Álgebra Linear - CC/SI

Dr. Giannini Italino

Universidade Federal do Ceará - Campus de Crateús

Junho, 2025

Recordando - Transformações lineares

Na aula passada, vimos o conceito de espaços vetoriais:

Definição: Sejam V e U espaços vetoriais sobre um mesmo corpo K. Dizemos que uma aplicação $T : V \to U$ é linear ou uma transformação linear, se satisfizer as duas condições a seguir:

(i) Para quaisquer vetores $v_1, v_2 \in V$ então vale $T(v_1 + v_2) = T(v_1) + T(v_2)$;

(ii) Para quaisquer escalar $k \in K$ e vetor $v \in V$, então vale $T(kv) = kT(v)$.

Em outras palavras, dizermos que T é linear se ela preserva a soma de vetores e a multiplicação por escalar, que são as duas operações básicas de um espaço vetorial.

Na videoaula de hoje veremos dois importantes conceitos relacionados a transformações lineares. Esses conceitos são o núcleo e a imagem de uma transformação linear.

Recordando - Transformações lineares

Na aula passada, vimos o conceito de espaços vetoriais:

Definição: Sejam V e U espaços vetoriais sobre um mesmo corpo K. Dizemos que uma aplicação $T : V \to U$ é linear ou uma transformação linear, se satisfizer as duas condições a seguir:

(i) Para quaisquer vetores $v_1, v_2 \in V$ então vale $T(v_1 + v_2) = T(v_1) + T(v_2)$;

(ii) Para quaisquer escalar $k \in K$ e vetor $v \in V$, então vale $T(kv) = kT(v)$.

Em outras palavras, dizermos que T é linear se ela preserva a soma de vetores e a multiplicação por escalar, que são as duas operações básicas de um espaço vetorial.

Na videoaula de hoje veremos dois importantes conceitos relacionados a transformações lineares. Esses conceitos são o núcleo e a imagem de uma transformação linear.

Recordando - Transformações lineares

Na aula passada, vimos o conceito de espaços vetoriais:

Definição: Sejam V e U espaços vetoriais sobre um mesmo corpo K. Dizemos que uma aplicação $T : V \to U$ é linear ou uma transformação linear, se satisfizer as duas condições a seguir:

(i) Para quaisquer vetores $v_1, v_2 \in V$ então vale $T(v_1 + v_2) = T(v_1) + T(v_2)$;

(ii) Para quaisquer escalar $k \in K$ e vetor $v \in V$, então vale $T(kv) = kT(v)$.

Em outras palavras, dizermos que T é linear se ela preserva a soma de vetores e a multiplicação por escalar, que são as duas operações básicas de um espaço vetorial.

Na videoaula de hoje veremos dois importantes conceitos relacionados a transformações lineares. Esses conceitos são o núcleo e a imagem de uma transformação linear.

Núcleo de uma transformação Linear

A definição abaixo trata do conceito de núcleo de uma transformação.

Definição: Seja $T : V \to U$ uma transformação linear. O núcleo de T, denotado por Ker T, é o conjunto de todos os elementos de V que são levados no vetor nulo de U, ou seja,

$$\operatorname{Ker} T = \{v \in V : T(v) = 0\}.$$

Em outras palavras, o núcleo de uma transformação linear é o conjunto formado por todos os vetores do domínio da transformação linear tais que esses vetores são levados, por meio da transformação, no vetor nulo do contradomínio. Note ainda que $\operatorname{Ker} T$ é subconjunto de V. Mais geralmente, é possível mostrar que $\operatorname{Ker} T$ é um subespaço de V.

Exemplo 1

Ex.: Seja a transformação linear $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ definida por $T(x, y, z) = (x, y, 0)$. Note que $\operatorname{Ker} T = \{v \in \mathbb{R}^3 : T(v) = (0, 0, 0)\}$. Note que $T(v) = (0, 0, 0)$ se, e somente se, $v = (0, 0, z)$, em que $z \in \mathbb{R}$, uma vez que $T(0, 0, z) = (0, 0, 0)$. Logo, $\operatorname{Ker} T = \{(0, 0, z) : z \in \mathbb{R}\}$.

Núcleo de uma transformação Linear

A definição abaixo trata do conceito de núcleo de uma transformação.

Definição: Seja $T : V \to U$ uma transformação linear. O núcleo de T, denotado por Ker T, é o conjunto de todos os elementos de V que são levados no vetor nulo de U, ou seja,

$$\text{Ker}\, T = \{v \in V : T(v) = 0\}.$$

Em outras palavras, o núcleo de uma transformação linear é o conjunto formado por todos os vetores do domínio da transformação linear tais que esses vetores são levados, por meio da transformação, no vetor nulo do contradomínio. Note ainda que $\text{Ker}\, T$ é subconjunto de V. Mais geralmente, é possível mostrar que $\text{Ker}\, T$ é um subespaço de V.

Exemplo 1

Ex.: Seja a transformação linear $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ definida por $T(x, y, z) = (x, y, 0)$. Note que $\text{Ker}\, T = \{v \in \mathbb{R}^3 : T(v) = (0, 0, 0)\}$. Note que $T(v) = (0, 0, 0)$ se, e somente se, $v = (0, 0, z)$, em que $z \in \mathbb{R}$, uma vez que $T(0, 0, z) = (0, 0, 0)$. Logo, $\text{Ker}\, T = \{(0, 0, z) : z \in \mathbb{R}\}$.

Núcleo de uma transformação Linear

Exemplo 2

Ex.: Seja a transformação linear $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definida por $T(x, y) = x + y$. Note que $\operatorname{Ker} T = \{v \in \mathbb{R}^2 : T(v) = 0\}$. Note que $T(v) = 0$ se, e somente se, $x + y = 0$,ou seja, $y = -x$. Portanto, $\operatorname{Ker} T = \{(x, -x) : x \in \mathbb{R}\}$.

O teorema abaixo afirma que uma transformação linear é injetora se e somente se seu núcleo contiver somente o vetor nulo.

Teorema

Teorema: Seja $T : V \to U$ uma transformação linear. Então $\operatorname{Ker} T = \{0\}$ se, e somente se, T é injetora.

Exemplo 3

Ex.: Seja a transformação linear $T : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ definida por $T(x) = (x, 0)$. Note que $\operatorname{Ker} T = \{x \in \mathbb{R} : T(x) = (0, 0)\}$. Mas, observe que $T(x) = (0, 0)$ se, e somente se, $(x, 0) = (0, 0)$, ou seja, $x = 0$. Portanto, $\operatorname{Ker} T = \{0\}$ e, pelo teorema acima, concluímos que T é injetora.

Núcleo de uma transformação Linear

Exemplo 2

Ex.: Seja a transformação linear $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definida por $T(x, y) = x + y$. Note que $\operatorname{Ker} T = \{v \in \mathbb{R}^2 : T(v) = 0\}$. Note que $T(v) = 0$ se, e somente se, $x + y = 0$,ou seja, $y = -x$. Portanto, $\operatorname{Ker} T = \{(x, -x) : x \in \mathbb{R}\}$.

O teorema abaixo afirma que uma transformação linear é injetora se e somente se seu núcleo contiver somente o vetor nulo.

Teorema

Teorema: Seja $T : V \to U$ uma transformação linear. Então $\operatorname{Ker} T = \{0\}$ se, e somente se, T é injetora.

Exemplo 3

Ex.: Seja a transformação linear $T : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ definida por $T(x) = (x, 0)$. Note que $\operatorname{Ker} T = \{x \in \mathbb{R} : T(x) = (0, 0)\}$. Mas, observe que $T(x) = (0, 0)$ se, e somente se, $(x, 0) = (0, 0)$, ou seja, $x = 0$. Portanto, $\operatorname{Ker} T = \{0\}$ e, pelo teorema acima, concluímos que T é injetora.

Núcleo de uma transformação Linear

Exemplo 2

Ex.: Seja a transformação linear $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definida por $T(x, y) = x + y$. Note que $\mathrm{Ker}\, T = \{v \in \mathbb{R}^2 : T(v) = 0\}$. Note que $T(v) = 0$ se, e somente se, $x + y = 0$,ou seja, $y = -x$. Portanto, $\mathrm{Ker}\, T = \{(x, -x) : x \in \mathbb{R}\}$.

O teorema abaixo afirma que uma transformação linear é injetora se e somente se seu núcleo contiver somente o vetor nulo.

Teorema

Teorema: Seja $T : V \to U$ uma transformação linear. Então $\mathrm{Ker}\, T = \{0\}$ se, e somente se, T é injetora.

Exemplo 3

Ex.: Seja a transformação linear $T : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ definida por $T(x) = (x, 0)$. Note que $\mathrm{Ker}\, T = \{x \in \mathbb{R} : T(x) = (0, 0)\}$. Mas, observe que $T(x) = (0, 0)$ se, e somente se, $(x, 0) = (0, 0)$, ou seja, $x = 0$. Portanto, $\mathrm{Ker}\, T = \{0\}$ e, pelo teorema acima, concluímos que T é injetora.

Imagem de uma transformação Linear

A definição abaixo trata do conceito de imagem de uma transformação.

Definição: Seja $T : V \to U$ uma transformação linear. A imagem de T, denotado por $\mathrm{Im}(T)$, é o conjunto de todos elementos $u \in U$ tais que existe um vetor $v \in V$, que satisfaz $T(v) = u$. Ou seja,

$$\mathrm{Im}(T) = \{u \in U : T(v) = u, \ \ \text{para algum} \ \ v \in V\}.$$

Em outras palavras, a imagem de uma transformação linear é o conjunto formado por todos os vetores do contradomínio da transformação linear tais que esses vetores são imagens de algum vetor do domínio da transformação. Note ainda que $\mathrm{Im}(T)$ é subconjunto de U. Mais geralmente, é possível mostrar que $\mathrm{Im}(T)$ é um subespaço de U.

Exemplo 4

Ex.: No exemplo 1 acima, da transformação $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ definida por $T(x, y, z) = (x, y, 0)$, temos claramente, que a imagem de T é todo o plano xy, ou seja, os pontos da forma $(x, y, 0)$.

Imagem de uma transformação Linear

A definição abaixo trata do conceito de imagem de uma transformação.

Definição: Seja $T : V \to U$ uma transformação linear. A imagem de T, denotado por $\text{Im}(T)$, é o conjunto de todos elementos $u \in U$ tais que existe um vetor $v \in V$, que satisfaz $T(v) = u$. Ou seja,

$$\text{Im}(T) = \{u \in U : T(v) = u, \quad \text{para algum} \quad v \in V\}.$$

Em outras palavras, a imagem de uma transformação linear é o conjunto formado por todos os vetores do contradomínio da transformação linear tais que esses vetores são imagens de algum vetor do domínio da transformação. Note ainda que $\text{Im}(T)$ é subconjunto de U. Mais geralmente, é possível mostrar que $\text{Im}(T)$ é um subespaço de U.

Exemplo 4

Ex.: No exemplo 1 acima, da transformação $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ definida por $T(x, y, z) = (x, y, 0)$, temos claramente, que a imagem de T é todo o plano xy, ou seja, os pontos da forma $(x, y, 0)$.

Exemplo 5

Ex.: Seja a transformação linear do exemplo 2 acima, ou seja $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definida por $T(x, y) = x + y$. Note que $\text{Im}(T) = \mathbb{R}$, uma vez que dado $x \in \mathbb{R}$, então $T(x, 0) = x$.

O teorema a seguir é um importante resultado que relaciona as dimensões do núcleo e imagem de uma transformação linear $T : V \to U$ com a dimensão de V.

Teorema

Teorema: Seja $T : V \to U$ uma transformação linear. Então

$$\dim V = \dim \text{Ker}\, T + \dim \text{Im}\, T$$

Imagem de uma transformação Linear

Exemplo 5

Ex.: Seja a transformação linear do exemplo 2 acima, ou seja $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definida por $T(x, y) = x + y$. Note que $\text{Im}(T) = \mathbb{R}$, uma vez que dado $x \in \mathbb{R}$, então $T(x, 0) = x$.

O teorema a seguir é um importante resultado que relaciona as dimensões do núcleo e imagem de uma transformação linear $T : V \to U$ com a dimensão de V.

Teorema

Teorema: Seja $T : V \to U$ uma transformação linear. Então

$$\dim V = \dim \text{Kert}\, T + \dim \text{Im}\, T$$

Exemplo 6

Ex. 6: Seja a T a transformação linear $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ definida por $T(x, y, z) = (z, x - y, -z)$.

(a) Determine uma base e a dimensão do núcleo de T.

(b) Determine a dimensão de $Im(T)$.

(c) T é sobrejetora? justifique.

Sol. (a): Primeiro vamos obter o núcleo da transformação T. Por definição, sabemos que $\text{Ker}\,T = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : T(x, y, z) = (0, 0, 0)\}$, ou seja, $(z, x - y, -z) = (0, 0, 0)$. Por identidade de vetores, temos que $z = 0$ e $x = y$. Logo, os vetores que estão no núcleo da transformação T são da forma $(x, x, 0)$. Observe ainda que $(x, x, 0) = x(1, 1, 0)$, ou seja, o núcleo de T é gerado pelo vetor $(1, 1, 0)$, que é LI. Logo, uma base do núcleo é dada pelo vetor $(1, 1, 0)$ e, portanto, $\dim \text{Kert}\,T = 1$.

Exemplo

Exemplo 6

Ex. 6: Seja a T a transformação linear $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ definida por $T(x, y, z) = (z, x - y, -z)$.

(a) Determine uma base e a dimensão do núcleo de T.

(b) Determine a dimensão de $Im(T)$.

(c) T é sobrejetora? justifique.

Sol. (a): Primeiro vamos obter o núcleo da transformação T. Por definição, sabemos que $\mathrm{Ker}\, T = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : T(x, y, z) = (0, 0, 0)\}$, ou seja, $(z, x - y, -z) = (0, 0, 0)$. Por identidade de vetores, temos que $z = 0$ e $x = y$. Logo, os vetores que estão no núcleo da transformação T são da forma $(x, x, 0)$. Observe ainda que $(x, x, 0) = x(1, 1, 0)$, ou seja, o núcleo de T é gerado pelo vetor $(1, 1, 0)$, que é LI. Logo, uma base do núcleo é dada pelo vetor $(1, 1, 0)$ e, portanto, $\dim \mathrm{Kert}\, T = 1$.

Exemplo

Exemplo 6

Ex. 6: Seja a T a transformação linear $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ definida por $T(x, y, z) = (z, x - y, -z)$.

(a) Determine uma base e a dimensão do núcleo de T.

(b) Determine a dimensão de $Im(T)$.

(c) T é sobrejetora? justifique.

Sol. (a): Primeiro vamos obter o núcleo da transformação T. Por definição, sabemos que $\mathrm{Ker}\, T = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : T(x, y, z) = (0, 0, 0)\}$, ou seja, $(z, x - y, -z) = (0, 0, 0)$. Por identidade de vetores, temos que $z = 0$ e $x = y$. Logo, os vetores que estão no núcleo da transformação T são da forma $(x, x, 0)$. Observe ainda que $(x, x, 0) = x(1, 1, 0)$, ou seja, o núcleo de T é gerado pelo vetor $(1, 1, 0)$, que é LI. Logo, uma base do núcleo é dada pelo vetor $(1, 1, 0)$ e, portanto, $\dim \mathrm{Kert}\, T = 1$.

Continuação do exemplo 6

Sol.(b): No item (b) queremos determinar dim ImT. Note que como $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, então a dimensão do domínio da transformação é dim$\mathbb{R}^3 = 3$. Logo, pelo teorema anterior, temos que dim$V =$ dim Kert$T +$ dim ImT, ou seja, $3 = 1 +$ dim ImT, o que implica que dim Im$T = 3 - 1 = 2$.

Sol. (c): Recorde que para uma transformação linear ser sobrejetora então seu contradomínio tem que coincidir com o conjunto imagem da transformação. Note que como $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, então a dimensão do contradomínio de T é 3, uma vez que é a dimensão do $\mathbb{R}^3$. Por outro lado, note que pelo item (b) obtivemos que dim Im$T = 2$. Portanto, T não é sobrejetora, uma vez que a dimensão do contradomínio de T e da imagem de T foram diferentes.

Continuação do exemplo 6

Sol.(b): No item (b) queremos determinar dim $\mathrm{Im}\,T$. Note que como $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, então a dimensão do domínio da transformação é $\dim \mathbb{R}^3 = 3$. Logo, pelo teorema anterior, temos que $\dim V =$ dim $\mathrm{Kert}\,T +$ dim $\mathrm{Im}\,T$, ou seja, $3 = 1 +$ dim $\mathrm{Im}\,T$, o que implica que dim $\mathrm{Im}\,T = 3 - 1 = 2$.

Sol. (c): Recorde que para uma transformação linear ser sobrejetora então seu contradomínio tem que coincidir com o conjunto imagem da transformação. Note que como $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, então a dimensão do contradomínio de T é 3, uma vez que é a dimensão do $\mathbb{R}^3$. Por outro lado, note que pelo item (b) obtivemos que dim $\mathrm{Im}\,T = 2$. Portanto, T não é sobrejetora, uma vez que a dimensão do contradomínio de T e da imagem de T foram diferentes.