

Tópicos de Matemática Discreta

folha 1

1. Noções elementares de lógica

1.1. Das seguintes frases declarativas, indique aquelas que são proposições:

- (a) Está a chover lá fora.
- (b) 7 é um número primo.
- (c) 2 é ímpar ou 3 é múltiplo de 4.
- (d) $4 < 3$.
- (e) Neste turno há estudantes nascidos em Ponta Delgada.
- (f) Todos os naturais ímpares são primos.
- (g) $2 + x = 3$.
- (h) Esta frase é falsa.

1.2. De entre as seguintes palavras sobre o alfabeto do Cálculo Proposicional, indique, justificando, aquelas que pertencem ao conjunto \mathcal{F}^{CP} :

- (a) $(\neg(p_1 \vee p_2))$
- (b) $((\neg p_5) \rightarrow (\neg p_6))$
- (c) $((p_3 \wedge p_1) \vee ($
- (d) $((p_0 \wedge (\neg p_0)) \leftrightarrow \perp)$
- (e) (\perp)
- (f) $((p_1 \rightarrow ((p_2 \vee (\neg p_3)) \wedge p_4)))$

1.3. Considere as proposições *7 é um número inteiro par*, *3+1=4* e *24 é divisível por 8* representadas, respetivamente, por p_0 , p_1 e p_2 .

(a) Escreva fórmulas que representem as afirmações:

- (i) $3 + 1 \neq 4$ e 24 é divisível por 8.
- (ii) Não é verdade que: 7 é ímpar ou $3 + 1 = 4$.
- (iii) Se $3 + 1 = 4$ então 24 não é divisível por 8.

(b) Traduza por frases cada uma das seguintes fórmulas:

- (i) $p_0 \vee (\neg p_2)$
- (ii) $\neg(p_0 \wedge p_1)$
- (iii) $(\neg p_2) \rightarrow (\neg p_1 \vee p_0)$

1.4. Representando as frases *Eu gosto de ouvir música*, *Eu não gosto de fado* e *Eu sei tocar guitarra* por p_0 , p_1 e p_2 , respetivamente, traduza as seguintes fórmulas para linguagem corrente:

- (a) $p_0 \wedge p_1$
- (b) $p_1 \vee p_2$
- (c) $\neg p_2$
- (d) $\neg(p_0 \vee p_1)$
- (e) $\neg p_0 \vee \neg p_1$
- (f) $p_2 \rightarrow p_0$
- (g) $(p_2 \wedge p_0) \vee p_1$
- (h) $p_2 \wedge (p_0 \vee p_1)$

1.5. Nas implicações que se seguem, identifique o antecedente e o consequente.

- (a) Se x é ímpar, então x é primo.
- (b) Se x é primo, então x é ímpar.
- (c) x é primo se x é ímpar.
- (d) x é primo só se x é ímpar.
- (e) x ser ímpar é condição suficiente para x ser primo.
- (f) x ser ímpar é condição necessária para x ser primo.

Tópicos de Matemática Discreta

folha 2

1.6. Negue as seguintes afirmações:

- (a) Estou a perceber este exercício.
- (b) Vou fazer este exercício e perceber como negar a conjunção de duas proposições.
- (c) Estou a perceber este exercício mas não percebo como negar quantificações.
- (d) Vou fazer este exercício ou passá-lo à frente.
- (e) Se perceber este exercício vou perceber como se negam quantificações.
- (f) Vou estudar melhor as tabelas de verdade só se não perceber este exercício.

1.7. Suponha que p_0 representa uma proposição verdadeira, p_1 uma proposição falsa, p_2 uma proposição falsa e p_3 uma proposição verdadeira. Quais das seguintes fórmulas são verdadeiras e quais são falsas?

- | | | |
|--|---|--|
| (a) $p_0 \vee p_2$ | (e) $(p_2 \wedge p_3) \vee p_1$ | (i) $\neg(p_0 \wedge p_1)$ |
| (b) $\neg p_3 \vee \neg p_2$ | (f) $(p_3 \wedge p_0) \vee (p_1 \wedge p_2)$ | (j) $p_2 \vee (p_3 \vee (p_0 \wedge p_1))$ |
| (c) $p_2 \rightarrow p_1$ | (g) $p_0 \leftrightarrow p_2$ | (k) $(p_1 \leftrightarrow p_3) \wedge p_0$ |
| (d) $p_3 \rightarrow (p_0 \rightarrow \neg p_3)$ | (h) $((p_1 \rightarrow p_3) \leftrightarrow p_3) \wedge \neg p_0$ | (l) $(p_3 \rightarrow p_0) \leftrightarrow \neg(p_2 \vee p_1)$ |

1.8. Admitindo que p_0 , p_1 e p_2 representam proposições e que $p_0 \leftrightarrow p_1$ é falsa, o que pode dizer sobre o valor lógico das seguintes fórmulas?

- (a) $p_0 \wedge p_1$
- (b) $p_0 \vee p_1$
- (c) $p_0 \rightarrow p_1$
- (d) $(p_0 \wedge p_2) \leftrightarrow (p_1 \wedge p_2)$

1.9. Construa tabelas de verdade para cada uma das seguintes fórmulas do Cálculo Proposicional:

- | | |
|--|--|
| (a) $p_0 \vee (\neg p_0)$ | (g) $(p_0 \rightarrow p_1) \leftrightarrow (\neg p_0 \vee p_1)$ |
| (b) $\neg(p_0 \vee p_1)$ | (h) $(p_0 \rightarrow p_1) \leftrightarrow (\neg p_1 \rightarrow \neg p_0)$ |
| (c) $p_0 \wedge \neg(p_0 \vee p_1)$ | (i) $p_0 \rightarrow (p_1 \rightarrow p_2)$ |
| (d) $p_0 \wedge (\neg p_0 \vee p_1)$ | (j) $p_0 \wedge \neg(p_1 \rightarrow p_2)$ |
| (e) $\neg(p_0 \rightarrow \neg p_1)$ | (k) $(p_0 \leftrightarrow \neg p_2) \vee (p_1 \wedge p_2)$ |
| (f) $p_0 \leftrightarrow (p_1 \vee p_0)$ | (l) $(p_0 \rightarrow (p_1 \rightarrow p_2)) \rightarrow ((p_0 \wedge p_1) \rightarrow p_2)$ |

Tópicos de Matemática Discreta

folha 3

1.10. De entre as seguintes fórmulas, indique aquelas que são tautologias e aquelas que são contradições:

- | | |
|---|---|
| (a) $p_0 \rightarrow (p_0 \vee p_1)$ | (d) $(p_0 \rightarrow (p_0 \vee p_1)) \wedge p_1$ |
| (b) $\neg(p_0 \wedge p_1) \rightarrow (p_0 \vee p_1)$ | (e) $(p_0 \vee \neg p_0) \rightarrow (p_0 \wedge \neg p_0)$ |
| (c) $(p_0 \rightarrow p_1) \leftrightarrow (\neg p_1 \rightarrow \neg p_0)$ | (f) $\neg(p_0 \rightarrow (p_1 \rightarrow p_0))$ |

1.11. Indique quais dos pares de fórmulas que se seguem são logicamente equivalentes:

- | | |
|---|---|
| (a) $\neg(p_0 \wedge p_1); \neg p_0 \wedge \neg p_1$ | (c) $p_0 \rightarrow p_1; p_1 \rightarrow p_0$ |
| (b) $\neg(p_0 \rightarrow p_1); p_0 \wedge (p_1 \rightarrow (p_0 \wedge \neg p_0))$ | (d) $p_0 \rightarrow (p_1 \rightarrow p_2); \neg(\neg p_2 \rightarrow \neg p_1) \rightarrow \neg p_0$ |

1.12. Encontre uma fórmula que seja logicamente equivalente à fórmula $p_0 \vee \neg p_1$ e que envolva apenas os conectivos \wedge e \neg .

1.13. Suponha que o Manuel gosta da cor azul, não gosta da cor vermelha, gosta da cor amarela e não gosta da cor verde. Quais das seguintes proposições são verdadeiras e quais são falsas?

- (a) O Manuel gosta de azul e de vermelho.
- (b) O Manuel gosta de amarelo ou verde e o Manuel não gosta de vermelho.
- (c) O Manuel gosta de vermelho ou o Manuel gosta de azul e amarelo.
- (d) O Manuel gosta de azul ou amarelo e o Manuel gosta de vermelho ou verde.
- (e) Se o Manuel gosta de azul então gosta de amarelo.
- (f) O Manuel gosta de amarelo se e só se gosta de vermelho.
- (g) O Manuel gosta de verde e se o Manuel gosta de amarelo então gosta de azul.
- (h) Se o Manuel gosta de amarelo então gosta de verde ou o Manuel gosta de amarelo se e só se gosta de vermelho.

1.14. Considere as seguintes afirmações:

- Se há vida em Marte, então Zuzarte gosta de tarte.
 - Zuzarte é um marciano ou não gosta de tarte.
 - Zuzarte não é um marciano, mas há vida em Marte.
- (a) Exprima as afirmações anteriores através de fórmulas do Cálculo Proposicional, utilizando variáveis proposicionais para representar as frases simples.
 - (b) Mostre que as três afirmações acima não podem ser simultaneamente verdadeiras.

Tópicos de Matemática Discreta

folha 4

1.15. Exprima cada uma das seguintes frases como quantificações:

- (a) A equação $x^3 = 28$ tem pelo menos uma solução nos números naturais.
- (b) 1000000 não é o maior número natural.
- (c) A soma de três números naturais consecutivos é um múltiplo de 3.
- (d) Entre cada dois números racionais distintos existe um outro número racional.

1.16. Considere a seguinte proposição:

Todos os Hobbits são criaturas pacíficas.

Indique qual ou quais das seguintes proposições equivale à negação da proposição anterior:

- (a) Todos os Hobbits são criaturas conflituosas.
- (b) Nem todos os Hobbits são criaturas pacíficas.
- (c) Existem Hobbits que são criaturas conflituosas.
- (d) Nem todos os Hobbits são criaturas conflituosas.

1.17. Escreva quantificações equivalentes à negação de cada uma das seguintes proposições.

- (a) Todo o OVNI tem o objetivo de conquistar alguma galáxia.
- (b) Existem morcegos que pesam 50 ou mais quilogramas.
- (c) A inequação $x^2 - 2x > 0$ verifica-se para todo o número real x .
- (d) Existe um inteiro n tal que n^2 é um número perfeito.

1.18. Considere as seguintes proposições, em que o universo de cada uma das quantificações é o conjunto dos números reais.

- (a) $\forall_x \exists_y x + y = 0$
- (b) $\exists_x \forall_y x + y = 0$
- (c) $\exists_x \forall_y x + y = y$
- (d) $\forall_x (x > 0 \rightarrow \exists_y xy = 1)$

Para cada proposição p acima (i) indique se p é ou não verdadeira e (ii) apresente, sem recorrer ao conetivo negação, uma proposição que seja equivalente a $\neg p$.

Tópicos de Matemática Discreta

folha 5

1.19. Considerando que p representa a proposição $\forall_{a \in A} \exists_{b \in B} (a^2 = b \vee a + b = 0)$,

- (a) verifique se p é verdadeira para $A = \{-2, 0, 1, 2\}$ e $B = \{-1, 0, 4\}$.
- (b) indique em linguagem simbólica, sem recorrer ao símbolo de negação, uma proposição equivalente à negação de p .

1.20. Considerando que p representa a proposição $\forall_{a \in A} \exists_{b \in B} a^2 = b$,

- (a) dê exemplo de conjuntos A e B não vazios para os quais:
 - (i) a proposição p é verdadeira;
 - (ii) a proposição p é falsa.
- (b) indique em linguagem simbólica, sem recorrer ao símbolo de negação, uma proposição equivalente à negação de p .

1.21. Considerando que p representa a proposição

$$\exists_{y \in A} \forall_{x \in A} (x \neq y \rightarrow (xy > 0 \vee x^2 + y = 0)),$$

- (a) dê exemplo de um universo A não vazio para o qual:
 - (i) a proposição p é verdadeira;
 - (ii) a proposição p é falsa.
- (b) indique, sem recorrer ao conetivo *negação*, uma proposição equivalente a $\neg p$.

1.22. Recorde que dizemos que um argumento é válido quando, sempre que as premissas são verdadeiras, a conclusão também é verdadeira. Averigue a validade dos seguintes argumentos:

- (a) O João afirma: “Hoje vou ao cinema ou fico em casa a ver um filme na televisão”. No dia seguinte o João comentou: “Ontem não fui ao cinema.” Em resposta, a Joana concluiu: “Então viste um filme na televisão!”.
- (b) A Maria afirmou: “Se hoje encontrar a Alice e estiver calor, vou à praia”. No dia seguinte a Maria comentou: “Ontem esteve calor e fui à praia”. Em resposta, a Rita concluiu: “Então encontrei a Alice”.
- (c) O Tiago disse: “Vou almoçar no bar ou na cantina”. E acrescentou: “Se comer no bar fico mal disposto e não vou ao cinema”. Nesse dia, a Joana encontrou o Tiago no cinema e concluiu: “O Tiago foi almoçar à cantina”.
- (d) Paula e Ernesto não vão ambos ganhar o prémio *melhor poesia*. Ernesto vai ganhar o prémio *melhor ficção* ou o prémio *melhor poesia*. Paula não vai ganhar o prémio *melhor poesia*. Portanto, Ernesto vai ganhar o prémio *melhor poesia*.