Universidade do Minho Escola de Ciências

Mestrado Integrado em Engenharia Informática

Departamento de Matemática

2020/2021

## Mostre, recorrendo à definição, que:

a) 
$$\lim_{(x,y)\to(0,1)} (x+y) = 1;$$

b) 
$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{2xy}{\sqrt{x^2+y^2}} = 0.$$

#### Exercício 2.2 Mostre que:

a) 
$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^3}{x^2 + y^2} = 0;$$

b) 
$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{y^2}{\sqrt{x^2+y^2}} = 0;$$

## Exercício 2.3 Calcule, caso exista, cada um dos seguintes limites:

a) 
$$\lim_{(x,y)\to(0,1)} x^3 y$$

f) 
$$\lim_{(x,y)\to(1,1)} \frac{y^2-x^2}{x-y}$$
;

f) 
$$\lim_{(x,y)\to(1,1)} \frac{y^2 - x^2}{x - y};$$
 k)  $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^3y}{x^2 + y^2} + x;$ 

b) 
$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{e^{xy}}{x+1}$$

g) 
$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\operatorname{sen}(xy)}{xy};$$

l) 
$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{y^2}{x^2-y^2}$$

c) 
$$\lim_{x \to 1} (x^2, e^x);$$

h) 
$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{(x-y)^2}{x^2+y^2}$$
;

b) 
$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{e^{xy}}{x+1}$$
; g)  $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\sin(xy)}{xy}$ ; l)  $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{y^2}{x^2-y^2}$ ; c)  $\lim_{x\to 1} (x^2, e^x)$ ; h)  $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{(x-y)^2}{x^2+y^2}$ ; m)  $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{xy^5}{x^2+y^4}$ ;

d) 
$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \left(\frac{\cos x}{x^2+y^2+1}, e^{x^2}\right)$$

i) 
$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{xy}{x^2+y^2}$$

n) 
$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{1}{x^2y^2}$$

e) 
$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{xy}{x^2+y^2+2}$$

j) 
$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2y}{x^4+y^2}$$
;

$$\begin{array}{lll} \mathrm{d}) & \lim_{(x,y)\to(0,0)} \left(\frac{\cos x}{x^2+y^2+1},e^{x^2}\right); & \mathrm{i}) & \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{xy}{x^2+y^2}; & & \mathrm{n}) & \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{1}{x^2y^2}; \\ \mathrm{e}) & \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{xy}{x^2+y^2+2}; & \mathrm{j}) & \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2y}{x^4+y^2}; & & \mathrm{o}) & \lim_{(x,y,z)\to(-1,1,0)} (xe^{xz},x^2yz). \end{array}$$

# Exercício 2.4 Apresente, caso seja possível, um prolongamento contínuo à origem de cada uma das funções definidas por:

a) 
$$f(x,y) = \frac{\sin(x+y)}{x+y}$$

a) 
$$f(x,y) = \frac{\sin(x+y)}{x+y}$$
; b)  $f(x,y) = \frac{2(x-1)y^2}{x^2+y^2}$ ; c)  $f(x,y) = \frac{2x^2y}{x^2+3y^2}$ 

c) 
$$f(x,y) = \frac{2x^2y}{x^2 + 3y^2}$$

#### Exercício 2.5 Estude a continuidade de cada uma das funções definidas por:

a) 
$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{x^2y}{x^2+y^2} & \text{se } (x,y) \neq (0,0), \\ 0 & \text{se } (x,y) = (0,0); \end{cases}$$
 d)  $f(x,y) = \begin{cases} \frac{x^2y^2}{x^4+y^4} & \text{se } (x,y) \neq (0,0), \\ 0 & \text{se } (x,y) = (0,0); \end{cases}$ 

b) 
$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{3x^2 - y^2}{x^2 + y^2} & \text{se } (x,y) \neq (0,0), \\ 0 & \text{se } (x,y) = (0,0); \end{cases}$$
 b)  $f(x,y) = \begin{cases} x & \text{se } x \geq y, \\ y & \text{se } x < y; \\ 0 & \text{se } (x,y) = (0,0); \end{cases}$ 

f) 
$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{y^3}{x^2 + y^2} & \text{se } (x,y) \neq (0,0), \\ 0 & \text{se } (x,y) = (0,0); \end{cases}$$

c) 
$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{x^2y}{x^2 + y^2} & \text{se } x \neq -y, \\ \frac{x^2}{2} & \text{se } x = -y; \end{cases}$$
 g)  $f(x,y,z) = \left(\ln(1+y^2), xz, \cos\sqrt[3]{x+y}\right).$ 

g) 
$$f(x, y, z) = (\ln(1 + y^2), xz, \cos \sqrt[3]{x + y})$$