Bloc Fonctionnels pour les Mobile

Synthèse des Filtres

Synthèse des filtres Passe bas

Normalisation du filtre

↓

Choix du type de réponse

↓

Calcul de la transmittance normalisé

↓

Choix du type de filtre (passifs ou actifs)

↓

Dimensionnement du filtre normalisé

↓

Dé-normalisation

Synthèse des filtres Passe bas

- **<u>Filtres de Butterworth</u>**

  - ordre élevé si l'on veut une grande sélectivité (pb de réalisation)
  - pas d'ondulation dans la bande passante
  - temps de propagation de groupe # constant (déphasage quasi linéaire)

- **<u>Filtre de Tchebycheff</u>**

  - ordre plus petit pour une grande sélectivité
  - si l'ordre est n, il présente n ondulations dans la bande passante
  - temps de propagation de groupe non constant (déphasage non linéaire)

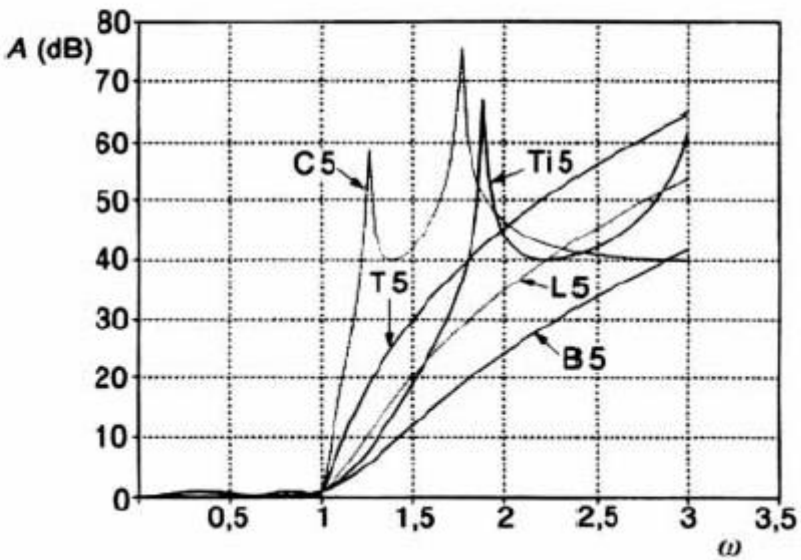
- **<u>Filtre de Bessel</u>**

  - coupure plus douce.
  - temps de propagation de groupe constant (déphasage linéaire)
  - minimisation des distorsions

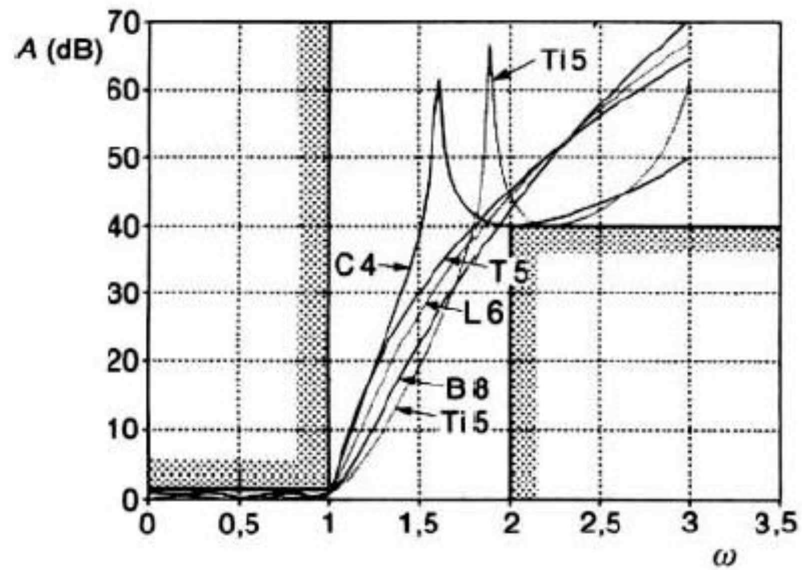
- **<u>Filtre de Cauer</u>**

  - Filtre à coupure maximale

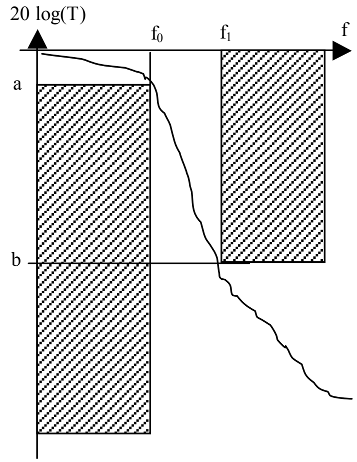
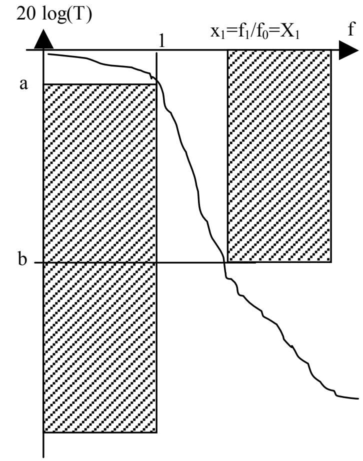
Synthèse des filtres Passe bas



C5 filtre de Cauer
T5 filtre de Tchebycheff
Ti5 filtre de Tchebycheff inverse
L5 filtre de Legendre
B5 filtre de Butterworth



C4 filtre de Cauer d'ordre 4
T5 filtre de Tchebycheff d'ordre 5
Ti5 filtre de Tchebycheff inverse d'ordre 5
L6 filtre de Legendre d'ordre 6
B8 filtre de Butterworth d'ordre 8

<table>
<tr><th>Type de filtre</th><th>Gabarit réel</th><th>Normalisation</th></tr>
<tr>
<td>Passe bas</td>
<td>
</td>
<td>

<u>Normalisation des fréquences :</u>

$$\underline{S}=j\frac{f}{f_0}=j\frac{}{{}_0}$$

On défini la pulsation normalisé :

$$x=\left|\underline{S}\right|=\frac{}{{}_0}$$

<u>Normalisation des composants :</u>

- Soit R_c la résistance de charge du filtre.
- On définit les résistances normalisée : (uniquement pour les circuits passifs)

$$R_n=\frac{R}{R_c}$$

- <u>Inductance et capacité unités</u> : (uniquement pour les circuits passifs)

Le changement de variable précédent impose des valeurs pour :

l'inductance unité : $L_u=\frac{R_c}{{}_0}$

la capacité unité : $C_u=\frac{1}{R_c.{}_0}$

- <u>Inductance normalisée :</u>

$${}_n=\frac{L}{L_u}$$

- <u>Capacité normalisée :</u>

$${}_n=\frac{C}{C_u}$$
</td>
</tr>
</table>

Synthèse des filtres Passe bas

Filtres de Butterworth	**Filtres de Tchebycheff**
Avantage : courbe de réponse très plate à l'origine, amplitude régulière en bande passante bon temps de propagation de groupe calculs faciles **Inconvénient :** raideur de la coupure moyenne l'atténuation en bande passante notée sur	**Avantage :** de tous les polynomiaux, ce sont ceux qui présentent le front de coupure la plus raide pour un ordre de filtre donné. **Inconvénient :** ondulation en bande passante temps de propagation de groupe non constant en bande passante.

Grenoble INP
Ensimag

Synthèse des filtres Passe bas

les gabarits normalisés ‘a’ est toujours égale à – 3 dB (a = -3 dB)

Fonction de Butterworth :

$$T(x) = \frac{1}{\sqrt{1 + x^{2n}}}$$

ou n est l’ordre du filtre.

Détermination de l’ordre du filtre :

$$n \quad \frac{\ln(10^{\frac{b}{10}} \quad 1)}{2.\ln(X_1)}$$

Fonction de Tchebycheff :

$$T(x) = \frac{1}{\sqrt{1 + \quad {}^{2}.C_n^2(x)}}$$

avec $C_0(x)=1$; $C_1(x)=x$;

et $C_{n+1}(x)=2.x.C_n(x)- C_{n-1}(x)$

Détermination de l’ordre du filtre :

$$n \quad \frac{\arg ch \sqrt{\frac{10^{\frac{b}{10}} \quad 1}{10^{\frac{a}{10}} \quad 1}}}{\arg ch(X_1)}$$

$$\varepsilon = \sqrt{10^{a/10} - 1}$$

Fonction de transfert normalisé

Fonctions de transmission $\underline{H}(s) = \underline{V}_1 / \underline{V}_2$ des filtres de Butterworth d'ordre 1 à 9 :

$P_1 = s + 1$
$P_2 = s^2 + \sqrt{2}\ s + 1$
$P_3 = s^3 + 2\ s^2 + 2\ s + 1$
$P_4 = s^4 + 2{,}613\ s^3 + 3{,}414\ s^2 + 2{,}613\ s + 1$
$P_5 = s^5 + 3{,}236\,1\ s^4 + 5{,}236\,1\ s^3 + 5{,}236\,1\ s^2 + 3{,}236\,1\ s + 1$
$P_6 = s^6 + 3{,}863\,7\ s^5 + 7{,}464\,1\ s^4 + 9{,}141\,6\ s^3 + 7{,}464\,1\ s^2 + 3{,}863\,7\ s + 1$
$P_7 = s^7 + 4{,}494\,0\ s^6 + 10{,}098\ s^5 + 14{,}592\ s^4 + 14{,}592\ s^3 + 10{,}098\ s^2 + + 4{,}494\,0\ s + 1$
$P_8 = s^8 + 5{,}152\,8\ s^7 + 13{,}137\ s^6 + 21{,}846\ s^5 + 25{,}688\ s^4 + 21{,}846\ s^3 + 13{,}137\ s^2 + 5{,}152\,8\ s + 1$
$P_9 = s^9 + 5{,}759\ s^8 + 16{,}582\ s^7 + 31{,}163\ s^6 + 41{,}986\ s^5 + 41{,}986\ s^4 + 31{,}163\ s^3 + 16{,}582\ s^2 + 5{,}759\ s + 1$

Fonction de transfert normalisé

$$A_{\max} = 0{,}1dB \quad \varepsilon = 0{,}152\ 62$$

$P_2 = 0{,}301\ 7\ s^2 + 0{,}715\ 8\ s + 1$
$P_3 = 0{,}610\ 5\ s^3 + 1{,}183\ 6\ s^2 + 1{,}605\ 2\ s + 1$
$P_4 = 1{,}206\ 9\ s^4 + 2{,}177\ 1\ s^3 + 3{,}170\ 5\ s^2 + 2{,}444\ 7\ s + 1$
$P_5 = 2{,}441\ 9\ s^5 + 4{,}258\ 6\ s^4 + 6{,}765\ 8\ s^3 + 5{,}853\ 1\ s^2 + 3{,}505\ 5\ s + 1$
$P_6 = 4{,}827\ 9\ s^6 + 8{,}266\ 2\ s^5 + 14{,}32\ s^4 + 13{,}42\ s^3 + 9{,}886\ 8\ s^2 + 4{,}353\ 6\ s + 1$
$P_7 = 9{,}767\ 7\ s^7 + 16{,}538\ s^6 + 31{,}095\ s^5 + 30{,}956\ s^4 + 26{,}423\ s^3 + 14{,}484\ s^2 + 5{,}487\ s + 1$

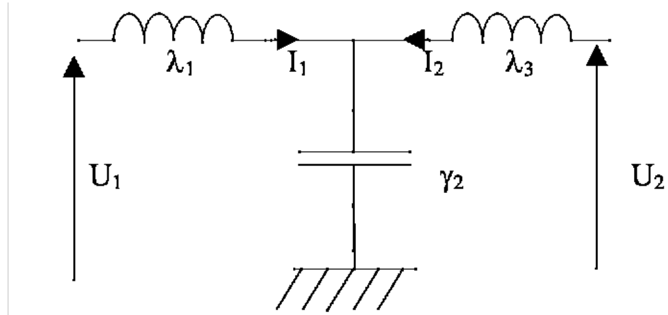
$$A_{\max} = 0{,}5dB \quad \varepsilon = 0{,}349\ 31$$

$P_2 = 0{,}659\ 5\ s^2 + 0{,}940\ 2\ s + 1$
$P_3 = 1{,}397\ 5\ s^3 + 1{,}750\ 6\ s^2 + 2{,}144\ 6\ s + 1$
$P_4 = 2{,}638\ 1\ s^4 + 3{,}158\ 9\ s^3 + 4{,}529\ 3\ s^2 + 2{,}705\ 3\ s + 1$
$P_5 = 5{,}589\ s^5 + 6{,}553\ s^4 + 10{,}38\ s^3 + 7{,}319\ s^2 + 4{,}205\ 8\ s + 1$
$P_6 = 10{,}552\ s^6 + 12{,}232\ s^5 + 22{,}918\ s^4 + 16{,}776\ s^3 + 12{,}366\ s^2 + 4{,}563\ s + 1$
$P_7 = 22{,}355\ s^7 + 25{,}736\ s^6 + 53{,}937\ s^5 + 41{,}792\ s^4 + 36{,}84\ s^3 + 16{,}89\ s^2 + 6{,}306\ s + 1$

$$A_{\max} = 1dB \quad \varepsilon = 0{,}508\ 84$$

$P_2 = 0{,}907\ s^2 + 0{,}995\ 7\ s + 1$
$P_3 = 2{,}035\ 3\ s^3 + 2{,}011\ 6\ s^2 + 2{,}520\ 6\ s + 1$
$P_4 = 3{,}628\ s^4 + 3{,}456\ 8\ s^3 + 5{,}274\ 9\ s^2 + 2{,}694\ 2\ s + 1$
$P_5 = 8{,}1415\ s^5 + 7{,}627\ 1\ s^4 + 13{,}75\ s^3 + 7{,}933\ s^2 + 4{,}726\ 4\ s + 1$
$P_6 = 14{,}512\ s^6 + 13{,}47\ s^5 + 28{,}02\ s^4 + 17{,}445\ s^3 + 13{,}632\ s^2 + 4{,}456\ s + 1$
$P_7 = 32{,}566\ s^7 + 30{,}06\ s^6 + 70{,}866\ s^5 + 46{,}53\ s^4 + 44{,}21\ s^3 + 17{,}866\ s^2 + 6{,}958\ 4\ s + 1$

Structure en T



On détermine alors le paramètre admittance $Y_{22}=(I_2/U_2)$ pour $U_1=0$.

On rappelle que la matrice admittance (quadripôle équivalent du filtre) est de la forme :

$$\begin{pmatrix} \underline{I}_1 \\ \underline{I}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \underline{Y}_{11} & \underline{Y}_{12} \\ \underline{Y}_{21} & \underline{Y}_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \underline{V}_1 \\ \underline{V}_2 \end{pmatrix}$$

Pour un filtre passif, on a toujours : $\underline{Y}_{12} = \underline{Y}_{21}$

On va charger notre filtre avec l'impédance caractéristique R_0 (donc 1 puisque nous sommes sur une structure normalisée) et on arrive ainsi à $\underline{V}_2(s) = -\underline{I}_2(s) \Rightarrow \frac{\underline{V}_2(s)}{\underline{V}_1(s)} = -\frac{\underline{Y}_{21}}{1+\underline{Y}_{22}}$

On montre que pour $\underline{H}(s) = \frac{\underline{V}_2(s)}{\underline{V}_1(s)} = \frac{1}{(s-p_0)(s-p_1)\ldots(s-p_n)} = \frac{1}{N(s^2)+s\cdot D(s^2)}$

avec $N(s^2)$: polynôme regroupant toutes les puissances paires et $s\cdot D(s^2)$ polynôme regroupant toutes les puissances impaires de $(s-p_0)(s-p_1)\ldots(s-p_n)$:

- $\underline{Y}_{12} = \underline{Y}_{21} = -\frac{1}{s\cdot D(s^2)}$ et
- $\underline{Y}_{22} = \frac{N(s^2)}{s\cdot D(s^2)}$

Filtre d’ordre pair

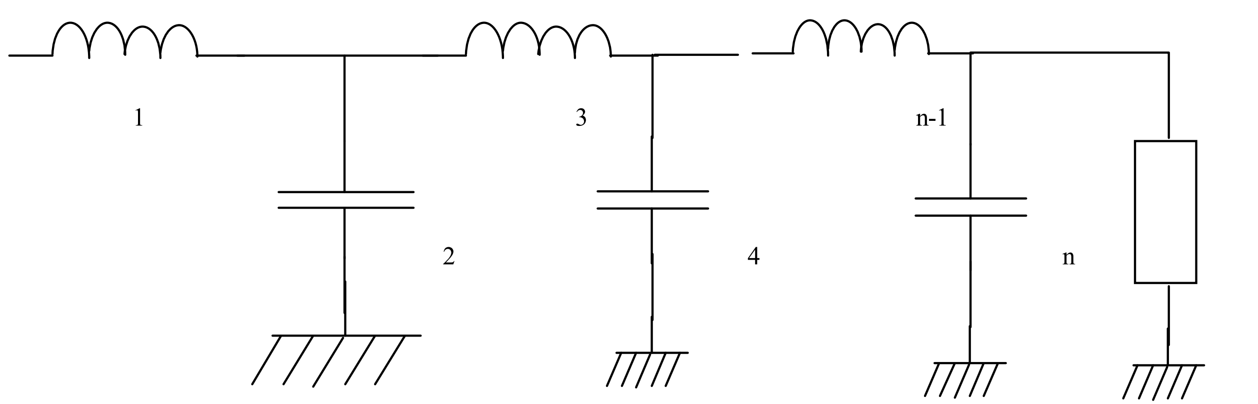
Dans le cas d’un filtre d’ordre pair, Y_{22} est formée par un quotient de polynômes qu est le rapport entre le polynôme formé à partir de la fonction de transmission d’exposant pai divisé par le polynôme formé à partir de la fonction de transmission d’exposant impair.

$$Y_{22} = \frac{\text{polynôme formé à partir de la fonction de transmission d'exposant pair}}{\text{polynôme formé à partir de la fonction de transmission d'exposant impair}}$$

En effectuant, les divisions successives de polynômes il vient :

$$Y_{22}(p) = {}_{n}p + \cfrac{1}{{}_{n\ 1}p + \cfrac{1}{{}_{n\ 2}p + \cfrac{1}{\dots\ {}_{3}p + \cfrac{1}{{}_{2}p + \cfrac{1}{{}_{1}p}}}}}$$

Le filtre normalisé devient ainsi :



Filtre d’ordre impair

Dans le cas d’un filtre d’ordre impair, Y_{22} est formée par un quotient de polynômes qui est le rapport entre le polynôme formé à partir de la fonction de transmission d’exposant pair divisé par le polynôme formé à partir de la fonction de transmission d’exposant impair.

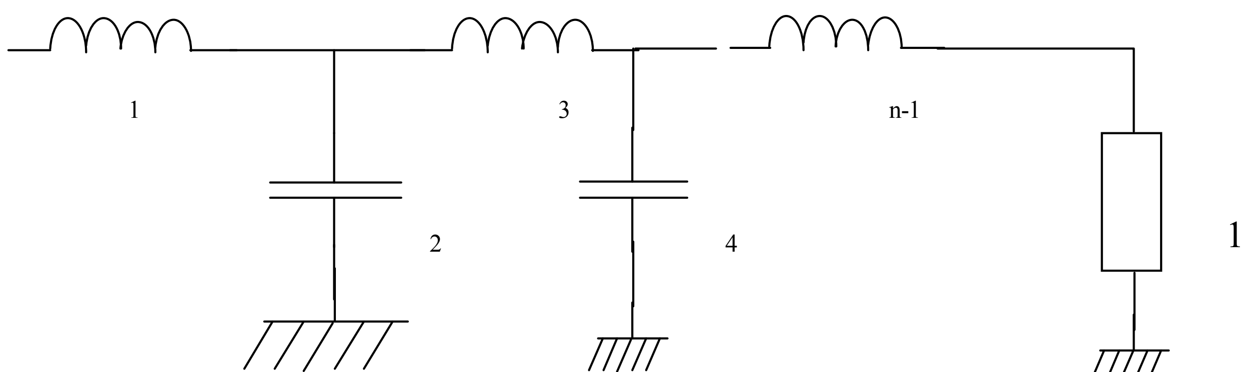
$$Y_{22} = \frac{polynôme\ formé\ à\ partir\ de\ la\ fonction\ de\ transmission\ d'\exp osant\ pair}{polynôme\ formé\ à\ partir\ de\ la\ fonction\ de\ transmission\ d'\exp osant\ impair}$$

En effectuant, les divisions successives de polynômes il vient :

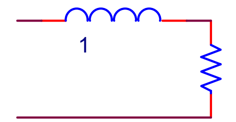
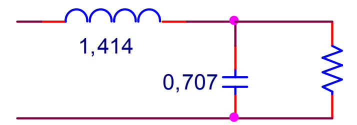
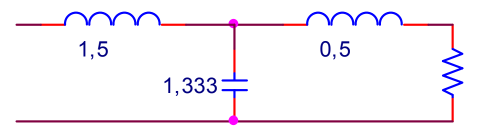
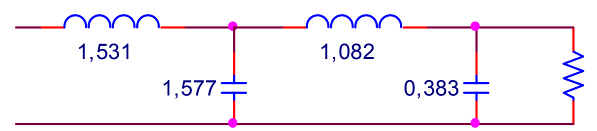
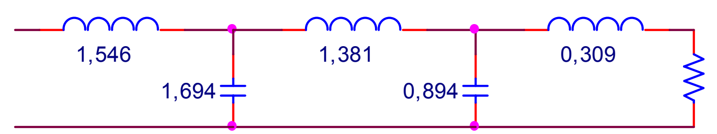
$$Y_{22}(p) = \cfrac{1}{{}_{n\ 1}p + \cfrac{1}{{}_{n\ 2}p + \cfrac{1}{\ldots.\ {}_{3}p + \cfrac{1}{{}_{2}p + \cfrac{1}{{}_{1}p}}}}}$$

or comme l’ordre du polynôme d’exposant impair est supérieur à celui de l’exposant pair, il vient que $_{n}=0$.

Le filtre normalisé devient ainsi :



Exemple pour une fonction de transfert Butterworth

Ordre	Polynôme en s	Y_{22} décomposé	Filtre normalisé
1	s + 1	$\frac{1}{s}$	
2	s^2 $+ \sqrt{2}$ s + 1	$0,707s+\frac{1}{1,414s}$	
3	s^3 + 2 s^2 + 2 s + 1	$\frac{1}{0,5s+\frac{1}{1,333s+\frac{1}{1,5s}}}$	
4	s^4 + 2,613 s^3 + 3,414 s^2 + 2,613 s + 1	$0,383s+\frac{1}{1,082s+\frac{1}{1,577s+\frac{1}{1,531s}}}$	
5	s^5 + 3,236 1 s^4 + 5,236 1 s^3 + 5,236 1 s^2 + 3,236 1 s + 1	$\frac{1}{0,309s+\frac{1}{0,894s+\frac{1}{1,381s+\frac{1}{1,694s+\frac{1}{1,546s}}}}}$	

Dénormalisation

Il faut dans un premier temps remplacer les λ_n et les γ_n du filtre normalisé passe bas par les λ_n et les γ_n du filtre normalisé considéré, ainsi un λ_n du filtre normalisé passe bas devient pour un filtre passe bande une inductance de valeur $(\lambda_n / \Delta x)$ en série avec une capacité de valeur $(\Delta x / \lambda_n)$, il faut en faire de même pour les capacités,…

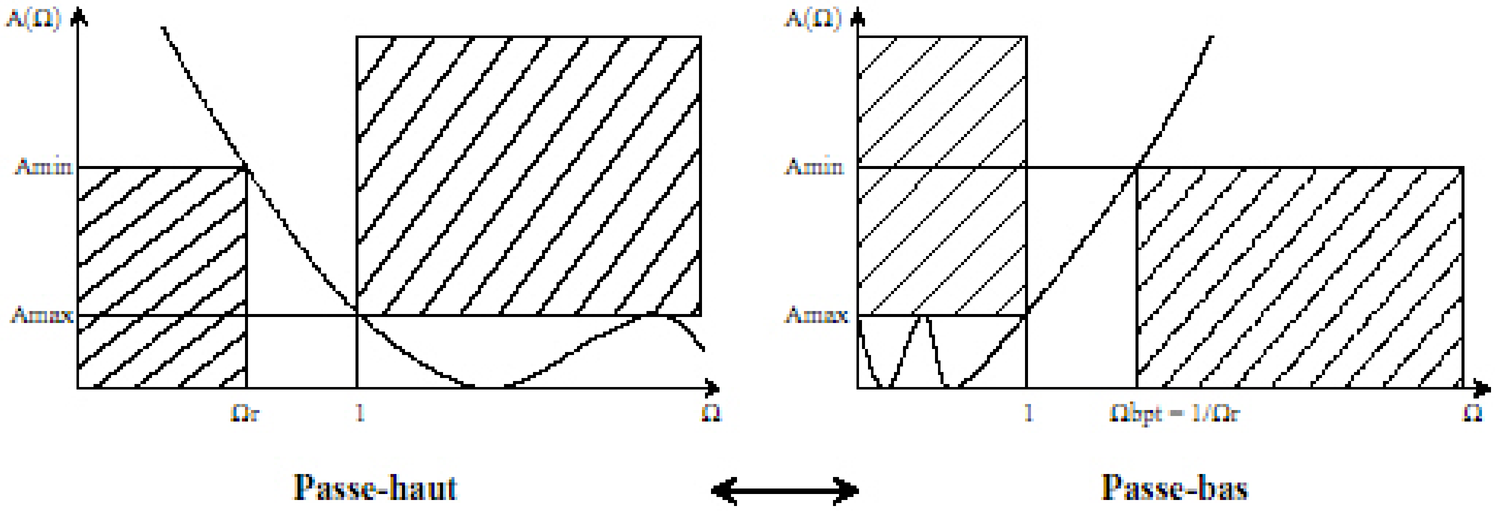
Une fois le filtre normalisé considéré réalisé, il faut remplacer les valeurs de λ_n et γ_n par leurs valeurs réelles qui sont respectivement : $L_n = L_u.\lambda_n$ et $C_n = C_u.\gamma_n$

Filtre passe haut

Pour transformer un filtre passe-bas en un filtre passe-haut et réciproquement, **on fait subir à la variable complexe normalisée** $s = j\Omega$ la transformation suivante :

$$\boxed{s \leftrightarrow \frac{1}{s}}$$

Cette transformation s'applique aux gabarits et aux fonctions de transfert.



Ainsi, on obtient : $\boxed{H_{PH}(s) = H_{PB}(\frac{1}{s})}$

L'ordre du filtre est préservé pour le filtre passe-haut.

Exercice 1 : Filtre de Butterworth

On souhaite réaliser un filtre de Butterworth qui ait un affaiblissement minimal de 50 dB de 0 à 2 kHz, et un affaiblissement maximal de 1 dB à partir de 10 kHz.

Solution 1

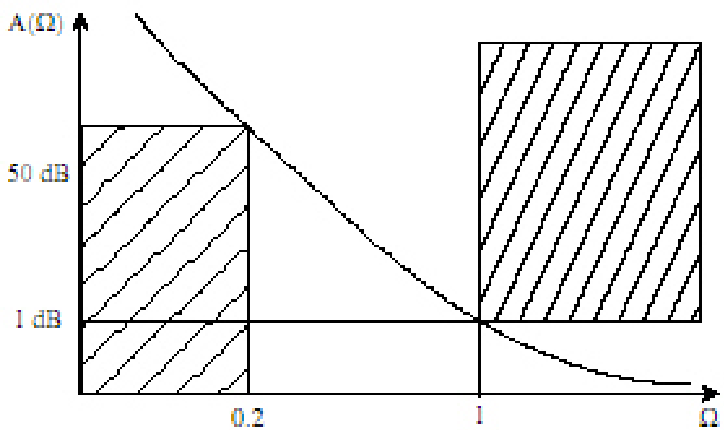
Il s'agit tout d'abord de déterminer les paramètres normalisés de ce filtre :

$f_0 = 10\ kHz$ la fréquence de référence

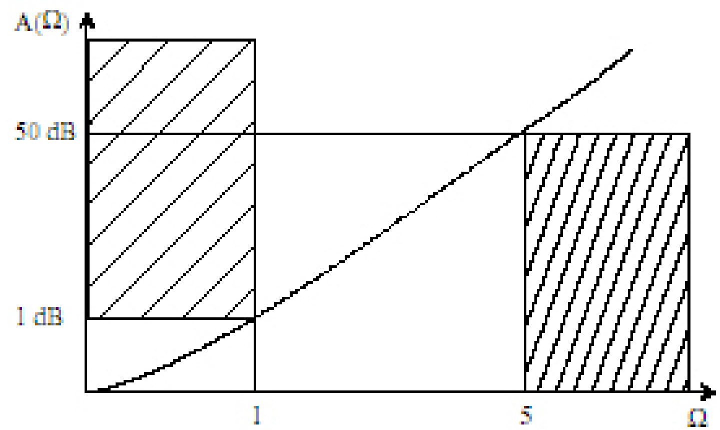
$${}_a = \frac{2\ kHz}{f_0} = 0.2$$

$$\frac{1}{{}_a} = 5\ \textit{coupure du passe bas}$$

Les gabarits du filtre passe-haut et du filtre passe-bas équivalents sont les suivants :



Gabarit du filtre passe-haut



Gabarit du filtre passe-bas équivalent

Le facteur ε est fonction de A_{max} seulement :

$$\varepsilon = \sqrt{10^{\frac{1}{10}} - 1} = 0.509$$

L'ordre N du filtre est fonction de A_{min} et Ω_r.

$$N \geq \frac{\log\left(10^{\frac{50}{10}} - 1\right) - 2 \cdot \log(0.509)}{2 \cdot \log(5)} = 3.99, \text{ donc } N=4$$

La fréquence de coupure f_{3dB} est fonction de ε et N :

$$f_{3dB} = \sqrt[4]{\frac{1}{0.509}} \cdot 1000 = 1.184 \text{ KHz}$$

A présent on cherche les pôles selon (14), en éliminant ceux qui ont une partie réelle positive :

$$P_0 = -0.453 + 1.094i$$
$$P_1 = -1.094 + 0.453i$$
$$P_2 = -1.094 - 0.453i$$
$$P_3 = -0.453 - 1.094i$$

Bien entendu, ces pôles sont conjugués complexes : (P_0-P_3) et (P_1-P_2). On peut maintenant créer deux cellules de second ordre en regroupant les conjugués complexes selon (15) :

$$H(S) = \left(\frac{-P_0}{S-P_0} \cdot \frac{-P_3}{S-P_3}\right) \cdot \left(\frac{-P_1}{S-P_1} \cdot \frac{-P_2}{S-P_2}\right)$$

$$H(S) = \frac{1.402}{S^2 + 0.906 \cdot S + 1.402} \cdot \frac{1.402}{S^2 + 2.188 \cdot S + 1.402}$$

Pour obtenir le résultat en fréquence, il faut remplacer S

$$H(f)=\frac{1.402}{\left(j\cdot\frac{f}{f_0}\right)^2+0.906\cdot\left(j\cdot\frac{f}{f_0}\right)+1.402}\cdot\frac{1.402}{\left(j\cdot\frac{f}{f_0}\right)^2+2.188\cdot\left(j\cdot\frac{f}{f_0}\right)+1.402}$$

$$H_{PB}(S)=\frac{1.402}{S^2+0.906\cdot S+1.402}\cdot\frac{1.402}{S^2+2.188\cdot S+1.402}$$

On remplace S par 1/S :

$$H_{PH}(S)=\frac{1.402}{S^{-2}+0.906\cdot S^{-1}+1.402}\cdot\frac{1.402}{S^{-2}+2.188\cdot S^{-1}+1.402}$$

$$H_{PH}(S)=\frac{1.402\cdot S^2}{1+0.906\cdot S+1.402\cdot S^2}\cdot\frac{1.402\cdot S^2}{1+2.188\cdot S+1.402\cdot S^2}$$

On voit que des zéros sont apparus ! On remplace S par $j\cdot\frac{f}{f_0}$:

$$H_{PH}(f)=\frac{-1.402\cdot\left(\frac{f}{f_0}\right)^2}{1-1.402\cdot\left(\frac{f}{f_0}\right)^2+j\cdot0.906\cdot\frac{f}{f_0}}\cdot\frac{-1.402\cdot\left(\frac{f}{f_0}\right)^2}{1-1.402\cdot\left(\frac{f}{f_0}\right)^2+j\cdot2.188\cdot\frac{f}{f_0}}$$