}A - c & c_B B^{-1} & c_B B^{-1}b \\ \hline \end{array}$$

- Nota: tal como vimos no diapositivo anterior, nas posições que a matriz B ocupa no Quadro Inicial, aparecem as colunas da matriz identidade no Quadro Final.

O mesmo Exemplo 2

- Dado o Quadro Inicial:

	z	x_1	x_2	x_3	s_1	s_2	s_3	
s_1	0	1	1	2	1	0	0	40
s_2	0	2	2	1	0	1	0	150
s_3	0	2	1	0	0	0	1	20
z	1	-30	-20	-10	0	0	0	0

- para resolver o sistema de equações em ordem às variáveis básicas x_3, s_2 e x_2, as matrizes B, N e os vectores c_B e c_N são:

$$B = \begin{array}{ccc} x_3 & s_2 & x_2 \\ \hline 2 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{array} \qquad B^{-1} = \begin{array}{|ccc|} \hline 1/2 & 0 & -1/2 \\ -1/2 & 1 & -3/2 \\ 0 & 0 & 1 \\ \hline \end{array}$$

$$c_B = \begin{array}{|ccc|} \hline 10 & 0 & 20 \\ \hline \end{array} \qquad c_B B^{-1} = \begin{array}{|ccc|} \hline 5 & 0 & 15 \\ \hline \end{array}$$

Exemplo 2

1/2	0	-1/2	0
-1/2	1	-3/2	0
0	0	1	0
5	0	15	1

*

	z	x_1	x_2	x_3	s_1	s_2	s_3	
s_1	0	1	1	2	1	0	0	40
s_2	0	2	2	1	0	1	0	150
s_3	0	2	1	0	0	0	1	20
z	1	-30	-20	-10	0	0	0	0

=

	z	x_1	x_2	x_3	s_1	s_2	s_3	
x_3	0	-1/2	0	1	1/2	0	-1/2	10
s_2	0	-3/2	0	0	-1/2	1	-3/2	100
x_2	0	2	1	0	0	0	1	20
z	1	5	0	0	5	0	15	500

$$
\left[\begin{array}{c|c} B^{-1} & \tilde{0} \\ \hline c_B B^{-1} & 1 \end{array}\right]
*
\left[\begin{array}{c|c|c} A & I & b \\ \hline -c & \tilde{0} & 0 \end{array}\right]
=
\left[\begin{array}{c|c|c} B^{-1}A & B^{-1} & B^{-1}b \\ \hline c_B B^{-1}A - c & c_B B^{-1} & c_B B^{-1} b \end{array}\right]
$$

Notas

- No exemplo, o quadro final é a solução óptima, porque eu escolhi as variáveis básicas que sabia de antemão serem as da solução óptima.

- No caso geral, quando se escolhe um conjunto de variáveis básicas:
  - se algum elemento do vector $B^{-1}b$ for negativo, obtém-se um vértice não-admissível;
  - se algum elemento dos vectores $c_B B^{-1}$ ou $c_B B^{-1} A - c$ for negativo, obtém-se um vértice que não é óptimo (prob. de maximização).

- No contexto de análise de sensibilidade, a matriz B^{-1} e o vector $c_B B^{-1}$ aparecem no quadro óptimo, permitindo construir a matriz que opera a mudança de base.
- Está portanto disponível toda a informação necessária para recalcular o quadro óptimo para determinar os efeitos de uma alteração, no quadro inicial, de um elemento dos vectores b ou c.

Forma matricial do algoritmo simplex

Ideia chave:

- Cada matriz B^{-1} está associada a uma base (*i.e.*, quadro simplex).
- O algoritmo é implementado actualizando apenas a matriz B^{-1},
- porque a matriz B^{-1} e as matrizes do quadro inicial (A, b, c) são suficientes para calcular todos os elementos do quadro simplex.

Mas não é preciso calculá-los todos. Para determinar o elemento pivô,

- só é preciso calcular a linha da função objectivo, para identificar a coluna pivô, e
- a coluna do lado direito e a coluna pivô, para identificar a linha pivô.

- Não é necessário calcular nenhuma das outras colunas.

Algoritmo simplex primal na forma matricial

1. /* Calcular custos reduzidos das variáveis não-básicas */
   Calcular $c_B B^{-1} A_j - c_j, \quad \forall j$
2. /* Testar optimalidade (prob. de maximização) */
   Se $c_B B^{-1} A_j - c_j \geq 0, \forall j$, a solução é óptima. Senão,
3. /* Seleccionar coluna pivô k */

$$k = \underset{j \in N}{\operatorname{argmin}} \left\{ c_B B^{-1} A_j - c_j \right\}$$

4. Calcular coluna pivô, $B^{-1} A_k$
5. Se todos os elementos de $B^{-1} A_k \leq 0$, a solução é ilimitada. Senão,
6. Calcular coluna do lado direito, $B^{-1} b$, e seleccionar linha pivô p

$$p = \underset{i}{\operatorname{argmin}} \left\{ (B^{-1} b)_i / (B^{-1} A_k)_i \right\}.$$

7. Actualizar a matriz B^{-1}, e voltar ao passo 1.

Designam-se por *Custos reduzidos* de uma variável os elementos do vector $-(c - c_B B^{-1} A)$. Os coeficientes de custo inicial são reduzidos de uma quantidade $c_B B^{-1} A$. Notar que $c_B B^{-1}$ é um caso particular quando A_j é uma coluna das variáveis de folga.

Implementação: alguns pormenores

Adicionalmente

- A matriz A é tipicamente uma matriz dispersa (esparsa). A percentagem de elementos não-zero de A pode ser 2% ou 5%.
- Há estruturas de dados para representar matrizes dispersas que permitem grandes economias de espaço.
- A multiplicação de matrizes dispersas só envolve os cálculos com os elementos diferentes de 0.

- A matriz B^{-1} é guardada como o produto de uma matriz triangular inferior (*lower*) e uma matriz triangular superior (*upper*), *i.e.*, uma factorização LU.
- Isso permite a sua actualização eficiente em cada pivô.

- Os *solvers* de programação linear usam a forma matricial.

Conclusão

- Uma matriz é apenas uma forma de representar e condensar informação.
- Mas a definição matricial oferece uma nova perspectiva das operações efectuadas no método simplex, o que permite ver a forma de realizar operações mais complexas, como a mudança entre bases não adjacentes;
- também permite conceber uma implementação do algoritmo simplex na forma matricial com grandes economias de cálculo, que possibilita a resolução de problemas de muito grande dimensão.

Apêndice

Exemplo: a base B e o sistema de equações original

	z	x_1	x_2	x_3	s_1	s_2	s_3	
x_3	0	-1/2	0	1	1/2	0	-1/2	10
s_2	0	-3/2	0	0	-1/2	1	-3/2	100
x_2	0	2	1	0	0	0	1	20
z	1	5	0	0	5	0	15	500

	z	x_1	x_2	x_3	s_1	s_2	s_3	
s_1	0	1	1	2	1	0	0	40
s_2	0	2	2	1	0	1	0	150
s_3	0	2	1	0	0	0	1	20
z	1	-30	-20	-10	0	0	0	0

$$x_B = B^{-1}b - B^{-1}N\, x_N$$

$$\begin{bmatrix} x_3 \\ s_2 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 10 \\ 100 \\ 20 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} -1/2 & 1/2 & -1/2 \\ -3/2 & -1/2 & -3/2 \\ 2 & 0 & 1 \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} x_1 \\ s_1 \\ s_3 \end{bmatrix}$$

$$B\, x_B = b - N\, x_N$$

$$\begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} x_3 \\ s_2 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 120 \\ 80 \\ 30 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} x_1 \\ s_1 \\ s_3 \end{bmatrix}$$

Coordenadas de um vector na base B

- Qualquer vector de um espaço vectorial pode ser representado como uma combinação linear dos vectores da base.

- Exemplo: os elementos do vector $B^{-1}b$ são as coordenadas do vector b em relação à base $B = \{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots, \vec{v}_m\}$.

$$
\begin{array}{ccccc}
b & = & B & * & (B^{-1}b) \\
 & & \begin{array}{ccc} x_3 & s_2 & x_2 \end{array} & & \\
\begin{bmatrix} 40 \\ 150 \\ 20 \end{bmatrix} & = & \begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} & * & \begin{bmatrix} 10 \\ 100 \\ 20 \end{bmatrix}
\end{array}
$$

$$
\begin{bmatrix} 40 \\ 150 \\ 20 \end{bmatrix} = 10 \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + 100 \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + 20 \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}
$$

$$
b = 10 \; \vec{v}_1 + 100 \; \vec{v}_2 + 20 \; \vec{v}_3
$$

- ou seja, é a solução $x_B = B^{-1}b = (x_3, s_2, x_2)^\top = (10, 100, 20)^\top$.

Custos reduzidos de uma variável

$B^{-1}A$	B^{-1}	$B^{-1}b$
$c_B B^{-1}A - c$	$c_B B^{-1}$	$c_B B^{-1}b$

Definição

- Os coeficientes da linha da função objectivo relativos às variáveis de decisão são iguais a $-(c - c_B B^{-1}A)$.
- Os valores dos elementos do vector custo inicial são reduzidos de uma quantidade $c_B B^{-1}A$.

Operações com matrizes: exemplos

- Soma de matrizes:

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 5 & 6 \\ 7 & 8 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1+5 & 2+6 \\ 3+7 & 4+8 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 & 8 \\ 10 & 12 \end{bmatrix}$$

- Multiplicação de matrizes:

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} 5 \\ 6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5+12 \\ 15+24 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 17 \\ 39 \end{bmatrix}$$

- Multiplicação de matrizes:

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} 3 & 4 \\ 5 & 6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3+10 & 4+12 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 13 & 16 \end{bmatrix}$$

Fim