Álgebra Linear - CC/SI

Dr. Giannini Italino

Universidade Federal do Ceará - Campus de Crateús

Junho, 2025

1. Base e dimensão de espaços vetoriais

Recordando

Na aula passada fizemos um estudo sobre os conceitos abaixo:

Dependência e Independência linear

Definição: Seja V um espaço vetorial sobre o corpo de escalares K. Dizemos que os vetores $v_1, v_2, \ldots, v_m$ de V são linearmente dependentes (Denotado por LD), se existirem escalares $a_1, a_2, \ldots, a_m$, não todos nulos, tais que

$$a_1 v_1 + a_2 v_2 + \ldots + a_m v_m = 0. \quad (1)$$

Caso contrário, dizemos que os vetores são linearmente independentes (denotado por LI).

Conjuntos geradores

Definição: Seja V um espaço vetorial sobre K. Dizemos que os vetores $v_1, v_2, \ldots, v_m$ de V geram o espaço vetorial V (ou que formam um conjunto gerador do espaço V) se qualquer vetor de V puder ser escrito como uma combinação linear dos vetores $v_1, v_2, \ldots, v_m$, ou seja, se existirem escalares vetores $a_1, a_2, \ldots, a_m$ de K tais que

$$v = a_1 v_1 + a_2 v_2 + \ldots + a_m v_m.$$

Recordando

Na aula passada fizemos um estudo sobre os conceitos abaixo:

Dependência e Independência linear

Definição: Seja V um espaço vetorial sobre o corpo de escalares K. Dizemos que os vetores $v_1, v_2, \ldots, v_m$ de V são linearmente dependentes (Denotado por LD), se existirem escalares $a_1, a_2, \ldots, a_m$, não todos nulos, tais que

$$a_1 v_1 + a_2 v_2 + \ldots + a_m v_m = 0. \tag{1}$$

Caso contrário, dizemos que os vetores são linearmente independentes (denotado por LI).

Conjuntos geradores

Definição: Seja V um espaço vetorial sobre K. Dizemos que os vetores $v_1, v_2, \ldots, v_m$ de V geram o espaço vetorial V (ou que formam um conjunto gerador do espaço V) se qualquer vetor de V puder ser escrito como uma combinação linear dos vetores $v_1, v_2, \ldots, v_m$, ou seja, se existirem escalares vetores $a_1, a_2, \ldots, a_m$ de K tais que

$$v = a_1 v_1 + a_2 v_2 + \ldots + a_m v_m.$$

Recordando

Na aula passada fizemos um estudo sobre os conceitos abaixo:

Dependência e Independência linear

Definição: Seja V um espaço vetorial sobre o corpo de escalares K. Dizemos que os vetores $v_1, v_2, \ldots, v_m$ de V são linearmente dependentes (Denotado por LD), se existirem escalares $a_1, a_2, \ldots, a_m$, não todos nulos, tais que

$$a_1 v_1 + a_2 v_2 + \ldots + a_m v_m = 0. \tag{1}$$

Caso contrário, dizemos que os vetores são linearmente independentes (denotado por LI).

Conjuntos geradores

Definição: Seja V um espaço vetorial sobre K. Dizemos que os vetores $v_1, v_2, \ldots, v_m$ de V geram o espaço vetorial V (ou que formam um conjunto gerador do espaço V) se qualquer vetor de V puder ser escrito como uma combinação linear dos vetores $v_1, v_2, \ldots, v_m$, ou seja, se existirem escalares vetores $a_1, a_2, \ldots, a_m$ de K tais que

$$v = a_1 v_1 + a_2 v_2 + \ldots + a_m v_m.$$

Base de espaços vetoriais

Veremos, a seguir, uma importante definição relacionada a espaços vetoriais, que é a definição de base de espaço vetorial. Intuitivamente, uma base de um espaço é um conjunto de vetores do espaço que satisfazem a condição de serem linearmente independentes e são suficientes para gerarem qualquer vetor do espaço vetorial.

Base

Definição: Um conjunto $S = \{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$ de vetores de um espaço vetorial V é dita ser uma base de V se satisfizerem duas propriedades

(i) S é linearmente independente;

(ii) S gera V.

Exemplo 1

Ex. 1: Os vetores $v_1 = (1, 0, 0)$, $v_2 = (0, 1, 0)$ e $v_3 = (0, 0, 1)$ formam uma base do espaço vetorial $V = \mathbb{R}^3$.

Base de espaços vetoriais

Veremos, a seguir, uma importante definição relacionada a espaços vetoriais, que é a definição de base de espaço vetorial. Intuitivamente, uma base de um espaço é um conjunto de vetores do espaço que satisfazem a condição de serem linearmente independentes e são suficientes para gerarem qualquer vetor do espaço vetorial.

Base

Definição: Um conjunto $S = \{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$ de vetores de um espaço vetorial V é dita ser uma base de V se satisfizerem duas propriedades

(i) S é linearmente independente;

(ii) S gera V.

Exemplo 1

Ex. 1: Os vetores $v_1 = (1, 0, 0)$, $v_2 = (0, 1, 0)$ e $v_3 = (0, 0, 1)$ formam uma base do espaço vetorial $V = \mathbb{R}^3$.

Base de espaços vetoriais

Veremos, a seguir, uma importante definição relacionada a espaços vetoriais, que é a definição de base de espaço vetorial. Intuitivamente, uma base de um espaço é um conjunto de vetores do espaço que satisfazem a condição de serem linearmente independentes e são suficientes para gerarem qualquer vetor do espaço vetorial.

Base

Definição: Um conjunto $S = \{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$ de vetores de um espaço vetorial V é dita ser uma base de V se satisfizerem duas propriedades

(i) S é linearmente independente;

(ii) S gera V.

Exemplo 1

Ex. 1: Os vetores $v_1 = (1, 0, 0)$, $v_2 = (0, 1, 0)$ e $v_3 = (0, 0, 1)$ formam uma base do espaço vetorial $V = \mathbb{R}^3$.

Base de espaços vetoriais

Veremos, a seguir, uma importante definição relacionada a espaços vetoriais, que é a definição de base de espaço vetorial. Intuitivamente, uma base de um espaço é um conjunto de vetores do espaço que satisfazem a condição de serem linearmente independentes e são suficientes para gerarem qualquer vetor do espaço vetorial.

Base

Definição: Um conjunto $S = \{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$ de vetores de um espaço vetorial V é dita ser uma base de V se satisfizerem duas propriedades

(i) S é linearmente independente;

(ii) S gera V.

Exemplo 1

Ex. 1: Os vetores $v_1 = (1, 0, 0)$, $v_2 = (0, 1, 0)$ e $v_3 = (0, 0, 1)$ formam uma base do espaço vetorial $V = \mathbb{R}^3$.

Cont. do exemplo 1

Exemplo

Para mostrar que v_1, v_2 e v_3 for uma base de $\mathbb{R}^3$, então temos que mostrar que as condições (i) e (ii) da definição acima sejam satisfeitas.

(i) Primeiro vamos mostrar que esses vetores são LI, ou seja, verifiquemos se a única solução da equação

$$a_1 v_1 + a_2 v_2 + a_3 v_3 = 0$$

é $a_1 = a_2 = a_3 = 0$. De fato, note que

$$a_1 v_1 + a_2 v_2 + a_3 v_3 = 0 \Leftrightarrow a_1(1,0,0) + a_2(0,1,0) + a_3(0,0,1) = (0,0,0)$$

o que implica que

$$(a_1, 0, 0) + (0, a_2, 0) + (0, 0, a_3) = (0,0,0) \Leftrightarrow (a_1, a_2, a_3) = (0,0,0)$$

logo, dessa última igualdade temos que $a_1 = a_2 = a_3 = 0$. Logo os vetores são LI.

Continuação do exemplo 1

(ii) Mostremos agora que esses vetores geram $\mathbb{R}^3$ (já fizemos isso na aula passada). De fato, note que se esses vetores v_1, v_2 e v_3 formam um conjunto gerador de $V = \mathbb{R}^3$, então para qualquer vetor $v = (x, y, z) \in \mathbb{R}^3$, então devem existir constantes a_1, a_2 e a_3 tais que $v = a_1 v_1 + a_2 v_2 + a_3 v_3$.

$(x, y, z) = a_1(1, 0, 0)+a_2(0, 1, 0)+a_3(0, 0, 1) \Leftrightarrow (x, y, z) = (a_1, 0, 0)+(0, a_2, 0)+(0, 0, a_3)$,

ou ainda,

$$(x, y, z) = (a_1, a_2, a_3)$$

Como os vetores de ambos os membros precisam serem iguais, então temos que $x = a_1$, $y = a_2$ e $z = a_3$. Ou seja, dado um vetor arbitrário $v = (x, y, z)$ de $\mathbb{R}^3$, sempre podemos escreve-lo como combinação linear dos vetores $v_1 = (1, 0, 0)$, $v_2 = (0, 1, 0)$ e $v_3 = (0, 0, 1)$, e essa combinação é da forma

$$(x, y, z) = x(1, 0, 0) + y(0, 1, 0) + z(0, 0, 1).$$

Portanto, os vetores v_1, v_2 e v_3 geram $\mathbb{R}^3$.

Exemplo 2

Ex. 2: Mais geralmente, se $V = \mathbb{R}^n$, é o espaço vetorial composto por todas as ênupla com entradas reais, então pode-se mostrar, com um argumento análogo ao anterior, que os vetores

$$e_1 = (1, 0, 0, \ldots, 0), \quad e_2 = (0, 1, 0, \ldots, 0), \quad e_3 = (0, 0, 1, \ldots, 0), \ldots, e_n = (0, 0, 0, \ldots, 1)$$

formam uma base de $V = \mathbb{R}^n$.

Exemplo 3

Ex. 3: Seja $V = M_{2,2}$ o espaço vetorial de todas as matrizes reais 2×2. Então as matrizes abaixo formam uma base de $V = M_{2,2}$.

$$e_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad e_2 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad e_3 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad e_4 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Exemplo 2

Ex. 2: Mais geralmente, se $V = \mathbb{R}^n$, é o espaço vetorial composto por todas as ênupla com entradas reais, então pode-se mostrar, com um argumento análogo ao anterior, que os vetores

$$e_1 = (1, 0, 0, \ldots, 0), \quad e_2 = (0, 1, 0, \ldots, 0), \quad e_3 = (0, 0, 1, \ldots, 0), \ldots, e_n = (0, 0, 0, \ldots, 1)$$

formam uma base de $V = \mathbb{R}^n$.

Exemplo 3

Ex. 3: Seja $V = M_{2,2}$ o espaço vetorial de todas as matrizes reais 2×2. Então as matrizes abaixo formam uma base de $V = M_{2,2}$.

$$e_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad e_2 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad e_3 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \text{ e } e_4 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Continuação do exemplo 3

(i) Primeiro vamos mostrar que esses vetores são LI, ou seja, considere a equação

$$a_1 \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + a_2 \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + a_3 \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} + a_4 \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

isto é

$$\begin{bmatrix} a_1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & a_2 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ a_3 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & a_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

ou ainda

$$\begin{bmatrix} a_1 & a_2 \\ a_3 & a_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

logo, da última equação acima temos que $a_1 = a_2 = a_3 = a_4 = 0$. Portanto, os vetores são LI.

Continuação do exemplo 3

(ii) Mostremos agora que esses vetores geram $M_{2,2}$. De fato, seja $v = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ uma matriz arbitrária de $M_{2,2}$ então vamos obter constantes a_1, a_2, a_3 e a_4 tais que $v = a_1 e_1 + a_2 e_2 + a_3 e_3 + a_4 e_4$. Ou seja

$$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = a_1 \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + a_2 \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + a_3 \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} + a_4 \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

ou ainda,

$$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_1 & a_2 \\ a_3 & a_4 \end{bmatrix}$$

Como as matrizes de ambos os membros precisam serem iguais, então temos que $a = a_1$, $b = a_2$, $c = a_3$ e $d = a_4$. Portanto, os vetores e_1, e_2, e_3 e e_4 geram $M_{2,2}$ e, consequentemente, esses vetores formam uma base de $M_{2,2}$.

O teorema a seguir, é um resultado fundamental da álgebra linear.

Teorema: Seja V um espaço vetorial tal que alguma base de V tem m elementos e outra base tem n elementos. Então obrigatoriamente $m = n$.

Em outras palavras, qualquer base de um espaço vetorial deve ter o mesmo número de elementos.

Motivados por esse resultado, podemos definir o conceito a seguir.

Dimensão

Definição: Dizemos que um espaço vetorial V tem dimensão finita n, ou que é n-dimensional, e denotamos por $\dim V = n$ se V possui alguma base com n elementos.

Ex.: As dimensões dos espaços vetoriais dos exemplos Ex. 1 , Ex. 2, e Ex. 3 são 3, n e 4, respectivamente.

O teorema a seguir, é um resultado fundamental da álgebra linear.

Teorema: Seja V um espaço vetorial tal que alguma base de V tem m elementos e outra base tem n elementos. Então obrigatoriamente $m = n$.

Em outras palavras, qualquer base de um espaço vetorial deve ter o mesmo número de elementos.

Motivados por esse resultado, podemos definir o conceito a seguir.

Dimensão

Definição: Dizemos que um espaço vetorial V tem dimensão finita n, ou que é n-dimensional, e denotamos por $\dim V = n$ se V possui alguma base com n elementos.

Ex.: As dimensões dos espaços vetoriais dos exemplos Ex. 1 , Ex. 2, e Ex. 3 são 3, n e 4, respectivamente.

O teorema a seguir, é um resultado fundamental da álgebra linear.

Teorema: Seja V um espaço vetorial tal que alguma base de V tem m elementos e outra base tem n elementos. Então obrigatoriamente $m = n$.

Em outras palavras, qualquer base de um espaço vetorial deve ter o mesmo número de elementos.

Motivados por esse resultado, podemos definir o conceito a seguir.

Dimensão

Definição: Dizemos que um espaço vetorial V tem dimensão finita n, ou que é n-dimensional, e denotamos por $\dim V = n$ se V possui alguma base com n elementos.

Ex.: As dimensões dos espaços vetoriais dos exemplos Ex. 1 , Ex. 2, e Ex. 3 são 3, n e 4, respectivamente.

O teorema a seguir, é um resultado fundamental da álgebra linear.

Teorema: Seja V um espaço vetorial tal que alguma base de V tem m elementos e outra base tem n elementos. Então obrigatoriamente $m = n$.

Em outras palavras, qualquer base de um espaço vetorial deve ter o mesmo número de elementos.

Motivados por esse resultado, podemos definir o conceito a seguir.

Dimensão

Definição: Dizemos que um espaço vetorial V tem dimensão finita n, ou que é n-dimensional, e denotamos por $\dim V = n$ se V possui alguma base com n elementos.

Ex.: As dimensões dos espaços vetoriais dos exemplos Ex. 1 , Ex. 2, e Ex. 3 são 3, n e 4, respectivamente.

O teorema a seguir, é um resultado fundamental da álgebra linear.

Teorema: Seja V um espaço vetorial tal que alguma base de V tem m elementos e outra base tem n elementos. Então obrigatoriamente $m = n$.

Em outras palavras, qualquer base de um espaço vetorial deve ter o mesmo número de elementos.

Motivados por esse resultado, podemos definir o conceito a seguir.

Dimensão

Definição: Dizemos que um espaço vetorial V tem dimensão finita n, ou que é n-dimensional, e denotamos por $\dim V = n$ se V possui alguma base com n elementos.

Ex.: As dimensões dos espaços vetoriais dos exemplos Ex. 1 , Ex. 2, e Ex. 3 são 3, n e 4, respectivamente.

O teorema abaixo estabelece uma relação básica entre a dimensão de um espaço vetorial e a dimensão de um subespaço vetorial.

Teorema: Seja W um subespaço do espaço vetorial V, tal que a dimensão de V é igual a n. Então $\dim W \leq n$. Se ocorrer de $\dim W = n$, então $W = V$.

Exemplo

Ex.: Considere o W um subespaço do espaço vetorial $V = \mathbb{R}^3$. Então, pelo teorema acima, sabemos que a dimensão de W só pode ser igual a 0, 1, 2 ou 3. Vale o seguinte.

(i) Se $\dim W = 0$, então $W = 0$, um ponto;

(ii) Se $\dim W = 1$, então W é uma reta pela origem O;

(iii) Se $\dim W = 2$, então W é um plano pela origem O;

(iv) Se $\dim W = 3$, então W é o próprio espaço vetorial $V = \mathbb{R}^3$.

Dimensão e subespaços

O teorema abaixo estabelece uma relação básica entre a dimensão de um espaço vetorial e a dimensão de um subespaço vetorial.

Teorema: Seja W um subespaço do espaço vetorial V, tal que a dimensão de V é igual a n. Então $\dim W \leq n$. Se ocorrer de $\dim W = n$, então $W = V$.

Exemplo

Ex.: Considere o W um subespaço do espaço vetorial $V = \mathbb{R}^3$. Então, pelo teorema acima, sabemos que a dimensão de W só pode ser igual a 0, 1, 2 ou 3. Vale o seguinte.

(i) Se $\dim W = 0$, então $W = 0$, um ponto;

(ii) Se $\dim W = 1$, então W é uma reta pela origem O;

(iii) Se $\dim W = 2$, então W é um plano pela origem O;

(iv) Se $\dim W = 3$, então W é o próprio espaço vetorial $V = \mathbb{R}^3$.

O teorema abaixo estabelece uma relação básica entre a dimensão de um espaço vetorial e a dimensão de um subespaço vetorial.

Teorema: Seja W um subespaço do espaço vetorial V, tal que a dimensão de V é igual a n. Então $\dim W \leq n$. Se ocorrer de $\dim W = n$, então $W = V$.

Exemplo

Ex.: Considere o W um subespaço do espaço vetorial $V = \mathbb{R}^3$. Então, pelo teorema acima, sabemos que a dimensão de W só pode ser igual a 0, 1, 2 ou 3. Vale o seguinte.

(i) Se $\dim W = 0$, então $W = 0$, um ponto;

(ii) Se $\dim W = 1$, então W é uma reta pela origem O;

(iii) Se $\dim W = 2$, então W é um plano pela origem O;

(iv) Se $\dim W = 3$, então W é o próprio espaço vetorial $V = \mathbb{R}^3$.

O teorema abaixo estabelece uma relação básica entre a dimensão de um espaço vetorial e a dimensão de um subespaço vetorial.

Teorema: Seja W um subespaço do espaço vetorial V, tal que a dimensão de V é igual a n. Então $\dim W \leq n$. Se ocorrer de $\dim W = n$, então $W = V$.

Exemplo

Ex.: Considere o W um subespaço do espaço vetorial $V = \mathbb{R}^3$. Então, pelo teorema acima, sabemos que a dimensão de W só pode ser igual a 0, 1, 2 ou 3. Vale o seguinte.

(i) Se $\dim W = 0$, então $W = 0$, um ponto;

(ii) Se $\dim W = 1$, então W é uma reta pela origem O;

(iii) Se $\dim W = 2$, então W é um plano pela origem O;

(iv) Se $\dim W = 3$, então W é o próprio espaço vetorial $V = \mathbb{R}^3$.

O teorema abaixo estabelece uma relação básica entre a dimensão de um espaço vetorial e a dimensão de um subespaço vetorial.

Teorema: Seja W um subespaço do espaço vetorial V, tal que a dimensão de V é igual a n. Então $\dim W \leq n$. Se ocorrer de $\dim W = n$, então $W = V$.

Exemplo

Ex.: Considere o W um subespaço do espaço vetorial $V = \mathbb{R}^3$. Então, pelo teorema acima, sabemos que a dimensão de W só pode ser igual a 0, 1, 2 ou 3. Vale o seguinte.

(i) Se $\dim W = 0$, então $W = 0$, um ponto;

(ii) Se $\dim W = 1$, então W é uma reta pela origem O;

(iii) Se $\dim W = 2$, então W é um plano pela origem O;

(iv) Se $\dim W = 3$, então W é o próprio espaço vetorial $V = \mathbb{R}^3$.

Dimensão e subespaços

O teorema abaixo estabelece uma relação básica entre a dimensão de um espaço vetorial e a dimensão de um subespaço vetorial.

Teorema: Seja W um subespaço do espaço vetorial V, tal que a dimensão de V é igual a n. Então $\dim W \leq n$. Se ocorrer de $\dim W = n$, então $W = V$.

Exemplo

Ex.: Considere o W um subespaço do espaço vetorial $V = \mathbb{R}^3$. Então, pelo teorema acima, sabemos que a dimensão de W só pode ser igual a 0, 1, 2 ou 3. Vale o seguinte.

(i) Se $\dim W = 0$, então $W = 0$, um ponto;

(ii) Se $\dim W = 1$, então W é uma reta pela origem O;

(iii) Se $\dim W = 2$, então W é um plano pela origem O;

(iv) Se $\dim W = 3$, então W é o próprio espaço vetorial $V = \mathbb{R}^3$.