Álgebra Linear - Engenharia Ambiental e Engenharia de Minas

Dr. Giannini Italino Alves Vieira

Universidade Federal do Ceará - Campus de Crateús

2024

1 Transformações Lineares

Transformações lineares

Veremos, a seguir, um dos principais conceitos da álgebra linear, que é o conceito de transformações lineares e suas representações por meio de matrizes. Intuitivamente, uma transformação pode ser pensada como uma aplicação que preserva a soma de vetores e a multiplicação por escalar, que são as duas operações básicas de um espaço vetorial.

Definição: Sejam V e U espaços vetoriais sobre um mesmo corpo K. Dizemos que uma aplicação $T : V \to U$ é linear ou uma transformação linear, se satisfizer as duas condições a seguir:

(i) Para quaisquer vetores $v_1, v_2 \in V$ então vale $T(v_1 + v_2) = T(v_1) + T(v_2)$;

(ii) Para quaisquer escalar $k \in K$ e vetor $v \in V$, então vale $T(kv) = kT(v)$.

Observações: Note que se $T : V \to U$ é uma transformação linear, então decorre que:

- Se substituirmos $k = 0$ na condição (ii), obtemos $T(0) = 0$. Assim, qualquer transformação linear leva o vetor nulo em vetor nulo;
- Para quaisquer escalares $a_1, a_2 \in K$ e vetores $v_1, v_2 \in V$ temos que $T(a_1 v_1 + a_2 v_2) = T(a_1 v_1) + T(a_2 v_2) = a_1 T(v_1) + a_2 T(v_2)$;
- Mais geralmente, para quaisquer escalares $a_1, a_2, \ldots, a_n \in K$ e vetores $v_1, v_2, \ldots, v_n \in V$ temos que $T(a_1 v_1 + \ldots + a_n v_n) = a_1 T(v_1) + \ldots + a_n T(v_n)$.

Transformações lineares

Veremos, a seguir, um dos principais conceitos da álgebra linear, que é o conceito de transformações lineares e suas representações por meio de matrizes. Intuitivamente, uma transformação pode ser pensada como uma aplicação que preserva a soma de vetores e a multiplicação por escalar, que são as duas operações básicas de um espaço vetorial.
Definição: Sejam V e U espaços vetoriais sobre um mesmo corpo K. Dizemos que uma aplicação $T : V \to U$ é linear ou uma transformação linear, se satisfizer as duas condições a seguir:

(i) Para quaisquer vetores $v_1, v_2 \in V$ então vale $T(v_1 + v_2) = T(v_1) + T(v_2)$;

(ii) Para quaisquer escalar $k \in K$ e vetor $v \in V$, então vale $T(kv) = kT(v)$.

Observações: Note que se $T : V \to U$ é uma transformação linear, então decorre que:

- Se substituirmos $k = 0$ na condição (ii), obtemos $T(0) = 0$. Assim, qualquer transformação linear leva o vetor nulo em vetor nulo;
- Para quaisquer escalares $a_1, a_2 \in K$ e vetores $v_1, v_2 \in V$ temos que $T(a_1 v_1 + a_2 v_2) = T(a_1 v_1) + T(a_2 v_2) = a_1 T(v_1) + a_2 T(v_2)$;
- Mais geralmente, para quaisquer escalares $a_1, a_2, \dots, a_n \in K$ e vetores $v_1, v_2, \dots, v_n \in V$ temos que $T(a_1 v_1 + \dots + a_n v_n) = a_1 T(v_1) + \dots + a_n T(v_n)$.

Transformações lineares

Veremos, a seguir, um dos principais conceitos da álgebra linear, que é o conceito de transformações lineares e suas representações por meio de matrizes. Intuitivamente, uma transformação pode ser pensada como uma aplicação que preserva a soma de vetores e a multiplicação por escalar, que são as duas operações básicas de um espaço vetorial.
Definição: Sejam V e U espaços vetoriais sobre um mesmo corpo K. Dizemos que uma aplicação $T : V \to U$ é linear ou uma transformação linear, se satisfizer as duas condições a seguir:

(i) Para quaisquer vetores $v_1, v_2 \in V$ então vale $T(v_1 + v_2) = T(v_1) + T(v_2)$;

(ii) Para quaisquer escalar $k \in K$ e vetor $v \in V$, então vale $T(kv) = kT(v)$.

Observações: Note que se $T : V \to U$ é uma transformação linear, então decorre que:

- Se substituirmos $k = 0$ na condição (ii), obtemos $T(0) = 0$. Assim, qualquer transformação linear leva o vetor nulo em vetor nulo;
- Para quaisquer escalares $a_1, a_2 \in K$ e vetores $v_1, v_2 \in V$ temos que $T(a_1 v_1 + a_2 v_2) = T(a_1 v_1) + T(a_2 v_2) = a_1 T(v_1) + a_2 T(v_2)$;
- Mais geralmente, para quaisquer escalares $a_1, a_2, \ldots, a_n \in K$ e vetores $v_1, v_2, \ldots, v_n \in V$ temos que $T(a_1 v_1 + \ldots + a_n v_n) = a_1 T(v_1) + \ldots + a_n T(v_n)$.

Transformações lineares

Veremos, a seguir, um dos principais conceitos da álgebra linear, que é o conceito de transformações lineares e suas representações por meio de matrizes. Intuitivamente, uma transformação pode ser pensada como uma aplicação que preserva a soma de vetores e a multiplicação por escalar, que são as duas operações básicas de um espaço vetorial.
Definição: Sejam V e U espaços vetoriais sobre um mesmo corpo K. Dizemos que uma aplicação $T : V \to U$ é linear ou uma transformação linear, se satisfizer as duas condições a seguir:

(i) Para quaisquer vetores $v_1, v_2 \in V$ então vale $T(v_1 + v_2) = T(v_1) + T(v_2)$;

(ii) Para quaisquer escalar $k \in K$ e vetor $v \in V$, então vale $T(kv) = kT(v)$.

Observações: Note que se $T : V \to U$ é uma transformação linear, então decorre que:

- Se substituirmos $k = 0$ na condição (ii), obtemos $T(0) = 0$. Assim, qualquer transformação linear leva o vetor nulo em vetor nulo;
- Para quaisquer escalares $a_1, a_2 \in K$ e vetores $v_1, v_2 \in V$ temos que $T(a_1 v_1 + a_2 v_2) = T(a_1 v_1) + T(a_2 v_2) = a_1 T(v_1) + a_2 T(v_2)$;
- Mais geralmente, para quaisquer escalares $a_1, a_2, \ldots, a_n \in K$ e vetores $v_1, v_2, \ldots, v_n \in V$ temos que $T(a_1 v_1 + \ldots + a_n v_n) = a_1 T(v_1) + \ldots + a_n T(v_n)$.

Exemplos

Exemplo 4

Seja a aplicação $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ definida por $T(x, y) = (2x, 2y)$. Então T é uma transformação linear.

De fato, note que T é transformação linear, uma vez que:
(i) se $v_1 = (x_1, y_1)$ e $v_2 = (x_2, y_2)$ são vetores quaisquer de $\mathbb{R}^2$ então $T(v_1 + v_2) = T((x_1, y_1) + (x_2, y_2)) = T(x_1 + x_2, y_1 + y_2) = (2(x_1 + x_2), 2(y_1 + y_2)) = (2x_1 + 2x_2, 2y_1 + 2y_2) = (2x_1, 2y_1) + (2x_2, 2y_2) = T(x_1, y_1) + T(x_2, y_2) = T(v_1) + T(v_2)$
e

(ii) se $v = (x, y)$ é vetor qualquer de $\mathbb{R}^2$ e se k é um escalar qualquer então $T(kv) = T(k(x, y)) = T(kx, ky) = (2(kx), 2(ky)) = (2kx, 2ky) = k(2x, 2y) = kT(x, y)$.
Portanto, T, definida acima, é uma transformação linear de $V = \mathbb{R}^2$ em $U = \mathbb{R}^2$.

Note que a transformação linear acima tem uma interpretação geométrica. Ela é uma transformação que leva cada vetor v do plano em um vetor de mesma direção e sentido de v, só que de módulo maior.

Exemplos

Exemplo 4

Seja a aplicação $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ definida por $T(x, y) = (2x, 2y)$. Então T é uma transformação linear.

De fato, note que T é transformação linear, uma vez que:
(i) se $v_1 = (x_1, y_1)$ e $v_2 = (x_2, y_2)$ são vetores quaisquer de $\mathbb{R}^2$ então
$T(v_1 + v_2) = T((x_1, y_1) + (x_2, y_2)) = T(x_1 + x_2, y_1 + y_2) = (2(x_1 + x_2), 2(y_1 + y_2)) = (2x_1 + 2x_2, 2y_1 + 2y_2) = (2x_1, 2y_1) + (2x_2, 2y_2) = T(x_1, y_1) + T(x_2, y_2) = T(v_1) + T(v_2)$
e

(ii) se $v = (x, y)$ é vetor qualquer de $\mathbb{R}^2$ e se k é um escalar qualquer então $T(kv) = T(k(x, y)) = T(kx, ky) = (2(kx), 2(ky)) = (2kx, 2ky) = k(2x, 2y) = kT(x, y)$.
Portanto, T, definida acima, é uma transformação linear de $V = \mathbb{R}^2$ em $U = \mathbb{R}^2$.

Note que a transformação linear acima tem uma interpretação geométrica. Ela é uma transformação que leva cada vetor v do plano em um vetor de mesma direção e sentido de v, só que de módulo maior.

Exemplo 4

Seja a aplicação $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ definida por $T(x, y) = (2x, 2y)$. Então T é uma transformação linear.

De fato, note que T é transformação linear, uma vez que:
(i) se $v_1 = (x_1, y_1)$ e $v_2 = (x_2, y_2)$ são vetores quaisquer de $\mathbb{R}^2$ então $T(v_1 + v_2) = T((x_1, y_1) + (x_2, y_2)) = T(x_1 + x_2, y_1 + y_2) = (2(x_1 + x_2), 2(y_1 + y_2)) = (2x_1 + 2x_2, 2y_1 + 2y_2) = (2x_1, 2y_1) + (2x_2, 2y_2) = T(x_1, y_1) + T(x_2, y_2) = T(v_1) + T(v_2)$
e

(ii) se $v = (x, y)$ é vetor qualquer de $\mathbb{R}^2$ e se k é um escalar qualquer então $T(kv) = T(k(x, y)) = T(kx, ky) = (2(kx), 2(ky)) = (2kx, 2ky) = k(2x, 2y) = kT(x, y)$.

Portanto, T, definida acima, é uma transformação linear de $V = \mathbb{R}^2$ em $U = \mathbb{R}^2$.

Note que a transformação linear acima tem uma interpretação geométrica. Ela é uma transformação que leva cada vetor v do plano em um vetor de mesma direção e sentido de v, só que de módulo maior.

Exemplos

Exemplo 4

Seja a aplicação $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ definida por $T(x, y) = (2x, 2y)$. Então T é uma transformação linear.

De fato, note que T é transformação linear, uma vez que:
(i) se $v_1 = (x_1, y_1)$ e $v_2 = (x_2, y_2)$ são vetores quaisquer de $\mathbb{R}^2$ então $T(v_1 + v_2) = T((x_1, y_1) + (x_2, y_2)) = T(x_1 + x_2, y_1 + y_2) = (2(x_1 + x_2), 2(y_1 + y_2)) = (2x_1 + 2x_2, 2y_1 + 2y_2) = (2x_1, 2y_1) + (2x_2, 2y_2) = T(x_1, y_1) + T(x_2, y_2) = T(v_1) + T(v_2)$
e

(ii) se $v = (x, y)$ é vetor qualquer de $\mathbb{R}^2$ e se k é um escalar qualquer então $T(kv) = T(k(x, y)) = T(kx, ky) = (2(kx), 2(ky)) = (2kx, 2ky) = k(2x, 2y) = kT(x, y)$.
Portanto, T, definida acima, é uma transformação linear de $V = \mathbb{R}^2$ em $U = \mathbb{R}^2$.

Note que a transformação linear acima tem uma interpretação geométrica. Ela é uma transformação que leva cada vetor v do plano em um vetor de mesma direção e sentido de v, só que de módulo maior.

Exemplo 4

Seja a aplicação $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ definida por $T(x, y) = (2x, 2y)$. Então T é uma transformação linear.

De fato, note que T é transformação linear, uma vez que:
(i) se $v_1 = (x_1, y_1)$ e $v_2 = (x_2, y_2)$ são vetores quaisquer de $\mathbb{R}^2$ então $T(v_1 + v_2) = T((x_1, y_1) + (x_2, y_2)) = T(x_1 + x_2, y_1 + y_2) = (2(x_1 + x_2), 2(y_1 + y_2)) = (2x_1 + 2x_2, 2y_1 + 2y_2) = (2x_1, 2y_1) + (2x_2, 2y_2) = T(x_1, y_1) + T(x_2, y_2) = T(v_1) + T(v_2)$
e
(ii) se $v = (x, y)$ é vetor qualquer de $\mathbb{R}^2$ e se k é um escalar qualquer então $T(kv) = T(k(x, y)) = T(kx, ky) = (2(kx), 2(ky)) = (2kx, 2ky) = k(2x, 2y) = kT(x, y)$.
Portanto, T, definida acima, é uma transformação linear de $V = \mathbb{R}^2$ em $U = \mathbb{R}^2$.

Note que a transformação linear acima tem uma interpretação geométrica. Ela é uma transformação que leva cada vetor v do plano em um vetor de mesma direção e sentido de v, só que de módulo maior.

Exemplo 5

Seja a aplicação $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ definida por $T(x, y, z) = (x, y, 0)$. Então T é uma transformação linear.

De fato, note que T é transformação linear, uma vez que:
(i) se $v_1 = (x_1, y_1, z_1)$ e $v_2 = (x_2, y_2, z_2)$ são vetores quaisquer de $\mathbb{R}^3$ então
$T(v_1 + v_2) = T((x_1, y_1, z_1) + (x_2, y_2, z_2)) = T(x_1 + x_2, y_1 + y_2, z_1 + z_2) = (x_1+x_2, y_1+y_2, 0) = (x_1, y_1, 0)+(x_2, y_2, 0) = T(x_1, y_1, z_1)+T(x_2, y_2, z_2) = T(v_1)+T(v_2)$
e

(ii) se $v = (x, y, z)$ é vetor qualquer de $\mathbb{R}^3$ e se k é um escalar qualquer então
$T(kv) = T(k(x, y, z)) = T(kx, ky, kz) = (kx, ky, 0)) = k(x, y, 0) = kT(x, y, z)$.

Portanto, T, definida acima, é uma transformação linear de $V = \mathbb{R}^3$ em $U = \mathbb{R}^3$.

Note que a transformação linear acima é uma projeção sobre o plano xy.

Exemplo 5

Seja a aplicação $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ definida por $T(x, y, z) = (x, y, 0)$. Então T é uma transformação linear.

De fato, note que T é transformação linear, uma vez que:
(i) se $v_1 = (x_1, y_1, z_1)$ e $v_2 = (x_2, y_2, z_2)$ são vetores quaisquer de $\mathbb{R}^3$ então
$T(v_1 + v_2) = T((x_1, y_1, z_1) + (x_2, y_2, z_2)) = T(x_1 + x_2, y_1 + y_2, z_1 + z_2) =$
$(x_1+x_2, y_1+y_2, 0) = (x_1, y_1, 0)+(x_2, y_2, 0) = T(x_1, y_1, z_1)+T(x_2, y_2, z_2) = T(v_1)+T(v_2)$
e
(ii) se $v = (x, y, z)$ é vetor qualquer de $\mathbb{R}^3$ e se k é um escalar qualquer então
$T(kv) = T(k(x, y, z)) = T(kx, ky, kz) = (kx, ky, 0)) = k(x, y, 0) = kT(x, y, z)$.
Portanto, T, definida acima, é uma transformação linear de $V = \mathbb{R}^3$ em $U = \mathbb{R}^3$.

Note que a transformação linear acima é uma projeção sobre o plano xy.

Exemplo 5

Seja a aplicação $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ definida por $T(x, y, z) = (x, y, 0)$. Então T é uma transformação linear.

De fato, note que T é transformação linear, uma vez que:
(i) se $v_1 = (x_1, y_1, z_1)$ e $v_2 = (x_2, y_2, z_2)$ são vetores quaisquer de $\mathbb{R}^3$ então
$T(v_1 + v_2) = T((x_1, y_1, z_1) + (x_2, y_2, z_2)) = T(x_1 + x_2, y_1 + y_2, z_1 + z_2) =$
$(x_1+x_2, y_1+y_2, 0) = (x_1, y_1, 0)+(x_2, y_2, 0) = T(x_1, y_1, z_1)+T(x_2, y_2, z_2) = T(v_1)+T(v_2)$
e

(ii) se $v = (x, y, z)$ é vetor qualquer de $\mathbb{R}^3$ e se k é um escalar qualquer então
$T(kv) = T(k(x, y, z)) = T(kx, ky, kz) = (kx, ky, 0)) = k(x, y, 0) = kT(x, y, z)$.

Portanto, T, definida acima, é uma transformação linear de $V = \mathbb{R}^3$ em $U = \mathbb{R}^3$.

Note que a transformação linear acima é uma projeção sobre o plano xy.

Exemplos

Exemplo 5

Seja a aplicação $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ definida por $T(x, y, z) = (x, y, 0)$. Então T é uma transformação linear.

De fato, note que T é transformação linear, uma vez que:
(i) se $v_1 = (x_1, y_1, z_1)$ e $v_2 = (x_2, y_2, z_2)$ são vetores quaisquer de $\mathbb{R}^3$ então
$T(v_1 + v_2) = T((x_1, y_1, z_1) + (x_2, y_2, z_2)) = T(x_1 + x_2, y_1 + y_2, z_1 + z_2) =$
$(x_1+x_2, y_1+y_2, 0) = (x_1, y_1, 0)+(x_2, y_2, 0) = T(x_1, y_1, z_1)+T(x_2, y_2, z_2) = T(v_1)+T(v_2)$
e

(ii) se $v = (x, y, z)$ é vetor qualquer de $\mathbb{R}^3$ e se k é um escalar qualquer então
$T(kv) = T(k(x, y, z)) = T(kx, ky, kz) = (kx, ky, 0)) = k(x, y, 0) = kT(x, y, z)$.
Portanto, T, definida acima, é uma transformação linear de $V = \mathbb{R}^3$ em $U = \mathbb{R}^3$.

Note que a transformação linear acima é uma projeção sobre o plano xy.

Exemplo 5

Seja a aplicação $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ definida por $T(x, y, z) = (x, y, 0)$. Então T é uma transformação linear.

De fato, note que T é transformação linear, uma vez que:
(i) se $v_1 = (x_1, y_1, z_1)$ e $v_2 = (x_2, y_2, z_2)$ são vetores quaisquer de $\mathbb{R}^3$ então
$T(v_1 + v_2) = T((x_1, y_1, z_1) + (x_2, y_2, z_2)) = T(x_1 + x_2, y_1 + y_2, z_1 + z_2) =$
$(x_1+x_2, y_1+y_2, 0) = (x_1, y_1, 0)+(x_2, y_2, 0) = T(x_1, y_1, z_1)+T(x_2, y_2, z_2) = T(v_1)+T(v_2)$
e

(ii) se $v = (x, y, z)$ é vetor qualquer de $\mathbb{R}^3$ e se k é um escalar qualquer então
$T(kv) = T(k(x, y, z)) = T(kx, ky, kz) = (kx, ky, 0)) = k(x, y, 0) = kT(x, y, z)$.
Portanto, T, definida acima, é uma transformação linear de $V = \mathbb{R}^3$ em $U = \mathbb{R}^3$.

Note que a transformação linear acima é uma projeção sobre o plano xy.

Exemplo 6

Seja a aplicação $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ definida por $T(x, y) = (x + 1, y + 2)$. Então T NÃO é uma transformação linear.

Note que se uma aplicação T não satisfaz, ao menos uma das condições (i) e (ii) da definição de transformação linear, então isso é suficiente para concluir que ela não é uma transformação linear.

Note que a primeira observação que fizemos acima (após a definição de transformação linear), afirma que toda transformação linear deve levar o vetor nulo do domínio da transformação no vetor nulo do contradomínio da transformação

Observe ainda que $T(0, 0) = (0 + 1, 0 + 2) = (1, 2) \neq (0, 0)$.

Portanto, podemos concluir que T não é uma transformação linear.

Exemplos

Exemplo 6

Seja a aplicação $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ definida por $T(x, y) = (x + 1, y + 2)$. Então T NÃO é uma transformação linear.

Note que se uma aplicação T não satisfaz, ao menos uma das condições (i) e (ii) da definição de transformação linear, então isso é suficiente para concluir que ela não é uma transformação linear.

Note que a primeira observação que fizemos acima (após a definição de transformação linear), afirma que toda transformação linear deve levar o vetor nulo do domínio da transformação no vetor nulo do contradomínio da transformação

Observe ainda que $T(0, 0) = (0 + 1, 0 + 2) = (1, 2) \neq (0, 0)$.

Portanto, podemos concluir que T não é uma transformação linear.

Exemplo 6

Seja a aplicação $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ definida por $T(x, y) = (x + 1, y + 2)$. Então T NÃO é uma transformação linear.

Note que se uma aplicação T não satisfaz, ao menos uma das condições (i) e (ii) da definição de transformação linear, então isso é suficiente para concluir que ela não é uma transformação linear.

Note que a primeira observação que fizemos acima (após a definição de transformação linear), afirma que toda transformação linear deve levar o vetor nulo do domínio da transformação no vetor nulo do contradomínio da transformação

Observe ainda que $T(0, 0) = (0 + 1, 0 + 2) = (1, 2) \neq (0, 0)$.

Portanto, podemos concluir que T não é uma transformação linear.

Exemplo 6

Seja a aplicação $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ definida por $T(x, y) = (x + 1, y + 2)$. Então T NÃO é uma transformação linear.

Note que se uma aplicação T não satisfaz, ao menos uma das condições (i) e (ii) da definição de transformação linear, então isso é suficiente para concluir que ela não é uma transformação linear.

Note que a primeira observação que fizemos acima (após a definição de transformação linear), afirma que toda transformação linear deve levar o vetor nulo do domínio da transformação no vetor nulo do contradomínio da transformação

Observe ainda que $T(0, 0) = (0 + 1, 0 + 2) = (1, 2) \neq (0, 0)$.

Portanto, podemos concluir que T não é uma transformação linear.

Exemplo 6

Seja a aplicação $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ definida por $T(x, y) = (x + 1, y + 2)$. Então T NÃO é uma transformação linear.

Note que se uma aplicação T não satisfaz, ao menos uma das condições (i) e (ii) da definição de transformação linear, então isso é suficiente para concluir que ela não é uma transformação linear.

Note que a primeira observação que fizemos acima (após a definição de transformação linear), afirma que toda transformação linear deve levar o vetor nulo do domínio da transformação no vetor nulo do contradomínio da transformação

Observe ainda que $T(0, 0) = (0 + 1, 0 + 2) = (1, 2) \neq (0, 0)$.

Portanto, podemos concluir que T não é uma transformação linear.

Teorema sobre Transformações lineares

Um fato interessante a respeito de transformações lineares é o de que elas ficam perfeitamente determinadas conhecendo-se apenas seu valor nos elementos de uma base.

Teorema

Teorema: Sejam V e U dois espaços vetoriais reais e seja $\{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$ uma base de V e $\{u_1, u_2, \ldots, u_n\}$ elementos arbitrários de U. Então, existe uma ÚNICA transformação linear $T : V \to U$ tal que $T(v_1) = u_1$, $T(v_2) = u_2$, ..., $T(v_n) = u_n$.

Note que se $v = a_1 v_1 + a_2 v_2 + \ldots + a_n v_n$, então a transformação T é obtida da forma

$$T(v) = T(a_1 v_1 + \ldots + a_n v_n) = a_1 T(v_1) + \ldots a_n T(v_n) = a_1 u_1 + \ldots a_n u_n.$$

Exemplo 7

Ex. 7: Qual é a transformação linear $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ tal que $T(1,0) = (2,-1,0)$ e $T(0,1) = (0,0,1)$?

Note primeiro que os vetores $v_1 = (1,0)$ e $v_2 = (0,1)$ formam uma base do domínio da transformação, isto é de $\mathbb{R}^2$ e que $u_1 = (2,-1,0)$ e $u_2 = (0,0,1)$ são vetores do $\mathbb{R}^3$.

Teorema sobre Transformações lineares

Um fato interessante a respeito de transformações lineares é o de que elas ficam perfeitamente determinadas conhecendo-se apenas seu valor nos elementos de uma base.

Teorema

Teorema: Sejam V e U dois espaços vetoriais reais e seja $\{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$ uma base de V e $\{u_1, u_2, \ldots, u_n\}$ elementos arbitrários de U. Então, existe uma ÚNICA transformação linear $T : V \to U$ tal que $T(v_1) = u_1$, $T(v_2) = u_2$, ..., $T(v_n) = u_n$.

Note que se $v = a_1v_1 + a_2v_2 + \ldots + a_nv_n$, então a transformação T é obtida da forma

$$T(v) = T(a_1v_1 + \ldots + a_nv_n) = a_1T(v_1) + \ldots a_nT(v_n) = a_1u_1 + \ldots a_nu_n.$$

Exemplo 7

Ex. 7: Qual é a transformação linear $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ tal que $T(1,0) = (2,-1,0)$ e $T(0,1) = (0,0,1)$?

Note primeiro que os vetores $v_1 = (1,0)$ e $v_2 = (0,1)$ formam uma base do domínio da transformação, isto é de $\mathbb{R}^2$ e que $u_1 = (2,-1,0)$ e $u_2 = (0,0,1)$ são vetores do $\mathbb{R}^3$.

Teorema sobre Transformações lineares

Um fato interessante a respeito de transformações lineares é o de que elas ficam perfeitamente determinadas conhecendo-se apenas seu valor nos elementos de uma base.

Teorema

Teorema: Sejam V e U dois espaços vetoriais reais e seja $\{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$ uma base de V e $\{u_1, u_2, \ldots, u_n\}$ elementos arbitrários de U. Então, existe uma ÚNICA transformação linear $T : V \to U$ tal que $T(v_1) = u_1$, $T(v_2) = u_2$, ..., $T(v_n) = u_n$.

Note que se $v = a_1v_1 + a_2v_2 + \ldots + a_nv_n$, então a transformação T é obtida da forma

$$T(v) = T(a_1v_1 + \ldots + a_nv_n) = a_1T(v_1) + \ldots a_nT(v_n) = a_1u_1 + \ldots a_nu_n.$$

Exemplo 7

Ex. 7: Qual é a transformação linear $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ tal que $T(1,0) = (2,-1,0)$ e $T(0,1) = (0,0,1)$?

Note primeiro que os vetores $v_1 = (1,0)$ e $v_2 = (0,1)$ formam uma base do domínio da transformação, isto é de $\mathbb{R}^2$ e que $u_1 = (2,-1,0)$ e $u_2 = (0,0,1)$ são vetores do $\mathbb{R}^3$.

Teorema sobre Transformações lineares

Um fato interessante a respeito de transformações lineares é o de que elas ficam perfeitamente determinadas conhecendo-se apenas seu valor nos elementos de uma base.

Teorema

Teorema: Sejam V e U dois espaços vetoriais reais e seja $\{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$ uma base de V e $\{u_1, u_2, \ldots, u_n\}$ elementos arbitrários de U. Então, existe uma ÚNICA transformação linear $T : V \to U$ tal que $T(v_1) = u_1$, $T(v_2) = u_2$, ..., $T(v_n) = u_n$.

Note que se $v = a_1 v_1 + a_2 v_2 + \ldots + a_n v_n$, então a transformação T é obtida da forma

$$T(v) = T(a_1 v_1 + \ldots + a_n v_n) = a_1 T(v_1) + \ldots a_n T(v_n) = a_1 u_1 + \ldots a_n u_n.$$

Exemplo 7

Ex. 7: Qual é a transformação linear $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ tal que $T(1,0) = (2,-1,0)$ e $T(0,1) = (0,0,1)$?

Note primeiro que os vetores $v_1 = (1,0)$ e $v_2 = (0,1)$ formam uma base do domínio da transformação, isto é de $\mathbb{R}^2$ e que $u_1 = (2,-1,0)$ e $u_2 = (0,0,1)$ são vetores do $\mathbb{R}^3$.

Teorema sobre Transformações lineares

Um fato interessante a respeito de transformações lineares é o de que elas ficam perfeitamente determinadas conhecendo-se apenas seu valor nos elementos de uma base.

Teorema

Teorema: Sejam V e U dois espaços vetoriais reais e seja $\{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$ uma base de V e $\{u_1, u_2, \ldots, u_n\}$ elementos arbitrários de U. Então, existe uma ÚNICA transformação linear $T : V \to U$ tal que $T(v_1) = u_1$, $T(v_2) = u_2$, ..., $T(v_n) = u_n$.

Note que se $v = a_1v_1 + a_2v_2 + \ldots + a_nv_n$, então a transformação T é obtida da forma

$$T(v) = T(a_1v_1 + \ldots + a_nv_n) = a_1T(v_1) + \ldots a_nT(v_n) = a_1u_1 + \ldots a_nu_n.$$

Exemplo 7

Ex. 7: Qual é a transformação linear $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ tal que $T(1,0) = (2,-1,0)$ e $T(0,1) = (0,0,1)$?

Note primeiro que os vetores $v_1 = (1,0)$ e $v_2 = (0,1)$ formam uma base do domínio da transformação, isto é de $\mathbb{R}^2$ e que $u_1 = (2,-1,0)$ e $u_2 = (0,0,1)$ são vetores do $\mathbb{R}^3$.

Continuação do exemplo 7

Exemplo 7

Logo, se $v = (x, y)$ é um vetor arbitrário de $\mathbb{R}^2$, podemos escrever esse vetor como combinação linear dos vetores da base de $\mathbb{R}^2$, ou seja,

$$v = (x, y) = x(1, 0) + y(0, 1).$$

Logo, temos que

$$T(v) = T(x, y) = T(x(1, 0) + y(0, 1)).$$

Usando o fato de que T é transformação linear, então

$$T(v) = T(x, y) = xT(1, 0) + yT(0, 1) = x(2, -1, 0) + y(0, 0, 1)$$

ou seja,

$$T(v) = T(x, y) = (2x, -x, 0) + (0, 0, y) = (2x, -x, y)$$

.