Spline

36. Num certo campeonato regional de futebol há 7 equipas. No fim da temporada, o número de pontos ganhos e o número de golos sofridos por 6 das equipas estão representados na tabela

Equipa	F.C.Sol	F.C.Lá	S.C.Gato	Nova F.C.	Vila F.C.	F.C.Chão
Nº de pontos, x_i	10	12	18	27	30	34
Nº de golos, $f(x_i)$	20	18	15	9	12	10

(a) Use uma spline cúbica completa para descrever a relação entre o número de pontos e o número de golos sofridos pelas equipas no campeonato. Sabendo que a 7^a equipa terminou o campeonato com 29 pontos, estime o número de golos que terá sofrido.

(b) Calcule uma estimativa do erro de truncatura cometido na alínea anterior.

spline cúbica → Natural / → Completa

Spline Natural	*Spline* Completa
$M_0 = 0$	$2(x_1 - x_0)M_0 + (x_1 - x_0)M_1 = \frac{6}{(x_1 - x_0)}(f(x_1) - f(x_0)) - 6f'(x_0)$
$M_n = 0$	$2(x_n - x_{n-1})M_n + (x_n - x_{n-1})M_{n-1} = 6f'(x_n) - \frac{6}{(x_n - x_{n-1})}(f(x_n) - f(x_{n-1}))$

$\hookrightarrow f'(x_0)$ e $f'(x_n)$ → por causa disto ⇒ se já derem a derivada não precisamos tirar os pontos

a)

⇒ Tabela da spline

(n=3)

	x_0	x_1	x_2	x_3
x	10	18	27	34
f	20 (f_0)	15 (f_1)	9 (f_2)	10 (f_3)

→ tiramos o 2º e o penúltimo

$$S_3(x) = \begin{cases} S_3^1(x) \\ S_3^2(x) \\ S_3^3(x) \end{cases}$$

$$f'(x_0) \approx \frac{20-18}{10-12} = -1$$

$$f'(x_3) \approx \frac{12-10}{30-34} = -0,5$$

Calculo dos M's $\quad (M = S_3'')$

$i=0$ → fronteira ⇒ $i=0$ | $2(x_1-x_0)M_0 + (x_1-x_0)M_1 = \frac{6}{x_1-x_0}(f_1-f_0) - 6f_0'$

$i=1$, $i=2$ } pontos interiores ⇒ $i=1$, ⇒ $i=2$ | → ver no formulário ⇒ pontos interiores

$i=3$ → fronteira ⇒ $i=3$ | $2(x_3-x_2)M_3 + (x_3-x_2)M_2 = 6f_3' - \frac{6}{x_3-x_2}(f_3-f_2)$

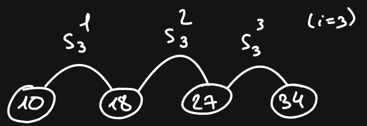
$i=0 \Rightarrow 16M_0 + 8M_1 = 2,25$

$i=1 \Rightarrow 8M_0 + 34M_1 + 9M_2 = -0,25$

$i=2 \Rightarrow 9M_1 + 32M_2 + 7M_3 = 4,8571$

$i=3 \Rightarrow 7M_2 + 14M_3 = -3,8571$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} 16 & 8 & 0 & 0 \\ 8 & 34 & 9 & 0 \\ 0 & 9 & 32 & 7 \\ 0 & 0 & 7 & 14 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} M_0 \\ M_1 \\ M_2 \\ M_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2,25 \\ -0,25 \\ 4,8571 \\ -3,8571 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} M_0 \\ M_1 \\ M_2 \\ M_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0,2054 \\ -0,1295 \\ 0,2790 \\ -0,4150 \end{pmatrix}$$



$$S_3^3(x) = \frac{M_2}{6(x_3-x_2)}(x_3-x)^3 + \frac{M_3}{6(x_3-x_2)}(x-x_2)^3 + \left(\frac{f_2}{x_3-x_2} - \frac{M_2(x_3-x_2)}{6}\right)(x_3-x) + \left(\frac{f_3}{x_3-x_2} - \frac{M_3(x_3-x_2)}{6}\right)(x-x_2)$$

$S_3^3(29) = 9,3779$

Nota: $S_3^3(27) = 9$, $S_3^3(34) = 10$

⇒ ou $S_3^3(x) = (-0,0165)(x-27)^3 + 0,1395(x-27)^2 - 0,024(x-27) + 9$

b) Erro da spline no ponto 29

$$|f(x) - S_3(x)| \le \frac{5}{384} h^4 M_4 = \frac{5}{384} 9^4 (0,0014 \times 4!)$$

→ $h = \max\{18-10, 27-18, 34-27\} = 9$

x	$f(x)$	DD1	DD2	DD3	DD4
10	20				
		$\frac{20-18}{10-12} = -1$			
12	18		$-0,625$		
		$\frac{18-15}{12-18} = -0,5$		$-0,0043$	
18	15		$-0,0111$		$0,006$
		$\frac{15-9}{18-27} = -0,6667$		$-0,0083$	
27	9		$0,1389$		$-0,0014$
		$\frac{9-12}{27-30} = 1$		$-0,021$	
30	12		$-0,2143$		
		$\frac{12-10}{30-34} = -0,5$			
34	10				

Mínimos Quadrados

59. A tabela seguinte contém os registos efectuados dos valores médios da radiação solar numa região de Portugal:

mês (x_i)	J(1)	F(2)	M(3)	A(4)	M(5)	J(6)	J(7)	A(8)	S(9)	O(10)	N(11)	D(12)
Radiação	122	-	188	-	-	270	-	-	-	160	-	120

(a) Ajuste o modelo $M(x) = c_1 x + c_2 sen(x)$ aos valores da tabela, no sentido dos mínimos quadrados; → como dá o modelo → linear não polinomial

(b) Use o modelo encontrado para prever a radiação média no mês de Agosto;

(c) Avalie o modelo.

Modelo não polinomial linear

$$M(x; c_1, c_2, \ldots, c_n) = c_1\phi_1(x) + c_2\phi_2(x) + \ldots + c_n\phi_n(x)$$

$$\begin{pmatrix} \sum_{j=1}^m \phi_1^2(x_j) & \ldots & \sum_{j=1}^m \phi_1(x_j)\phi_n(x_j) \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ \sum_{j=1}^m \phi_n(x_j)\phi_1(x_j) & \ldots & \sum_{j=1}^m \phi_n^2(x_j) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_1 \\ \ldots \\ c_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sum_{j=1}^m f_j\phi_1(x_j) \\ \ldots \\ \sum_{j=1}^m f_j\phi_n(x_j) \end{pmatrix}$$

a) $\min S = \sum_{i=1}^{5} (f_i - M_i)^2$

$$M(x) = c_1 x + c_2 \,\mathrm{Sen}(x) = c_1\phi_1 + c_2\phi_2 = \quad \begin{matrix} \phi_1 = x \\ \phi_2 = \mathrm{sen}(x) \end{matrix}$$

x	f	ϕ_1	ϕ_2	$\phi_2\phi_1 = \phi_1\phi_2$	ϕ_1^2	ϕ_2^2	$f_i\phi_1$	$f_i\phi_2$
1	122	1	0,841471	0,841471	1	0,708057	122	102,6595
3	188	3	0,14112	0,42336	9	0,019915	564	26,530562
6	270	6	-0,279415	-1,67649	36	0,078073	1620	-75,442185
10	160	10	-0,544021	-5,44021	100	0,295959	1600	-87,043378
12	120	12	-0,536573	-6,43888	144	0,287910	1440	-64,388750
				Σ -13,29078	Σ 290	Σ 1,385931	Σ 5346	Σ -97,684291

$$\begin{pmatrix} \Sigma\phi_1^2 & \Sigma\phi_1\phi_2 \\ \Sigma\phi_2\phi_1 & \Sigma\phi_2^2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \Sigma f_i\phi_1 \\ \Sigma f_i\phi_2 \end{pmatrix} \Rightarrow \left(\begin{array}{cc|c} 290 & -13,29075 & 5,346 \\ -12,29075 & 1,38593 & -97,68429 \end{array}\right) \Rightarrow \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 24,72035 \\ 1483,31492 \end{pmatrix}$$

→ EGPP →

⇒ Escrever o modelo

$M(x) = 24,72035x + 1483,1492\,\mathrm{sen}(x)$

b) $M(8) = 344,499 \simeq 345$

c)

x_i	f_i	$M(x_i)$	$(f_i - M_i)^2$
1			
3			
6			
10			
12			

Integrais

40. Foram registados os consumos, $f(x_i)$, de um aparelho em determinados instantes, x_i (em segundos):

x_i	0	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6	3.6	6.6	9.6	9.8	10
$f(x_i)$	0	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6	0.65	0.6	0.6	0.7	0.8

(a) Estime o consumo total ao fim de 10 segundos.

(b) Estime o erro cometido no intervalo [0.6,9.6].

Se usarmos só uma vez a Simpson → simples
Se usarmos mais de uma vez → composta

x — x — x → simpson simples

x — x — x — x — x → 2 simpsons simples, logo composta

a)

simpson composta → $S_c(0{,}1)$, h | 3/8 (3), h | simpson → $S(0{,}2)$, h

x	0	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	3,6	6,6	9,6	9,8	10
	f_0	f_1	f_2	f_3	f_4	f_5	f_6	f_7	f_8	f_9	f_{10}	f_{11}

$$\int_0^{10} f(x)\,dx = \int_0^{0,6} f(x)\,dx + \int_{0,6}^{9,6} f(x)\,dx + \int_{9,6}^{10} f(x)\,dx$$

$$\approx I_1 + I_2 + I_3 = 0{,}18 + 5{,}5687 + 0{,}28 = 6{,}0288$$

$$I_3 = \frac{(10-9{,}6)}{6}\left(f_9 + 4f_{10} + f_{11}\right) = \frac{(10-9{,}6)}{6}\left(0{,}6 + 4\times 0{,}7 + 0{,}8\right) = 0{,}28$$

$$I_2 = \frac{(9{,}6-0{,}6)}{8}\left(f_6 + 3f_7 + 3f_8 + f_9\right) = 5{,}5687$$

$$I_1 = \int_0^{0,6} f(x)\,dx \approx \frac{0{,}1}{3}\left(f_0 + 4f_1 + 2f_2 + 4f_3 + 2f_4 + 4f_5 + f_6\right) = 0{,}18$$

Pesos

1	4	1				
		1	4	1		
				1	4	1
1	4	2	4	2	4	1

→ funciona para qualquer um

b) Erro dos 3/8 s $\Rightarrow \left| -\frac{(b-a)^5}{6480} f^{(iv)}(y) \right| =$

pode ser colocado no final →

x	$f(x)$	DD1	DD2	DD3	DD4
0,5	0,5				
		1			
0,6	0,6		-0,0172		
		0,0167		0,0511	
3,6	0,65		0,0056		-0,0055
		-0,0167		0,009	
6,6	0,6		0,0028		
		0			
9,6	0,6				

Integrais → mas a começar pelo erro⚠

45. Determine uma aproximação ao valor do integral definido

$$\int_0^1 \left(x^2 + \frac{1}{x+1}\right) dx$$

através da fórmula de Simpson, com um erro de truncatura, em valor absoluto, inferior a 0.0005

$$\left| \frac{h^4}{180} (b-a)\, f^{(iv)}(Y) \right| < 0{,}0005$$

$a = 0$

$b = 1$

ver no integral dado

$$f(x) = x^2 + \frac{1}{x+1} = x^2 + (x+1)^{-1}$$

$$\frac{b-a}{n} = h \qquad \frac{b-a}{n} < 0{,}2475 \qquad \frac{1-0}{n} < 0{,}2475 \Leftrightarrow n > 4{,}04$$

→ n=5 não serve

$n = 6$

→ >4

→ múltiplo de 2

mas

usando n=6, iria prejudicar o arredondamento do h

$$n = 8 \Rightarrow \frac{b-a}{n} = h \Leftrightarrow \frac{1}{8} = 0{,}125$$

$$f^{(iv)}(x) = 24(x+1)^{-5}$$

$$\left|f^{(iv)}(0)\right| = 24$$

$$\max f^{(iv)} = 24 \qquad \left| \frac{h^4}{180}(1-0) \times 24 \right| < 0{,}0005 \Leftrightarrow h = 5$$

$$\left|f^{(iv)}(1)\right| = 0{,}75$$

x	0	0,125	0,25	0,375	0,5	0,625	0,75	0,875	1
f(x)	0	0,9045	0,8625	0,8679	0,9167	1,05601	1,13393	1,29896	1,5

$$\int_0^1 f(x)\,dx \approx \frac{0{,}125}{3}\left[1 + 4 \times 0{,}9045 + 2 \times 0{,}8625 + \ldots + 4 \times 1{,}29896 + 1{,}5\right] \approx 1{,}0267$$