Álgebra Linear - CC/SI

Dr. Giannini Italino

Universidade Federal do Ceará - Campus de Crateús

Maio, 2025

1 Recordando

2 Subespaço vetoriais

Espaços vetoriais

Na aula passada vimos a definição de espaço vetorial, ou seja:

Definição: Considere o conjunto V, não vazio, no qual as duas operações a seguir são definidas.

(i) **Adição de vetores**: Associa a quaisquer vetores $u, v \in V$, a soma $u + v$ em V;

(ii) **Multiplicação por escalar**: Associa a qualquer vetor $u \in V$ e escalar $r \in K$ o produto ru em V.

Então dizemos que V é um espaço vetorial (sobre o conjunto de escalares K) se os oito axiomas a seguir forem verdadeiros:

Na aula passada vimos a definição de espaço vetorial, ou seja:

Definição: Considere o conjunto V, não vazio, no qual as duas operações a seguir são definidas.

(i) **Adição de vetores**: Associa a quaisquer vetores $u, v \in V$, a soma $u + v$ em V;

(ii) **Multiplicação por escalar**: Associa a qualquer vetor $u \in V$ e escalar $r \in K$ o produto ru em V.

Então dizemos que V é um espaço vetorial (sobre o conjunto de escalares K) se os oito axiomas a seguir forem verdadeiros:

Recordando

Aximoas

(A1) Para quaisquer vetores $u, v, w \in V$ vale $(u + v) + w = u + (v + w)$;

(A2) Existe um vetor em V, denotado por 0, denominado vetor nulo, ou vetor zero, tal que $u + 0 = 0 + u = u$, para todo vetor $u \in V$;

(A3) Para cada vetor $u \in V$ existe um vetor em V, que denotamos $-u$ e denominamos simétrico de u, tal que $u + (-u) = (-u) + u = 0$;

(A4) Para quaisquer vetores $u, v \in V$, temos $u + v = v + u$;

(M1) Para quaisquer vetores $u, v \in V$ e escalar $r \in K$, temos $r(u + v) = ru + rv$;

(M2) Para quaisquer escalares $r, s \in K$ e vetor $u \in V$, temos $(r + s)u = ru + su$;

(M3) Para quaisquer escalares $r, s \in K$ e vetor $u \in V$, $(rs)u = r(su)$;

(M4) Para qualquer vetor $u \in V$, $1u = u$, onde 1 é o escalar unitário de K.

Aximoas

(A1) Para quaisquer vetores $u, v, w \in V$ vale $(u + v) + w = u + (v + w)$;

(A2) Existe um vetor em V, denotado por 0, denominado vetor nulo, ou vetor zero, tal que $u + 0 = 0 + u = u$, para todo vetor $u \in V$;

(A3) Para cada vetor $u \in V$ existe um vetor em V, que denotamos $-u$ e denominamos simétrico de u, tal que $u + (-u) = (-u) + u = 0$;

(A4) Para quaisquer vetores $u, v \in V$, temos $u + v = v + u$;

(M1) Para quaisquer vetores $u, v \in V$ e escalar $r \in K$, temos $r(u + v) = ru + rv$;

(M2) Para quaisquer escalares $r, s \in K$ e vetor $u \in V$, temos $(r + s)u = ru + su$;

(M3) Para quaisquer escalares $r, s \in K$ e vetor $u \in V$, $(rs)u = r(su)$;

(M4) Para qualquer vetor $u \in V$, $1u = u$, onde 1 é o escalar unitário de K.

Recordando

Aximoas

(A1) Para quaisquer vetores $u, v, w \in V$ vale $(u + v) + w = u + (v + w)$;

(A2) Existe um vetor em V, denotado por 0, denominado vetor nulo, ou vetor zero, tal que $u + 0 = 0 + u = u$, para todo vetor $u \in V$;

(A3) Para cada vetor $u \in V$ existe um vetor em V, que denotamos $-u$ e denominamos simétrico de u, tal que $u + (-u) = (-u) + u = 0$;

(A4) Para quaisquer vetores $u, v \in V$, temos $u + v = v + u$;

(M1) Para quaisquer vetores $u, v \in V$ e escalar $r \in K$, temos $r(u + v) = ru + rv$;

(M2) Para quaisquer escalares $r, s \in K$ e vetor $u \in V$, temos $(r + s)u = ru + su$;

(M3) Para quaisquer escalares $r, s \in K$ e vetor $u \in V$, $(rs)u = r(su)$;

(M4) Para qualquer vetor $u \in V$, $1u = u$, onde 1 é o escalar unitário de K.

Recordando

Aximoas

(A1) Para quaisquer vetores $u, v, w \in V$ vale $(u + v) + w = u + (v + w)$;

(A2) Existe um vetor em V, denotado por 0, denominado vetor nulo, ou vetor zero, tal que $u + 0 = 0 + u = u$, para todo vetor $u \in V$;

(A3) Para cada vetor $u \in V$ existe um vetor em V, que denotamos $-u$ e denominamos simétrico de u, tal que $u + (-u) = (-u) + u = 0$;

(A4) Para quaisquer vetores $u, v \in V$, temos $u + v = v + u$;

(M1) Para quaisquer vetores $u, v \in V$ e escalar $r \in K$, temos $r(u + v) = ru + rv$;

(M2) Para quaisquer escalares $r, s \in K$ e vetor $u \in V$, temos $(r + s)u = ru + su$;

(M3) Para quaisquer escalares $r, s \in K$ e vetor $u \in V$, $(rs)u = r(su)$;

(M4) Para qualquer vetor $u \in V$, $1u = u$, onde 1 é o escalar unitário de K.

Recordando

Aximoas

(A1) Para quaisquer vetores $u, v, w \in V$ vale $(u + v) + w = u + (v + w)$;

(A2) Existe um vetor em V, denotado por 0, denominado vetor nulo, ou vetor zero, tal que $u + 0 = 0 + u = u$, para todo vetor $u \in V$;

(A3) Para cada vetor $u \in V$ existe um vetor em V, que denotamos $-u$ e denominamos simétrico de u, tal que $u + (-u) = (-u) + u = 0$;

(A4) Para quaisquer vetores $u, v \in V$, temos $u + v = v + u$;

(M1) Para quaisquer vetores $u, v \in V$ e escalar $r \in K$, temos $r(u + v) = ru + rv$;

(M2) Para quaisquer escalares $r, s \in K$ e vetor $u \in V$, temos $(r + s)u = ru + su$;

(M3) Para quaisquer escalares $r, s \in K$ e vetor $u \in V$, $(rs)u = r(su)$;

(M4) Para qualquer vetor $u \in V$, $1u = u$, onde 1 é o escalar unitário de K.

Recordando

Aximoas

(A1) Para quaisquer vetores $u, v, w \in V$ vale $(u+v)+w = u+(v+w)$;

(A2) Existe um vetor em V, denotado por 0, denominado vetor nulo, ou vetor zero, tal que $u+0 = 0+u = u$, para todo vetor $u \in V$;

(A3) Para cada vetor $u \in V$ existe um vetor em V, que denotamos $-u$ e denominamos simétrico de u, tal que $u+(-u) = (-u)+u = 0$;

(A4) Para quaisquer vetores $u, v \in V$, temos $u+v = v+u$;

(M1) Para quaisquer vetores $u, v \in V$ e escalar $r \in K$, temos $r(u+v) = ru+rv$;

(M2) Para quaisquer escalares $r, s \in K$ e vetor $u \in V$, temos $(r+s)u = ru+su$;

(M3) Para quaisquer escalares $r, s \in K$ e vetor $u \in V$, $(rs)u = r(su)$;

(M4) Para qualquer vetor $u \in V$, $1u = u$, onde 1 é o escalar unitário de K.

Recordando

Aximoas

(A1) Para quaisquer vetores $u, v, w \in V$ vale $(u + v) + w = u + (v + w)$;

(A2) Existe um vetor em V, denotado por 0, denominado vetor nulo, ou vetor zero, tal que $u + 0 = 0 + u = u$, para todo vetor $u \in V$;

(A3) Para cada vetor $u \in V$ existe um vetor em V, que denotamos $-u$ e denominamos simétrico de u, tal que $u + (-u) = (-u) + u = 0$;

(A4) Para quaisquer vetores $u, v \in V$, temos $u + v = v + u$;

(M1) Para quaisquer vetores $u, v \in V$ e escalar $r \in K$, temos $r(u + v) = ru + rv$;

(M2) Para quaisquer escalares $r, s \in K$ e vetor $u \in V$, temos $(r + s)u = ru + su$;

(M3) Para quaisquer escalares $r, s \in K$ e vetor $u \in V$, $(rs)u = r(su)$;

(M4) Para qualquer vetor $u \in V$, $1u = u$, onde 1 é o escalar unitário de K.

Recordando

Aximoas

(A1) Para quaisquer vetores $u, v, w \in V$ vale $(u + v) + w = u + (v + w)$;

(A2) Existe um vetor em V, denotado por 0, denominado vetor nulo, ou vetor zero, tal que $u + 0 = 0 + u = u$, para todo vetor $u \in V$;

(A3) Para cada vetor $u \in V$ existe um vetor em V, que denotamos $-u$ e denominamos simétrico de u, tal que $u + (-u) = (-u) + u = 0$;

(A4) Para quaisquer vetores $u, v \in V$, temos $u + v = v + u$;

(M1) Para quaisquer vetores $u, v \in V$ e escalar $r \in K$, temos $r(u + v) = ru + rv$;

(M2) Para quaisquer escalares $r, s \in K$ e vetor $u \in V$, temos $(r + s)u = ru + su$;

(M3) Para quaisquer escalares $r, s \in K$ e vetor $u \in V$, $(rs)u = r(su)$;

(M4) Para qualquer vetor $u \in V$, $1u = u$, onde 1 é o escalar unitário de K.

Subespaço vetoriais

Veremos agora um importante conceito referente a espaços vetoriais, denominado de subespaço vetorial.

Definição: Sejam V um espaço vetorial e seja W um subconjunto de V. Dizemos que W é um subespaço de V quando o próprio W for um espaço vetorial (sobre o mesmo corpo de escalares em que V foi definido) em relação às operações de V de soma de vetores e de multiplicação de vetores por escalar.

Note que para mostrarmos que um conjunto W é um subespaço vetorial, precisamos mostrar que W satisfaz todos os oito axiomas da definição de um espaço vetorial. No entanto, se W for um subconjunto de um espaço vetorial V, então alguns desses axiomas valem automaticamente para W, pois naturalmente já valem para o espaço vetorial V.

O teorema a seguir fornece condições para identificarmos subespaços de um espaço vetorial dado.

Subespaço vetoriais

Veremos agora um importante conceito referente a espaços vetoriais, denominado de subespaço vetorial.

Definição: Sejam V um espaço vetorial e seja W um subconjunto de V. Dizemos que W é um subespaço de V quando o próprio W for um espaço vetorial (sobre o mesmo corpo de escalares em que V foi definido) em relação às operações de V de soma de vetores e de multiplicação de vetores por escalar.

Note que para mostrarmos que um conjunto W é um subespaço vetorial, precisamos mostrar que W satisfaz todos os oito axiomas da definição de um espaço vetorial. No entanto, se W for um subconjunto de um espaço vetorial V, então alguns desses axiomas valem automaticamente para W, pois naturalmente já valem para o espaço vetorial V.

O teorema a seguir fornece condições para identificarmos subespaços de um espaço vetorial dado.

Veremos agora um importante conceito referente a espaços vetoriais, denominado de subespaço vetorial.

Definição: Sejam V um espaço vetorial e seja W um subconjunto de V. Dizemos que W é um subespaço de V quando o próprio W for um espaço vetorial (sobre o mesmo corpo de escalares em que V foi definido) em relação às operações de V de soma de vetores e de multiplicação de vetores por escalar.

Note que para mostrarmos que um conjunto W é um subespaço vetorial, precisamos mostrar que W satisfaz todos os oito axiomas da definição de um espaço vetorial. No entanto, se W for um subconjunto de um espaço vetorial V, então alguns desses axiomas valem automaticamente para W, pois naturalmente já valem para o espaço vetorial V.

O teorema a seguir fornece condições para identificarmos subespaços de um espaço vetorial dado.

Subespaço vetoriais

Veremos agora um importante conceito referente a espaços vetoriais, denominado de subespaço vetorial.

Definição: Sejam V um espaço vetorial e seja W um subconjunto de V. Dizemos que W é um subespaço de V quando o próprio W for um espaço vetorial (sobre o mesmo corpo de escalares em que V foi definido) em relação às operações de V de soma de vetores e de multiplicação de vetores por escalar.

Note que para mostrarmos que um conjunto W é um subespaço vetorial, precisamos mostrar que W satisfaz todos os oito axiomas da definição de um espaço vetorial. No entanto, se W for um subconjunto de um espaço vetorial V, então alguns desses axiomas valem automaticamente para W, pois naturalmente já valem para o espaço vetorial V.

O teorema a seguir fornece condições para identificarmos subespaços de um espaço vetorial dado.

Subespaço vetorial

Teorema: Seja W um subconjunto de um espaço vetorial V. Então W é um subespaço de V se valem as duas condições a seguir:

(a) O vetor nulo $0 \in W$;

(b) Dados quaisquer vetores $u, v \in W$ e escalar $r \in K$, então (i) a soma $u + v \in W$ e (ii) o múltiplo $ru \in W$.

Note que a propriedade (i) de (b) estabelece que o conjunto W é fechado em relação à adição, e a propriedade (ii) de (b) diz que W é fechado em relação à multiplicação por escalar. O exemplo abaixo ilustra a ideia de subespaço vetorial.

Subespaço vetorial

Teorema: Seja W um subconjunto de um espaço vetorial V. Então W é um subespaço de V se valem as duas condições a seguir:

(a) O vetor nulo $0 \in W$;

(b) Dados quaisquer vetores $u, v \in W$ e escalar $r \in K$, então (i) a soma $u + v \in W$ e (ii) o múltiplo $ru \in W$.

Note que a propriedade (i) de (b) estabelece que o conjunto W é fechado em relação à adição, e a propriedade (ii) de (b) diz que W é fechado em relação à multiplicação por escalar. O exemplo abaixo ilustra a ideia de subespaço vetorial.

Teorema: Seja W um subconjunto de um espaço vetorial V. Então W é um subespaço de V se valem as duas condições a seguir:

(a) O vetor nulo $0 \in W$;

(b) Dados quaisquer vetores $u, v \in W$ e escalar $r \in K$, então (i) a soma $u + v \in W$ e (ii) o múltiplo $ru \in W$.

Note que a propriedade (i) de (b) estabelece que o conjunto W é fechado em relação à adição, e a propriedade (ii) de (b) diz que W é fechado em relação à multiplicação por escalar. O exemplo abaixo ilustra a ideia de subespaço vetorial.

Exemplo

Ex.: Considere o conjunto $V = \mathbb{R}^3$. Seja W o subconjunto de V definido por

$$W = \{(x, y, z) : x = y = z\},$$

então W é um subespaço vetorial de V.

De fato, primeiro observe que os elementos de W são vetores do $\mathbb{R}^3$ cujas três componentes são iguais, por exemplo: $w_1 = (1, 1, 1)$ e $w_2 = (-3, -3, -3)$.

Mais geralmente, se $w \in W$, então w é da forma $w = (a, a, a)$, em que $a \in \mathbb{R}$.

Sabemos que para que W seja subespaço de $\mathbb{R}^3$, então tem que ter o elemento nulo de $V = \mathbb{R}^3$ e ser fechado em relação a adição e multiplicação por escalar. De fato, note que $(0, 0, 0)$ é o vetor nulo de $V = \mathbb{R}^3$ e esse elemento também está em W, uma vez que as três componentes são iguais, logo $0 \in W$.

Mostremos agora que W é fechado para a soma, isto é, sejam $u = (u_1, u_1, u_1)$ e $v = (v_1, v_1, v_1)$ elementos de W. Temos que $u + v = (u_1 + v_1, u_1 + v_1, u_1 + v_1)$ que também pertence a W, uma vez que as três componentes de $u + v$ são iguais.

Exemplo

Ex.: Considere o conjunto $V = \mathbb{R}^3$. Seja W o subconjunto de V definido por

$$W = \{(x, y, z) : x = y = z\},$$

então W é um subespaço vetorial de V.

De fato, primeiro observe que os elementos de W são vetores do $\mathbb{R}^3$ cujas três componentes são iguais, por exemplo: $w_1 = (1, 1, 1)$ e $w_2 = (-3, -3, -3)$.

Mais geralmente, se $w \in W$, então w é da forma $w = (a, a, a)$, em que $a \in \mathbb{R}$.

Sabemos que para que W seja subespaço de $\mathbb{R}^3$, então tem que ter o elemento nulo de $V = \mathbb{R}^3$ e ser fechado em relação a adição e multiplicação por escalar. De fato, note que $(0, 0, 0)$ é o vetor nulo de $V = \mathbb{R}^3$ e esse elemento também está em W, uma vez que as três componentes são iguais, logo $0 \in W$.

Mostremos agora que W é fechado para a soma, isto é, sejam $u = (u_1, u_1, u_1)$ e $v = (v_1, v_1, v_1)$ elementos de W. Temos que $u + v = (u_1 + v_1, u_1 + v_1, u_1 + v_1)$ que também pertence a W, uma vez que as três componentes de $u + v$ são iguais.

Exemplo

Ex.: Considere o conjunto $V = \mathbb{R}^3$. Seja W o subconjunto de V definido por

$$W = \{(x, y, z) : x = y = z\},$$

então W é um subespaço vetorial de V.

De fato, primeiro observe que os elementos de W são vetores do $\mathbb{R}^3$ cujas três componentes são iguais, por exemplo: $w_1 = (1, 1, 1)$ e $w_2 = (-3, -3, -3)$.

Mais geralmente, se $w \in W$, então w é da forma $w = (a, a, a)$, em que $a \in \mathbb{R}$.

Sabemos que para que W seja subespaço de $\mathbb{R}^3$, então tem que ter o elemento nulo de $V = \mathbb{R}^3$ e ser fechado em relação a adição e multiplicação por escalar. De fato, note que $(0, 0, 0)$ é o vetor nulo de $V = \mathbb{R}^3$ e esse elemento também está em W, uma vez que as três componentes são iguais, logo $0 \in W$.

Mostremos agora que W é fechado para a soma, isto é, sejam $u = (u_1, u_1, u_1)$ e $v = (v_1, v_1, v_1)$ elementos de W. Temos que $u + v = (u_1 + v_1, u_1 + v_1, u_1 + v_1)$ que também pertence a W, uma vez que as três componentes de $u + v$ são iguais.

Exemplo

Ex.: Considere o conjunto $V = \mathbb{R}^3$. Seja W o subconjunto de V definido por

$$W = \{(x, y, z) : x = y = z\},$$

então W é um subespaço vetorial de V.

De fato, primeiro observe que os elementos de W são vetores do $\mathbb{R}^3$ cujas três componentes são iguais, por exemplo: $w_1 = (1, 1, 1)$ e $w_2 = (-3, -3, -3)$.

Mais geralmente, se $w \in W$, então w é da forma $w = (a, a, a)$, em que $a \in \mathbb{R}$.

Sabemos que para que W seja subespaço de $\mathbb{R}^3$, então tem que ter o elemento nulo de $V = \mathbb{R}^3$ e ser fechado em relação a adição e multiplicação por escalar. De fato, note que $(0, 0, 0)$ é o vetor nulo de $V = \mathbb{R}^3$ e esse elemento também está em W, uma vez que as três componentes são iguais, logo $0 \in W$.

Mostremos agora que W é fechado para a soma, isto é, sejam $u = (u_1, u_1, u_1)$ e $v = (v_1, v_1, v_1)$ elementos de W. Temos que $u + v = (u_1 + v_1, u_1 + v_1, u_1 + v_1)$ que também pertence a W, uma vez que as três componentes de $u + v$ são iguais.

Exemplo

Ex.: Considere o conjunto $V = \mathbb{R}^3$. Seja W o subconjunto de V definido por

$$W = \{(x, y, z) : x = y = z\},$$

então W é um subespaço vetorial de V.

De fato, primeiro observe que os elementos de W são vetores do $\mathbb{R}^3$ cujas três componentes são iguais, por exemplo: $w_1 = (1, 1, 1)$ e $w_2 = (-3, -3, -3)$.

Mais geralmente, se $w \in W$, então w é da forma $w = (a, a, a)$, em que $a \in \mathbb{R}$.

Sabemos que para que W seja subespaço de $\mathbb{R}^3$, então tem que ter o elemento nulo de $V = \mathbb{R}^3$ e ser fechado em relação a adição e multiplicação por escalar. De fato, note que $(0, 0, 0)$ é o vetor nulo de $V = \mathbb{R}^3$ e esse elemento também está em W, uma vez que as três componentes são iguais, logo $0 \in W$.

Mostremos agora que W é fechado para a soma, isto é, sejam $u = (u_1, u_1, u_1)$ e $v = (v_1, v_1, v_1)$ elementos de W. Temos que $u + v = (u_1 + v_1, u_1 + v_1, u_1 + v_1)$ que também pertence a W, uma vez que as três componentes de $u + v$ são iguais.

Cont. do exemplo

Finalmente, temos que mostrar que W é fechado para a multiplicação por escalar. Isto é, seja $u = (u_1, u_1, u_1)$ elemento de W e seja r um escalar real qualquer. Temos que $ru = (ru_1, ru_1, ru_1)$ que também pertence a W, uma vez que as três componentes de ru são iguais.

Logo, como as condições (i) e (ii) do teorema sobre subespaços foram satisfeitas, então podemos afirmar que o conjunto W é subespaço de $V = \mathbb{R}^3$.

Se qualquer uma das duas condições (i) e (ii) do teorema anterior não forem satisfeitas, então podemos afirmar que o conjunto dado não será subespaço vetorial.

Por exemplo, se no exemplo anterior o conjunto W fosse $W = \{(x, x, x+1) : x \in \mathbb{R}\}$, então W não é subespaço de $\mathbb{R}^3$, uma vez que o vetor nulo de $\mathbb{R}^3$, isto é, o vetor $0 = (0, 0, 0)$ não pertence a W, pois não existe nenhum valor de $x \in \mathbb{R}$ tal que $(x, x, x+1) = (0, 0, 0)$, ou seja, o vetor nulo não pode ser escrito como um vetor no formato dos vetores de W. Logo W não é subespaço de $\mathbb{R}^3$.

Cont. do exemplo

Finalmente, temos que mostrar que W é fechado para a multiplicação por escalar. Isto é, seja $u = (u_1, u_1, u_1)$ elemento de W e seja r um escalar real qualquer. Temos que $ru = (ru_1, ru_1, ru_1)$ que também pertence a W, uma vez que as três componentes de ru são iguais.

Logo, como as condições (i) e (ii) do teorema sobre subespaços foram satisfeitas, então podemos afirmar que o conjunto W é subespaço de $V = \mathbb{R}^3$.

Se qualquer uma das duas condições (i) e (ii) do teorema anterior não forem satisfeitas, então podemos afirmar que o conjunto dado não será subespaço vetorial.

Por exemplo, se no exemplo anterior o conjunto W fosse $W = \{(x, x, x+1) : x \in \mathbb{R}\}$, então W não é subespaço de $\mathbb{R}^3$, uma vez que o vetor nulo de $\mathbb{R}^3$, isto é, o vetor $0 = (0, 0, 0)$ não pertence a W, pois não existe nenhum valor de $x \in \mathbb{R}$ tal que $(x, x, x+1) = (0, 0, 0)$, ou seja, o vetor nulo não pode ser escrito como um vetor no formato dos vetores de W. Logo W não é subespaço de $\mathbb{R}^3$.

Cont. do exemplo

Finalmente, temos que mostrar que W é fechado para a multiplicação por escalar. Isto é, seja $u = (u_1, u_1, u_1)$ elemento de W e seja r um escalar real qualquer. Temos que $ru = (ru_1, ru_1, ru_1)$ que também pertence a W, uma vez que as três componentes de ru são iguais.

Logo, como as condições (i) e (ii) do teorema sobre subespaços foram satisfeitas, então podemos afirmar que o conjunto W é subespaço de $V = \mathbb{R}^3$.

Se qualquer uma das duas condições (i) e (ii) do teorema anterior não forem satisfeitas, então podemos afirmar que o conjunto dado não será subespaço vetorial.

Por exemplo, se no exemplo anterior o conjunto W fosse $W = \{(x, x, x+1) : x \in \mathbb{R}\}$, então W não é subespaço de $\mathbb{R}^3$, uma vez que o vetor nulo de $\mathbb{R}^3$, isto é, o vetor $0 = (0, 0, 0)$ não pertence a W, pois não existe nenhum valor de $x \in \mathbb{R}$ tal que $(x, x, x+1) = (0, 0, 0)$, ou seja, o vetor nulo não pode ser escrito como um vetor no formato dos vetores de W. Logo W não é subespaço de $\mathbb{R}^3$.

Cont. do exemplo

Finalmente, temos que mostrar que W é fechado para a multiplicação por escalar. Isto é, seja $u = (u_1, u_1, u_1)$ elemento de W e seja r um escalar real qualquer. Temos que $ru = (ru_1, ru_1, ru_1)$ que também pertence a W, uma vez que as três componentes de ru são iguais.

Logo, como as condições (i) e (ii) do teorema sobre subespaços foram satisfeitas, então podemos afirmar que o conjunto W é subespaço de $V = \mathbb{R}^3$.

Se qualquer uma das duas condições (i) e (ii) do teorema anterior não forem satisfeitas, então podemos afirmar que o conjunto dado não será subespaço vetorial.

Por exemplo, se no exemplo anterior o conjunto W fosse $W = \{(x, x, x+1) : x \in \mathbb{R}\}$, então W não é subespaço de $\mathbb{R}^3$, uma vez que o vetor nulo de $\mathbb{R}^3$, isto é, o vetor $0 = (0, 0, 0)$ não pertence a W, pois não existe nenhum valor de $x \in \mathbb{R}$ tal que $(x, x, x+1) = (0, 0, 0)$, ou seja, o vetor nulo não pode ser escrito como um vetor no formato dos vetores de W. Logo W não é subespaço de $\mathbb{R}^3$.

Intersecção de subespaços

O teorema abaixo afirma que se tivermos subespaços vetoriais de um mesmo espaço vetorial, então a intersecção desses subespaços é um novo subespaço do espaço vetorial.

Teorema: Se W_1 e W_2 são subespaços do espaço vetorial V, então a intersecção $W_1 \cap W_2$ é subespaço de V.

É bem fácil argumentar esse teorema, pois note que se W_1 e W_2 são subespaços de V, então ambos contem o elemento nulo de V, logo $0 \in W_1 \cap W_2$. Por outro lado, note que se $u_1, u_2 \in W_1 \cap W_2$, então, por definição de intersecção, temos que $u_1, u_2 \in W_1$ e $u_1, u_2 \in W_2$, logo como W_1 e W_2 são subespaços, sabemos que $u_1 + u_2 \in W_1$ e $u_1 + u_2 \in W_2$, logo $u_1 + u_2 \in W_1 \cap W_2$. Com uma ideia similar concluímos que $W_1 \cap W_2$ é também fechado para a multiplicação por escalar.

O teorema abaixo afirma que se tivermos subespaços vetoriais de um mesmo espaço vetorial, então a intersecção desses subespaços é um novo subespaço do espaço vetorial.

Teorema: Se W_1 e W_2 são subespaços do espaço vetorial V, então a intersecção $W_1 \cap W_2$ é subespaço de V.

É bem fácil argumentar esse teorema, pois note que se W_1 e W_2 são subespaços de V, então ambos contem o elemento nulo de V, logo $0 \in W_1 \cap W_2$. Por outro lado, note que se $u_1, u_2 \in W_1 \cap W_2$, então, por definição de intersecção, temos que $u_1, u_2 \in W_1$ e $u_1, u_2 \in W_2$, logo como W_1 e W_2 são subespaços, sabemos que $u_1 + u_2 \in W_1$ e $u_1 + u_2 \in W_2$, logo $u_1 + u_2 \in W_1 \cap W_2$. Com uma ideia similar concluímos que $W_1 \cap W_2$ é também fechado para a multiplicação por escalar.

Exemplo

Ex.: Seja $V = M(n, n)$ o espaço vetorial de todas as matrizes reais de ordem n, com as definições usuais de adição e multiplicação por escalar. Seja ainda
$W_1 = \{\text{matrizes triangulares superiores de ordem n}\}$ e
$W_2 = \{\text{matrizes triangulares inferiores de ordem n}\}$. Não é difícil argumentar que os conjuntos W_1 e W_2 são subespaços vetoriais de $V = M(n, n)$ (Exercício!).

Pelo teorema anterior, sabemos que $W_1 \cap W_2$ é também um subespaço de $V = M(n, n)$. Note que $W_1 \cap W_2$ é o subespaço formado por todas as matrizes diagonais de ordem n, ou seja, as matrizes que são, simultaneamente, triangular superior e inferior.

Exemplo

Ex.: Seja $V = M(n, n)$ o espaço vetorial de todas as matrizes reais de ordem n, com as definições usuais de adição e multiplicação por escalar. Seja ainda
$W_1 = \{\text{matrizes triangulares superiores de ordem n}\}$ e
$W_2 = \{\text{matrizes triangulares inferiores de ordem n}\}$. Não é difícil argumentar que os conjuntos W_1 e W_2 são subespaços vetoriais de $V = M(n, n)$ (Exercício!).

Pelo teorema anterior, sabemos que $W_1 \cap W_2$ é também um subespaço de $V = M(n, n)$. Note que $W_1 \cap W_2$ é o subespaço formado por todas as matrizes diagonais de ordem n, ou seja, as matrizes que são, simultaneamente, triangular superior e inferior.