UNIVERSIDADE FEDERAL DO CEARÁ
CAMPUS DE CRATEÚS

Corretude de Sistemas Dedutivos

Lógica para computação

Professor: Rennan Dantas

Universidade Federal do Ceará
Campus de Crateús

09 de maio de 2025

[0] Slides baseados no livro Logic and structure[1].

[1] VAN DALEN, Dirk et al. Logic and structure. Berlin: Springer, 1994.

Introdução

- Sabe-se que os sistemas dedutíveis são equivalentes
- Logo, não importa qual sistema dedutivo seja utilizado para realizar essa prova

Corretude e Completude de Sistemas Dedutivos

Introdução

- Abordaremos as questões mais da lógica dentro de um enfoque mais formal e provaremos a correção do método de Dedução Natural
- A escolha das regras do sistema de dedução não é feita por acaso
- O sistema deve ser compatível com a semântica, no sentido de que ele deve provar fórmulas apenas verdadeiras, e ser capaz de provar qualquer fórmula verdadeira
- Prova da corretude: se $\Gamma \vdash \varphi$ então $\Gamma \vDash \varphi$

Corretude de Sistemas Dedutivos

Se $\Gamma \vdash \varphi$ então $\Gamma \vDash \varphi$

- Sabemos que $\Gamma \vdash \varphi$ se e somente se existe uma derivação D com todas as suas hipóteses em Γ, é suficiente provar que:
  - para cada derivação D com conclusão φ e hipóteses em Γ nós temos $\Gamma \vDash \varphi$
- Nós iremos mostrar por indução em D

Caso base

- Se D tem um elemento, então sabemos que $\varphi \in \Gamma$
- φ foi uma conclusão obtida sem nenhuma aplicação de regra
- Então $\varphi \in \Gamma$
- Logo, $\Gamma \vDash \varphi$ (já que $\varphi \in \Gamma$)

Corretude de Sistemas Dedutivos

Introdução do $\wedge$ - Hipótese indutiva

- ($\wedge$I) Hipótese Indutiva: D e D' são derivações que concluem φ e φ' e para cada Γ contendo as hipóteses de D e para cada Γ' contendo as hipóteses de D'

$$\begin{array}{c} \mathcal{D} \\ \varphi \end{array} \quad \text{and} \quad \begin{array}{c} \mathcal{D}' \\ \varphi' \end{array}$$

- Temos que $\Gamma \vDash \varphi$ e $\Gamma' \vDash \varphi'$

Introdução do $\wedge$ - Passo indutivo

- Passo Indutivo: Agora seja Γ'' contendo as hipóteses de

$$\dfrac{\begin{array}{c}\mathcal{D} \\ \varphi\end{array} \qquad \begin{array}{c}\mathcal{D}' \\ \varphi'\end{array}}{\varphi \wedge \varphi'}$$

- Escolhendo Γ e Γ' para serem precisamente o conjunto de hipóteses de D, D', nós vemos que $\Gamma'' \supseteq \Gamma \cup \Gamma'$
- Por H.I, temos que $\Gamma \vDash \varphi$ e $\Gamma' \vDash \varphi'$
- Então $\Gamma'' \vDash \varphi$ e $\Gamma'' \vDash \varphi'$
- Seja v uma valoração tal que $v(\psi) = 1$ para todo $\psi \in \Gamma''$ ($v(\Gamma'') = 1$)
- Logo, $v(\varphi) = v(\varphi') = 1$
- Portanto, $v(\varphi \wedge \varphi') = 1$
- Isso mostra que $\Gamma'' \vDash \varphi \wedge \varphi'$

Eliminação do $\wedge$ - Hipótese indutiva

- $(\wedge E)$ Hipótese Indutiva: para qualquer Γ contendo as hipóteses de

$$\begin{array}{c}\mathcal{D}\\ \varphi \wedge \psi\end{array}$$

- Temos que $\Gamma \vDash \varphi \wedge \psi$

Eliminação do $\wedge$ - Passo Indutivo

Considere um Γ contendo todas as hipóteses de

$$\dfrac{\begin{array}{c}\mathcal{D}\\ \varphi \wedge \psi\end{array}}{\varphi}$$

$$\dfrac{\begin{array}{c}\mathcal{D}\\ \varphi \wedge \psi\end{array}}{\psi}$$

Eliminação do $\wedge$ - Passo Indutivo

- Por HI, temos que $\Gamma \vDash \varphi \wedge \psi$
- Seja v uma valoração qualquer tal que $v(\chi) = 1$ para todo $\chi \in \Gamma$ ($v(\Gamma) = 1$)
- Como $\Gamma \vDash \varphi \wedge \psi$, então $v(\varphi \wedge \psi) = 1$
- Pela tabela verdade do $\wedge$, temos que $v(\varphi) = v(\psi) = 1$
- Assim, para todo v tal que $v(\chi) = 1$ para todo $\chi \in \Gamma$ ($v(\Gamma) = 1$), temos que $v(\varphi) = v(\psi) = 1$
- Portanto, $\Gamma \vDash \varphi$ e $\Gamma \vDash \psi$

Introdução da $\rightarrow$ - Hipótese indutiva

- $(\rightarrow I)$ Hipótese Indutiva: Para qualquer Γ contendo as hipóteses de

$$\begin{array}{c} \varphi \\ \mathcal{D} \\ \psi \end{array}$$

- $\Gamma \vDash \psi$

O que queremos mostrar?

Se $\Gamma' \vdash \varphi \rightarrow \psi$ então $\Gamma' \vDash \varphi \rightarrow \psi$

Corretude de Sistemas Dedutivos

Introdução da $\rightarrow$ - Passo indutivo

- Seja Γ' contendo as hipóteses de

$$\dfrac{\begin{array}{c}[\varphi] \\ \mathcal{D} \\ \psi\end{array}}{\varphi \rightarrow \psi}$$

- Note que $[\varphi]$ não é uma hipótese de Γ'
- Seja v uma valoração tal que $v(\chi) = 1$ para todo $\chi \in \Gamma'$ ($v(\Gamma') = 1$)
- Se $v(\varphi) = 0$, então $v(\varphi \rightarrow \psi) = 1$ pela tabela verdade da $\rightarrow$

Introdução da $\rightarrow$ - Passo indutivo

- $\Gamma' \cup \{\varphi\}$ contendo todas as hipóteses de

$$\begin{array}{c} \varphi \\ \mathcal{D} \\ \psi \end{array}$$

- Seja v uma valoração tal que $v(\varphi) = 1$ e $v(\chi) = 1$ para todo $\chi \in \Gamma'$ ($v(\Gamma') = 1$)
- Por H.I, $v(\psi) = 1$
- Pela tabela verdade da implicação ($\rightarrow$), temos que $v(\varphi \rightarrow \psi) = 1$
- Portanto, $\Gamma' \vDash \varphi \rightarrow \psi$

Corretude de Sistemas Dedutivos

Eliminação da $\rightarrow$ - Hipótese indutiva

- ($\rightarrow$ E) Hipótese Indutiva: Sejam Γ e Γ' dois conjuntos que contém, respectivamente, as hipóteses de D e D'

$$\begin{array}{c} \mathcal{D} \\ \\ \varphi \end{array}, \quad \begin{array}{c} \mathcal{D}' \\ \\ \varphi \rightarrow \psi \end{array}$$

- $\Gamma \vDash \varphi$ e $\Gamma' \vDash \varphi \rightarrow \psi$

Corretude de Sistemas Dedutivos

Eliminação da $\rightarrow$ - Passo indutivo

- Passo da Indução: Sejam Γ e Γ' os conjuntos que contém, respectivamente, as hipóteses de D e D'

$$\frac{\begin{array}{c}\mathcal{D}\\ \\ \varphi\end{array} \qquad \begin{array}{c}\mathcal{D}'\\ \\ \varphi \rightarrow \psi\end{array}}{\psi}$$

- Pela H.I, temos que $\Gamma \vDash \varphi$ e $\Gamma' \vDash \varphi \rightarrow \psi$
- Seja $\Gamma'' \supseteq \Gamma \cup \Gamma'$

Eliminação da $\rightarrow$ - Passo indutivo

- Dessa forma, $\Gamma'' \vdash \psi$
- Seja v uma valoração qualquer tal que $v(\chi) = 1$ para todo $\chi \in \Gamma''$ ($v(\Gamma'') = 1$)
- Como $\Gamma'' \supseteq \Gamma \cup \Gamma'$, $v(\chi') = 1$ para todo $\chi' \in \Gamma$ ($v(\Gamma) = 1$) e $v(\chi'') = 1$ para todo $\chi'' \in \Gamma'$ ($v(\Gamma') = 1$)
- Como $\Gamma \vDash \varphi$ e $\Gamma' \vDash \varphi \rightarrow \psi$, então $v(\varphi) = v(\varphi \rightarrow \psi) = 1$
- Pela tabela verdade da implicação, temos que $v(\psi) = 1$
- Portanto, $\Gamma'' \vDash \psi$

Introdução do $\perp$ - Hipótese indutiva

- ($\perp$I) Hipótese Indutiva: para todo Γ contendo todas as hipóteses de

$$\begin{array}{c}\mathcal{D}\\ \perp\end{array}$$

- $\Gamma \models \perp$

Introdução do $\perp$ - Passo da indução

- Passo da Indução: Seja Γ' contendo todas as hipóteses de

$$\frac{\begin{array}{c}\mathcal{D}\\ \perp\end{array}}{\varphi}$$

- Se $\Gamma' \vdash \varphi$ então $\Gamma' \vDash \varphi$?
- Suponha, por absurdo, que $\Gamma' \nvDash \varphi$
- Então deve existir uma valoração v tal que $v(\psi) = 1$ para todo $\psi \in \Gamma'$ ($v(\Gamma') = 1$) e $v(\varphi) = 0$
- Como Γ' contém todas as hipóteses da primeira derivação, temos que $\Gamma' \vDash \perp$ por H.I
- Como $v(\psi) = 1$ para todo $\psi \in \Gamma'$ ($v(\Gamma') = 1$), então $v(\perp) = 1$
- Absurdo!

Eliminação da $\neg$ - Hipótese indutiva

- $(\neg E)$ Hipótese Indutiva: para todo Γ contendo todas as hipóteses de

$$\begin{array}{c} \neg\varphi \\ \mathcal{D} \\ \bot \end{array}$$

- Temos que $\Gamma \vDash \bot$

Eliminação da $\neg$ - Passo da indução

- Seja Γ' contendo todas as hipóteses de

$$\dfrac{\begin{array}{c}[\neg\varphi] \\ \mathcal{D} \\ \bot\end{array}}{\varphi}$$

- Se $\Gamma' \vdash \varphi$ então $\Gamma' \vDash \varphi$?
- Suponha, por absurdo, que $\Gamma' \nvDash \varphi$

Eliminação da $\neg$ - Passo da indução

- Então existe uma valoração v tal que $v(\psi) = 1$ para todo $\psi \in \Gamma'$ ($v(\Gamma') = 1$) e $v(\varphi) = 0$, ou seja, $v(\neg\varphi) = 1$
- Contudo, $\Gamma'' = \Gamma' \cup \{\neg\varphi\}$ contém todas as hipóteses da primeira derivação e $v(\psi) = 1$ para todo $\psi \in \Gamma''$ ($v(\Gamma'') = 1$)
- Absurdo, pois $\Gamma'' \vDash \bot$
- Portanto $\Gamma' \vDash \varphi$

Próxima Aula

O que vem por aí?

- Revisão/Tira dúvidas
- Exercícios
- Lógica de Primeira Ordem

UNIVERSIDADE FEDERAL DO CEARÁ
CAMPUS DE CRATEÚS

Corretude de Sistemas Dedutivos

Lógica para computação

Professor: Rennan Dantas

Universidade Federal do Ceará
Campus de Crateús

09 de maio de 2025

[0]Slides baseados no livro Logic and structure[2].

[1]VAN DALEN, Dirk et al. Logic and structure. Berlin: Springer, 1994.