Aula 03 - Frequências e Axiomas de Probabilidade

Probabilidade e Estatística - CRT 0029
Prof. Marciel Barros Pereira
Ciência da Computação / Sistemas de Informação

2025.1

Sumário

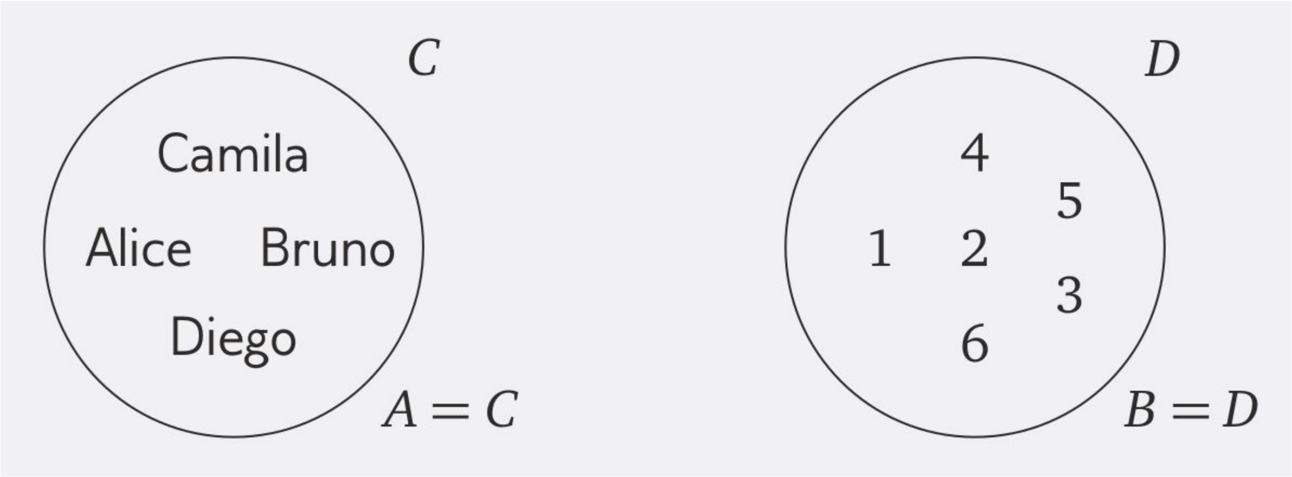
- Revisão Teoria dos Conjuntos
- Frequência e Probabilidades
- Axiomas da Probabilidade

Conceitos Básicos

- Um conjunto é uma coleção de objetos;
- Descrição dos elementos:
  - A = { Estudantes matriculados em Probabilidade e Estatística } ;
  - B = {n : n é inteiro e $1 \leq n \leq 6$} ;
- Enumeração dos elementos:
  - C = Alice, Bruno, Camila, Diego ;
  - D = {3, 2, 5, 4, 6, 1} ;

Conceitos Básicos

- Diagramas de Conjuntos



Conceitos Básicos

Pertinência e Continência

- Pertinência: entre elementos e conjuntos **elemento ∈ conjunto**;
- Continência: entre conjuntos **elemento ⊂ conjunto**;
  B ⊂ A : B é um subconjunto de A ;

- **Note que: A = B → A ⊂ B e B ⊂ A ;**

Conceitos Básicos

Conjuntos e Elementos

- Elemento é cada objeto distinto de um conjunto:
  - **Bruno $\in$ A , x = 1 $\rightarrow$ x $\in$ B**
- Conjunto Vazio: conjunto sem elementos;
  - **E = Estudantes que comecem com a letra C no conjunto A = { } $\rightarrow$ E = { };**
- Conjunto Unitário: conjunto com um único elemento;
  - **F = {n : n é inteiro e $1 \leq n < 2$} = {1} ;**

Conceitos Básicos

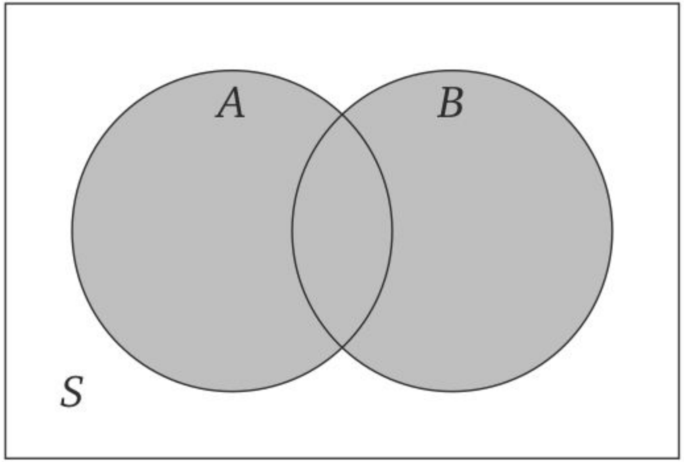
Conjuntos e Elementos

- Conjunto Universo: TODOS os elementos em um dado contexto
  - **Ex: Pesquisa de opinião, S = { eleitores cadastrados na zona estudada }**
- Conceito importante: **Conjunto Finito × Infinito × Infinitamente Contável;**

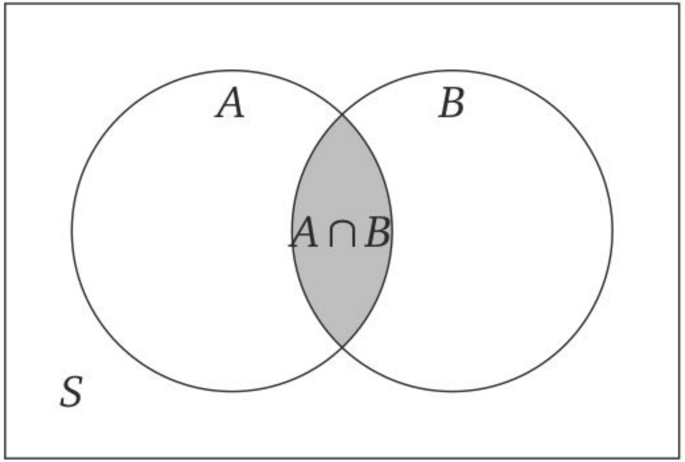
Operações com conjuntos

- União $\cup$, adição, operação OU:
  - **$A + B = A \cup B$** elementos pertencem a A **OU** a B **OU** a ambos;
- Intersecção $\cap$, produto, operação E:
  - **$AB = A \cap B$** elementos pertencem a A **E** a B simultaneamente;

Operações com conjuntos



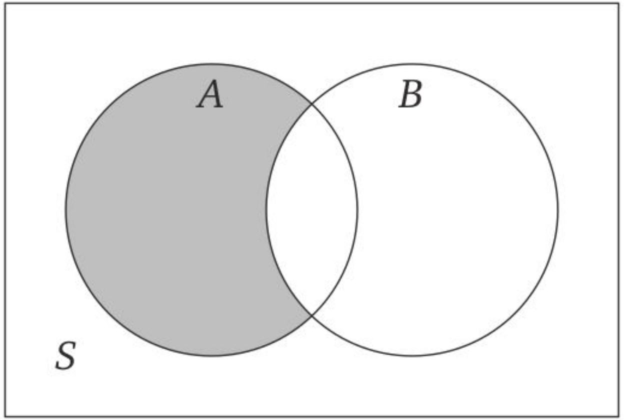
$A \cup B$



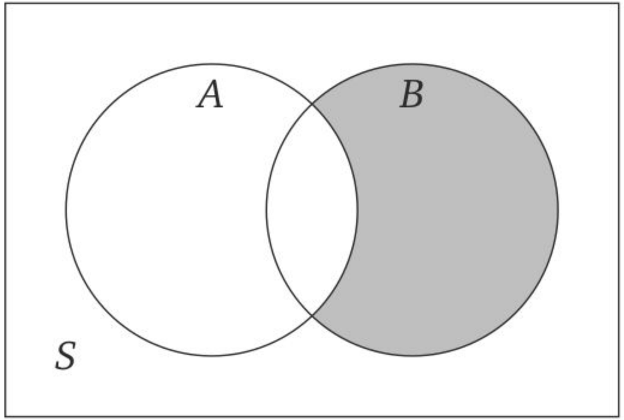
$A \cap B$

Operações com conjuntos

- Diferença: **A – B** elementos que pertencem a A exceto os que pertencem a B ;



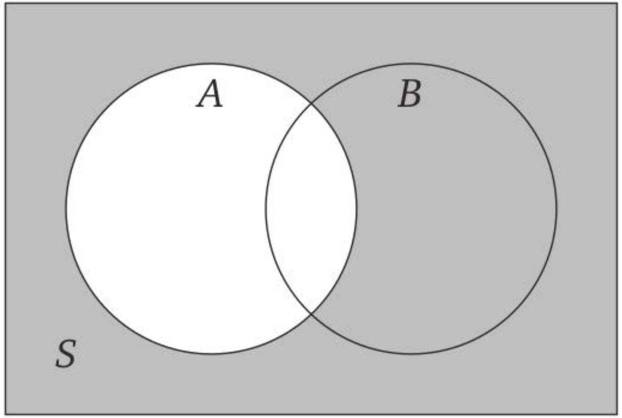
$A - B$



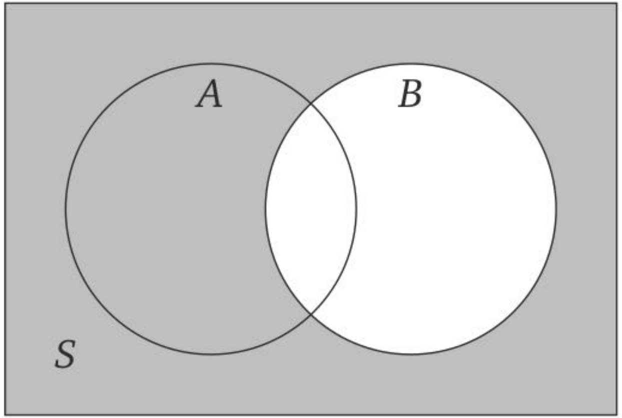
$B - A$

Operações com conjuntos

- Complementar: **$A = A^C = S - A$** todos os elementos de S exceto os que pertencem a A ;



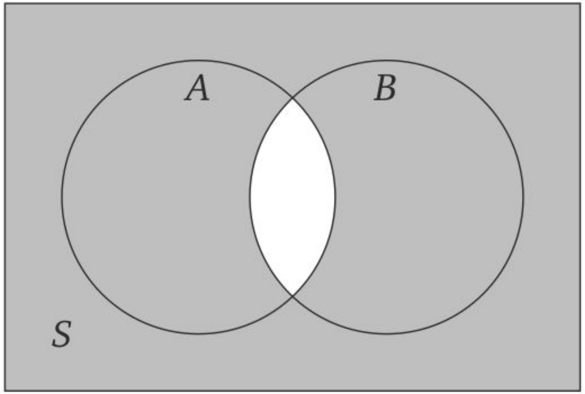
A^C



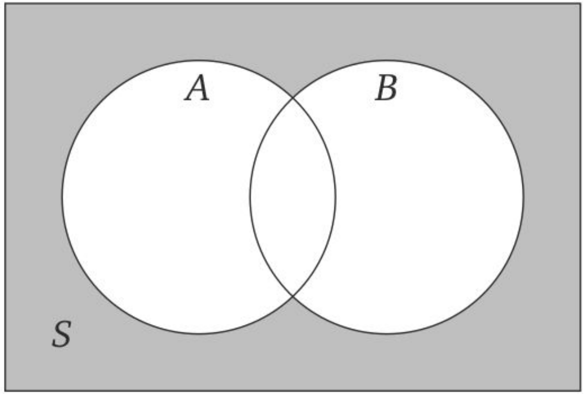
B^C

Operações com conjuntos

- As operações de união e intersecção aplicadas a complementar



$(A \cap B)^C$



$(A \cup B)^C$

Operações com conjuntos

EXEMPLOS

- A = {1, 2, 3, 5, 6, 7} e B = {4, 5, 6, 7}

- Determinar:
    - $A \cup B$;
    - $A \cap B$;
    - $A - B$;
    - $B - A$;

Operações com conjuntos

- Síntese de Propriedades

Comutativa	$A \cup B = B \cup A$ $A \cap B = B \cap A$
Associativa	$(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$ $(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$

Operações com conjuntos

- Síntese de Propriedades

Distributiva	$(A \cup B) \cap C = (A \cap C) \cup (B \cap C)$ $(A \cap B) \cup C = (A \cup C) \cap (B \cup C)$
Absorção	$(A \cup B) \cap A = A$ $(A \cap B) \cup A = A$
Leis de De Morgan	$A - (B \cup C) = (A - B) \cap (A - C)$ $A - (B \cap C) = (A - B) \cup (A - C)$

Introdução

Vamos dar enfoque a eventos que se relacionam com variáveis que expressam grandezas **quantitativas de nível ordinal**, ou seja, grandezas discretas, enumeráveis;

Frequência e Probabilidades

- Suponha que o experimento ξ é repetido N vezes;
- Os eventos A e B são associados a ξ e ocorrem N_A e N_B vezes, respectivamente;
- Define-se Frequência Relativa do evento A :

$$f_a = \frac{N_A}{N}$$

Frequência e Probabilidades

Propriedades:

- $0 \leq f_A \leq 1$;
- $f_A = 1 \Leftrightarrow N_A = N$ (A ocorre em todas as repetições);
- $f_A = 0 \Leftrightarrow N_A = 0$ (A jamais ocorre);
- Se A e B forem mutuamente exclusivos, $f_{A \cap B} = 0$, ou seja, $f_{A \cup B} = f_A + f_B$

Frequência e Probabilidades

Frequência × Probabilidades:

- Dado um experimento aleatório ξ, procura-se um número P que indique o quão provável é a ocorrência de um evento A .
- Abordagem da Frequência Relativa:

$$\boxed{P(A) = \lim_{N\to\infty} f_A = \lim_{N\to\infty} \frac{N_A}{N}}$$

- Na prática, N deve ser grande. Quanto? N = 100, N = 3000, N = 50000, $\cdots$?

Frequência e Probabilidades

Lei dos Grandes Números

- A Lei dos Grandes Números nos diz que as estimativas dadas pelas frequências relativas tendem a ficar melhores com mais observações.

$$\boxed{P(A) = \lim_{N \to \infty} f_A = \lim_{N \to \infty} \frac{N_A}{N}}$$

Frequência e Probabilidades

Frequência × Probabilidades:

- A frequência relativa f_A depende de uma realização específica do experimento ξ;
- A probabilidade de A não deve depender da sorte (acaso);
- **Importante relembrar, o resultado de um único evento é aleatório, mas a probabilidade de ocorrência do mesmo não!**

Experimentos Aleatórios e Espaços Amostrais

Para definir um Experimento Aleatório E é preciso conhecer

- O **Espaço Amostral:** conjunto de todos os resultados possíveis de ξ;
- Os **Eventos**: subconjuntos do Espaço Amostral, i.e. qualquer conjunto de resultados possíveis;
- As **probabilidades** de todos os possíveis eventos.

Experimentos Aleatórios e Espaços Amostrais

Exemplos

- ξ_1: Número de horas de trabalho para conclusão de uma atividade;
- ξ_2: Número de peças defeituosas de um lote de 10 peças até que a terceira peça defeituosa seja retirada;
- ξ_3: Medida do tempo de duração de vida de uma lâmpada;
- ξ_4: Contagem do número de caras obtido após quatro lançamentos de uma moeda;

Lei Discreta Uniforme

Se todos os resultados que compõem o evento A forem **equiprováveis**, então a probabilidade do evento A é dada por:

$$P(A) = \frac{\text{Nº de resultados } \textit{favoráveis} \text{ ao evento } A}{\text{Nº de Resultados Possíveis}}$$

Equiprovável: mesma probabilidade de ocorrência

Axiomas da Probabilidade

Propriedades

- $P(\{\ \}) = 0$
  - Qual a probabilidade de não sair nenhum número no lançamento de um dado de seis faces?
- $P(A^c) = 1 - P(A)$
  - Qual a probabilidade de sair o número 4 em um dado de 6 faces?
  - E a probabilidade de saírem os números 1, 2, 3, 5 ou 6?
- Para eventos A e B quaisquer, tem-se:

  $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$ → Diagrama de Ven

Lei Discreta Uniforme

Exemplos

- Dois dados não-viciados são lançados. Qual a probabilidade de a soma dos resultados dos dois dados ser igual a 7?
- Um baralho contém as cartas 2, 3, 5, 6, 7 e 9 nos 4 naipes. Qual a probabilidade de ocorrência de uma carta **PAR** retirada ao acaso?
- E se houver apenas 3 naipes?

Axiomas da Probabilidade

Definição Axiomática

- Seja S o espaço amostral de um experimento ξ;
- A cada evento $A \in S$ associa-se um número real **P(A)**, denominado **Probabilidade** de A;
- $P(A) : S \rightarrow R$, ou seja, associa um evento no espaço amostral S a um número real;

Axiomas da Probabilidade

Definição Axiomática

P(A) satisfaz aos seguintes **Axiomas da Probabilidade**:

1. $0 \leq P(A) \leq 1$;
2. $P(S) = 1$;
3. Se $P(A \cup B) = P(A) + P(B) \Leftrightarrow$ A e B são **mutuamente exclusivos**;
   a. Em outras palavras, $P(A \cap B)$ é nula.

Axiomas da Probabilidade

Extrapolando o Axioma 3 – Eventos mutuamente exclusivos

- Para um número K finito de eventos:

$$P(A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_K) = P\left(\bigcup_{k=1}^{K} A_k\right) = \sum_{k=1}^{K} P(A_k)$$

- Para um número infinito de eventos (K → ∞)

$$P\left(\bigcup_{k=1}^{K} A_k\right) = P(A_1) + P(A_2) + \cdots + P(A_k) + \cdots$$

Axiomas da Probabilidade

Propriedades

- $P(\{\ \}) = 0$
  - Qual a probabilidade de não sair nenhum número no lançamento de um dado de seis faces?
- $P(A^c) = 1 - P(A)$
  - Qual a probabilidade de sair o número 4 em um dado de 6 faces?
  - E a probabilidade de saírem os números 1, 2, 3, 5 ou 6?

Axiomas da Probabilidade

Extrapolando o Axioma 3 – Eventos Quaisquer

- Para eventos A e B quaisquer, tem-se:

  $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) \rightarrow$ Diagrama de Ven

- Para eventos A, B e C quaisquer, tem-se:

  $$\begin{aligned} P(A \cup B \cup C) &= P(A) + P(B) + P(C) \\ &- P(A \cap B) - P(A \cap C) - P(B \cap C) \\ &+ P(A \cap B \cap C) \end{aligned}$$

- E como fica para K eventos $A_1, A_2, \cdots, A_K$?

Axiomas da Probabilidade

Exemplos

Considere um experimento ξ cujo espaço amostral é dado por S = 1, 2, 3, $\cdots$. Sabe-se que $P(n) = 2^{-n}$. Determine a probabilidade de n ser número par;

E a probabilidade de um número ímpar?

Lembrando que, para uma PG infinita: $$S = \frac{a_1}{1 - q}$$

Regras de Probabilidade

Regra da adição: Observe a notação de tabela de dupla entrada ou tabela de contingência a seguir:

	A	B	Total
X	$P(A \cap X)$	$P(B \cap X)$	$P(X)$
Y	$P(A \cap Y)$	$P(B \cap Y)$	$P(Y)$
Total	$P(A)$	$P(B)$	1

Probabilidades marginais: são as probabilidades individuais nas margens da tabela
Probabilidades conjuntas: são as probabilidades de ocorrência de dois eventos simultâneos

Regras de Probabilidade

EXEMPLO: Considere a tabela de dupla entrada abaixo, que mostra o número de estudantes por gênero (F e M) e turma (A e B)

	F	M	Total
A	21	5	26
B	16	8	24
Total	37	13	50

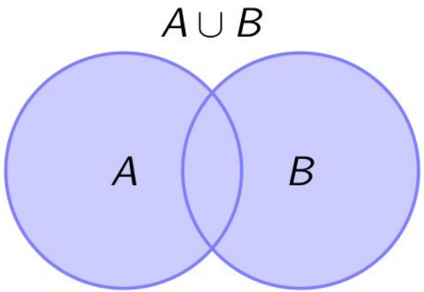
Determine a probabilidade de um estudante selecionado ao acaso ser:

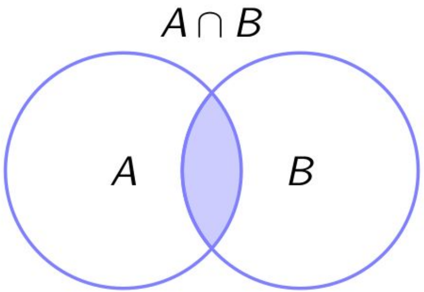
- Do gênero feminino, P(F)
- Do gênero masculino, P(M)
- Da turma A, P(A)
- Da turma B, P(B)

Regras de Probabilidade

Regra da adição: A probabilidade da união entre dois eventos quaisquer, A e B, é dada pela regra da adição de probabilidades:

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$



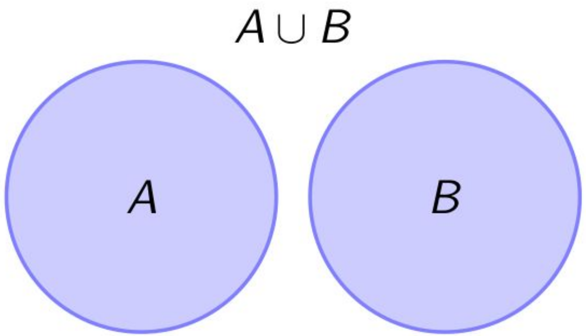


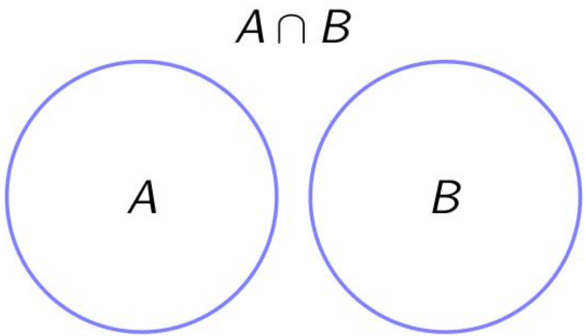
Regras de Probabilidade

Regra da adição: Note que a regra da adição pode ser simplificada, **se e somente se** os eventos A e B forem **disjuntos** (ou mutuamente exclusivos)

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B)$$

$$\text{pois, neste caso, } A \cap B = \varnothing \Rightarrow P(A \cap B) = P(\varnothing) = 0$$

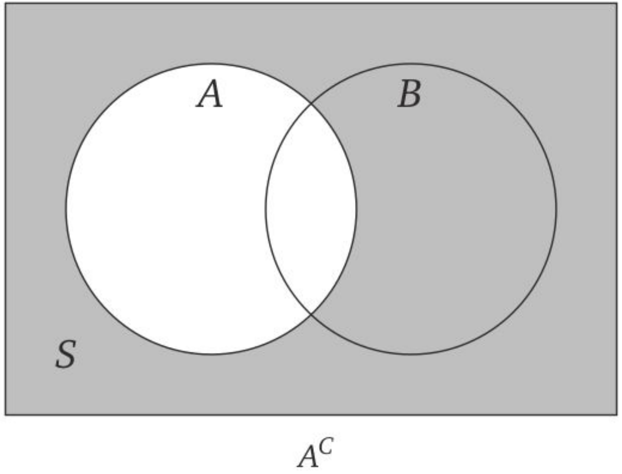




Regras de Probabilidade

Regra do complementar: Como consequência da regra da adição, obtemos que, para qualquer evento A:

$P(A) = 1 - P(A^C)$



Regras de Probabilidade

Exercício: Um rio pode ter três condições de risco:

- 40% das amostras apresentam coliformes fecais em excesso;
- 30% apresentam pH fora da faixa permitida;
- 12% apresentam ambos os problemas.

1. Qual a probabilidade de uma amostra apresentar pelo menos um problema?
2. Qual a probabilidade de apresentar os dois problemas?
3. Qual a probabilidade de uma amostra estar sem problemas?

Aula 03 - Frequências e Axiomas de Probabilidade

Probabilidade e Estatística - CRT 0029
Prof. Marciel Barros Pereira
Ciência da Computação / Sistemas de Informação

2025.1