# Álgebra Linear - CC/SI

Dr. Giannini Italino

Universidade Federal do Ceará - Campus de Crateús

Maio, 2025

Veremos agora um importante estrutura básica de álgebra linear. Intuitivamente, um espaço vetorial pode ser pensando como um conjunto no qual é possível somar seus elementos e também multiplica-los por escalares, sendo que essas duas operações estão bem definidas sobre o conjunto. Formalmente, temos

**Definição**: Considere o conjunto $V$, não vazio, no qual as duas operações a seguir são definidas.

(i) **Adição de vetores**: Associa a quaisquer vetores $u, v \in V$, a soma $u + v$ em $V$;

(ii) **Multiplicação por escalar**: Associa a qualquer vetor $u \in V$ e escalar $r \in K$ o produto $ru$ em $V$.

Então dizemos que $V$ é um espaço vetorial (sobre o conjunto de escalares $K$) se os oito axiomas a seguir forem verdadeiros:

# Espaços vetoriais

Veremos agora um importante estrutura básica de álgebra linear. Intuitivamente, um espaço vetorial pode ser pensando como um conjunto no qual é possível somar seus elementos e também multiplica-los por escalares, sendo que essas duas operações estão bem definidas sobre o conjunto. Formalmente, temos

**Definição**: Considere o conjunto $V$, não vazio, no qual as duas operações a seguir são definidas.

(i) **Adição de vetores**: Associa a quaisquer vetores $u, v \in V$, a soma $u + v$ em $V$;

(ii) **Multiplicação por escalar**: Associa a qualquer vetor $u \in V$ e escalar $r \in K$ o produto $ru$ em $V$.

Então dizemos que $V$ é um espaço vetorial (sobre o conjunto de escalares $K$) se os oito axiomas a seguir forem verdadeiros:

## Aximoas

(A1) Para quaisquer vetores $u, v, w \in V$ vale $(u + v) + w = u + (v + w)$;

(A2) Existe um vetor em $V$, denotado por 0, denominado vetor nulo, ou vetor zero, tal que $u + 0 = 0 + u = u$, para todo vetor $u \in V$;

(A3) Para cada vetor $u \in V$ existe um vetor em $V$, que denotamos $-u$ e denominamos simétrico de $u$, tal que $u + (-u) = (-u) + u = 0$;

(A4) Para quaisquer vetores $u, v \in V$, temos $u + v = v + u$;

(M1) Para quaisquer vetores $u, v \in V$ e escalar $r \in K$, temos $r(u + v) = ru + rv$;

(M2) Para quaisquer escalares $r, s \in K$ e vetor $u \in V$, temos $(r + s)u = ru + su$;

(M3) Para quaisquer escalares $r, s \in K$ e vetor $u \in V$, $(rs)u = r(su)$;

(M4) Para qualquer vetor $u \in V$, $1u = u$, onde 1 é o escalar unitário de $K$.

# Espaços vetoriais

## Aximoas

(A1) Para quaisquer vetores $u, v, w \in V$ vale $(u + v) + w = u + (v + w)$;

(A2) Existe um vetor em $V$, denotado por 0, denominado vetor nulo, ou vetor zero, tal que $u + 0 = 0 + u = u$, para todo vetor $u \in V$;

(A3) Para cada vetor $u \in V$ existe um vetor em $V$, que denotamos $-u$ e denominamos simétrico de $u$, tal que $u + (-u) = (-u) + u = 0$;

(A4) Para quaisquer vetores $u, v \in V$, temos $u + v = v + u$;

(M1) Para quaisquer vetores $u, v \in V$ e escalar $r \in K$, temos $r(u + v) = ru + rv$;

(M2) Para quaisquer escalares $r, s \in K$ e vetor $u \in V$, temos $(r + s)u = ru + su$;

(M3) Para quaisquer escalares $r, s \in K$ e vetor $u \in V$, $(rs)u = r(su)$;

(M4) Para qualquer vetor $u \in V$, $1u = u$, onde 1 é o escalar unitário de $K$.

# Espaços vetoriais

## Aximoas

(A1) Para quaisquer vetores $u, v, w \in V$ vale $(u + v) + w = u + (v + w)$;

(A2) Existe um vetor em $V$, denotado por $0$, denominado vetor nulo, ou vetor zero, tal que $u + 0 = 0 + u = u$, para todo vetor $u \in V$;

(A3) Para cada vetor $u \in V$ existe um vetor em $V$, que denotamos $-u$ e denominamos simétrico de $u$, tal que $u + (-u) = (-u) + u = 0$;

(A4) Para quaisquer vetores $u, v \in V$, temos $u + v = v + u$;

(M1) Para quaisquer vetores $u, v \in V$ e escalar $r \in K$, temos $r(u + v) = ru + rv$;

(M2) Para quaisquer escalares $r, s \in K$ e vetor $u \in V$, temos $(r + s)u = ru + su$;

(M3) Para quaisquer escalares $r, s \in K$ e vetor $u \in V$, $(rs)u = r(su)$;

(M4) Para qualquer vetor $u \in V$, $1u = u$, onde $1$ é o escalar unitário de $K$.

## Aximoas

(A1) Para quaisquer vetores $u, v, w \in V$ vale $(u+v)+w = u+(v+w)$;

(A2) Existe um vetor em $V$, denotado por $0$, denominado vetor nulo, ou vetor zero, tal que $u+0 = 0+u = u$, para todo vetor $u \in V$;

(A3) Para cada vetor $u \in V$ existe um vetor em $V$, que denotamos $-u$ e denominamos simétrico de $u$, tal que $u+(-u) = (-u)+u = 0$;

(A4) Para quaisquer vetores $u, v \in V$, temos $u+v = v+u$;

(M1) Para quaisquer vetores $u, v \in V$ e escalar $r \in K$, temos $r(u+v) = ru+rv$;

(M2) Para quaisquer escalares $r, s \in K$ e vetor $u \in V$, temos $(r+s)u = ru+su$;

(M3) Para quaisquer escalares $r, s \in K$ e vetor $u \in V$, $(rs)u = r(su)$;

(M4) Para qualquer vetor $u \in V$, $1u = u$, onde $1$ é o escalar unitário de $K$.

# Espaços vetoriais

## Aximoas

(A1) Para quaisquer vetores $u, v, w \in V$ vale $(u + v) + w = u + (v + w)$;

(A2) Existe um vetor em $V$, denotado por $0$, denominado vetor nulo, ou vetor zero, tal que $u + 0 = 0 + u = u$, para todo vetor $u \in V$;

(A3) Para cada vetor $u \in V$ existe um vetor em $V$, que denotamos $-u$ e denominamos simétrico de $u$, tal que $u + (-u) = (-u) + u = 0$;

(A4) Para quaisquer vetores $u, v \in V$, temos $u + v = v + u$;

(M1) Para quaisquer vetores $u, v \in V$ e escalar $r \in K$, temos $r(u + v) = ru + rv$;

(M2) Para quaisquer escalares $r, s \in K$ e vetor $u \in V$, temos $(r + s)u = ru + su$;

(M3) Para quaisquer escalares $r, s \in K$ e vetor $u \in V$, $(rs)u = r(su)$;

(M4) Para qualquer vetor $u \in V$, $1u = u$, onde $1$ é o escalar unitário de $K$.

## Aximoas

(A1) Para quaisquer vetores $u, v, w \in V$ vale $(u + v) + w = u + (v + w)$;

(A2) Existe um vetor em $V$, denotado por $0$, denominado vetor nulo, ou vetor zero, tal que $u + 0 = 0 + u = u$, para todo vetor $u \in V$;

(A3) Para cada vetor $u \in V$ existe um vetor em $V$, que denotamos $-u$ e denominamos simétrico de $u$, tal que $u + (-u) = (-u) + u = 0$;

(A4) Para quaisquer vetores $u, v \in V$, temos $u + v = v + u$;

(M1) Para quaisquer vetores $u, v \in V$ e escalar $r \in K$, temos $r(u + v) = ru + rv$;

(M2) Para quaisquer escalares $r, s \in K$ e vetor $u \in V$, temos $(r + s)u = ru + su$;

(M3) Para quaisquer escalares $r, s \in K$ e vetor $u \in V$, $(rs)u = r(su)$;

(M4) Para qualquer vetor $u \in V$, $1u = u$, onde $1$ é o escalar unitário de $K$.

## Aximoas

(A1) Para quaisquer vetores $u, v, w \in V$ vale $(u + v) + w = u + (v + w)$;

(A2) Existe um vetor em $V$, denotado por $0$, denominado vetor nulo, ou vetor zero, tal que $u + 0 = 0 + u = u$, para todo vetor $u \in V$;

(A3) Para cada vetor $u \in V$ existe um vetor em $V$, que denotamos $-u$ e denominamos simétrico de $u$, tal que $u + (-u) = (-u) + u = 0$;

(A4) Para quaisquer vetores $u, v \in V$, temos $u + v = v + u$;

(M1) Para quaisquer vetores $u, v \in V$ e escalar $r \in K$, temos $r(u + v) = ru + rv$;

(M2) Para quaisquer escalares $r, s \in K$ e vetor $u \in V$, temos $(r + s)u = ru + su$;

(M3) Para quaisquer escalares $r, s \in K$ e vetor $u \in V$, $(rs)u = r(su)$;

(M4) Para qualquer vetor $u \in V$, $1u = u$, onde $1$ é o escalar unitário de $K$.

## Aximoas

(A1) Para quaisquer vetores $u, v, w \in V$ vale $(u + v) + w = u + (v + w)$;

(A2) Existe um vetor em $V$, denotado por 0, denominado vetor nulo, ou vetor zero, tal que $u + 0 = 0 + u = u$, para todo vetor $u \in V$;

(A3) Para cada vetor $u \in V$ existe um vetor em $V$, que denotamos $-u$ e denominamos simétrico de $u$, tal que $u + (-u) = (-u) + u = 0$;

(A4) Para quaisquer vetores $u, v \in V$, temos $u + v = v + u$;

(M1) Para quaisquer vetores $u, v \in V$ e escalar $r \in K$, temos $r(u + v) = ru + rv$;

(M2) Para quaisquer escalares $r, s \in K$ e vetor $u \in V$, temos $(r + s)u = ru + su$;

(M3) Para quaisquer escalares $r, s \in K$ e vetor $u \in V$, $(rs)u = r(su)$;

(M4) Para qualquer vetor $u \in V$, $1u = u$, onde 1 é o escalar unitário de $K$.

Note que os oito axiomas acima se dividem em duas partes sendo que os quatros primeiros (A1, A2, A3 e A4) se referem à estrutura aditiva de $V$. Por meio desses axiomas podemos concluir que:

- Qualquer soma finita $u_1 + u_2 + \ldots u_n$ de vetores de $V$ dispensa o uso de parênteses e independe da ordem das parcelas;
- O vetor nulo 0 é único, bem como o simétrico $-u$ de cada vetor $u$;
- Se $u + w = v + w$, então $u = v$ (lei do cancelamento).

Por outro lado,os quatro últimos axiomas (M1, M2, M3 e M4) dizem respeito à multiplicação de escalares por vetores de $V$. Por meio desses axiomas, podemos concluir que:

- Para qualquer escalar $r \in K$ e $0 \in V$, então $r0 = 0$;
- Para $0 \in K$, e qualquer vetor $u \in V$ então $0u = 0$;
- Se $ru = 0$, com $r \in K$ e $u \in V$, então $r = 0$ ou $u = 0$;
- Para quaisquer $r \in K$ e $u \in V$, $(-r)u = r(-u) = -ru$.

# Exemplo

Ex.: O conjunto dos vetores do espaço $\mathbb{R}^3 = \{(x_1, x_2, x_3) : x_i \in \mathbb{R}\}$ é um espaço vetorial real definidas as operações de soma e multiplicação por escalar a seguir:

Se $u = (x_1, x_2, x_3), v = (y_1, y_2, y_3) \in \mathbb{R}^3$ e $r \in \mathbb{R}$, então

$$u + v = (x_1 + y_1, x_2 + y_2, x_3 + y_3) \quad \text{e} \quad ru = (rx_1, rx_2, rx_3).$$

De fato, note primeiro que a soma e multiplicação estão bem definidas sobre $\mathbb{R}^3$. Agora, para que $V = \mathbb{R}^3$ seja um espaço vetorial, temos de checar se todos os axiomas (do A1 ao M4) são verdadeiros, como base na soma e multiplicação por escalar definida sobre $\mathbb{R}^3$.

[A1] Sejam $u = (x_1, x_2, x_3)$, $v = (y_1, y_2, y_3)$ e $w = (w_1, w_2, w_3)$ vetores de $\mathbb{R}^3$, verifiquemos se $(u + v) + w = u + (v + w)$. Note que $u + v = (x_1 + y_1, x_2 + y_2, x_3 + y_3)$, logo,

$$(u + v) + w = ((x_1 + y_1) + w_1, (x_2 + y_2) + w_2, (x_3 + y_3) + w_3),$$

logo, como vale a associatividade da soma para números reais, então

$$((x_1+y_1)+w_1, (x_2+y_2)+w_2, (x_3+y_3)+w_3) = (x_1+(y_1+w_1), x_2+(y_2+w_2), x_3+(y_3+w_3)$$

# Exemplo

Ex.: O conjunto dos vetores do espaço $\mathbb{R}^3 = \{(x_1, x_2, x_3) : x_i \in \mathbb{R}\}$ é um espaço vetorial real definidas as operações de soma e multiplicação por escalar a seguir:

Se $u = (x_1, x_2, x_3)$, $v = (y_1, y_2, y_3) \in \mathbb{R}^3$ e $r \in \mathbb{R}$, então

$$u + v = (x_1 + y_1, x_2 + y_2, x_3 + y_3) \quad \text{e} \quad ru = (rx_1, rx_2, rx_3).$$

De fato, note primeiro que a soma e multiplicação estão bem definidas sobre $\mathbb{R}^3$. Agora, para que $V = \mathbb{R}^3$ seja um espaço vetorial, temos de checar se todos os axiomas (do A1 ao M4) são verdadeiros, como base na soma e multiplicação por escalar definida sobre $\mathbb{R}^3$.

[A1] Sejam $u = (x_1, x_2, x_3)$, $v = (y_1, y_2, y_3)$ e $w = (w_1, w_2, w_3)$ vetores de $\mathbb{R}^3$, verifiquemos se $(u + v) + w = u + (v + w)$. Note que $u + v = (x_1 + y_1, x_2 + y_2, x_3 + y_3)$, logo,

$$(u + v) + w = ((x_1 + y_1) + w_1, (x_2 + y_2) + w_2, (x_3 + y_3) + w_3),$$

logo, como vale a associatividade da soma para números reais, então

$$((x_1 + y_1) + w_1, (x_2 + y_2) + w_2, (x_3 + y_3) + w_3) = (x_1 + (y_1 + w_1), x_2 + (y_2 + w_2), x_3 + (y_3 + w_3)$$

# Exemplo

Ex.: O conjunto dos vetores do espaço $\mathbb{R}^3 = \{(x_1, x_2, x_3) : x_i \in \mathbb{R}\}$ é um espaço vetorial real definidas as operações de soma e multiplicação por escalar a seguir:

Se $u = (x_1, x_2, x_3)$, $v = (y_1, y_2, y_3) \in \mathbb{R}^3$ e $r \in \mathbb{R}$, então

$$u + v = (x_1 + y_1, x_2 + y_2, x_3 + y_3) \quad \text{e} \quad ru = (rx_1, rx_2, rx_3).$$

De fato, note primeiro que a soma e multiplicação estão bem definidas sobre $\mathbb{R}^3$. Agora, para que $V = \mathbb{R}^3$ seja um espaço vetorial, temos de checar se todos os axiomas (do A1 ao M4) são verdadeiros, como base na soma e multiplicação por escalar definida sobre $\mathbb{R}^3$.

[A1] Sejam $u = (x_1, x_2, x_3)$, $v = (y_1, y_2, y_3)$ e $w = (w_1, w_2, w_3)$ vetores de $\mathbb{R}^3$, verifiquemos se $(u + v) + w = u + (v + w)$. Note que
$u + v = (x_1 + y_1, x_2 + y_2, x_3 + y_3)$, logo,

$$(u + v) + w = ((x_1 + y_1) + w_1, (x_2 + y_2) + w_2, (x_3 + y_3) + w_3),$$

logo, como vale a associatividade da soma para números reais, então

$$((x_1+y_1)+w_1, (x_2+y_2)+w_2, (x_3+y_3)+w_3) = (x_1+(y_1+w_1), x_2+(y_2+w_2), x_3+(y_3+w_3)$$

# Exemplo

Logo, temos que

$$(u+v)+w=(x_1+(y_1+w_1),x_2+(y_2+w_2),x_3+(y_3+w_3)).$$

Note ainda que, por definição de soma, temos que

$$(x_1+(y_1+w_1),x_2+(y_2+w_2),x_3+(y_3+w_3)=(x_1,x_2,x_3)+(y_1+w_1,y_2+w_2,y_3+w_3),$$

ou seja,

$$(u+v)+w=(x_1,x_2,x_3)+(y_1+w_1,y_2+w_2,y_3+w_3)=u+(v+w).$$

[A2] Note que em $\mathbb{R}^3$ existe um vetor nulo, que é o vetor $0=(0,0,0)$. Esse vetor satisfaz a propriedade de que se $u=(x_1,x_2,x_3)$ é um vetor qualquer do $\mathbb{R}^3$, então $0+u=(x_1,x_2,x_3)=u+0$.

# Exemplo

[A3] Note que em $\mathbb{R}^3$ existe simétrico aditivo, de qualquer vetor $u = (x_1, x_2, x_3)$. Tal vetor é $-u = (-x_1, -x_2, -x_3)$. Note que
$u + (-u) = (x_1, x_2, x_3) + (-x_1, -x_2, -x_3) = (0, 0, 0) = 0 = (-u) + u$.

[A4] Sejam $u = (x_1, x_2, x_3)$ e $v = (y_1, y_2, y_3)$ vetores quaisquer de $\mathbb{R}^3$, então

$$u + v = (x_1 + y_1, x_2 + y_2, x_3 + y_3) = (y_1 + x_1, y_2 + x_2, y_3 + x_3) = v + u.$$

[M1] Sejam $u = (x_1, x_2, x_3)$ e $v = (y_1, y_2, y_3)$ vetores quaisquer de $\mathbb{R}^3$. Seja ainda $r$ um escalar real. Então

$$r(u + v) = r(x_1 + y_1, x_2 + y_2, x_3 + y_3).$$

Usando o produto de um escalar por um vetor definido em $\mathbb{R}^3$, temos

$$r(u + v) = r(x_1 + y_1, x_2 + y_2, x_3 + y_3) = (r(x_1 + y_1), r(x_2 + y_2), r(x_3 + y_3)).$$

Usando o fato de que vale a distributividade sobre o corpo dos reais, temos que

$$r(u + v) = (r(x_1 + y_1), r(x_2 + y_2), r(x_3 + y_3)) = (rx_1 + ry_1, rx_2 + ry_2, rx_3 + ry_3).$$

Mas, note que $(rx_1 + ry_1, rx_2 + ry_2, rx_3 + ry_3) = (rx_1, rx_2, rx_3) + (ry_1, ry_2, ry_3) = r(x_1, x_2, x_3) + r(y_1, y_2, y_3) = ru + rv$. Logo, $r(u + v) = ru + rv$.

# Exemplo

[M2] Seja $u = (x_1, x_2, x_3)$ vetor qualquer de $\mathbb{R}^3$ e sejam ainda $r, s$ um escalares reais. Então

$$(r+s)u = ((r+s)x_1, (r+s)x_2, (r+s)x_3).$$

Em que usamos acima o produto de um escalar por um vetor definido em $\mathbb{R}^3$. Usando também o fato de que vale a distributividade sobre o corpo dos reais, temos que

$$(r+s)u = ((r+s)x_1, (r+s)x_2, (r+s)x_3) = (rx_1 + sx_1, rx_2 + sx_2, rx_3 + sx_3)$$

Mas, note que $(rx_1 + sx_1, rx_2 + sx_2, rx_3 + sx_3)$ pode ainda ser visto como sendo a soma dos vetores $(rx_1, rx_2, rx_3)$ e $(sx_1, sx_2, sx_3)$, ou seja,

$$(r+s)u = (rx_1, rx_2, rx_3) + (sx_1, sx_2, sx_3)$$

Note ainda que pela definição de multiplicação de um vetor por um escalar dada em $\mathbb{R}^3$, concluímos que $(rx_1, rx_2, rx_3) = r(x_1, x_2, x_3) = ru$ e $(sx_1, sx_2, sx_3) = s(x_1, x_2, x_3) = su$. Logo, $(r+s)u = ru + su$.

# Exemplo

[M3] Seja $u = (x_1, x_2, x_3)$ vetor qualquer de $\mathbb{R}^3$ e sejam ainda $r, s$ escalares reais. Então

$$(rs)u = ((rs)x_1, (rs)x_2, (rs)x_3).$$

Em que usamos acima o produto de um escalar por um vetor definido em $\mathbb{R}^3$. Usando o fato de que vale a associatividade do produto no corpo dos reais, temos que

$$(rs)u = (r(sx_1), r(sx_2), r(sx_3)) = r(sx_1, sx_2, sx_3) = r(su).$$

[M4] Seja $u = (x_1, x_2, x_3)$ vetor qualquer de $\mathbb{R}^3$ e sejam ainda 1 o escalares real unitário. Temos que

$$1u = 1(x_1, x_2, x_3) = (x_1, x_2, x_3) = u.$$

Como todos os axiomas foram verificados como verdadeiros, então o conjunto $V = \mathbb{R}^3$, com as operações de soma e multiplicação por escalar definidas é, de fato, um espaço vetorial.

# Exemplo de um conjunto que não é espaço vetorial

O exemplo a seguir, ilustra um conjunto que não é espaço vetorial. Mais geralmente, dado um conjunto e definidas as duas operações sobre esse conjunto, se algum dos oito axiomas não for verdadeiro, isso é suficiente para concluir que o conjunto não tem estrutura de espaço vetorial, ou seja, não é um espaço vetorial.

Ex.: Seja $V$ o conjunto das matrizes reais de ordem 2 definido a seguir

$$V = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}; a, b, c \in \mathbb{R}, \quad \text{e} \quad d \in \mathbb{R}_+^* \right\}$$

em que $\mathbb{R}_+^*$ é o conjunto dos números reais positivos não nulos. Definia sobre $V$ a soma e a multiplicação de escalar por matriz usuais.

Então $V$ não é um espaço vetorial real. Note, por exemplo, que o axioma [A2] não é válido, uma vez que a matriz nula de ordem 2 é $0 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ que não pertence a $V$, uma vez que o elemento da segunda linha e segunda coluna (d) das matrizes que estão em $V$ é sempre um real positivo. Note que também temos problema no axioma $[A3]$, uma vez que em $V$ não existe simétrico aditiva das matrizes de $V$. Note, mais geralmente, que a multiplicação por escalar não está bem definida sobre $V$, uma vez que existem constantes reais $r$ tais que o produto de $r$ por uma matriz de $V$ não pertence a $V$.

# Exemplo de um conjunto que não é espaço vetorial

O exemplo a seguir, ilustra um conjunto que não é espaço vetorial. Mais geralmente, dado um conjunto e definidas as duas operações sobre esse conjunto, se algum dos oito axiomas não for verdadeiro, isso é suficiente para concluir que o conjunto não tem estrutura de espaço vetorial, ou seja, não é um espaço vetorial.

Ex.: Seja $V$ o conjunto das matrizes reais de ordem 2 definido a seguir

$$V = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} ; a, b, c \in \mathbb{R}, \quad \text{e} \quad d \in \mathbb{R}_+^* \right\}$$

em que $\mathbb{R}_+^*$ é o conjunto dos números reais positivos não nulos. Definia sobre $V$ a soma e a multiplicação de escalar por matriz usuais.

Então $V$ não é um espaço vetorial real. Note, por exemplo, que o axioma [A2] não é válido, uma vez que a matriz nula de ordem 2 é $0 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ que não pertence a $V$, uma vez que o elemento da segunda linha e segunda coluna (d) das matrizes que estão em $V$ é sempre um real positivo. Note que também temos problema no axioma $[A3]$, uma vez que em $V$ não existe simétrico aditiva das matrizes de $V$. Note, mais geralmente, que a multiplicação por escalar não está bem definida sobre $V$, uma vez que existem constantes reais $r$ tais que o produto de $r$ por uma matriz de $V$ não pertence a $V$.

# Exercício

Considere o conjunto $V = \mathbb{R}^2 = \{(x, y) : x, y \in \mathbb{R}\}$ com as duas operações definidas a seguir:

- Soma vetorial: para quaisquer $(x_1, y_1), (x_2, y_2) \in V$, define-se

$$(x_1, y_1) \oplus (x_2, y_2) = (x_1 + x_2, y_1 + y_2 + 1).$$

- Multiplicação por escalar: para qualquer $\lambda \in \mathbb{R}$ e $(x, y) \in V$, define-se

$$\lambda \odot (x, y) = (\lambda x, \lambda y + \lambda - 1).$$

Verifique se $\mathbb{R}^2$ é um espaço vetorial sobre $\mathbb{R}$ com as operações de soma e multiplicação por escalar definidas acima.