



Programação Linear - método simplex

Investigação Operacional

J.M. Valério de Carvalho
`vc@dps.uminho.pt`

Departamento de Produção e Sistemas
Escola de Engenharia, Universidade do Minho

21 de outubro de 2020

Programação Linear - método simplex

antes

- Existe sempre um vértice que é uma solução óptima do problema. (*)

Guião

- As soluções básicas do sistema de equações (vértices) podem ser representadas em quadros.
- O algoritmo Simplex explora uma sequência de vértices admissíveis.
- Em cada vértice, é necessário avaliar se o vértice actual é o óptimo, e se não for, decidir qual o vértice adjacente seguinte.
- Uma operação fundamental do algoritmo é o *pivô* (a mudança de um vértice para um vértice adjacente).
- O método algébrico para efectuar o pivô é a eliminação de Gauss.

depois

- Há situações particulares que serão analisadas depois.

(*) - neste conjunto de diapositivos, vamos assumir que existe pelo menos uma solução admissível (i.e., o problema não é

impossível), que a solução óptima não é ilimitada e que não há vértices degenerados [veremos depois].

- Representação de vértices num quadro: o quadro simplex
- Algoritmo simplex
 - coluna pivô: teste de optimalidade
 - linha pivô: vértice admissível adjacente
- Resolução de um Exemplo
- Apêndices
 - Referência à eliminação de Gauss

Quando nos movemos ao longo de uma aresta, desde um vértice, os valores das variáveis alteram-se do seguinte modo:

- Variáveis não-básicas:
 - há uma **única** variável não-básica cujo valor aumenta;
 - as restantes variáveis não-básicas permanecem nulas.
- Variáveis básicas:
 - alteram-se de acordo com o sistema de equações.

Dois vértices são adjacentes, se houver apenas a troca de 2 variáveis:

- uma variável não-básica num vértice é básica no vértice adjacente;
- uma variável básica num vértice é não-básica no vértice adjacente.

Representação do vértice num quadro: o *quadro simplex*

Cada *quadro simplex* apresenta:

- o sistema de m equações das restrições resolvido em ordem a um conjunto de variáveis básicas, *i.e.*,
- uma solução básica do sistema de equações (associando valores nulos às variáveis não-básicas), *i.e.*,
- um vértice do poliedro.

Além disso, apresenta:

- a equação da função objectivo, na última linha.

nota:

- A função objectivo $z = 12x_1 + 10x_2$ é representada como:

$$z - 12x_1 - 10x_2 = 0$$

Exemplo

max z

$$\begin{array}{rclclclcl} 3x_1 & + & 2x_2 & + 1s_1 & & & = & 120 \\ 1x_1 & + & 2x_2 & & + 1s_2 & & = & 80 \\ 1x_1 & & & & & + 1s_3 & = & 30 \\ z & -12x_1 & - & 10x_2 & & & = & 0 \\ & x_1, x_2, s_1, s_2, s_3 \geq 0 & & & & & & \end{array}$$

| | z | x_1 | x_2 | s_1 | s_2 | s_3 | |
|-------|-----|-------|-------|-------|-------|-------|-----|
| s_1 | 0 | 3 | 2 | 1 | 0 | 0 | 120 |
| s_2 | 0 | 1 | 2 | 0 | 1 | 0 | 80 |
| s_3 | 0 | 1 | 0 | 0 | 0 | 1 | 30 |
| z | 1 | -12 | -10 | 0 | 0 | 0 | 0 |

- As m variáveis básicas e a f. obj. são identificadas na 1.^a coluna.
- Os respectivos valores aparecem na última coluna (lado direito).
- As restantes $(n - m)$ variáveis não-básicas têm valor 0.

O quadro simplex tem uma matriz identidade $I_{m+1, m+1}$ formada:

- pelas m colunas das variáveis básicas, e
- pela coluna de z , a variável que representa a função objectivo.

A matriz identidade do quadro simplex: necessidade

Quadro simplex deve ter sempre uma matriz identidade. Só assim é que:

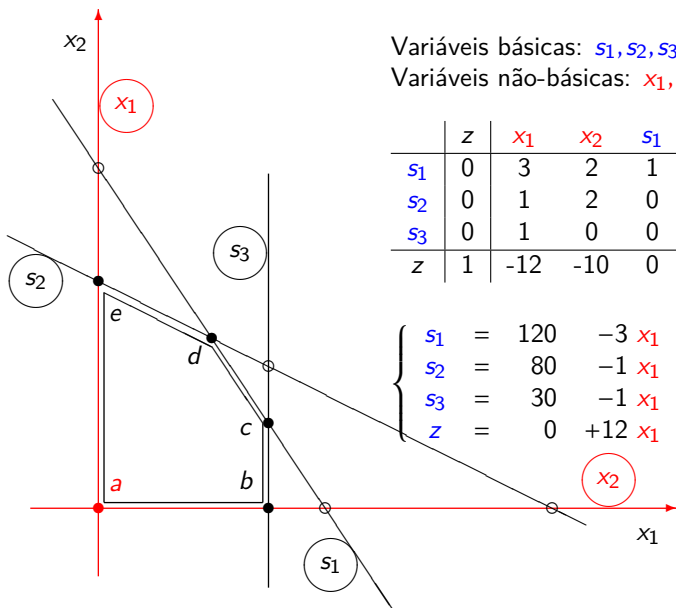
- cada equação mostra como variam:
 - cada variável básica e
 - a função objectivo
- em função apenas das variáveis não-básicas;
- se podem identificar as decisões correctas no algoritmo simplex.

Exemplo: Variáveis básicas: $x_B = (s_1, s_2, s_3)^T$
Variáveis não-básicas: $x_N = (x_1, x_2)^T$

$$\left\{ \begin{array}{lcl} s_1 & = & 120 - 3x_1 - 2x_2 \\ s_2 & = & 80 - 1x_1 - 2x_2 \\ s_3 & = & 30 - 1x_1 \\ z & = & 0 + 12x_1 + 10x_2 \end{array} \right.$$

| | z | x_1 | x_2 | s_1 | s_2 | s_3 | |
|-------|---|-------|-------|-------|-------|-------|-----|
| s_1 | 0 | 3 | 2 | 1 | 0 | 0 | 120 |
| s_2 | 0 | 1 | 2 | 0 | 1 | 0 | 80 |
| s_3 | 0 | 1 | 0 | 0 | 0 | 1 | 30 |
| z | 1 | -12 | -10 | 0 | 0 | 0 | 0 |

Vértice $a: (x_1, x_2)^T = (0, 0)^T$



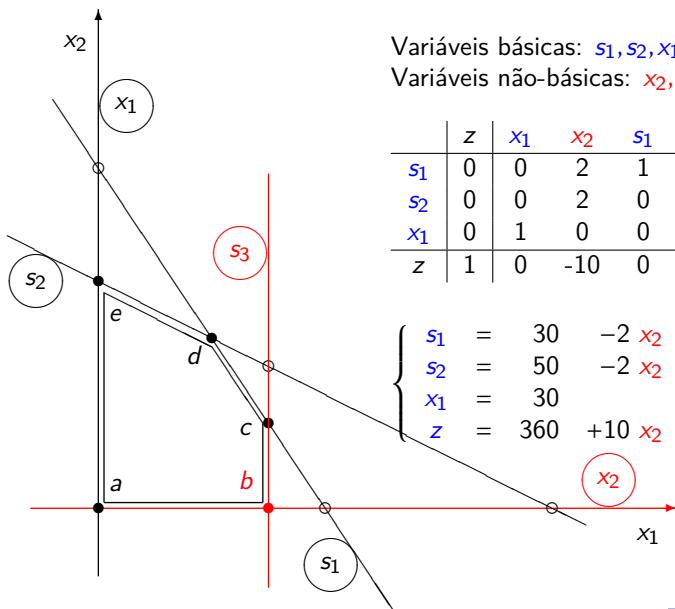
Variáveis básicas: s_1, s_2, s_3

Variáveis não-básicas: x_1, x_2

| | z | x_1 | x_2 | s_1 | s_2 | s_3 | |
|-------|-----|-------|-------|-------|-------|-------|-----|
| s_1 | 0 | 3 | 2 | 1 | 0 | 0 | 120 |
| s_2 | 0 | 1 | 2 | 0 | 1 | 0 | 80 |
| s_3 | 0 | 1 | 0 | 0 | 0 | 1 | 30 |
| z | 1 | -12 | -10 | 0 | 0 | 0 | 0 |

$$\begin{cases} s_1 = 120 - 3x_1 - 2x_2 \\ s_2 = 80 - 1x_1 - 2x_2 \\ s_3 = 30 - 1x_1 \\ z = 0 + 12x_1 + 10x_2 \end{cases}$$

Vértice $b : (x_1, x_2)^\top = (30, 0)^\top$



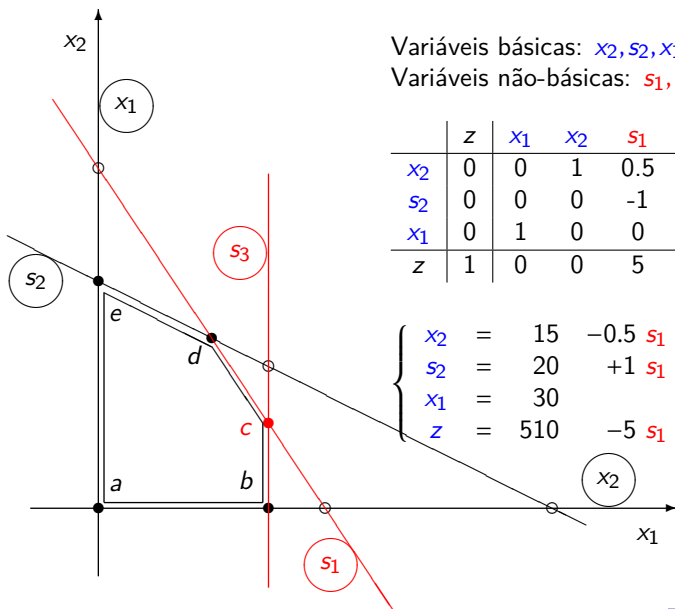
Variáveis básicas: s_1, s_2, x_1

Variáveis não-básicas: x_2, s_3

| | z | x_1 | x_2 | s_1 | s_2 | s_3 | |
|-------|-----|-------|-------|-------|-------|-------|-----|
| s_1 | 0 | 0 | 2 | 1 | 0 | -3 | 30 |
| s_2 | 0 | 0 | 2 | 0 | 1 | -1 | 50 |
| x_1 | 0 | 1 | 0 | 0 | 0 | 1 | 30 |
| z | 1 | 0 | -10 | 0 | 0 | 12 | 360 |

$$\begin{cases} s_1 = 30 - 2x_2 + 3s_3 \\ s_2 = 50 - 2x_2 + 1s_3 \\ x_1 = 30 - 1s_3 \\ z = 360 + 10x_2 - 12s_3 \end{cases}$$

Vértice $c : (x_1, x_2)^T = (30, 15)^T$



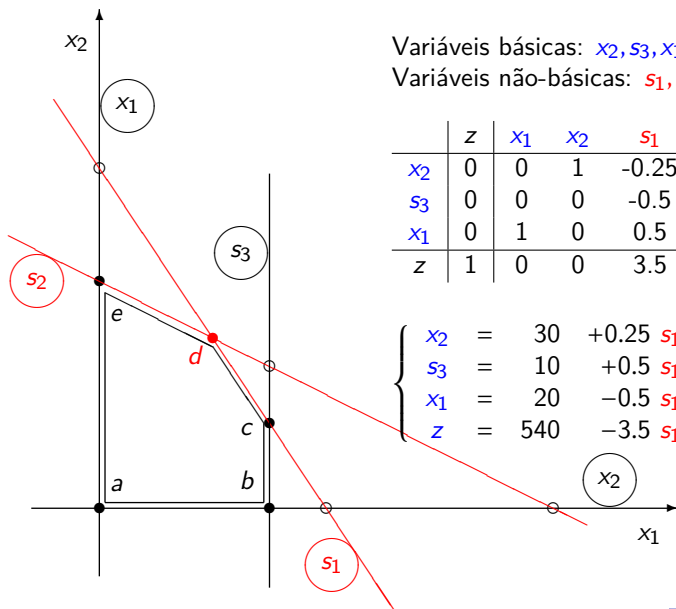
Variáveis básicas: x_2, s_2, x_1

Variáveis não-básicas: s_1, s_3

| | z | x_1 | x_2 | s_1 | s_2 | s_3 | |
|-------|-----|-------|-------|-------|-------|-------|-----|
| x_2 | 0 | 0 | 1 | 0.5 | 0 | -1.5 | 15 |
| s_2 | 0 | 0 | 0 | -1 | 1 | 2 | 20 |
| x_1 | 0 | 1 | 0 | 0 | 0 | 1 | 30 |
| z | 1 | 0 | 0 | 5 | 0 | -3 | 510 |

$$\begin{cases} x_2 = 15 - 0.5 s_1 + 1.5 s_3 \\ s_2 = 20 + 1 s_1 - 2 s_3 \\ x_1 = 30 - 5 s_1 + 3 s_3 \\ z = 510 + 5 s_1 - 3 s_3 \end{cases}$$

Vértice $d : (x_1, x_2)^T = (20, 30)^T$



Variáveis básicas: x_2, s_3, x_1

Variáveis não-básicas: s_1, s_2

| | z | x_1 | x_2 | s_1 | s_2 | s_3 | |
|-------|-----|-------|-------|-------|-------|-------|-----|
| x_2 | 0 | 0 | 1 | -0.25 | 0.75 | 0 | 30 |
| s_3 | 0 | 0 | 0 | -0.5 | 0.5 | 1 | 10 |
| x_1 | 0 | 1 | 0 | 0.5 | -0.5 | 0 | 20 |
| z | 1 | 0 | 0 | 3.5 | 1.5 | 0 | 540 |

$$\begin{cases} x_2 = 30 + 0.25 s_1 - 0.75 s_2 \\ s_3 = 10 + 0.5 s_1 - 0.5 s_2 \\ x_1 = 20 - 0.5 s_1 + 0.5 s_2 \\ z = 540 - 3.5 s_1 - 1.5 s_2 \end{cases}$$

Método simplex

Método simplex

- Um *simplex* é um poliedro formado por um dado vértice e n vértices adjacentes. É o poliedro mais simples no espaço a n dimensões.
- O método simplex dá origem a um algoritmo que percorre uma sequência de vértices admissíveis até atingir a solução óptima.

Algoritmo Simplex (informal)

- seleccionar um vértice admissível inicial
- enquanto (existir um vértice admissível adjacente melhor)
mudar para vértice admissível adjacente melhor

Operações fundamentais do algoritmo simplex:

- 1 teste de optimalidade: existe algum vértice admissível adjacente ao vértice actual com melhor valor de função objectivo?
- 2 pivô: mudança de uma base (vértice) para uma base adjacente.

Seleccção do elemento pivô no algoritmo simplex

- Efectuar um pivô traduz-se em reescrever o sistema de equações, resolvendo-o em ordem a um novo conjunto de variáveis básicas, o que se faz usando *eliminação de Gauss*.
- Na inversão de matrizes ou na resolução de sistemas de equações, há regras para seleccionar o *elemento pivô* (cruzamento da *coluna pivô* com a *linha pivô*).

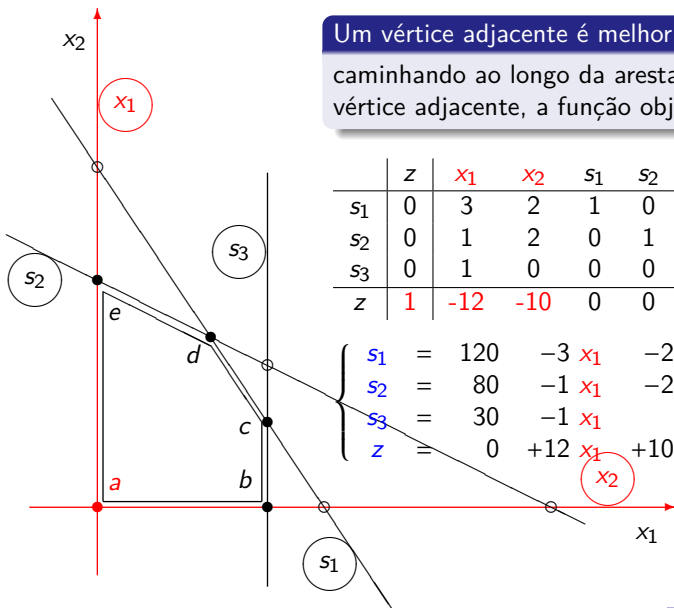
No algoritmo simplex, a regra de selecção da:

- 1 *coluna pivô* (variável não-básica que entra na base) visa mudar para um vértice melhor;
- 2 *linha pivô* (variável básica que sai da base) assegura que o próximo vértice é admissível.

Coluna pivô: teste de optimalidade do vértice a

Um vértice adjacente é melhor se:

caminhando ao longo da aresta, no sentido do vértice adjacente, a função objectivo melhora.



| | z | x_1 | x_2 | s_1 | s_2 | s_3 | |
|-------|-----|-------|-------|-------|-------|-------|-----|
| s_1 | 0 | 3 | 2 | 1 | 0 | 0 | 120 |
| s_2 | 0 | 1 | 2 | 0 | 1 | 0 | 80 |
| s_3 | 0 | 1 | 0 | 0 | 0 | 1 | 30 |
| z | 1 | -12 | -10 | 0 | 0 | 0 | 0 |

$$\begin{cases} s_1 = 120 - 3x_1 - 2x_2 \\ s_2 = 80 - x_1 - 2x_2 \\ s_3 = 30 - x_1 \\ z = 0 + 12x_1 + 10x_2 \end{cases}$$

Coluna pivô: teste de optimalidade no quadro simplex

| | z | x_1 | x_2 | s_1 | s_2 | s_3 | |
|-------|---|-------|-------|-------|-------|-------|-----|
| s_1 | 0 | 3 | 2 | 1 | 0 | 0 | 120 |
| s_2 | 0 | 1 | 2 | 0 | 1 | 0 | 80 |
| s_3 | 0 | 1 | 0 | 0 | 0 | 1 | 30 |
| z | 1 | -12 | -10 | 0 | 0 | 0 | 0 |

- A linha da função objectivo é a equação:

$$z - 12x_1 - 10x_2 = 0.$$

- Aresta \overline{ab} : quando x_1 aumenta (mantendo $x_2 = 0$), $\partial z / \partial x_1 = 12$.
- Aresta \overline{ae} : quando x_2 aumenta (mantendo $x_1 = 0$), $\partial z / \partial x_2 = 10$.
- Em ambos os casos, o valor da função objectivo z aumenta: o vértice a não é o vértice óptimo.

Coluna pivô: regra de selecção

- *Regra de Dantzig*: seleccionar a variável não-básica com maior variação da função objectivo por unidade de incremento da variável não-básica ao longo da aresta, *i.e.*:

A coluna pivô (da variável não-básica a entrar na base) é:

- a coluna com o coeficiente mais negativo da linha da função objectivo, em problemas de maximização.
 - a coluna com o coeficiente mais positivo da linha da função objectivo, em problemas de minimização.
-
- Esta escolha visa atingir a solução óptima mais rapidamente.
 - Em caso de empate, a escolha é arbitrária (ou desempata-se seleccionando a aresta que conduz ao vértice adjacente com melhor valor da função objectivo).

- há outras regras como: *Devex rule*, *partial pricing*, *nested pricing*.

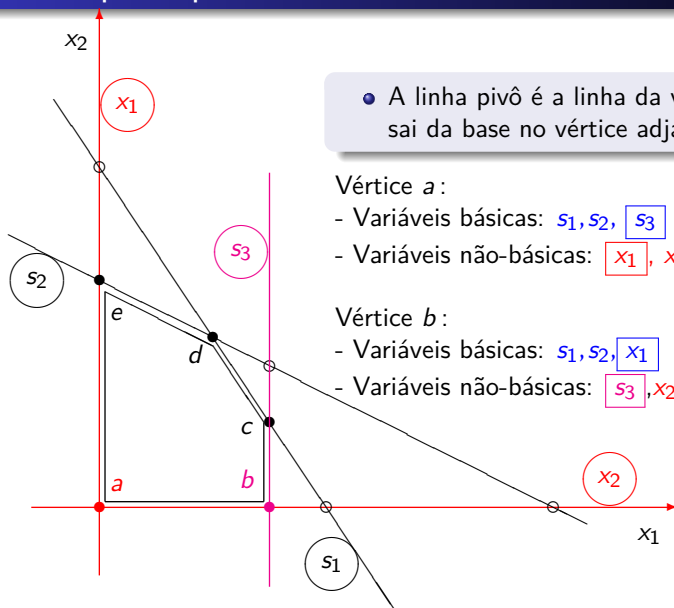
Coluna pivô: e se não existir ...

Caracterização algébrica: uma solução é ótima:

- se não existir nenhum coeficiente negativo na linha da função objectivo, em problemas de maximização.
 - se não existir nenhum coeficiente positivo na linha da função objectivo, em problemas de minimização.
-
- Exemplo: $z + 3.5 s_1 + 1.5 s_2 = 540$ (problema de maximização)
 - quando s_1 aumenta (mantendo $s_2 = 0$), $\partial z / \partial s_1 = -3.5$
 - quando s_2 aumenta (mantendo $s_1 = 0$), $\partial z / \partial s_2 = -1.5$
 - Em ambos os casos, a função objectivo z diminui.
 - (o mesmo acontece se s_1 e s_2 aumentarem ambas; são iguais a 0, e apenas podem aumentar).

► Ver caracterização geométrica

Linha pivô: pivô do vértice $a \rightarrow$ vértice b



- A linha pivô é a linha da variável básica que sai da base no vértice adjacente.

Vértice a :

- Variáveis básicas: s_1, s_2, s_3
- Variáveis não-básicas: x_1, x_2 (iguais a 0)

Vértice b :

- Variáveis básicas: s_1, s_2, x_1
- Variáveis não-básicas: s_3, x_2 (iguais a 0)

Linha pivô: variação das variáveis básicas

- Cada elemento da coluna pivô indica a variação do valor de uma variável básica quando se caminha ao longo da aresta.

- Exemplo:

| | z | x_1 | x_2 | s_1 | s_2 | s_3 | |
|-------|-----|-------|-------|-------|-------|-------|-----|
| s_1 | 0 | 3 | 2 | 1 | 0 | 0 | 120 |
| s_2 | 0 | 1 | 2 | 0 | 1 | 0 | 80 |
| s_3 | 0 | 1 | 0 | 0 | 0 | 1 | 30 |
| z | 1 | -12 | -10 | 0 | 0 | 0 | 0 |

- Quando x_1 aumenta (e x_2 se mantém = 0), o sistema de equações que descreve a variação das variáveis básicas em função de x_1 é:

$$\begin{cases} s_1 = 120 - 3x_1 \\ s_2 = 80 - 1x_1 \\ s_3 = 30 - 1x_1 \end{cases}$$

▶ Ver mais

Linha pivô: variável que sai da base

- É aquela que, ao decrescer, atinge primeiro o valor zero quando a variável não-básica aumenta.

| | z | x_1 | x_2 | s_1 | s_2 | s_3 | |
|-------|---|-------|-------|-------|-------|-------|-----|
| s_1 | 0 | 3 | 2 | 1 | 0 | 0 | 120 |
| s_2 | 0 | 1 | 2 | 0 | 1 | 0 | 80 |
| s_3 | 0 | 1 | 0 | 0 | 0 | 1 | 30 |
| z | 1 | -12 | -10 | 0 | 0 | 0 | 0 |

$$\begin{cases} s_1 = 120 - 3x_1 \\ s_2 = 80 - 1x_1 \\ s_3 = 30 - 1x_1 \end{cases}$$

nota: o elemento pivô é sempre **positivo**, porque, se o coeficiente for:

- **nulo**, a variável básica **mantém o valor** (i.e., mantém-se ≥ 0);
- **negativo**, a variável básica **aumenta** (i.e., mantém-se ≥ 0);
- nota: as coordenadas do vértice adjacente $x_1, x_2, s_1, s_2, s_3 \geq 0$.

Linha pivô: linha da *menor razão positiva*

- **razão** entre o coef. do lado direito e o coef. da coluna pivô

| | z | x_1 | x_2 | s_1 | s_2 | s_3 | | |
|-------|---|-------|-------|-------|-------|-------|-----|--------------|
| s_1 | 0 | 3 | 2 | 1 | 0 | 0 | 120 | $120/3 = 40$ |
| s_2 | 0 | 1 | 2 | 0 | 1 | 0 | 80 | $80/1 = 80$ |
| s_3 | 0 | 1 | 0 | 0 | 0 | 1 | 30 | $30/1 = 30$ |
| z | 1 | -12 | -10 | 0 | 0 | 0 | 0 | |

Exemplo: a *menor razão positiva* é 30

- Coluna pivô: coluna de x_1 (entra na base, e atinge o valor 30).
- Linha pivô: linha de s_3 (atinge o valor 0, e torna-se não-básica).

| | z | x_1 | x_2 | s_1 | s_2 | s_3 | |
|-------|---|-------|-------|-------|-------|-------|----|
| s_1 | 0 | 0 | | 1 | 0 | | |
| s_2 | 0 | 0 | | 0 | 1 | | |
| x_1 | 0 | 1 | 0 | 0 | 0 | 1 | 30 |
| z | 1 | 0 | | 0 | 0 | | |

Linha pivô: regra de selecção

Dada uma coluna pivô, a linha pivô (da variável básica que sai da base):

- é a linha com **menor razão positiva**.

clarificação:

- **positiva** significa que o coeficiente da coluna pivô deve ser > 0 .
- A **menor razão** pode ser 0, se o lado direito for 0.
- Se não existir um coeficiente da coluna pivô > 0 , a solução óptima é ilimitada [veremos depois].
- Em caso de empate, o próximo vértice é degenerado [veremos depois].

Algoritmo simplex (problema de maximização)

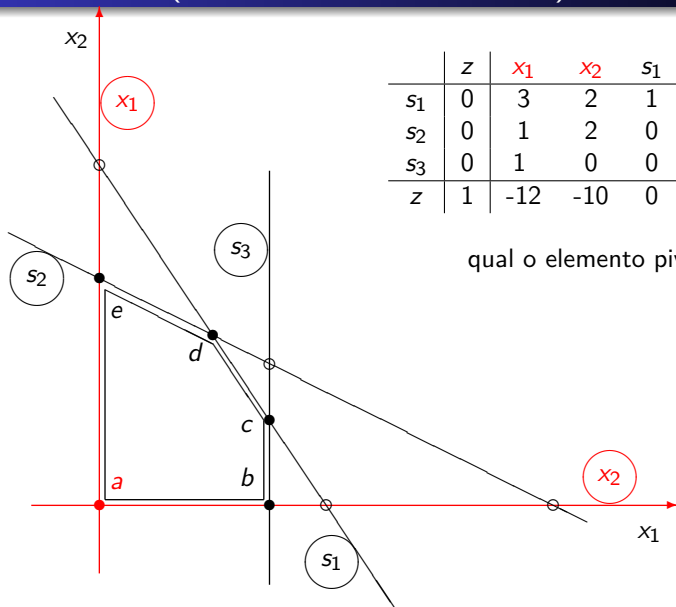
- Selecção de um vértice admissível inicial
 - Se não existir, problema é impossível [veremos depois]
- Repetir
 - Selecção da coluna pivô:
 - Coeficiente mais negativo da linha da função objectivo
 - (em caso de empate, escolha arbitrária)
 - Se não existir coef. <0 , solução óptima.
 - Selecção da linha pivô:
 - Menor razão (lado direito/coluna pivô) positiva (coef.col. >0)
 - (em caso de empate, o próximo vértice é degenerado) [veremos depois]
 - Se não existir coef.col. >0 , solução óptima é ilimitada [veremos depois]
 - Fazer eliminação de Gauss
- Enquanto (solução não for óptima)

Resolução do Exemplo

- Vamos apenas fazer o teste de optimalidade de cada quadro e identificar o elemento pivô.
- Não serão apresentadas as operações do método de eliminação de Gauss.
- No Apêndice, mostra-se como as efectuar, quer manuseando linhas, quer fazendo cálculos elemento a elemento.

▶ Ver Mais

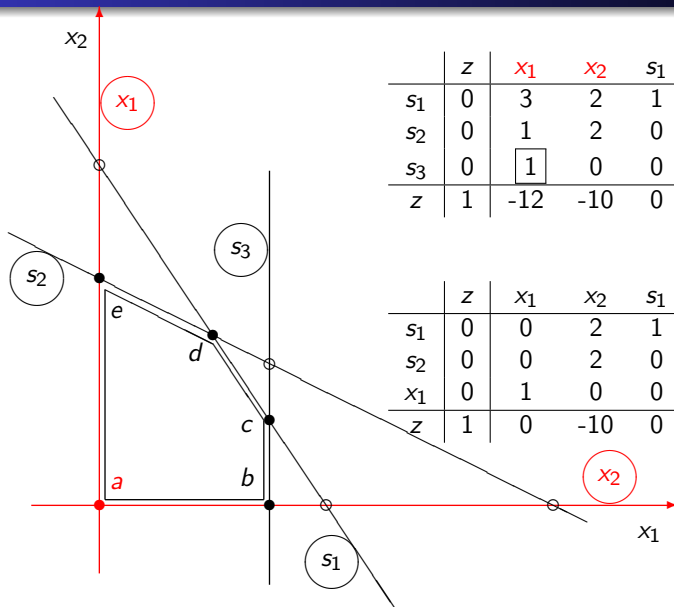
Vértice a (vértice admissível inicial)



| | z | x_1 | x_2 | s_1 | s_2 | s_3 | |
|-------|-----|-------|-------|-------|-------|-------|-----|
| s_1 | 0 | 3 | 2 | 1 | 0 | 0 | 120 |
| s_2 | 0 | 1 | 2 | 0 | 1 | 0 | 80 |
| s_3 | 0 | 1 | 0 | 0 | 0 | 1 | 30 |
| z | 1 | -12 | -10 | 0 | 0 | 0 | 0 |

qual o elemento pivô?

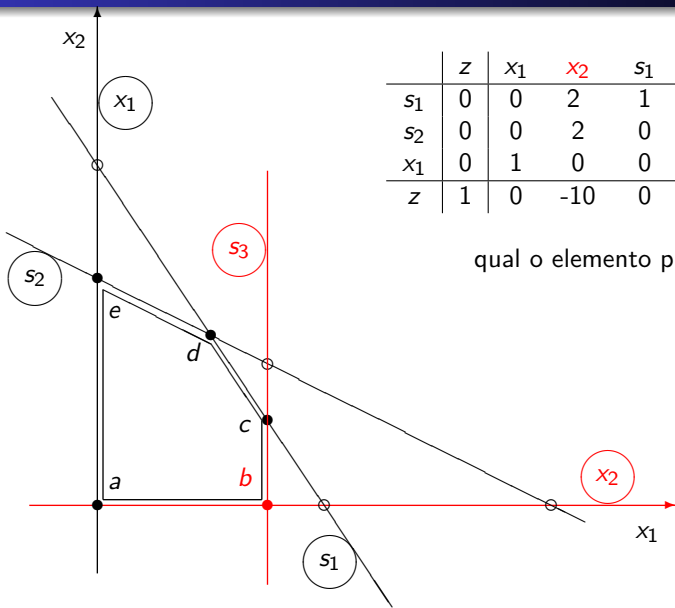
Vértice $a \rightarrow$ vértice b



| | z | x_1 | x_2 | s_1 | s_2 | s_3 | |
|-------|-----|-------|-------|-------|-------|-------|-----|
| s_1 | 0 | 3 | 2 | 1 | 0 | 0 | 120 |
| s_2 | 0 | 1 | 2 | 0 | 1 | 0 | 80 |
| s_3 | 0 | 1 | 0 | 0 | 0 | 1 | 30 |
| z | 1 | -12 | -10 | 0 | 0 | 0 | 0 |

| | z | x_1 | x_2 | s_1 | s_2 | s_3 | |
|-------|-----|-------|-------|-------|-------|-------|-----|
| s_1 | 0 | 0 | 2 | 1 | 0 | -3 | 30 |
| s_2 | 0 | 0 | 2 | 0 | 1 | -1 | 50 |
| x_1 | 0 | 1 | 0 | 0 | 0 | 1 | 30 |
| z | 1 | 0 | -10 | 0 | 0 | 12 | 360 |

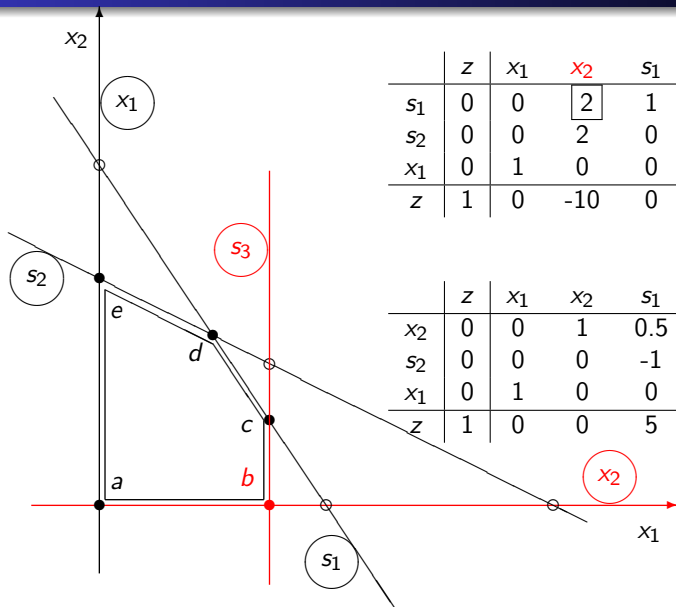
Vértice b



| | z | x_1 | x_2 | s_1 | s_2 | s_3 | |
|-------|-----|-------|-------|-------|-------|-------|-----|
| s_1 | 0 | 0 | 2 | 1 | 0 | -3 | 30 |
| s_2 | 0 | 0 | 2 | 0 | 1 | -1 | 50 |
| x_1 | 0 | 1 | 0 | 0 | 0 | 1 | 30 |
| z | 1 | 0 | -10 | 0 | 0 | 12 | 360 |

qual o elemento pivô?

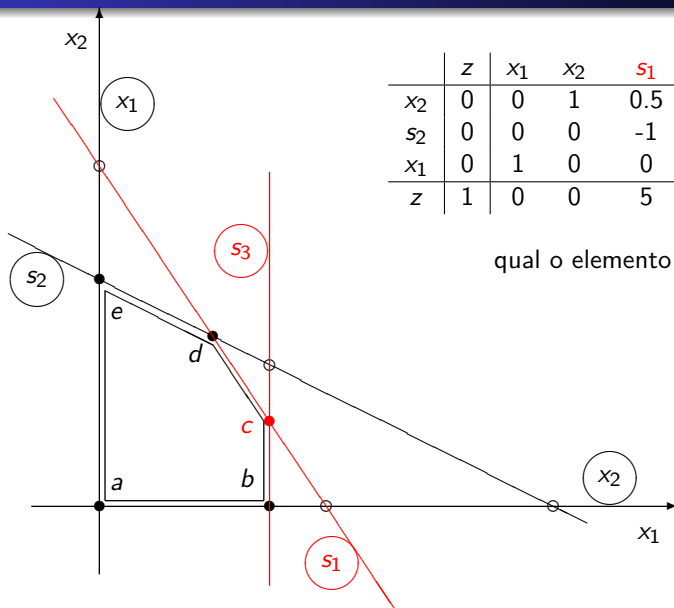
Vértice $b \rightarrow$ vértice c



| | z | x_1 | x_2 | s_1 | s_2 | s_3 | |
|-------|-----|-------|-------|-------|-------|-------|-----|
| s_1 | 0 | 0 | 2 | 1 | 0 | -3 | 30 |
| s_2 | 0 | 0 | 2 | 0 | 1 | -1 | 50 |
| x_1 | 0 | 1 | 0 | 0 | 0 | 1 | 30 |
| z | 1 | 0 | -10 | 0 | 0 | 12 | 360 |

| | z | x_1 | x_2 | s_1 | s_2 | s_3 | |
|-------|-----|-------|-------|-------|-------|-------|-----|
| x_2 | 0 | 0 | 1 | 0.5 | 0 | -1.5 | 15 |
| s_2 | 0 | 0 | 0 | -1 | 1 | 2 | 20 |
| x_1 | 0 | 1 | 0 | 0 | 0 | 1 | 30 |
| z | 1 | 0 | 0 | 5 | 0 | -3 | 510 |

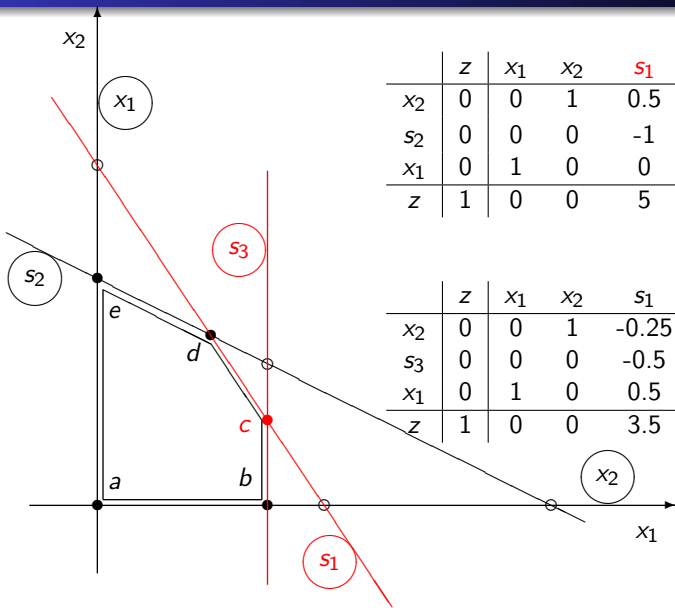
Vértice c



| | z | x_1 | x_2 | s_1 | s_2 | s_3 | |
|-------|-----|-------|-------|-------|-------|-------|-----|
| x_2 | 0 | 0 | 1 | 0.5 | 0 | -1.5 | 15 |
| s_2 | 0 | 0 | 0 | -1 | 1 | 2 | 20 |
| x_1 | 0 | 1 | 0 | 0 | 0 | 1 | 30 |
| z | 1 | 0 | 0 | 5 | 0 | -3 | 510 |

qual o elemento pivô?

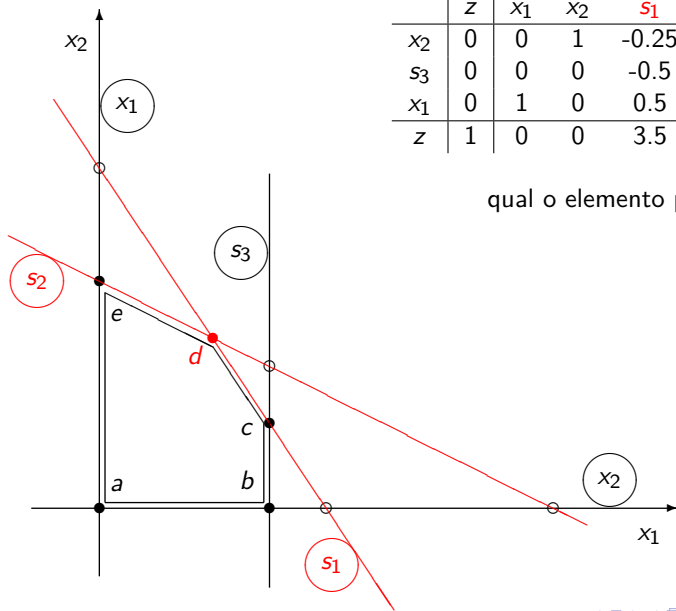
Vértice $c \rightarrow$ vértice d



| | z | x_1 | x_2 | s_1 | s_2 | s_3 | |
|-------|-----|-------|-------|-------|-------|-------|-----|
| x_2 | 0 | 0 | 1 | 0.5 | 0 | -1.5 | 15 |
| s_2 | 0 | 0 | 0 | -1 | 1 | 2 | 20 |
| x_1 | 0 | 1 | 0 | 0 | 0 | 1 | 30 |
| z | 1 | 0 | 0 | 5 | 0 | -3 | 510 |

| | z | x_1 | x_2 | s_1 | s_2 | s_3 | |
|-------|-----|-------|-------|-------|-------|-------|-----|
| x_2 | 0 | 0 | 1 | -0.25 | 0.75 | 0 | 30 |
| s_3 | 0 | 0 | 0 | -0.5 | 0.5 | 1 | 10 |
| x_1 | 0 | 1 | 0 | 0.5 | -0.5 | 0 | 20 |
| z | 1 | 0 | 0 | 3.5 | 1.5 | 0 | 540 |

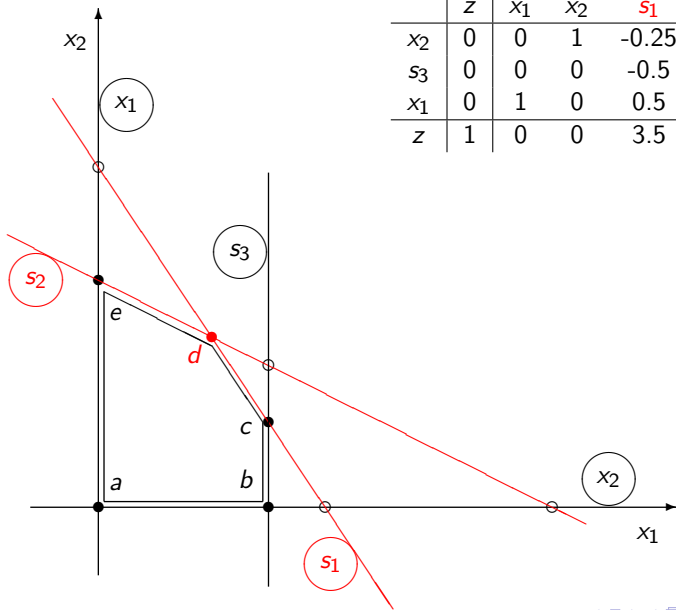
Vértice d



| | z | x_1 | x_2 | s_1 | s_2 | s_3 | |
|-------|-----|-------|-------|-------|-------|-------|-----|
| x_2 | 0 | 0 | 1 | -0.25 | 0.75 | 0 | 30 |
| s_3 | 0 | 0 | 0 | -0.5 | 0.5 | 1 | 10 |
| x_1 | 0 | 1 | 0 | 0.5 | -0.5 | 0 | 20 |
| z | 1 | 0 | 0 | 3.5 | 1.5 | 0 | 540 |

qual o elemento pivô?

Vértice d : solução ótima



| | z | x_1 | x_2 | s_1 | s_2 | s_3 | |
|-------|-----|-------|-------|-------|-------|-------|-----|
| x_2 | 0 | 0 | 1 | -0.25 | 0.75 | 0 | 30 |
| s_3 | 0 | 0 | 0 | -0.5 | 0.5 | 1 | 10 |
| x_1 | 0 | 1 | 0 | 0.5 | -0.5 | 0 | 20 |
| z | 1 | 0 | 0 | 3.5 | 1.5 | 0 | 540 |

Verificação da solução óptima

$$\begin{aligned}\max z = & 12x_1 + 10x_2 \\ & 3x_1 + 2x_2 \leq 120 \\ & 1x_1 + 2x_2 \leq 80 \\ & 1x_1 \leq 30 \\ & x_1, x_2 \geq 0\end{aligned}$$

Solução óptima:

| | z | x ₁ | x ₂ | s ₁ | s ₂ | s ₃ | |
|----------------|---|----------------|----------------|----------------|----------------|----------------|-----|
| x ₂ | 0 | 0 | 1 | -0.25 | 0.75 | 0 | 30 |
| s ₃ | 0 | 0 | 0 | -0.5 | 0.5 | 1 | 10 |
| x ₁ | 0 | 1 | 0 | 0.5 | -0.5 | 0 | 20 |
| z | 1 | 0 | 0 | 3.5 | 1.5 | 0 | 540 |

- Verificação da solução (uso de recursos e valor da solução óptima):

| | act.1 | act.2 | folga | qtd.rec. |
|---------------|--------|---------|-------|----------|
| recurso 1: | 3(20) | +2(30) | | = 120 |
| recurso 2: | 1(20) | +2(30) | | = 80 |
| recurso 3: | 1(20) | | +10 | = 30 |
| valor f.obj.: | 12(20) | +10(30) | | = 540 |

- O resultado que estabelece que existe um vértice que é uma solução óptima do problema permite que o algoritmo simplex restrinja a procura apenas aos vértices admissíveis.
- As decisões (selecção da coluna e da linha pivô) garantem que se muda de um vértice admissível (do problema primal) para outro vértice admissível mais próximo da solução óptima.
- A mudança de base faz-se usando eliminação de Gauss.

Método de eliminação de Gauss: manuseamento de linhas

- Elemento pivô: (cruzamento linha pivô e coluna pivô).

| | z | x_1 | x_2 | s_1 | s_2 | s_3 | |
|-------|-----|-------|-------|-------|-------|-------|-----|
| s_1 | 0 | 3 | 2 | 1 | 0 | 0 | 120 |
| s_2 | 0 | 1 | 2 | 0 | 1 | 0 | 80 |
| s_3 | 0 | 1 | 0 | 0 | 0 | 1 | 30 |
| z | 1 | -12 | -10 | 0 | 0 | 0 | 0 |

- A variável x_1 entra na base e a variável s_3 sai da base:
 - Novas variáveis básicas: s_1, s_2, x_1
 - Novas variáveis não-básicas: x_2, s_3
- Pretende-se que a coluna da variável x_1 , que entra na base, faça parte da matriz identidade:

| | z | x_1 | x_2 | s_1 | s_2 | s_3 | |
|-------|-----|-------|-------|-------|-------|-------|--|
| s_1 | 0 | 0 | | 1 | 0 | | |
| s_2 | 0 | 0 | | 0 | 1 | | |
| x_1 | 0 | 1 | | 0 | 0 | | |
| z | 1 | 0 | | 0 | 0 | | |

- Nota: para uma explicação mais detalhada do Método da Eliminação de Gauss, ver o tutorial,
- em particular, a partir da pág.22, onde se apresentam os cálculos necessários a efectuar o pivô realizado nos diapositivos seguintes.



É necessário eliminar coeficiente de x_1 da primeira linha

| | z | x_1 | x_2 | s_1 | s_2 | s_3 | |
|-------|---|-------|-------|-------|-------|-------|-----|
| s_1 | 0 | 3 | 2 | 1 | 0 | 0 | 120 |
| s_2 | 0 | 1 | 2 | 0 | 1 | 0 | 80 |
| s_3 | 0 | 1 | 0 | 0 | 0 | 1 | 30 |
| z | 1 | -12 | -10 | 0 | 0 | 0 | 0 |

- Usando a equação da linha pivô: $x_1 + s_3 = 30 \Leftrightarrow x_1 = 30 - s_3$, substituindo na primeira linha: $3x_1 + 2x_2 + s_1 = 120 \Leftrightarrow 3(30 - s_3) + 2x_2 + s_1 = 120 \Leftrightarrow 2x_2 + s_1 - 3s_3 = 30$
- É equivalente a somar à 1.ª linha a linha pivô multiplicada por -3:

| | | | | | | | |
|--------------|---|----|---|---|---|----|-----|
| Linha 1 | 0 | 3 | 2 | 1 | 0 | 0 | 120 |
| -3×LinhaPivô | 0 | -3 | 0 | 0 | 0 | -3 | -90 |
| Resultado | 0 | 0 | 2 | 1 | 0 | -3 | 30 |

- Quadro seguinte:

| | z | x_1 | x_2 | s_1 | s_2 | s_3 | |
|-------|---|-------|-------|-------|-------|-------|----|
| s_1 | 0 | 0 | 2 | 1 | 0 | -3 | 30 |
| | | | | ... | | | |
| x_1 | 0 | 1 | 0 | 0 | 0 | 1 | 30 |

Eliminação de Gauss: cálculo elemento a elemento

- Os cálculos podem ser feitos elemento a elemento, reproduzindo as operações que se efectuam com as linhas.
- Os dois quadros representam dois conjuntos de células, um do quadro actual e outro do quadro seguinte.
- O elemento pivô é o elemento a , e as outras células ocupam uma posição na mesma linha ou na mesma coluna do elemento pivô.

quadro actual

| | |
|---|---|
| c | d |
| a | b |

\Rightarrow

quadro seguinte

| | |
|---|-------------|
| 0 | $(ad-bc)/a$ |
| 1 | b/a |

Eliminação de Gauss: exemplo I

| | z | x_1 | x_2 | s_1 | s_2 | s_3 | |
|-------|---|-------|-------|-------|-------|-------|-----|
| s_1 | 0 | 3 | 2 | 1 | 0 | 0 | 120 |
| s_2 | 0 | 1 | 2 | 0 | 1 | 0 | 80 |
| s_3 | 0 | 1 | 0 | 0 | 0 | 1 | 30 |
| z | 1 | -12 | -10 | 0 | 0 | 0 | 0 |

| | z | x_1 | x_2 | s_1 | s_2 | s_3 | |
|-------|---|-------|-------|-------|-------|-------|----|
| s_1 | 0 | 0 | 2 | 1 | 0 | -3 | 30 |
| | | | | ... | | | |
| x_1 | 0 | 1 | 0 | 0 | 0 | 1 | 30 |
| | | | | ... | | | |

quadro actual

| | |
|---|-----|
| 3 | 120 |
| 1 | 30 |

\Rightarrow

quadro seguinte

| | |
|---|------------------|
| 0 | $(120.1-30.3)/1$ |
| 1 | $30/1$ |

| | |
|---|-----|
| 3 | 120 |
| 1 | 0 |

\Rightarrow

| | |
|---|----|
| 0 | 30 |
| 1 | 30 |

Eliminação de Gauss: exemplo II

| | z | x_1 | x_2 | s_1 | s_2 | s_3 | |
|-------|---|-------|-------|-------|-------|-------|-----|
| s_1 | 0 | 3 | 2 | 1 | 0 | 0 | 120 |
| s_2 | 0 | 1 | 2 | 0 | 1 | 0 | 80 |
| s_3 | 0 | 1 | 0 | 0 | 0 | 1 | 30 |
| z | 1 | -12 | -10 | 0 | 0 | 0 | 0 |

| | z | x_1 | x_2 | s_1 | s_2 | s_3 | |
|-------|---|-------|-------|-------|-------|-------|-----|
| s_1 | 0 | 0 | 2 | 1 | 0 | -3 | 30 |
| | | | | ... | | | |
| x_1 | 0 | 1 | 0 | 0 | 0 | 1 | 30 |
| z | 1 | 0 | -10 | 0 | 0 | 12 | 360 |

quadro actual

| | |
|-----|----|
| 1 | 30 |
| -12 | 0 |

⇒

quadro seguinte

| | |
|---|--------------------|
| 1 | $30/1$ |
| 0 | $(0.1-30.(-12))/1$ |

| | |
|-----|----|
| 1 | 30 |
| -12 | 0 |

⇒

| | |
|---|-----|
| 1 | 30 |
| 0 | 360 |

◀ Voltar

1. Pivô: direcção

O que significa $x_B = B^{-1}b - \theta B^{-1}N_j$?

- A solução básica $B^{-1}b$ é o vértice x_{v_actual} .
- O vector $B^{-1}N_j$ indica uma direcção d .
- O vector θd , $\theta \geq 0$, é um múltiplo escalar do vector d .

ou seja, no pivô

- partindo do vértice x_{v_actual} , ao longo da direcção $d \in \mathbb{R}^n$, percorremos os pontos $x = x_{v_actual} + \theta d$, que devem pertencer ao domínio, i.e., $A(x_{v_actual} + \theta d) = b$.
- Como $Ax_{v_actual} = b$, d deve ser uma direcção tal que $Ad = 0$.

- Quando $\theta = \theta_{max}$, atingimos o vértice adjacente x_{v_adj} :

$$x_{v_adj} = x_{v_actual} + \theta_{max} d$$

- Quando só uma variável aumenta, d é a direcção de uma aresta.

1. Pivô: aumento máximo

- Quando $\theta = \theta_{max}$, atingimos o vértice adjacente x_{v_adj} :

$$x_{v_adj} = x_{v_actual} + \theta_{max} d$$

- O aumento máximo é determinado pelo facto de que se deve permanecer na região admissível, ou seja, nenhuma variável pode ter valor negativo.

1. Exemplo: aresta vértice $c \rightarrow d$ (s_3 aumenta)

- no vértice c , as equações que relacionam o valor das variáveis são:

$$\begin{cases} x_2 = 15 - 0.5 s_1 + 1.5 s_3 \\ s_2 = 20 + 1 s_1 - 2 s_3 \\ x_1 = 30 - 1 s_3 \end{cases}$$

- para caminhar para o vértice d , a variável não-básica s_3 aumenta e s_1 mantém-se igual a 0:

$$\begin{cases} x_2 = 15 + 1.5 s_3 \\ s_2 = 20 - 2 s_3 \\ x_1 = 30 - 1 s_3 \end{cases}$$

- o que é equivalente ao seguinte conjunto de equações usando θ para representar o incremento:

$$x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ s_1 \\ s_2 \\ s_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 30 \\ 15 \\ 0 \\ 20 \\ 0 \end{pmatrix} + \theta \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 1.5 \\ 0 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

1. Exemplo: aresta vértice $c \rightarrow d$ (s_3 aumenta) (cont.)

- quando a variável não-básica s_3 aumenta de θ unidades, a variável básica x_2 aumenta de 1.5θ unidades, s_2 decresce de 2θ unidades, e x_1 decresce de θ unidades.

$$x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ s_1 \\ s_2 \\ s_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 30 \\ 15 \\ 0 \\ 20 \\ 0 \end{pmatrix} + \theta \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 1.5 \\ 0 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

- Esta representação baseia-se num ponto, o vértice c , e numa direcção, o vector \overrightarrow{cd} .
- Exercício: verificar que $Ax_{v_actual} = b$ e $Ad = 0$.
- Quando $\theta = \theta_{max} = 10$, atingimos o vértice adjacente x_{v_adj} :

$$x_{vertex_d} = x_{vertex_c} + \theta_{max} d$$

2. Pivô: como variam as variáveis básicas quando a variável não-básica aumenta θ unidades?

- O sistema de equações das restrições é $Bx_B + Nx_N = b$.

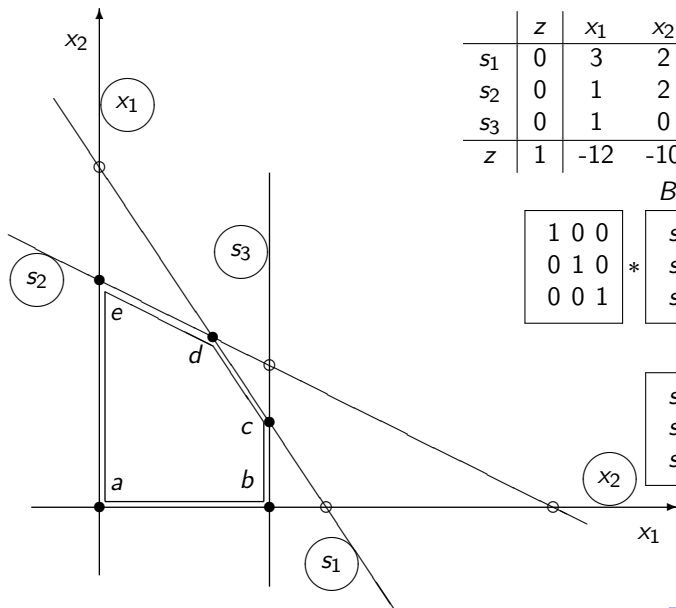
Num pivô, do conjunto de variáveis não-básicas \mathcal{N} ,

- uma variável não-básica x_j , $j \in \mathcal{N}$, aumenta θ unidades, $\theta \in \mathbb{R}_+$,
 - as restantes variáveis não-básicas x_i , $i \in \mathcal{N} \setminus \{j\}$, mantêm-se nulas.
- Assim, o sistema de equações que descreve as mudanças dos valores das variáveis envolvidas no pivô é $Bx_B + N_j \cdot x_j = b$, ou $Bx_B = b - \theta N_j$.
 - Pré-multiplicando por B^{-1} :

$$x_B = B^{-1}b - \theta B^{-1}N_j$$

- em que $B^{-1}b$ é a coluna do lado direito do quadro simplex, e $B^{-1}N_j$ é a coluna da variável não-básica que aumenta.
- Os 2 exemplos seguintes mostram as mudanças dos valores das variáveis, quer no quadro simplex inicial, quer no quadro actual.

2. Exemplo: vértice $a \rightarrow$ vértice b (aumenta x_1)



| | z | x_1 | x_2 | s_1 | s_2 | s_3 | |
|-------|-----|-------|-------|-------|-------|-------|-----|
| s_1 | 0 | 3 | 2 | 1 | 0 | 0 | 120 |
| s_2 | 0 | 1 | 2 | 0 | 1 | 0 | 80 |
| s_3 | 0 | 1 | 0 | 0 | 0 | 1 | 30 |
| z | 1 | -12 | -10 | 0 | 0 | 0 | 0 |

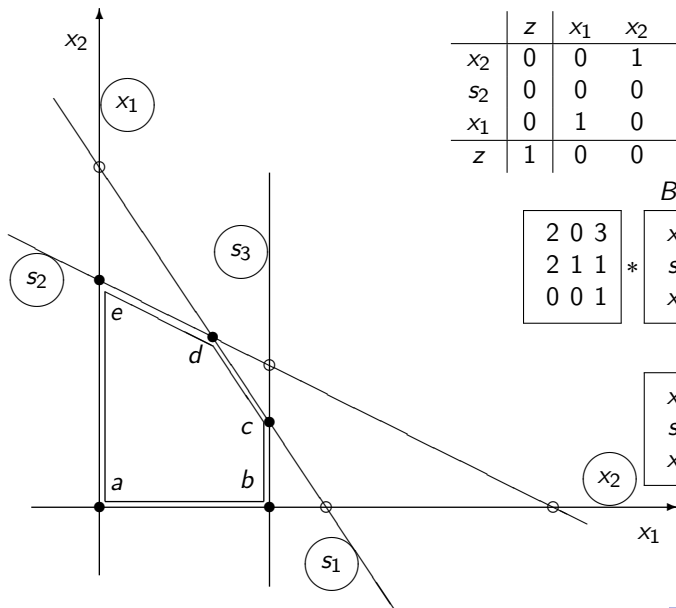
$$Bx_B = b - \theta N_{x_1}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} s_1 \\ s_2 \\ s_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 120 \\ 80 \\ 30 \end{bmatrix} - \theta \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$x_B = B^{-1}b - \theta B^{-1}N_{x_1}$$

$$\begin{bmatrix} s_1 \\ s_2 \\ s_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 120 \\ 80 \\ 30 \end{bmatrix} - \theta \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

2. Exemplo: vértice $c \rightarrow$ vértice d (aumenta s_3)



| | z | x_1 | x_2 | s_1 | s_2 | s_3 | |
|-------|-----|-------|-------|-------|-------|-------|-----|
| x_2 | 0 | 0 | 1 | 0.5 | 0 | -1.5 | 15 |
| s_2 | 0 | 0 | 0 | -1 | 1 | 2 | 20 |
| x_1 | 0 | 1 | 0 | 0 | 0 | 1 | 30 |
| z | 1 | 0 | 0 | 5 | 0 | -3 | 510 |

$$Bx_B = b - \theta N_{s_3}$$

$$\begin{bmatrix} 2 & 0 & 3 \\ 2 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} x_2 \\ s_2 \\ x_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 120 \\ 80 \\ 30 \end{bmatrix} - \theta \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$x_B = B^{-1}b - \theta B^{-1}N_{s_3}$$

$$\begin{bmatrix} x_2 \\ s_2 \\ x_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 15 \\ 20 \\ 30 \end{bmatrix} - \theta \begin{bmatrix} -1.5 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}$$

2. Pivô: dependência linear

- A coluna N_j da variável não-básica j e as colunas das variáveis básicas são um conjunto de vectores *linearmente dependentes*:

$$N_j - B (B^{-1} N_j) = 0$$

- Exemplo: vértice c (base x_2, s_2 e x_1) e var não-básica s_3 aumenta:
- quando a variável não-básica s_3 aumenta de θ unidades, a variável básica x_2 aumenta de 1.5θ unidades, s_2 decresce de 2θ unidades, e x_1 decresce de θ unidades.

$$\theta \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} + 1.5 \theta \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix} - 2 \theta \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} - 1 \theta \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 2 & 0 & 3 \\ 2 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} -1.5 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

3. Caracterização geométrica da solução ótima

- Solução é ótima se o gradiente da função objectivo estiver contido no cone (combinação não-negativa) gerado pelos vectores simétricos dos *gradientes das restrições* activas no vértice ótimo.
- O gradiente da restrição $a^i x \leq b_i$ (i.e., $a^i x + s_i = b_i$) é:

$$\partial s_i / \partial x = -a^i$$

- Exemplo:

$$\text{restrição } 3x_1 + 2x_2 + s_1 = 120 \quad \rightarrow \quad \partial s_1 / \partial x = (-3, -2)^T.$$

$$\text{restrição } 1x_1 + 2x_2 + s_2 = 80 \quad \rightarrow \quad \partial s_2 / \partial x = (-1, -2)^T.$$

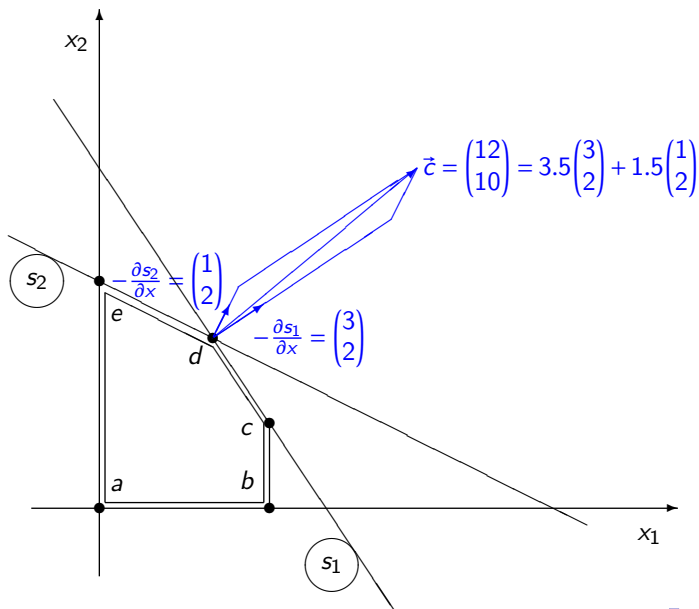
- Gradiente da função objectivo, \tilde{c} , é uma combinação não-negativa dos vectores simétricos dos gradientes das restrições activas ($s_1 = 0$ e $s_2 = 0$)

$$\tilde{c} = \begin{pmatrix} 12 \\ 10 \end{pmatrix} = 3.5 \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix} + 1.5 \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

- os coeficientes 3.5 e 1.5 são os mesmos do quadro simplex.

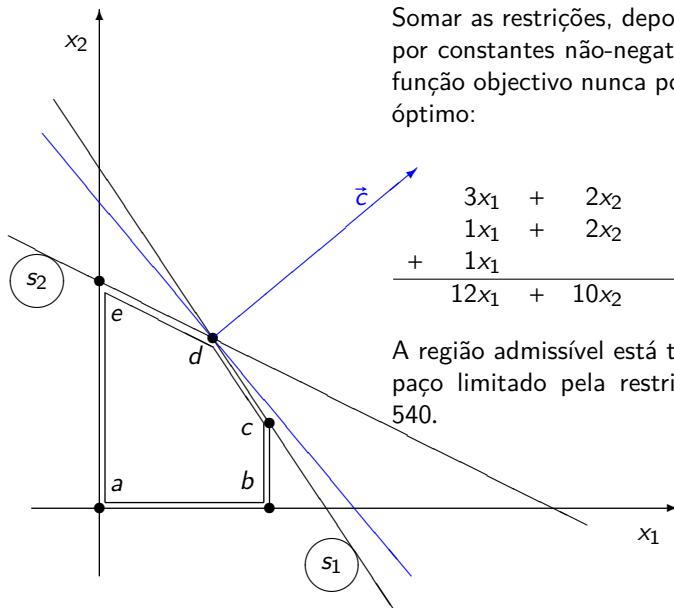
(cont.)

3. Solução óptima: gradiente \vec{c} está contido no cone



(cont.)

3. Certificado de optimalidade



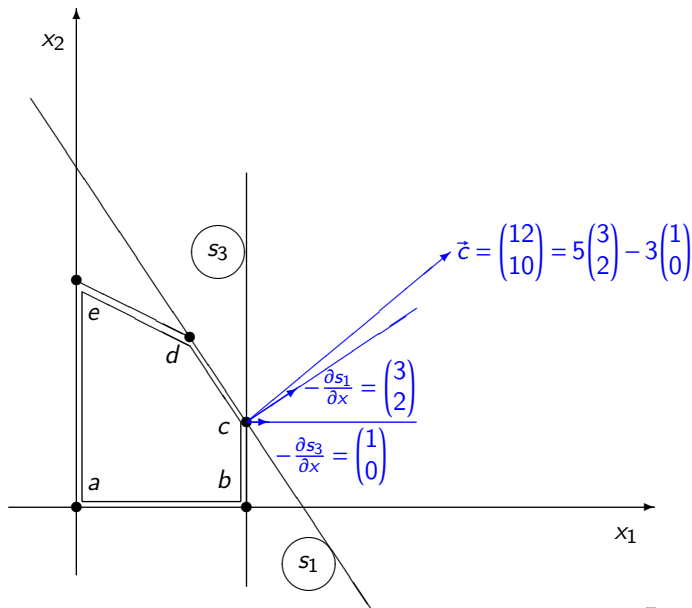
Somar as restrições, depois de as multiplicar por constantes não-negativas, mostra que a função objectivo nunca pode exceder o valor óptimo:

$$\begin{array}{rclcl} 3x_1 & + & 2x_2 & \leq & 120 & (3.5) \\ 1x_1 & + & 2x_2 & \leq & 80 & (1.5) \\ + & & 1x_1 & \leq & 30 & (0) \\ \hline 12x_1 & + & 10x_2 & \leq & 540 & \end{array}$$

A região admissível está toda contida no espaço limitado pela restrição $12x_1 + 10x_2 \leq 540$.

(cont.)

3. Solução em que o gradiente \vec{c} não está contido no cone



Fim