Aula 05 - Probabilidade Condicional e Teorema de Bayes

Probabilidade e Estatística - CRT 0018
Prof. Marciel Barros Pereira
Campus de Crateús (Engenharias)

2025.2

Agenda

- Probabilidade Condicional e Regra da Multiplicação
- Teorema de Bayes
- Independência de eventos

Probabilidade Condicional

- Em muitas situações práticas, o fenômeno aleatório com o qual trabalhamos pode ser separado em etapas.
- A informação do que ocorreu em uma determinada etapa pode influenciar nas probabilidades de ocorrências das etapas sucessivas.
- Nestes casos, dizemos que **ganhamos informação**, e podemos re-calcular as probabilidades de interesse.
- Estas probabilidades recalculadas recebem o nome de **probabilidade condicional.**

Probabilidade Condicional

A probabilidade condicionada é observada quando o evento A influencia no evento B ;

Exemplo: Alan, Bruna e Carlos estão jogando dados. Qual a probabilidade de:

Sair a face **6 sabendo que Carlos** jogou o dado?

- Em tese, não há nada que associe a face de um dado com a pessoa quem jogou, portanto, os eventos A e B são independentes;

E se soubermos que o número da face é **ímpar**?

- Nesse caso, sabemos que jamais pode ter saído a face 6 porque sabemos que a face é um número ímpar!

Probabilidade Condicional

Para entender a ideia de probabilidade condicional, considere o seguinte exemplo:

- Um dado foi lançado, qual é a probabilidade de ter ocorrido face 4?
- Suponha que o dado foi jogado, e, sem saber o resultado, você recebe a informação de que ocorreu **face par**. Qual é a probabilidade de ter saído face 4 com essa "**nova**" informação?

Probabilidade Condicional

$\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$, $n(\Omega) = 6$

A = face 4 = $\{4\}$, $n(A) = 1 \Rightarrow P(A) = n(A)/n(\Omega) = 1/6$

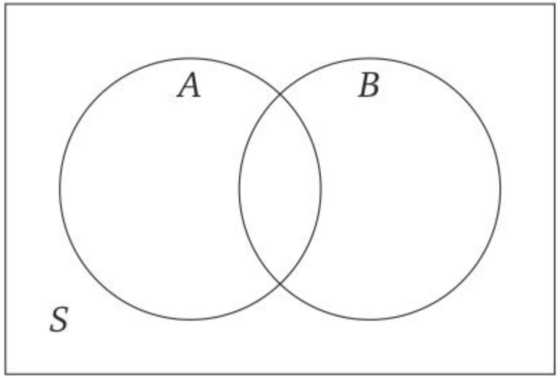
B = face PAR = $\{2,4,6\}$, $n(B) = 3 \Rightarrow P(B) = n(B)/n(\Omega) = 3/6$

C = face 4, dado que ocorreu face par = $\{4\}$,

$n(C) = 1 \Rightarrow P(C) = n(C)/n(B) = 1/3$

Probabilidade Condicional

Assumindo que P(A), P(B) ≠0:



$$P(B|A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)}$$

Em que P(B|A) é a **probabilidade de ocorrer B** se A tiver acontecido

A probabilidade conjunta será: $P(A \cap B) = P(B|A)P(A) = P(A|B)P(B)$

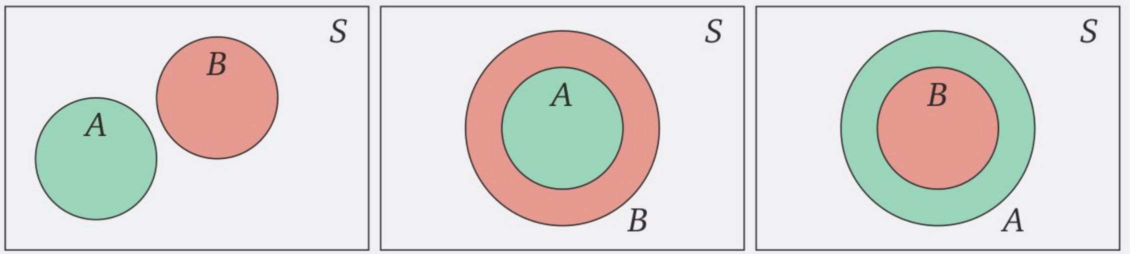
Probabilidade Condicional

Dessa forma, temos duas maneiras de calcular a probabilidade condicional $P(A|B)$:

- Diretamente, pela consideração da probabilidade de A em relação ao espaço amostral reduzido B
- Empregando a definição acima, onde $P(A \cap B)$ e $P(B)$ são calculadas em relação ao espaço amostral original S.

Probabilidade Condicional

Casos Particulares P(B|A)



- $P(B|A) = 0;$
- $P(B|A) = P(A \cap B)/P(A) = 1;$
- $P(B|A) = P(A \cap B)/P(A) = P(B)/P(A) \geq P(B);$

Forma Generalizada

$$P(A_1 \cap A_2 \cap \cdots \cap A_K) = P(A_1)P(A_2|A_1)P(A_3|A_2,A_1)\cdots P(A_K|A_{K-1},\cdots,A_1)$$

Probabilidade Condicional

Propriedades

- $0 \leq P(B|A) \leq 1$;
- $P(S|A) = 1$;
- $P(B_1 \cup B_2|A) = P(B_1|A) + P(B+2|A)$, se $B_1 \cap B_2 = \emptyset$;

Generalizando:

$$P(B_1 \cup B_2 \cup \cdots |A) = P(B_1|A) + P(B_2|A) + \cdots \qquad B_i \cap B_j = \emptyset, \forall i \neq j$$

Note ainda que para A = S, $\boxed{P(B|S) = P(B \cap S)P(S) = P(B)}$

Probabilidade Condicional - Exemplo

Exemplo: Em uma fábrica de eletrônicos, 60% dos produtos passam por inspeção e 40% não passam.

- Entre os inspecionados, 2% apresentam defeito.
- Entre os não inspecionados, 10% apresentam defeito.

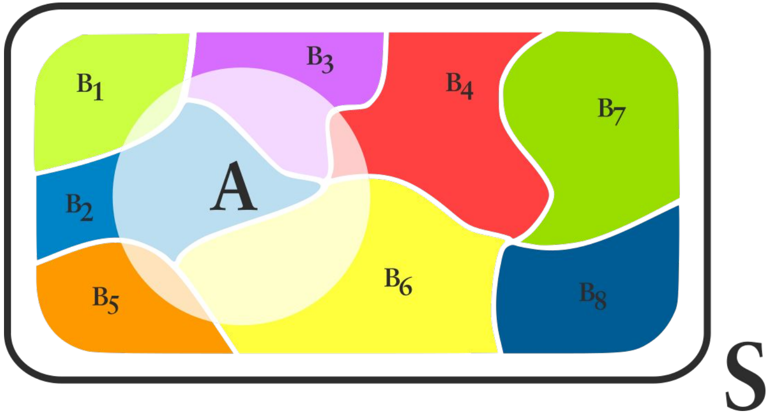
Qual é a probabilidade de um produto estar com defeito, dado que foi inspecionado?

Probabilidade Condicional

Partição

Os eventos $B_1, B_2, \cdots, B_K$ resentam uma partição do espaço amostral S se:

- $B_i \cap B_j = \emptyset$
- $\bigcup_{k=1}^{K} B_k = S$
- $P(B_k) > 0$, para todo k



Um dos eventos Bk , e exatamente um, ocorrerá!

Teorema da probabilidade total:

$$\boxed{P(A) = P(A|B_1)P(B_1) + P(A|B_2)P(B_2) + \cdots + P(A|B_K)P(B_K)}$$

Regra da Multiplicação

A regra da multiplicação é uma expressão derivada do conceito de probabilidade condicional. Uma vez que

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$$

temos que

$$P(A \cap B) = P(B) \cdot P(A|B)$$

Com isso podemos obter a probabilidade de uma interseção pelo produto de uma probabilidade marginal com uma probabilidade condicional.

Regra da multiplicação

$$\begin{aligned} P(A \cap B) &= P(B) \cdot P(A|B) \\ &= P(A) \cdot P(B|A) \end{aligned}$$

Teorema de Bayes

Os eventos $B_1, \cdots, B_K$ formam uma partição de S. Determinar a probabilidade do evento B_k condicionado ao evento A:

$$\boxed{P(B_k|A) = \frac{P(B_k \cap A)}{P(A)}}$$

Ou seja, a regra de Bayes diz que a probabilidade do evento B_k condicionado a ocorrência de A equivale à probabilidade de ocorrer B_k e A simultaneamente dividida pela probabilidade do evento A.

Teorema de Bayes

Exemplo: Um processo industrial utiliza duas máquinas, A e B, para paralelizar sua produção. Sabe-se que:

- 60% da produção é realizada pela máquina A;
- 5% dos produtos provenientes da máquina A apresentam falha.
- 8% dos produtos provenientes da máquina B apresentam falha.

Um produto apresentou falha. Qual a probabilidade de ter sido produzido pela máquina A?

E qual a probabilidade de um produto qualquer apresentar falha?

Teorema de Bayes

Note que:

$P(B_k \cap A) = P(A \cap B_k) = P(A|B_k)P(B_k)$ E ainda:

$$
\begin{aligned}
P(A) = & \quad P(A \cap_1) + P(A \cap B_2) + \cdots + P(A \cap B_K) \qquad (1) \\
= & \quad P(A|B_1)P(B_1) + P(A|B_2)P(B_2) + \cdots + P(A|B_K)P(B_K) \qquad (2)
\end{aligned}
$$

De onde segue que:

$$
P(B_k|A) = \frac{P(A|B_k)P(B_k)}{\sum_{k=1}^{K} P(A|B_k)P(B_k)}
$$

Independência

Em alguns casos, a ocorrência ou não de um evento B não tem nenhuma influência sobre a probabilidade de ocorrência do evento A;
Nestes casos, a probabilidade condicionada é igual à probabilidade absoluta:

$$P(B|A) = \frac{P(B \cap A)}{P(A)} = P(B)$$

Independência

Exemplos

- Um lançamento de um dado não influencia o resultado do lançamento de outro;
- Doenças genéticas não dependem do mês de nascimento;
- Probabilidade de acidentes em estradas não dependem da cor do veículo acidentado (discutir);

Independência

Os eventos A e B são eventos independentes se a ocorrência de B não altera a probabilidade de ocorrência de A, ou seja, eventos A e B são independentes se:

$$P(A|B) = P(A) \text{ e também que } P(B|A) = P(B)$$

Com isso, e a regra da multiplicação, temos que

$$P(A \cap B) = P(B) \cdot P(A|B) = P(B) \cdot P(A)$$

$$P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B|A) = P(A) \cdot P(B)$$

Isso significa que se dois eventos são independentes, a probabilidade de ocorrência simultânea $P(A \cap B)$ é o produto das probabilidades marginais, $P(A)$ e $P(B)$.

Independência

Dessa forma, podemos verificar se dois eventos são independentes de duas formas:

- Pela definição intuitiva: $P(A|B) = P(A)$

  $P(B|A) = P(B)$

Observação: se o evento A é independente do evento B, então nós esperamos que B também seja independente de A.

- Pela definição formal: $P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$

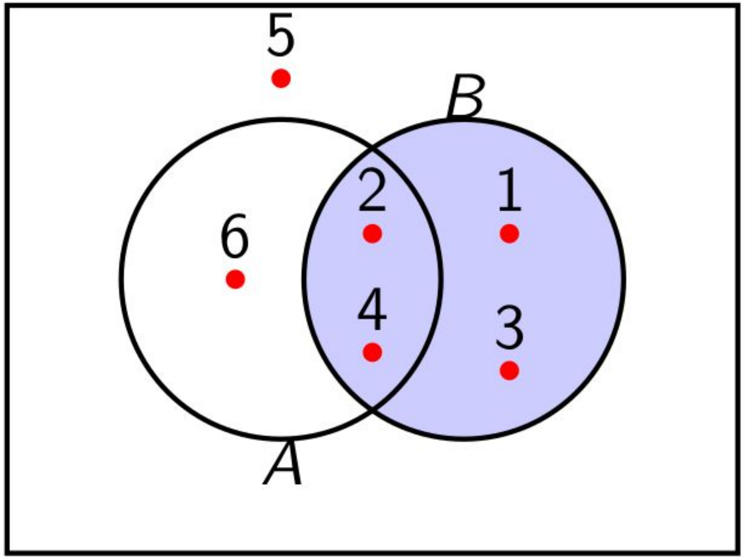
Independência

Exemplo: Lançamento de um dado

Considere o lançamento de um dado e os seguintes eventos

- A = “resultado é um número par”
- B = “resultado é um número menor ou igual a 4”

Os eventos A e B são independentes?



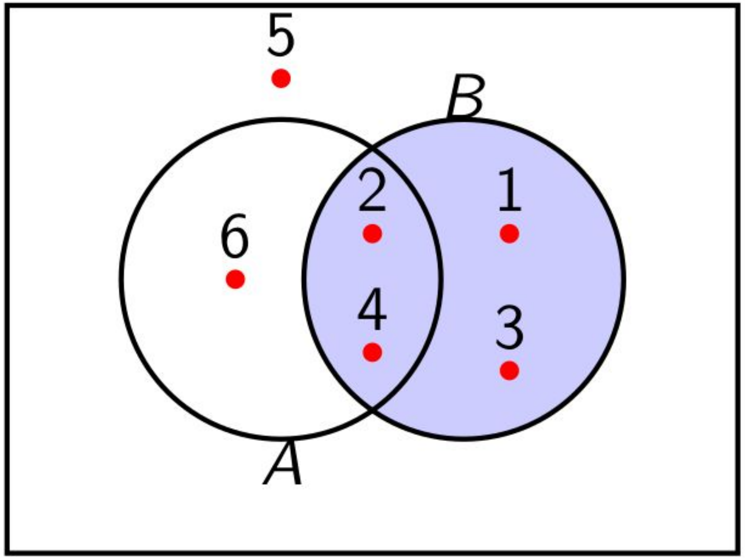
Independência

Pela definição intuitiva:

$P(A) = 1/2$, $P(A|B) = P(A \cap B)/P(B) = 1/2$

$P(B) = 2/3$, $P(B|A) = P(B \cap A)/P(A) = 2/3$.

Portanto: $P(A|B) = P(A)$ e $P(B|A) = P(B)$



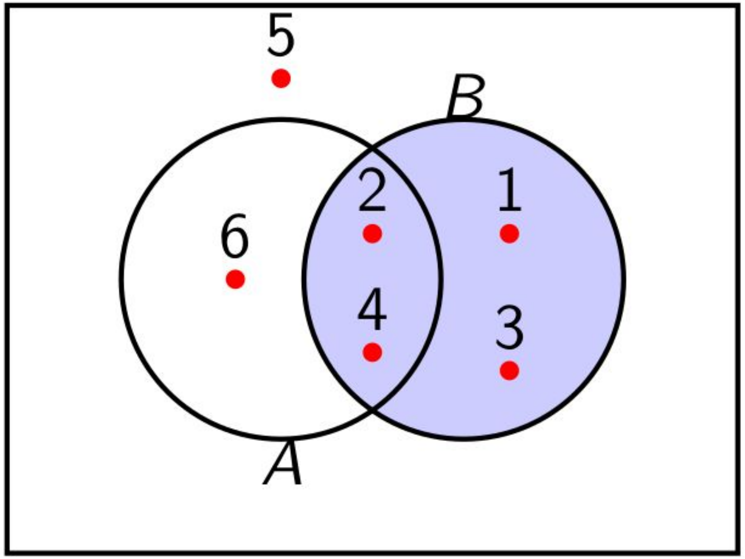
Independência

Pela definição formal:

$P(A \cap B) = P(A)P(B) = \frac{1}{2} \times \frac{2}{3} = \frac{1}{3}$

$P(A \cap B) = 2/6 = \frac{1}{3}$ assim $P(A \cap B) = P(A)P(B)$

Portanto, **os eventos A e B são independentes.** Saber que A ocorreu não muda a probabilidade de B ocorrer e vice-versa.



Independência

Exercício

Considere os eventos:

- A = "sistema respondeu em menos de 200ms"
- B = "usuário acessou a partir de uma rede cabeada"

Sabendo que:

- $P(A) = 0{,}7$
- $P(B) = 0{,}5$
- $P(A \cap B) = 0{,}35$

Os eventos A e B são independentes? Justifique pela definição formal e condicional.

Independência

Exercício

Foi efetuada uma análise da qualidade da água para mensurar a presença de coliformes fecais (CF) e metais pesados (MP). Foram obtidas as probabilidades a seguir:

P(CF) = 0,1; ou 10%

P(MP) = 0,05; ou 5%

Supondo independência, qual a probabilidade de uma amostra **estar livre** de ambos os contaminantes?

Qual a probabilidade de estar contaminada por **ao menos um deles**?

Teorema de Bayes

Exercício

Uma empresa testou 400 componentes eletrônicos:

	Defeituoso	Não Defeituoso	Total
Com Falha Visual	90	60	150
Sem Falha Visual	30	220	250
Total	120	280	400

- Qual a probabilidade de um item ser defeituoso?
- Qual a probabilidade de um item ser defeituoso dado que tem falha visual?
- Qual a probabilidade de um item não ser defeituoso dado que não tem falha visual?

Teorema de Bayes

Exercício

Uma mineradora analisa amostras de solo para presença de minério de alumínio (bauxita).

- 40% vêm da região A, 35% da região B, 25% da região C.

Um estudo prévio apontou que o percentual de minério de alumínio presente nessas regiões é, respectivamente

- P(A) = 15%, P(B) = 10% (B) e P(C) = 5% .

Dada uma amostra com presença de bauxita, qual a probabilidade de ter vindo da região A?

Probabilidade Total

Exercício

Uma empresa utiliza três sistemas diferentes para registrar vendas.

- Sistema A: usado em 30% das transações, com 2% de erros.
- Sistema B: 50% das transações, com 1% de erros.
- Sistema C: 20% das transações, com 5% de erros.

1. Qual a probabilidade de que uma venda selecionada ao acaso tenha erro?
2. Sabendo que houve erro, qual a chance de que tenha sido pelo Sistema C?

Aula 05 - Probabilidade Condicional e Teorema de Bayes

Probabilidade e Estatística - CRT 0018
Prof. Marciel Barros Pereira
Campus de Crateús (Engenharias)

2025.2