Álgebra Linear - CC/SI

Dr. Giannini Italino

Universidade Federal do Ceará - Campus de Crateús

Junho, 2025

Nas aulas passadas estudamos dois conceitos importantes do curso de álgebra linear, que são os conceitos de espaços vetoriais e subespaços vetoriais.

Nesta aula faremos um estudo sobre os conceitos de combinação linear, conjuntos geradores e de dependência e independência linear.

Combinação linear

Definição: Seja V um espaço vetorial sobre o corpo de escalares K. Dizemos que o vetor $v \in V$ é combinação linear dos vetores $v_1, v_2, \ldots, v_m$ de V se existirem escalares $a_1, a_2, \ldots, a_m$ de K tais que v pode ser escrito da forma

$$v = a_1 v_1 + a_2 v_2 + \ldots + a_m v_m. \tag{1}$$

Exemplo

Ex.: Suponha que queiramos escrever o vetor $v = (1, 5)$ do espaço vetorial $\mathbb{R}^2$ como combinação linear dos vetores $v_1 = (2, 3)$ e $v_2 = (3, 1)$. A ideia consiste em obter escalares reais a_1, a_2 tais que $v = a_1 v_1 + a_2 v_2$, ou seja,

Combinação linear

Nas aulas passadas estudamos dois conceitos importantes do curso de álgebra linear, que são os conceitos de espaços vetoriais e subespaços vetoriais.

Nesta aula faremos um estudo sobre os conceitos de combinação linear, conjuntos geradores e de dependência e independência linear.

Combinação linear

Definição: Seja V um espaço vetorial sobre o corpo de escalares K. Dizemos que o vetor $v \in V$ é combinação linear dos vetores $v_1, v_2, \ldots, v_m$ de V se existirem escalares $a_1, a_2, \ldots, a_m$ de K tais que v pode ser escrito da forma

$$v = a_1 v_1 + a_2 v_2 + \ldots + a_m v_m. \tag{1}$$

Exemplo

Ex.: Suponha que queiramos escrever o vetor $v = (1, 5)$ do espaço vetorial $\mathbb{R}^2$ como combinação linear dos vetores $v_1 = (2, 3)$ e $v_2 = (3, 1)$. A ideia consiste em obter escalares reais a_1, a_2 tais que $v = a_1 v_1 + a_2 v_2$, ou seja,

Combinação linear

Nas aulas passadas estudamos dois conceitos importantes do curso de álgebra linear, que são os conceitos de espaços vetoriais e subespaços vetoriais.

Nesta aula faremos um estudo sobre os conceitos de combinação linear, conjuntos geradores e de dependência e independência linear.

Combinação linear

Definição: Seja V um espaço vetorial sobre o corpo de escalares K. Dizemos que o vetor $v \in V$ é combinação linear dos vetores $v_1, v_2, \ldots, v_m$ de V se existirem escalares $a_1, a_2, \ldots, a_m$ de K tais que v pode ser escrito da forma

$$v = a_1 v_1 + a_2 v_2 + \ldots + a_m v_m. \tag{1}$$

Exemplo

Ex.: Suponha que queiramos escrever o vetor $v = (1, 5)$ do espaço vetorial $\mathbb{R}^2$ como combinação linear dos vetores $v_1 = (2, 3)$ e $v_2 = (3, 1)$. A ideia consiste em obter escalares reais a_1, a_2 tais que $v = a_1 v_1 + a_2 v_2$, ou seja,

Combinação linear

Nas aulas passadas estudamos dois conceitos importantes do curso de álgebra linear, que são os conceitos de espaços vetoriais e subespaços vetoriais.

Nesta aula faremos um estudo sobre os conceitos de combinação linear, conjuntos geradores e de dependência e independência linear.

Combinação linear

Definição: Seja V um espaço vetorial sobre o corpo de escalares K. Dizemos que o vetor $v \in V$ é combinação linear dos vetores $v_1, v_2, \ldots, v_m$ de V se existirem escalares $a_1, a_2, \ldots, a_m$ de K tais que v pode ser escrito da forma

$$v = a_1 v_1 + a_2 v_2 + \ldots + a_m v_m. \tag{1}$$

Exemplo

Ex.: Suponha que queiramos escrever o vetor $v = (1, 5)$ do espaço vetorial $\mathbb{R}^2$ como combinação linear dos vetores $v_1 = (2, 3)$ e $v_2 = (3, 1)$. A ideia consiste em obter escalares reais a_1, a_2 tais que $v = a_1 v_1 + a_2 v_2$, ou seja,

Combinação linear

Nas aulas passadas estudamos dois conceitos importantes do curso de álgebra linear, que são os conceitos de espaços vetoriais e subespaços vetoriais.

Nesta aula faremos um estudo sobre os conceitos de combinação linear, conjuntos geradores e de dependência e independência linear.

Combinação linear

Definição: Seja V um espaço vetorial sobre o corpo de escalares K. Dizemos que o vetor $v \in V$ é combinação linear dos vetores $v_1, v_2, \ldots, v_m$ de V se existirem escalares $a_1, a_2, \ldots, a_m$ de K tais que v pode ser escrito da forma

$$v = a_1 v_1 + a_2 v_2 + \ldots + a_m v_m. \tag{1}$$

Exemplo

Ex.: Suponha que queiramos escrever o vetor $v = (1, 5)$ do espaço vetorial $\mathbb{R}^2$ como combinação linear dos vetores $v_1 = (2, 3)$ e $v_2 = (3, 1)$. A ideia consiste em obter escalares reais a_1, a_2 tais que $v = a_1 v_1 + a_2 v_2$, ou seja,

Cont. Exemplo 2

$$v = a_1 v_1 + a_2 v_2 \Leftrightarrow (1,5) = a_1(2,3) + a_2(3,1),$$

isto é,

$$(1,5) = (2a_1, 3a_1) + (3a_2, a_2) \Leftrightarrow (1,5) = (2a_1 + 3a_2, 3a_1 + a_2).$$

Como os vetores de ambos os membros precisam serem iguais, então temos que

$$\begin{cases} 2a_1 + 3a_2 = 1 \\ 3a_1 + a_2 = 5 \end{cases}$$

Resolvendo esse sistema acima temos obtemos que $a_1 = 2$ e $a_2 = -1$. Logo, escrevemos o vetor v como combinação linear dos vetores v_1 e v_2 dados, ou seja,

$$(1,5) = 2(2,3) - (3,1).$$

Observação: Dado um vetor qualquer $v \in V$, se não conseguirmos obter constantes $a_1, a_2, \ldots, a_m$ tais que v pode ser escrito da forma $v = a_1 v_1 + a_2 v_2 + \ldots + a_m v_m$, então dizemos que v não é uma combinação linear dos vetores dados. Por exemplo, se no exemplo anterior não conseguíssemos obter a_1 e a_2 que solucionasse o sistema acima, então o vetor $v = (1,5)$ não seria combinação linear dos vetores v_1 e v_2 dados.

Cont. Exemplo 2

$$v = a_1 v_1 + a_2 v_2 \Leftrightarrow (1,5) = a_1(2,3) + a_2(3,1),$$

isto é,

$$(1,5) = (2a_1, 3a_1) + (3a_2, a_2) \Leftrightarrow (1,5) = (2a_1 + 3a_2, 3a_1 + a_2).$$

Como os vetores de ambos os membros precisam serem iguais, então temos que

$$\begin{cases} 2a_1 + 3a_2 = 1 \\ 3a_1 + a_2 = 5 \end{cases}$$

Resolvendo esse sistema acima temos obtemos que $a_1 = 2$ e $a_2 = -1$. Logo, escrevemos o vetor v como combinação linear dos vetores v_1 e v_2 dados, ou seja,

$$(1,5) = 2(2,3) - (3,1).$$

Observação: Dado um vetor qualquer $v \in V$, se não conseguirmos obter constantes $a_1, a_2, \ldots, a_m$ tais que v pode ser escrito da forma $v = a_1 v_1 + a_2 v_2 + \ldots + a_m v_m$, então dizemos que v não é uma combinação linear dos vetores dados. Por exemplo, se no exemplo anterior não conseguíssemos obter a_1 e a_2 que solucionasse o sistema acima, então o vetor $v = (1,5)$ não seria combinação linear dos vetores v_1 e v_2 dados.

Conjuntos geradores

Definição: Seja V um espaço vetorial sobre K. Dizemos que os vetores $v_1, v_2, \dots, v_m$ de V geram o espaço vetorial V (ou que formam um conjunto gerador do espaço V) se qualquer vetor de V puder ser escrito como uma combinação linear dos vetores $v_1, v_2, \dots, v_m$, ou seja, se existirem escalares vetores $a_1, a_2, \dots, a_m$ de K tais que

$$v = a_1 v_1 + a_2 v_2 + \dots + a_m v_m.$$

Exemplo

Ex.: Seja $V = \mathbb{R}^3$. Note que os vetores $v_1 = (1, 0, 0)$, $v_2 = (0, 1, 0)$ e $v_3 = (0, 0, 1)$ formam um conjunto gerador do espaço vetorial $V = \mathbb{R}^3$.

De fato, note que se esses vetores v_1, v_2 e v_3 formam um conjunto gerador de $V = \mathbb{R}^3$, então para qualquer vetor $v = (x, y, z) \in \mathbb{R}^3$, então devem existir constantes a_1, a_2 e a_3 tais que $v = a_1 v_1 + a_2 v_2 + a_3 v_3$. Ou seja,

$$v = a_1 v_1 + a_2 v_2 + a_3 v_3 \Leftrightarrow (x, y, z) = a_1(1, 0, 0) + a_2(0, 1, 0) + a_3(0, 0, 1),$$

isto é

Conjuntos geradores

Definição: Seja V um espaço vetorial sobre K. Dizemos que os vetores $v_1, v_2, \ldots, v_m$ de V geram o espaço vetorial V (ou que formam um conjunto gerador do espaço V) se qualquer vetor de V puder ser escrito como uma combinação linear dos vetores $v_1, v_2, \ldots, v_m$, ou seja, se existirem escalares vetores $a_1, a_2, \ldots, a_m$ de K tais que

$$v = a_1 v_1 + a_2 v_2 + \ldots + a_m v_m.$$

Exemplo

Ex.: Seja $V = \mathbb{R}^3$. Note que os vetores $v_1 = (1, 0, 0)$, $v_2 = (0, 1, 0)$ e $v_3 = (0, 0, 1)$ formam um conjunto gerador do espaço vetorial $V = \mathbb{R}^3$.

De fato, note que se esses vetores v_1, v_2 e v_3 formam um conjunto gerador de $V = \mathbb{R}^3$, então para qualquer vetor $v = (x, y, z) \in \mathbb{R}^3$, então devem existir constantes a_1, a_2 e a_3 tais que $v = a_1 v_1 + a_2 v_2 + a_3 v_3$. Ou seja,

$$v = a_1 v_1 + a_2 v_2 + a_3 v_3 \Leftrightarrow (x, y, z) = a_1(1, 0, 0) + a_2(0, 1, 0) + a_3(0, 0, 1),$$

isto é

Conjuntos geradores

Definição: Seja V um espaço vetorial sobre K. Dizemos que os vetores $v_1, v_2, \ldots, v_m$ de V geram o espaço vetorial V (ou que formam um conjunto gerador do espaço V) se qualquer vetor de V puder ser escrito como uma combinação linear dos vetores $v_1, v_2, \ldots, v_m$, ou seja, se existirem escalares vetores $a_1, a_2, \ldots, a_m$ de K tais que

$$v = a_1 v_1 + a_2 v_2 + \ldots + a_m v_m.$$

Exemplo

Ex.: Seja $V = \mathbb{R}^3$. Note que os vetores $v_1 = (1, 0, 0)$, $v_2 = (0, 1, 0)$ e $v_3 = (0, 0, 1)$ formam um conjunto gerador do espaço vetorial $V = \mathbb{R}^3$.

De fato, note que se esses vetores v_1, v_2 e v_3 formam um conjunto gerador de $V = \mathbb{R}^3$, então para qualquer vetor $v = (x, y, z) \in \mathbb{R}^3$, então devem existir constantes a_1, a_2 e a_3 tais que $v = a_1 v_1 + a_2 v_2 + a_3 v_3$. Ou seja,

$$v = a_1 v_1 + a_2 v_2 + a_3 v_3 \Leftrightarrow (x, y, z) = a_1(1, 0, 0) + a_2(0, 1, 0) + a_3(0, 0, 1),$$

isto é

Continuação do exemplo

$$(x, y, z) = a_1(1,0,0)+a_2(0,1,0)+a_3(0,0,1) \Leftrightarrow (x,y,z) = (a_1,0,0)+(0,a_2,0)+(0,0,a_3),$$

ou ainda,

$$(x, y, z) = (a_1, a_2, a_3)$$

Como os vetores de ambos os membros precisam serem iguais, então temos que

$$\begin{cases} x = a_1 \\ y = a_2 \\ z = a_3 \end{cases}$$

Ou seja, dado um vetor arbitrário $v = (x, y, z)$ de $\mathbb{R}^3$, sempre podemos escreve-lo como combinação linear dos vetores $v_1 = (1, 0, 0)$, $v_2 = (0, 1, 0)$ e $v_3 = (0, 0, 1)$, e essa combinação é da forma

$$(x, y, x) = x(1, 0, 0) + y(0, 1, 0) + z(0, 0, 1).$$

Por exemplo, se $v = (1, 2, 3)$, então podemos escrever v da forma $(1, 2, 3) = 1(1, 0, 0) + 2(0, 1, 0) + 3(0, 0, 1)$.

Observação

O conjunto gerador de um espaço vetorial não necessariamente é único, ou seja, podemos ter mais de um conjunto gerador de um mesmo espaço.

Ex.: Considere novamente $V = \mathbb{R}^3$. Os vetores $v_1 = (1, 1, 1)$, $v_2 = (1, 1, 0)$ e $v_3 = (1, 0, 0)$ também formam um conjunto gerador de $\mathbb{R}^3$. De fato, seja $v = (x, y, z) \in \mathbb{R}^3$, um vetor arbitrário, então obtenhamos constantes a_1, a_2 e a_3 tais que $v = a_1 v_1 + a_2 v_2 + a_3 v_3$. Ou seja,

$$(x, y, z) = a_1(1, 1, 1) + a_2(1, 1, 0) + a_3(1, 0, 0),$$

isto é

$$(x, y, z) = (a_1, a_1, a_1) + (a_2, a_2, 0) + (a_3, 0, 0) \Leftrightarrow (x, y, z) = (a_1 + a_2 + a_3, a_1 + a_2, a_1)$$

Como os vetores de ambos os membros precisam serem iguais, então temos que

$$\begin{cases} a_1 + a_2 + a_3 = x \\ a_1 + a_2 = y \\ a_1 = z \end{cases}$$

Solucionando o sistema por substituição para trás, temos que $a_1 = z$, $a_2 = y - z$ e $a_3 = x - y$. Logo, $(x, y, z) = z(1, 1, 1) + (y - z)(1, 1, 0) + (x - y)(1, 0, 0)$.

Dependência e Independência linear

Definição: Seja V um espaço vetorial sobre o corpo de escalares K. Dizemos que os vetores $v_1, v_2, \ldots, v_m$ de V são linearmente dependentes (Denotado por LD), se existirem escalares $a_1, a_2, \ldots, a_m$, não todos nulos, tais que

$$a_1 v_1 + a_2 v_2 + \ldots + a_m v_m = 0. \tag{2}$$

Caso contrário, dizemos que os vetores são linearmente independentes (denotado por LI).

Em outras palavras, se a única solução da equação (2) acima for a solução $a_1 = a_2 = \ldots = a_m = 0$, então os vetores $v_1, v_2, \ldots, v_m$ são LI. Caso a equação (2) possuir alguma solução não nula, então dizemos que os vetores são $v_1, v_2, \ldots, v_m$ são LD.

Dependência e Independência linear

Definição: Seja V um espaço vetorial sobre o corpo de escalares K. Dizemos que os vetores $v_1, v_2, \ldots, v_m$ de V são linearmente dependentes (Denotado por LD), se existirem escalares $a_1, a_2, \ldots, a_m$, não todos nulos, tais que

$$a_1 v_1 + a_2 v_2 + \ldots + a_m v_m = 0. \tag{2}$$

Caso contrário, dizemos que os vetores são linearmente independentes (denotado por LI).

Em outras palavras, se a única solução da equação (2) acima for a solução $a_1 = a_2 = \ldots = a_m = 0$, então os vetores $v_1, v_2, \ldots, v_m$ são LI. Caso a equação (2) possuir alguma solução não nula, então dizemos que os vetores são $v_1, v_2, \ldots, v_m$ são LD.

Observações

(i) Se $v_1, v_2, \ldots, v_m$ são vetores de V e se algum desses vetores for o vetor nulo de V, digamos por exemplo $v_1 = 0$, então os vetores $v_1, v_2, \ldots, v_m$ são LD. Uma vez que temos $1v_1 + 0v_2 + \ldots + 0v_m = 0$, sem que todos os escalares sejam nulos;

(ii) Se $v \in V$ é um vetor não nulo, então esse vetor sozinho, é linearmente independente. Uma vez que $av = 0 \Leftrightarrow a = 0$;

(iii) Se $v_1, v_2, \ldots, v_m$ são vetores de V e se tivermos que dois deles sejam iguais, ou que um deles é múltiplo de um outro, digamos, $v_1 = rv_2$, em que r é um escalar. Então os vetores são linearmente dependentes, uma vez que $1v_1 - rv_2 + 0v_3 + 0v_4 + \ldots + 0v_m = 0$ sem que todos os escalares sejam nulos;

(iv) Dois vetores são linearmente dependentes se, e só se, um deles é um múltiplo do outro;

(v) Se o conjunto $\{v_1, v_2, \ldots, v_m\}$ for linearmente independente, então qualquer reordenação de seus vetores ainda será linearmente independente.

Observações

(i) Se $v_1, v_2, \ldots, v_m$ são vetores de V e se algum desses vetores for o vetor nulo de V, digamos por exemplo $v_1 = 0$, então os vetores $v_1, v_2, \ldots, v_m$ são LD. Uma vez que temos $1v_1 + 0v_2 + \ldots + 0v_m = 0$, sem que todos os escalares sejam nulos;

(ii) Se $v \in V$ é um vetor não nulo, então esse vetor sozinho, é linearmente independente. Uma vez que $av = 0 \Leftrightarrow a = 0$;

(iii) Se $v_1, v_2, \ldots, v_m$ são vetores de V e se tivermos que dois deles sejam iguais, ou que um deles é múltiplo de um outro, digamos, $v_1 = rv_2$, em que r é um escalar. Então os vetores são linearmente dependentes, uma vez que $1v_1 - rv_2 + 0v_3 + 0v_4 + \ldots + 0v_m = 0$ sem que todos os escalares sejam nulos;

(iv) Dois vetores são linearmente dependentes se, e só se, um deles é um múltiplo do outro;

(v) Se o conjunto $\{v_1, v_2, \ldots, v_m\}$ for linearmente independente, então qualquer reordenação de seus vetores ainda será linearmente independente.

Observações

(i) Se $v_1, v_2, \ldots, v_m$ são vetores de V e se algum desses vetores for o vetor nulo de V, digamos por exemplo $v_1 = 0$, então os vetores $v_1, v_2, \ldots, v_m$ são LD. Uma vez que temos $1v_1 + 0v_2 + \ldots + 0v_m = 0$, sem que todos os escalares sejam nulos;

(ii) Se $v \in V$ é um vetor não nulo, então esse vetor sozinho, é linearmente independente. Uma vez que $av = 0 \Leftrightarrow a = 0$;

(iii) Se $v_1, v_2, \ldots, v_m$ são vetores de V e se tivermos que dois deles sejam iguais, ou que um deles é múltiplo de um outro, digamos, $v_1 = rv_2$, em que r é um escalar. Então os vetores são linearmente dependentes, uma vez que $1v_1 - rv_2 + 0v_3 + 0v_4 + \ldots + 0v_m = 0$ sem que todos os escalares sejam nulos;

(iv) Dois vetores são linearmente dependentes se, e só se, um deles é um múltiplo do outro;

(v) Se o conjunto $\{v_1, v_2, \ldots, v_m\}$ for linearmente independente, então qualquer reordenação de seus vetores ainda será linearmente independente.

Observações

(i) Se $v_1, v_2, \ldots, v_m$ são vetores de V e se algum desses vetores for o vetor nulo de V, digamos por exemplo $v_1 = 0$, então os vetores $v_1, v_2, \ldots, v_m$ são LD. Uma vez que temos $1v_1 + 0v_2 + \ldots + 0v_m = 0$, sem que todos os escalares sejam nulos;

(ii) Se $v \in V$ é um vetor não nulo, então esse vetor sozinho, é linearmente independente. Uma vez que $av = 0 \Leftrightarrow a = 0$;

(iii) Se $v_1, v_2, \ldots, v_m$ são vetores de V e se tivermos que dois deles sejam iguais, ou que um deles é múltiplo de um outro, digamos, $v_1 = rv_2$, em que r é um escalar. Então os vetores são linearmente dependentes, uma vez que $1v_1 - rv_2 + 0v_3 + 0v_4 + \ldots + 0v_m = 0$ sem que todos os escalares sejam nulos;

(iv) Dois vetores são linearmente dependentes se, e só se, um deles é um múltiplo do outro;

(v) Se o conjunto $\{v_1, v_2, \ldots, v_m\}$ for linearmente independente, então qualquer reordenação de seus vetores ainda será linearmente independente.

Observações

(i) Se $v_1, v_2, \ldots, v_m$ são vetores de V e se algum desses vetores for o vetor nulo de V, digamos por exemplo $v_1 = 0$, então os vetores $v_1, v_2, \ldots, v_m$ são LD. Uma vez que temos $1v_1 + 0v_2 + \ldots + 0v_m = 0$, sem que todos os escalares sejam nulos;

(ii) Se $v \in V$ é um vetor não nulo, então esse vetor sozinho, é linearmente independente. Uma vez que $av = 0 \Leftrightarrow a = 0$;

(iii) Se $v_1, v_2, \ldots, v_m$ são vetores de V e se tivermos que dois deles sejam iguais, ou que um deles é múltiplo de um outro, digamos, $v_1 = rv_2$, em que r é um escalar. Então os vetores são linearmente dependentes, uma vez que
$1v_1 - rv_2 + 0v_3 + 0v_4 + \ldots + 0v_m = 0$ sem que todos os escalares sejam nulos;

(iv) Dois vetores são linearmente dependentes se, e só se, um deles é um múltiplo do outro;

(v) Se o conjunto $\{v_1, v_2, \ldots, v_m\}$ for linearmente independente, então qualquer reordenação de seus vetores ainda será linearmente independente.

Exemplos

Exemplo 1

Sejam $u = (1, 2, 3)$, $v = (1, 1, 1)$ e $w = (2, 3, 4)$ vetores do $\mathbb{R}^3$. Então esses vetores são LD, uma vez que

$$1u + 1v - 1w = (0, 0, 0).$$

Ou seja, existem constantes não todas nulas que são soluções da equação $a_1 u + a_2 v + a_3 w = (0, 0, 0)$, que são $a_1 = 1, a_2 = 1$ e $a_3 = -1$.

Exemplo 2

Verifique se os vetores $u = (1, 2, 3)$, $v = (2, 5, 7)$ e $w = (1, 3, 5)$ são linearmente independentes. Primeiramente, consideremos a equação $a_1 u + a_2 v + a_3 w = (0, 0, 0)$, em que a_1, a_2 e a_3 são incógnitas escalares. Logo, temos que a equação acima pode ser escrita da forma

$$a_1(1, 2, 3) + a_2(2, 5, 7) + a_3(1, 3, 5) = (0, 0, 0),$$

ou ainda

Exemplos

Exemplo 1

Sejam $u = (1, 2, 3)$, $v = (1, 1, 1)$ e $w = (2, 3, 4)$ vetores do $\mathbb{R}^3$. Então esses vetores são LD, uma vez que

$$1u + 1v - 1w = (0, 0, 0).$$

Ou seja, existem constantes não todas nulas que são soluções da equação $a_1 u + a_2 v + a_3 w = (0, 0, 0)$, que são $a_1 = 1, a_2 = 1$ e $a_3 = -1$.

Exemplo 2

Verifique se os vetores $u = (1, 2, 3)$, $v = (2, 5, 7)$ e $w = (1, 3, 5)$ são linearmente independentes. Primeiramente, consideremos a equação $a_1 u + a_2 v + a_3 w = (0, 0, 0)$, em que a_1, a_2 e a_3 são incógnitas escalares. Logo, temos que a equação acima pode ser escrita da forma

$$a_1(1, 2, 3) + a_2(2, 5, 7) + a_3(1, 3, 5) = (0, 0, 0),$$

ou ainda

Exemplos

Exemplo 1

Sejam $u = (1, 2, 3)$, $v = (1, 1, 1)$ e $w = (2, 3, 4)$ vetores do $\mathbb{R}^3$. Então esses vetores são LD, uma vez que

$$1u + 1v - 1w = (0, 0, 0).$$

Ou seja, existem constantes não todas nulas que são soluções da equação $a_1 u + a_2 v + a_3 w = (0, 0, 0)$, que são $a_1 = 1$, $a_2 = 1$ e $a_3 = -1$.

Exemplo 2

Verifique se os vetores $u = (1, 2, 3)$, $v = (2, 5, 7)$ e $w = (1, 3, 5)$ são linearmente independentes. Primeiramente, consideremos a equação $a_1 u + a_2 v + a_3 w = (0, 0, 0)$, em que a_1, a_2 e a_3 são incógnitas escalares. Logo, temos que a equação acima pode ser escrita da forma

$$a_1(1, 2, 3) + a_2(2, 5, 7) + a_3(1, 3, 5) = (0, 0, 0),$$

ou ainda

$$(a_1, 2a_1, 3a_1) + (2a_2, 5a_2, 7a_2) + (a_3, 3a_3, 5a_3) = (0, 0, 0),$$

isto é,

$$(a_1 + 2a_2 + a_3, 2a_1 + 5a_2 + 3a_3, 3a_1 + 7a_2 + 5a_3) = (0, 0, 0).$$

Como os vetores de ambos os membros precisam serem iguais, então temos que

$$\begin{cases} a_1 + 2a_2 + a_3 = 0 \\ 2a_1 + 5a_2 + 3a_3 = 0 \\ 3a_1 + 7a_2 + 5a_3 = 0 \end{cases}.$$

Escalonando o sistema acima temos o sistema equivalente

$$\begin{cases} a_1 + 2a_2 + a_3 = 0 \\ \quad\quad a_2 + a_3 = 0 \\ \quad\quad\quad 2a_3 = 0 \end{cases}.$$

Por substituição para trás, obtemos $a_1 = a_2 = a_2 = 0$. Logo, os vetores são LI.

Dependência linear e combinação linear

O resultado que veremos abaixo estabelece que existe uma relação próxima entre os conceitos de dependência linear e combinação linear.

Teorema: Suponha que dois ou mais vetores $v_1, v_2, \ldots, v_m$ sejam linearmente dependentes. Então algum dos vetores é uma combinação linear dos vetores que o antecedem.

Ex.: Observe que no Exemplo 1 visto acima, vimos que os vetores $u = (1, 2, 3)$, $v = (1, 1, 1)$ e $w = (2, 3, 4)$ são LD. Note ainda que o vetor w pode ser escrito como uma combinação linear dos vetores u e v, ou seja, $w = 1u + 1v$, isto é, $(2, 3, 4) = 1(1, 2, 3) + 1(1, 1, 1)$.

Dependência linear e combinação linear

O resultado que veremos abaixo estabelece que existe uma relação próxima entre os conceitos de dependência linear e combinação linear.

Teorema: Suponha que dois ou mais vetores $v_1, v_2, \ldots, v_m$ sejam linearmente dependentes. Então algum dos vetores é uma combinação linear dos vetores que o antecedem.

Ex.: Observe que no Exemplo 1 visto acima, vimos que os vetores $u = (1, 2, 3)$, $v = (1, 1, 1)$ e $w = (2, 3, 4)$ são LD. Note ainda que o vetor w pode ser escrito como uma combinação linear dos vetores u e v, ou seja, $w = 1u + 1v$, isto é, $(2, 3, 4) = 1(1, 2, 3) + 1(1, 1, 1)$.