UNIVERSIDADE FEDERAL DO CEARÁ
CAMPUS DE CRATEÚS

Sistemas Dedutivos

Lógica para computação

Professor: Rennan Dantas

Universidade Federal do Ceará
Campus de Crateús

25 de abril de 2025

[0]Slides baseados no livro Lógica para Ciência da Computação[1].

[1]DE SOUZA, JOÃO NUNES. Lógica para ciência da computação. Elsevier Brasil, 2008.

O que é um sistema dedutivo?

- Nas últimas aulas, vimos o que são fórmulas da lógica proposicional clássica e como atribuir valores verdade a essas fórmulas
- Vimos também a noção de consequência lógica e como determinar se um fórmula é consequência lógica de um conjunto de fórmulas Γ
- No entanto, não vimos como, a partir de um conjunto de fórmulas Γ, podemos inferir novas fórmulas que sejam a consequência lógica de Γ
- Essa é a tarefa de um sistema dedutivo

O que é um sistema dedutivo?

- Um sistema dedutivo nos permite inferir, derivar ou deduzir as consequências lógicas de um conjunto de fórmulas, chamado de teoria
- Quando um sistema dedutivo infere uma fórmula A a partir de uma teoria Γ, escrevemos $\Gamma \vdash A$
- O objeto $\Gamma \vdash A$ é chamado de sequente, no qual Γ é o antecedente(ou hipótese) e A é o consequente(ou conclusão)

Sistemas dedutivos

- Existem vários procedimentos distintos que nos permitem realizar uma inferência
- Cada procedimento dá origem a um sistema dedutivo distinto
- Neste curso, iremos analisar três tipos de sistemas dedutivos: axiomatizações, sistemas de dedução natural e o método dos tableaux analíticos

Sistemas dedutivos

- Obviamente, não queremos que um sistema de dedução produza fórmulas que não sejam consequência lógica da teoria usada como hipótese
- Dizemos que um sistema dedutivo $\vdash$ é correto se isso nunca ocorre, ou seja, se $\Gamma \vdash A$ então $\Gamma \vDash A$
- Por outro lado, queremos que um sistema dedutivo consiga inferir todas as possíveis consequências lógicas de uma teoria
- Dizemos que um sistema dedutivo $\vdash$ é completo se ele for capaz de realizar todas essas inferências, ou seja, se $\Gamma \vDash A$ então $\Gamma \vdash A$
- Todos os sistemas dedutivos que apresentaremos possuem as propriedades de correção e completude

Axiomatização

Introdução

- É o sistema formal de dedução mais antigo que se conhece, tendo sido usado desde a apresentação da geometria euclidiana pelos gregos
- A apresentação da axiomatização segue o estilo utilizado por Hilbert, tanto que as axiomatizações de lógicas são muitas vezes chamadas de sistemas de Hilbert
- De acordo com essa forma de apresentação, uma axiomatização possui dois tipos de elementos:
  - Os axiomas, que são fórmulas da lógica às quais se atribui um status especial de "verdades básicas"
  - As regras de inferência, que permitem inferir novas fórmulas a partir de fórmulas já inferidas

Antes de apresentarmos uma axiomatização da lógica proposicional clássica, temos de mencionar o conceito de substituição

Axiomatização

Substituições

- A substituição de um átomo p por uma fórmula B em uma fórmula A é representada por $A[p := B]$
- Intuitivamente, se temos uma fórmula $A = p \rightarrow (p \wedge q)$ e queremos substituir p por $(r \vee s)$, o resultado da substituição será $A[p := r \vee s] = (r \vee s) \rightarrow ((r \vee s) \wedge q)$
- A definição formal de substituição se dá por indução estrutural sobre a fórmula A sobre a qual se processa a substituição, da seguinte maneira:
  - $p[p := B] = B$
  - $q[p := B] = q$, para $q \neq p$
  - $(\neg A)[p := B] = \neg(A[p := B])$
  - $(A_1 \square A_2)[p := B] = A_1[p := B] \square A_2[p := B]$, para $\square \in \{\wedge, \vee, \rightarrow\}$

Substituição

- Note que os itens 1 e 2 tratam do caso básico de substituir em fórmulas proposicionais
- Os itens 3 e 4 tratam dos casos indutivos
- Aplicando essa definição ao exemplo que foi visto intuitivamente, temos que:

$$\begin{aligned}(p \to (p \wedge q))[p := (r \vee s)] &= p[p := (r \vee s)] \to (p \wedge q)[p := (r \vee s)] \\ &= (r \vee s) \to (p[p := (r \vee s)] \wedge q[p := (r \vee s)]) \\ &= (r \vee s) \to ((r \vee s) \wedge q)\end{aligned}$$

Axiomatização

Substituição

- Quando uma fórmula B é resultante da substituição de um ou mais átomos da fórmula A, dizemos que B é uma instância da fórmula A
- Com a noção de substituição bem definida, apresentamos a seguir uma axiomatização da lógica proposicional clássica

Axiomatização

Antes de definir uma axiomatização para a lógica proposicional clássica, é importante frisarmos que pode existir mais de uma axiomatização possível, todas elas equivalentes. A axiomatização a seguir apresenta grupos de axiomas que definem o comportamento de cada um dos conectivos booleanos.

A axiomatização para a lógica proposicional clássica contém os seguintes axiomas:

- $(\to_1)$ $p \to (q \to p)$
- $(\to_2)$ $(p \to (q \to r)) \to ((p \to q) \to (p \to r))$
- $(\wedge_1)$ $p \to (q \to (p \wedge q))$
- $(\wedge_2)$ $(p \wedge q) \to p$
- $(\wedge_3)$ $(p \wedge q) \to q$
- $(\vee_1)$ $p \to (p \vee q)$
- $(\vee_2)$ $q \to (p \vee q)$
- $(\vee_3)$ $(p \to r) \to ((q \to r) \to (p \vee q) \to r))$
- $(\neg_1)$ $(p \to q) \to ((p \to \neg q) \to \neg p)$
- $(\neg_2)$ $\neg\neg p \to p$

E a seguinte regra de inferência:

Modus Ponens: A partir de $A \to B$ e A, infere-se B

Axiomatização

- Os axiomas podem ser instanciados, ou seja, seus átomos podem ser uniformemente substituídos por qualquer fórmula de lógica.
- Nesse caso, dizemos que a fórmula resultante é uma instância do axioma
- Com essa noção de axiomatização, podemos definir a noção de dedução

Dedução - Definição

Uma dedução é uma sequência de fórmulas $A_1, ..., A_n$ tal que cada fórmula na sequência ou é uma instância de um axioma ou é obtida de fórmulas anteriores por meio de regras de inferência, ou seja, por modus ponens.

Teorema - Definição

Um teorema A é uma fórmula tal que existe uma dedução $A_1, ..., A_n = A$. Representaremos um teorema por $\vdash_{AX} A$ ou simplesmente $\vdash A$, quando o contexto deixar claro qual o método de inferência que está sendo usado

Axiomatização

- A axiomatização apresentada possui a propriedade de substituição uniforme, ou seja, se A é um teorema e B é uma instância de A, então B é um teorema também.
- O motivo para isso é bem simples: se podemos aplicar uma substituição para obter B de A, podemos aplicar a mesma substituição nas fórmulas que ocorrem na dedução de A e, como todo instância de um axioma é uma fórmula dedutível, transformamos a dedução de A em uma dedução de B
- Iremos definir agora quando uma fórmula A segue de um conjunto de fórmulas Γ, também chamado de teoria ou de conjunto de hipóteses, o que é representado por $\Gamma \vdash_{AX} A$
- Nesse caso, trata-se de adaptar a noção de dedução para englobar os elementos de Γ

Definição

Dizemos que uma fórmula A é dedutível a partir de um conjunto de fórmulas Γ se há uma dedução, ou seja, uma sequência de fórmulas $A_1, ..., A_n = A$ tal que cada fórmula A_i na sequência:

- ou é uma fórmula $A_i \in \Gamma$
- ou é uma instância de um axioma
- ou é obtida de fórmulas anteriores por meio de modus ponens

Axiomatização

- Note que, no caso de o conjunto Γ ser um conjunto vazio, $\Gamma = \emptyset$, temos que $\emptyset \vdash_{AX} A$ implica que A é um teorema, o que é representado simplesmente por $\vdash_{AX} A$
- Note também que não podemos aplicar a substituição uniforme nos elementos de Γ; a substituição uniforme só pode ser aplicadas aos axiomas da lógica.
- Também é costume representar o conjunto Γ como uma sequência de fórmulas, sem o uso das chaves delimitadoras de conjuntos. Assim, se $\Gamma = \{A_1, A_2, ..., A_n\}$, em vez de escrevermos $\{A_1, ..., A_n\} \vdash A$, escrevemos simplesmente $A_1, ..., A_n \vdash A$
- Similarmente, em vez de escrevermos $\Gamma \cup \{A\} \vdash B$, escrevemos simplesmente $\Gamma, A \vdash B$, representando a união das hipóteses pela concatenação de listas de hipóteses.

Teorema da Dedução

O Teorema da Dedução estabelece a relação entre o conectivo da implicação, $\rightarrow$, e a dedução lógica representada por $\vdash$

Teorema da Dedução

$\Gamma, A \vdash B$ se, e somente se, $\Gamma \vdash A \rightarrow B$

Exemplos

$A \to B, C \to A, C \vdash B$

1.	$A \to B$	hipótese
2.	$C \to A$	hipótese
3.	C	hipótese
4.	A	*modus ponens* 2, 3
5.	B	*modus ponens* 1, 4

Figura: Fonte: Livro Lógica para Computação - Silva, Finger e Melo

Exemplos

$p \rightarrow q, p \rightarrow r, p \vdash q \wedge r$

1.	$p \rightarrow q$	hipótese
2.	$p \rightarrow r$	hipótese
3.	p	hipótese
4.	q	*modus ponens* 1, 3
5.	r	*modus ponens* 2, 3
6.	$q \rightarrow (r \rightarrow (q \wedge r))$	instância de $(\wedge_1)$
7.	$r \rightarrow (q \wedge r)$	*modus ponens* 6, 4
8.	$q \wedge r$	*modus ponens* 7, 5

Figura: Fonte: Livro Lógica para Computação - Silva, Finger e Melo

Método dos Tableaux Analíticos

- Os métodos de inferência Axiomatização e Dedução Natural permitem mostrar quando uma fórmula pode ser a conclusão de um conjunto de hipóteses
- No entanto, nenhum desses métodos provê, de maneira óbvia, um procedimento de decisão
- Um procedimento de decisão permite determinar a validade de um sequente, ou seja, determinar se $B_1, ..., B_n \vdash A_1, ..., A_m$ ou se $B_1, ..., B_n \nvdash A_1, ..., A_m$
- No caso típico, estamos interessados em decidir sequentes com o consequente unitário, da forma $\Gamma \vdash A$
- Os métodos dos sistemas axiomáticos e da dedução natural apenas nos permitiriam demonstrar como A poderia ser inferido a partir de Γ
- Mas esses métodos não nos permitiam inferir que $\Gamma \nvdash A$, ou seja, não permitiam inferir a falsidade de um sequente

Método dos Tableaux Analíticos

- É importante notar que $\Gamma \nvdash A$ não implica que $\Gamma \vdash \neg A$
- Isso pode ser visualizado mais facilmente pela noção de consequência lógica
- Considere a (in)consequência lógica $p \nvDash q$ em que claramente podemos ter uma valoração v que satisfaz p e contradiz q; com isso não podemos afirmar que $p \vDash \neg q$, pois podemos ter uma valoração v' que satisfaz p e q, falsificando $\neg q$
- Dessa forma, temos que $p \nvDash q$ e $p \nvDash \neg q$

- Esse exemplo, aliás, é muito conveniente para ilustra o fato de que os métodos baseados em Tabelas da Verdade são procedimentos de decisão
- Porém, como já vimos, esses procedimentos têm um crescimento no número de linhas das Tabelas da Verdade exponencial com o número de símbolos proposicionais
- Apresentaremos agora um método de decisão baseado em um sistema de inferência, o qual não necessariamente gera provas de tamanho exponencial com o número de símbolos proposicionais
- Tal método é chamado de método dos tableaux analíticos ou tableaux semânticos

Método dos Tableaux Analíticos

- Tableau analíticos é um método de inferência baseado em refutação: para provarmos que $B_1, ..., B_n \vdash A_1, ...A_m$, afirmaremos a veracidade de $B_1, ..., B_n$ e a falsidade de $A_1, ..., A_m$, na esperança de derivarmos uma contradição
- Se a contradição for obtida, teremos demonstrado o sequente
- Por outro lado, se não for obtida uma contradição, teremos obtido um contra-exemplo ao sequente, ou seja, teremos construído uma valoração que satisfaz todas as fórmulas B_i do antecedente e falsifica todas as fórmulas A_j do consequente

Método dos Tableaux Analíticos

Fórmulas marcadas

- Para afirmar a veracidade ou a falsidade de fórmula, o método dos tableaux analíticos lida com fórmulas marcadas pelos símbolos T(de true, verdadeira) e F(falso)
- Dessa forma, em vez de lidar com fórmulas puras, do tipo A, lidaremos com fórmulas marcadas, do tipo TA e FA
- As fórmulas marcadas TA e FA são chamadas de fórmulas conjugadas
- O passo inicial para a criação de um tableau para um sequente $B_1, ..., B_n \vdash A_1, ...A_m$ é marcar todas as fórmulas da seguinte maneira: as fórmulas do antecedente(aquelas cuja veracidade queremos afirmar) são marcadas por T; as fórmulas do consequente, cuja finalidade em um processo de refutação queremos afirmar, são marcadas por F

Fórmulas marcadas

Dessa forma, o sequente $B_1, ..., B_n \vdash A_1, ...A_m$ dá origem ao tableau inicial:

TB_1

.

.

.

TB_n

FA_1

.

.

.

FA_m

Fórmulas marcadas

- Esse formato inicial do tableau indica que um tableau é uma árvore
- Em seguida, o tableau é expandido por regras que podem simplesmente adicionar novas fórmulas ao final de um ramo (regras do tipo α) ou bifurcar um ramo em dois (regras do tipo β)

Regras de expansão α e β

- As fórmulas marcadas de um tableau podem ser de dois tipos: fórmulas do tipo α e fórmulas do tipo β
- As fórmulas do tipo α se decompõem em fórmulas α_1 e α_2, conforme ilustrado na figura abaixo

α	α_1	α_2
$TA \wedge B$	TA	TB
$FA \vee B$	FA	FB
$FA \rightarrow B$	TA	FB
$T \neg A$	FA	FA

Regras de expansão α e β

- As fórmulas do tipo β se decompõe em fórmulas β_1 e β_2, conforme ilustrado na figura abaixo

β	β_1	β_2
F$A \wedge B$	FA	FB
T$A \vee B$	TA	TB
T$A \rightarrow B$	FA	TB
F$\neg A$	TA	TA

Regras de expansão α e β

- Note que a escolha de classificar $T\neg A$ como fórmula do tipo α e $F\neg A$ como fórmula do tipo B é arbitrária e foi feita com o intuito de dar simetria ao conjunto de fórmulas marcadas
- Assim, se um fórmula é do tipo α, a fórmula conjugada é do tipo β, e vice-versa
- As regras de expansão de um tableau são as seguintes

Regras de expansão α e β

Expansão α

Se um ramo do tableau contém uma fórmula do tipo α, adicionam-se α_1 e α_2 ao fim de todos os ramos que contêm α

Regras de expansão α e β

Expansão β

Se um ramo do tableau contém uma fórmula do tipo β, esse ramo é bifurcado em dois ramos, encabeçados por β_1 e β_2, respectivamente

Regras de expansão α e β

- Note que, se p é um átomo, Tp e Fp não são nem fórmulas do tipo α nem do tipo β e portanto não podem gerar expansões do tableau
- Em cada ramo, uma fórmula só pode ser expandida uma única vez
- Um ramo que não possui mais fórmulas para serem expandidas é dito saturado
- Como expansões α e β sempre geram fórmulas de tamanho menor, eventualmente todas as fórmulas serão expandidas até chegarmos ao nível atômico, quando todos os ramos estarão saturados
- Portanto, o processo de expansão sempre termina

Regras de expansão α e β

- Um ramo do tableau está fechado se este possui um par de fórmulas conjugadas do tipo TA e FA
- Um ramo fechado não necessita mais ser expandido, mesmo que não esteja ainda saturado
- Um tableau está fechado se todos os seus ramos estão fechados

Regras de expansão α e β

Definição

Um sequente $B_1, ...B_n \vdash_{TA} A_1, ..., A_m$ foi deduzido pelo método dos tableaux analíticos se existir um tableau fechado para ele

Regras de expansão α e β

- No caso da dedução de um teorema $\vdash_{TA} A$ pelo método dos tableaux analíticos, devemos construir um tableau fechado para FA

Exemplos

$\vdash p \vee \neg p$

1. $\mathrm{F}p \vee \neg p$
2. $\mathrm{F}p$
3. $\mathrm{F}\neg p$
4. $\mathrm{T}p$

$\times$

Figura: Fonte: Livro Lógica para Computação - Silva, Finger e Melo

$p \to q, q \to r \vdash p \to r$

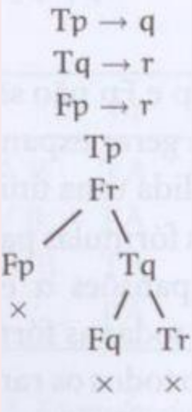

Figura: Fonte: Livro Lógica para Computação - Silva, Finger e Melo

$p, p \wedge q \rightarrow r \vdash r$

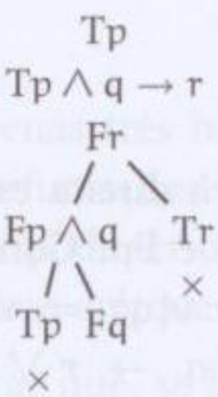

Figura: Fonte: Livro Lógica para Computação - Silva, Finger e Melo

Exemplos

$p \vee q, p \rightarrow r, q \rightarrow r \vee s \vdash r$

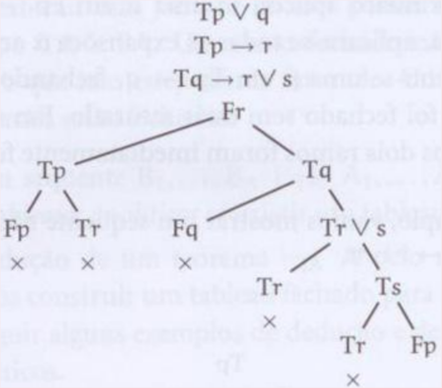

Figura: Fonte: Livro Lógica para Computação - Silva, Finger e Melo

Tableaux Analíticos

Um mesmo sequente pode ter mais de um tableaux.

$p \vee q, p \rightarrow r, q \rightarrow r \vdash r$

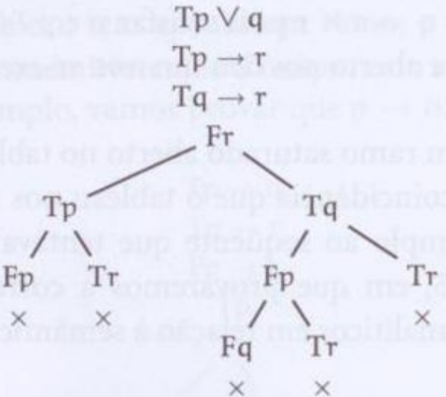

Figura: Fonte: Livro Lógica para Computação - Silva, Finger e Melo

Exemplos

$p \vee q, p \rightarrow r, q \rightarrow r \vdash r$

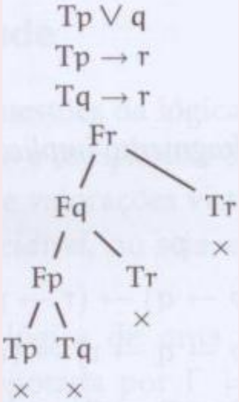

Figura: Fonte: Livro Lógica para Computação - Silva, Finger e Melo

Próxima Aula

O que vem por aí?

- Exercícios
- Dedução Natural

UNIVERSIDADE FEDERAL DO CEARÁ
CAMPUS DE CRATEÚS

Sistemas Dedutivos

Lógica para computação

Professor: Rennan Dantas

Universidade Federal do Ceará
Campus de Crateús

25 de abril de 2025

[0]Slides baseados no livro Lógica para Ciência da Computação[2].

[1]DE SOUZA, JOÃO NUNES. Lógica para ciência da computação. Elsevier Brasil, 2008.