TMD

8 / novembro 2019

1.

(a)

p_0	p_1	$\neg p_1$	$p_0 \vee \neg p_1$	φ	$p_1 \rightarrow p_0$	ψ
1	1	0	1	0	1	0
1	0	1	1	0	1	0
0	1	0	0	1	0	1
0	0	1	1	0	1	0

Pela tabela sabemos que $\varphi \Leftrightarrow \psi$. Logo, φ e ψ têm sempre o mesmo valor lógico. Assim, φ tem valor lógico 1 se e somente ψ tem valor lógico 1. Portanto, a afirmação é falsa.

(b) Como σ e θ são logicamente equivalentes, sabemos que têm o mesmo valor lógico. Logo, ou são ambas verdadeiras ou ambas falsas.

σ	θ	$\theta \rightarrow \sigma$	$\theta \rightarrow (\theta \rightarrow \sigma)$
1	1	1	1
0	0	1	1

Concluimos que, sendo $\sigma \Leftrightarrow \theta$, a fórmula $\theta \rightarrow (\theta \rightarrow \sigma)$ toma sempre o valor lógico 1. Logo, $\theta \rightarrow (\theta \rightarrow \sigma)$ é uma tautologia e a afirmação é verdadeira.

2.

(a) i) $A = \mathbb{R}$

Sabemos que $\forall y \in A \quad y^2 \geq 0$. Seja $x \in A$.

Se $x > 0$, apenas podemos garantir que $xy^2 \geq 0$, para todo $y \in A$.

De facto, para $y = 0$, $xy^2 = 0 \not> 0$.

Logo, p é falsa para $A = \mathbb{R}$

ii) $A = \mathbb{R} \setminus]-2,5]$.

Note-se que $0 \notin A$. Portanto, $\forall y \in A \; y^2 > 0$.
Assim, se $x \in A$ é tal que $x > 0$, segue-se que

$$\forall y \in A \quad xy^2 > 0$$

Logo, p é verdadeira para $A = \mathbb{R} \setminus]-2,5]$.

(b) $\neg p \Leftrightarrow \exists x \in A \; (x > 0 \wedge \exists y \in A \; xy^2 \leq 0)$

3. Façamos a prova por contrarrecíproco.
Pretendemos mostrar que,

$$m^2(n+3) \text{ é par} \longrightarrow (m \text{ é par} \vee n \text{ é ímpar}),$$

ou equivalentemente, que

$$(m \text{ é ímpar} \wedge n \text{ é par}) \longrightarrow m^2(n+3) \text{ ímpar}.$$

Admitamos que m é ímpar e que n é par. Então, m^2 é ímpar e $n+3$ é ímpar. Logo, $m^2(n+3)$ é ímpar, como queríamos provar.

4. $A, B, C \subseteq \mathbb{Z}$ $\qquad A, B, C$ não vazios

(a) Ex: $A = \{1\}$

$B = A$

$C = A$ $\qquad$ Neste caso, $A \cap (\overline{B \cap \overline{C}}) = A \cap (\overline{A \cap \overline{A}}) =$

$= A \cap \overline{A} = \emptyset$

(b) $(A \setminus B) \subseteq C \setminus A$

Ex: $A = \{1\}$

$B = \{1\}$

$C = \{2\}$ $\quad A \setminus B = \emptyset \subseteq \{2\} = C \setminus A$.

(c) $\mathcal{P}(\{2,4,5\}) = \{X \mid X \subseteq \{2,4,5\}\}$

$A \in \mathcal{P}(\{2,4,5\}) \Longleftrightarrow A \subseteq \{2,4,5\}$

Ex: $A = \{2\}$

5. $A = \{x \in \mathbb{Z} \mid \exists m \in \mathbb{Z} \quad x = 2m+5\} = \{x \in \mathbb{Z} : x \text{ é ímpar}\}$

$$\boxed{\begin{aligned} &\exists m \in \mathbb{Z} : \quad x = 2m+5 \\ \Longleftrightarrow\ &\exists m \in \mathbb{Z} : \quad x = 2(m+2)+1 \\ \Longleftrightarrow\ &x \text{ é ímpar} \end{aligned}}$$

$B = \{x \in \mathbb{Z} \mid \exists m \in \mathbb{Z} \quad x = 2m\}$
$= \{x \in \mathbb{Z} \mid x \text{ é par}\}$

$C = \{1,2,3\}$

$D = \{1, \{1\}, \{1, \{1\}\}\}$

(a) $\mathbb{Z} \setminus (A \cup B) = \mathbb{Z} \setminus \mathbb{Z} = \emptyset$

(b) $C \setminus D = \{2,3\}$

$(C \setminus D) \times C = \{(a,b) \mid a \in C \setminus D \text{ e } b \in C\}$
$= \{(2,1), (2,2), (2,3), (3,1), (3,2), (3,3)\}$

(c) $D \cap \mathcal{P}(D) = \{X \mid X \in D \wedge X \in \mathcal{P}(D)\}$

$= \{X \mid X \in D \wedge X \subseteq D\}$

(nota: X tem de ser um conjunto)

$\{1\} \in D \wedge \{1\} \subseteq D$ ↳ pois $1 \in D$

$\{1, \{1\}\} \in D$ e $\{1, \{1\}\} \subseteq D$ ↳ pois $1 \in D$ e $\{1\} \in D$

Logo,

$D \cap \mathcal{P}(D) = \{\{1\}, \{1, \{1\}\}\}$

6. Seja $x \in (A \cup B) \setminus (A \cap B)$.

$x \in (A \cup B) \setminus (A \cap B) \Leftrightarrow x \in A \cup B \wedge x \notin A \cap B$

$\Leftrightarrow x \in A \cup B \wedge \neg(x \in A \cap B)$

$\Leftrightarrow (x \in A \vee x \in B) \wedge \neg(x \in A \wedge x \in B)$

$\Leftrightarrow (x \in A \vee x \in B) \wedge (x \notin A \vee x \notin B)$

$\Leftrightarrow (x \in A \wedge (x \notin A \vee x \notin B)) \vee$

$\vee (x \in B \wedge (x \notin A \vee x \notin B))$

$\Leftrightarrow \underbrace{(x \in A \wedge x \notin A)}_{\text{imp}} \vee (x \in A \wedge x \notin B) \vee$

$\vee (x \in B \wedge x \notin A) \vee (x \in \underbrace{B \wedge x \notin B}_{\text{imp.}})$

$\Leftrightarrow (x \in A \wedge x \notin B) \vee (x \in B \wedge x \notin A)$

$\Leftrightarrow x \in A \setminus B \vee x \in B \setminus A$

$\Leftrightarrow x \in (A \setminus B) \cup (B \setminus A)$.

Portanto, $(A \setminus B) \cup (B \setminus A) = (A \cup B) \setminus (A \cap B)$.

7\. Seja $p(n): 3^0 + 3^1 + \dots + 3^n = \frac{3^{n+1}-1}{2}$.

① $n=1$

$$3^0 + 3^1 = \frac{3^{1+1}-1}{2} \Leftrightarrow 1+3 = \frac{9-1}{2} \Leftrightarrow 4=4,$$

o que é verdade.

Portanto, $p(1)$ é verdadeira.

② Seja $k \in \mathbb{N}$ tal que $p(k)$ é verdadeira, isto é,

$$\boxed{3^0 + 3^1 + \dots + 3^k = \frac{3^{k+1}-1}{2}} \text{ — H.I.}$$

Pretendemos mostrar que $p(k+1)$ é verdadeira, ou seja, que

$$3^0 + 3^1 + \dots + 3^{k+1} = \frac{3^{k+2}-1}{2}.$$

Temos que

$$3^0 + 3^1 + \dots + 3^k + 3^{k+1} = \frac{3^{k+1}-1}{2} + 3^{k+1} =$$

$$= \frac{3^{k+1} - 1 + 2 \times 3^{k+1}}{2}$$

$$= \frac{3 \times 3^{k+1} - 1}{2} = \frac{3^{k+2}-1}{2}$$

Portanto, $p(k+1)$ é verdadeira.

Por ① e ②, pelo Princípio de Indução nos naturais, $p(n)$ é verdadeira, para todo $n \in \mathbb{N}$.