Dedução Natural

Lógica para computação

Professor: Rennan Dantas

Universidade Federal do Ceará
Campus de Crateús

30 de abril de 2025

[0]Slides baseados no livro Lógica para Ciência da Computação[1].

[1]DE SOUZA, JOÃO NUNES. Lógica para ciência da computação. Elsevier Brasil, 2008.

Introdução

- O método de inferência por axiomatização pode ter propriedades teóricas interessantes, mas é totalmente impraticável em termos de implementação prática
- Em alguns casos, fica óbvio que identificar quais axiomas devem ser utilizados, em que ordem e com qual substituição é totalmente não-intuitivo e requer uma busca de grande complexidade computacional
- Por outro lado, o tipo de inferências que uma pessoa faz ao raciocinar sobre conectivos lógicos está longe de seguir o método da axiomatização
- Foi pensando nessa deficiência dos sistemas de axiomatização que Gerhard Gentzen propôs um método de inferência que se aproximasse mais da forma como as pessoas raciocinam, dando a esse método o nome de dedução natural

Dedução Natural

O método da Dedução Natural é um método formal de inferência baseado em princípios bem claros e simples:

Princípios da Dedução Natural

- As inferências são realizadas por regras de inferências em que hipóteses podem ser introduzidas na prova e que deverão ser posteriormente descartadas para a consolidação da prova
- Para cada conectivo lógico, duas regras de inferência devem ser providas, uma para inserção do conectivo e outra para a remoção do conectivo

Dedução Natural

- As fórmulas introduzidas como hipóteses serão representadas entre chaves e numeradas- por exemplo, $[A]^1$- em que o número será usado para indicar o descarte dessa hipótese por uma regra de inferência em algum passo posterior
- Além disso, é comum, em apresentações de Dedução Natural, utilizar a constante lógica $\perp$ (falsum, falsidade ou absurdo), que não é satisfeita por nenhuma valoração.
- A figura no quadro apresenta as regras de inserção e eliminação do conectivo $\rightarrow$ (implicação) em Dedução Natural
- Figura

Dedução Natural

- A regra ($\rightarrow$ E) de eliminação da implicação nada mais é que o modus ponens
- A regra ($\rightarrow$ I) da inserção da implicação expressa a seguinte ideia: para inferir $A \rightarrow B$, é necessário hipotetizar A e, a partir dessa hipótese, inferir B;
- O fato de A ser uma hipótese é indicado pela marcação [A] e, como toda hipótese deve ser descartada por uma regra, utilizamos o índice numérico i, $[A]^i$, para indicar que a hipótese foi descartada pelo uso da regra $(\rightarrow I)^i$

Exemplo

Mostrar, através de Dedução Natural, que $\vdash_{DN} A \rightarrow (B \rightarrow A)$

$$
\dfrac{\dfrac{\dfrac{[A]^1 \quad [B]^2}{A}}{B \rightarrow A}\,(\rightarrow I)^2}{A \rightarrow (B \rightarrow A)}\,(\rightarrow I)^2
$$

Figura: Fonte: Lógica para Computação - Corrêa da Silva

- Note que nessa dedução a segunda hipótese, $[B]^2$, é descartada primeiro, para em seguida descartar-se a primeira hipótese, $[A]^1$

Mostrar que $\vdash_{DN} (A \to (B \to C)) \to ((A \to B) \to (A \to C))$

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{[A \to (B \to C)]^1 \quad [A]^3}{B \to C}\,(\to E) \qquad \dfrac{[A \to B]^2 \quad [A]^3}{B}\,(\to E)}{C}\,(\to E)}{A \to C}\,(\to I)^3}{(A \to B) \to (A \to C)}\,(\to I)^2}{(A \to (B \to C)) \to ((A \to B) \to (A \to C))}\,(\to I)^1$$

Figura: Fonte: Lógica para Computação - Corrêa da Silva

Dedução Natural

- Nesse exemplo, a hipótese $[A]^3$ foi usada duas vezes, mas descartada só uma vez
- O exemplo apresenta o uso de várias inserções e eliminações do conectivo $\rightarrow$
- Note que esses dois últimos exemplos mostram a dedução pelo método da dedução natural de dois axiomas, $(\rightarrow_1)$ e $(\rightarrow_2)$, do método da axiomatização

Regra de Dedução Natural para todos os conectivos

$$\frac{A \quad B}{A \wedge B}\ (\wedge I) \qquad \frac{A \wedge B}{A}\ (\wedge E_1) \qquad \frac{A \wedge B}{B}\ (\wedge E_2)$$

$$\frac{\begin{array}{c}[A]^i \\ \vdots \\ B\end{array}}{A \rightarrow B}\ (\rightarrow I)^i \qquad \frac{A \rightarrow B \quad A}{B}\ (\rightarrow E)$$

$$\frac{A}{A \vee B}\ (\vee I_1) \qquad \frac{B}{A \vee B}\ (\vee I_2) \qquad \frac{A \vee B \quad \begin{array}{c}[A]^i \\ \vdots \\ C\end{array} \quad \begin{array}{c}[B]^j \\ \vdots \\ C\end{array}}{C}\ (\vee E)^{i,j}$$

$$\frac{A \quad \neg A}{\bot}\ (\bot I) \qquad \frac{\bot}{A}\ (\bot E)$$

$$\frac{\begin{array}{c}[A]^i \\ \vdots \\ \bot\end{array}}{\neg A}\ (\rightarrow I)^i \qquad \frac{\begin{array}{c}[\neg A]^i \\ \vdots \\ \bot\end{array}}{A}\ (\rightarrow E)^i$$

Figura: Fonte: Lógica para Computação - Corrêa da Silva

Dedução Natural

- Como é usual nas apresentações de Dedução Natural, introduzimos regras para a constante lógica $\bot$, cuja interpretação é $v(\bot) = 0$ para qualquer valoração v; seu dual é a constante lógica $\top$, onde v($\top$)=1 para qualquer valoração v
- O conectivo $\wedge$ possui uma regra de introdução e duas regras (simétricas) de eliminação, permitindo, de uma conjunção $A \wedge B$ inferir tanto A quanto B
- Exemplos no quadro: $\vdash_{DN} A \wedge B \rightarrow A$ e $\vdash_{DN} A \rightarrow (B \rightarrow (A \wedge B))$
- Na dedução da direita, o último passo representa duas introduções de $\rightarrow$, descartando cada uma das hipóteses
- Note que esses dois exemplos mostram a dedução pelo método da Dedução Natural dos axiomas, $(\wedge_1)$ e $(\wedge_2)$, do método da axiomatização

Dedução Natural

Conectivo $\vee$

- O conectivo $\vee$ possui duas regras de introdução e uma de eliminação
- As regras de introdução de $\vee$ são duas das regras de eliminação de $\wedge$
- Já a regra de eliminação $(\vee E)$ descarta duas hipóteses simultaneamente
- Para exemplificar o uso dessas regras, demonstraremos a seguir $\vdash_{DN} A \rightarrow A \vee B$ e $\vdash_{DN} (A \rightarrow C) \rightarrow ((B \rightarrow C) \rightarrow ((A \vee B) \rightarrow C))$
- Note que esses dois exemplos mostram a dedução pelo método da Dedução Natural dos axiomas, $(\vee_1)$ e $(\vee_3)$, do método da axiomatização

O conectivo $\neg$

- O conectivo $\neg$ está intimamente ligado com a constante $\perp$(absurdo)
- De fato, comparando a regra de inserção da negação ($\neg I$) percebemos a semelhança entre $\neg A$ e $A \to \perp$
- Isso não é coincidência, pois, se fizermos a Tabela Verdade, verificaremos que $\neg A \equiv A \to \perp$

Dedução Natural

- A regra de introdução de $\perp$ indica que $\perp$ equivale a uma contradição; se encararmos $\neg A \equiv A \to \perp$, veremos que essa regra nada mais é que uma instanciação do modus ponens
- A regra de eliminação de $\perp$ é o princípio da trivialização da lógica clássica em que, a partir de uma contradição, qualquer fórmula é dedutível

Dedução Natural

- A regra de introdução da negação $(\neg I)$, como mencionado, se assemelha à introdução da implicação, expressando que, se assumimos uma fórmula como verdadeira e isso levar à contradição, então a fórmula deve ser falsa
- Por outro lado, se assumimos que a fórmula A é falsa (ou seja, sua negação $\neg A$ é verdadeira) e chegamos a uma contradição, a regra da inserção da negação nos daria uma dupla negação $\neg\neg A$
- No entanto, a regra de eliminação da negação, $(\neg E)$, nos permite inferir que a fórmula A é verdadeira, e portanto a regra $(\neg E)$ corresponde a inferência $\neg\neg A \vdash A$
- Para ilustrar o uso dessas regras, mostraremos a seguir a dedução de $\vdash (A \to B) \to ((A \to \neg B) \to \neg A)$ e $\vdash \neg\neg A \to A$

Dedução Natural

- A dedução da esquerda tem a peculiaridade de assumir a hipótese $[A]^3$ e utilizá-la duas vezes (por meio de uma cópia), mas descartá-la uma única vez na introdução da negação $(\neg I)^3$
- Esse comportamento é análogo ao de permitir o descarte de duas hipóteses idênticas por uma mesma regra
- A dedução da direita mostra o que foi afirmado anteriormente sobre a equivalência entre $(\neg E)$ e a eliminação da dupla negação
- Note que demonstramos, pelo método da Dedução Natural, os axiomas $(\neg_1)$ e $(\neg_2)$ do método de axiomatização
- Com isso, demonstramos todos os axiomas do método da axiomatização por meio da Dedução Natural

Observação Importante

- Uma importante observação sobre as regras de dedução natural é que as regras de introdução e eliminação podem ser aplicados em qualquer instância das fórmulas
- De fato, fizemos isso várias vezes nas deduções apresentadas, por exemplo, quando deduzimos $\perp$ a partir de $\neg\neg A$ e $\neg A$, que podem ser vistas como instâncias de $\neg A$ e A pela substituição não-circular $A := \neg A$

Dedução Natural

Depois de vermos todos esses exemplos, estamos em condições de definir formalmente o que é uma dedução pelo método da Dedução Natural

Definição Formal de Dedução

A dedução de $\Gamma \vdash_{DN} A$ pelo método da dedução natural é uma árvore cujos nós contém fórmulas tais que:

- A fórmula A é a raiz da árvore de dedução
- Os nós da folha da árvore de dedução são elementos de Γ ou hipóteses
- Cada nó intermediário é obtido a partir de nós superiores na árvore por meio da instanciação de uma regra de inserção ou remoção
- Todas as hipóteses devem ter sido descartadas por regras
- Uma regra pode descartar uma ou mais fórmulas idênticas ou, similarmente, as hipóteses podem ser copiadas por distintos pontos da árvore de dedução

Dedução Natural

- Note que, de acordo com essa definição, os teoremas da lógica proposicional clássica são as fórmulas que podem ser inferidas a partir de um conjunto de hipóteses $\Gamma = \emptyset$
- Esse foi o caso de todos os exemplos vistos até agora
- Como um exemplo de dedução em que $\Gamma \neq \emptyset$, mostramos a seguir a dedução de $A \vdash \neg\neg A$, dual de $\neg\neg A \vdash A$ vista anteriormente
- Quadro

Próxima Aula

O que vem por aí?

- Correção da dedução natural
- Exercícios

Dedução Natural

Lógica para computação

Professor: Rennan Dantas

Universidade Federal do Ceará
Campus de Crateús

30 de abril de 2025

[0]Slides baseados no livro Lógica para Ciência da Computação[2].
[1]DE SOUZA, JOÃO NUNES. Lógica para ciência da computação. Elsevier Brasil, 2008.