

Teoría de Matemáticas de Bachillerato

Pedro Ángel Fraile Manzano

15 de noviembre de 2022

Contenidos Generales

Apartados del libro	Página
I Prefacios, Repaso y otras consideraciones	7
1. Operaciones sobre los números reales	9
Introducción	10
1.1. Estructura de los números reales	10
1.2. Potencias y Logaritmos	11
1.3. Resolución de ecuaciones exponenciales	13
1.4. Resolución de ecuaciones logarítmicas	15
2. Polinomios sobre el cuerpo de los reales y ecuaciones	17
2.1. Conceptos básicos	17
2.2. Operaciones con polinomios	17
2.3. Divisibilidad de polinomios	17
3. Ecuaciones polinómicas	19
3.1. Ecuaciones lineales	19
3.2. Ecuaciones parabólicas	19
3.3. Ecuaciones de grado mayor que 2	19
4. Inecuaciones	21
4.1. Inecuaciones lineales	21
4.2. Inecuaciones no lineales	21
II Análisis Matemático	23
5. Preámbulos para análisis	25
5.1. Topología sobre \mathbb{R}	26

6. Cálculo de Límites	27
7. Las funciones sobre \mathbb{R}	29
8. Derivabilidad sobre \mathbb{R}	31
8.1. Concepto de la derivada	32
8.2. Derivabilidad de una función	33
8.2.1. Estudio de la derivabilidad de una función	33
8.3. Tabla de derivadas	34
8.4. Algunas demostraciones de fórmulas de derivadas	34
9. Aplicaciones de la derivada	35
9.1. Cálculo de mínimos y máximos	36
9.2. Cálculo de la curvatura de las funciones	36
9.3. Optimización de funciones	36
10. Representación de funciones	37
10.1. Dominio	38
10.2. Simetría	39
10.3. Continuidad	39
10.4. Corte con los ejes	39
10.5. Asíntotas	39
10.6. Monotonía	39
10.7. Curvatura	39
11. Integración sobre \mathbb{R}	41
III Ejercicios de Análisis Matemático	43
12. Representación de funciones	45
Introducción	45
12.1. Funciones polinómicas	45
12.2. Funciones racionales	46
12.3. Funciones irracionales	46
12.4. Funciones exponenciales	46
12.5. Funciones logarítmicas	46
12.6. Funciones trigonométricas	46

<i>CONTENIDOS GENERALES</i>	5
IV Álgebra lineal	47
13.Espacios Vectoriales	49
14.Aplicaciones lineales	51
15.Matrices	53
16.Determinantes	55
17.Discusión de sistemas	57
V Cálculo de probabilidades	59
18.Probabilidades básicas	61
19.Variables aleatorias discretas	63
20.Variables aleatorias continuas	65

Parte I

Prefacios, Repaso y otras consideraciones

Capítulo 1

Operaciones sobre los números reales

Índice del capítulo

1.1. Estructura de los números reales	10
1.2. Potencias y Logaritmos	11
1.3. Resolución de ecuaciones exponenciales	13
1.4. Resolución de ecuaciones logarítmicas	15

Introducción

Los distintos conjuntos de números surgen de la necesidad de resolver distintas ecuaciones, es decir, a medida que necesitamos resolver ecuaciones más complejas, más se amplían el campo de números con los que podemos actuar:

1.1. Estructura de los números reales

Los números reales tiene estructura de cuerpo y te preguntará ¿ Qué es un cuerpo?

Definición 1.1.1. Un cuerpo es una terna $(\mathbb{K}, +, \cdot)$ donde:

1. \mathbb{K} es un conjunto de elementos
2. $+$ es una operación sobre los elementos de \mathbb{K} que cumple:
 - Es una operación **conmutativa**, es decir, sean $a, b \in \mathbb{K}$ entonces tendremos que $a + b = b + a$
 - Es una operación **asociativa**, es decir dados $a, b, c \in \mathbb{K}$ tenemos que $a + (b + c) = (a + b) + c$
 - Existe un **elemento neutro**, es decir $\exists e / e + a = a + e = a \ \forall a \in \mathbb{K}$.
 - Cada elemento $a \in \mathbb{K}$ existe un elemento **inverso** que se denota por a^{-1} de tal manera que $a + a^{-1} = a^{-1} + a = e$ (*Esto también se da cuando no se cumple la conmutativa*)
3. \cdot es una operación que cumple lo siguiente
 - Es una operación **asociativa**, es decir dados $a, b, c \in \mathbb{K}$ tenemos que $a \cdot (b \cdot c) = (a \cdot b) \cdot c$
 - Existe un **elemento neutro** para esta operación $\exists e / e \cdot a = a \cdot e = a \ \forall a \in \mathbb{K}$.
 - Para todo elemento $a \in \mathbb{K}$ entonces $\exists a^{-1} / a \cdot a^{-1} = a^{-1} \cdot a = e$ (*Esto es lo que distingue un cuerpo a un anillo*)
 - \cdot es **distributivo** respecto de $+$ es decir, $a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c$

Aclaración 1: Aunque se denoten como $+$, \cdot no tenemos por qué usar las definiciones habituales de la suma y la multiplicación. Por ejemplo, la suma y producto de números reales no son iguales que las mismas operaciones para las matrices (*quedarnos con ese nombre.*)

Aclaración 2: De esta manera que tenemos que lo que llamamos en los números reales la resta es la suma por el inverso y la división es el producto por el inverso.

Ejercicio Propuesto. Demostrar que \mathbb{R} y \mathbb{C} son cuerpos

1.2. Potencias y Logaritmos

Definición 1.2.1. Podemos definir las potencias como $a^n = \overbrace{a \cdot \dots \cdot a}^{n \text{ veces}}$. Una vez entendido esto tenemos las siguientes propiedades

Propiedades

$$1. a^1 = a \text{ y } a^0 = 1 \text{ para cualquier } a \in \mathbb{R}$$

$$2. a^{-1} = \frac{1}{a}$$

$$3. a^n \cdot a^m = a^{n+m}$$

$$4. \frac{a^n}{a^m} = a^{n-m}$$

$$5. (a^n)^m = a^{n \cdot m}$$

$$6. \sqrt[n]{a} = a^{\frac{1}{n}}$$

$$7. (a \cdot b)^n = a^n \cdot b^n$$

$$8. \left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n}$$

Demostración

1. Para la primera demostración no hace falta más que decir que estamos “poniendo” sólo una a y que $a^0 = 1$ es básicamente proveniente del álgebra \mathbb{Z} modular.
2. En este caso, tenemos que al utilizar la propiedad 3 quedará más clara pero si nosotros tenemos $a^1 \cdot a^{-1} = a^0 = 1 \Rightarrow a^{-1} = \frac{1}{a}$

3. Ahora tenemos que $a^n \cdot a^m = \overbrace{a \cdot \dots \cdot a}^{n \text{ veces}} \cdot \overbrace{a \cdot \dots \cdot a}^{m \text{ veces}} = \overbrace{a \cdot \dots \cdot a}^{n+m \text{ veces}} = a^{m+n}$
4. Si combinamos la propiedad 2 y 3 queda probado $\frac{a^n}{a^m} = a^n \cdot \frac{1}{a^m} = a^n \cdot a^{-m} = a^{n-m}$
5. Este se debe a que estamos multiplicando paquetitos del producto de n a 's, es decir , $(a^n)^m = \overbrace{a^n \cdot \dots \cdot a^n}^{m \text{ veces}} = \underbrace{\overbrace{a \cdot \dots \cdot a}^{n \text{ veces}} \cdot \dots \cdot \overbrace{a \cdot \dots \cdot a}^{n \text{ veces}}}_{n \text{ veces}} = \underbrace{a \cdot \dots \cdot a}_{n \cdot m \text{ veces}} = a^{mn}$
6. Haciendo un razonamiento análogo pero con el producto lo tenemos
7. Tenemos lo siguiente $(a \cdot b)^n = \overbrace{a \cdot b \cdot \dots \cdot a \cdot b}^{n \text{ veces}} = \underbrace{\overbrace{a \cdot \dots \cdot a}^{n \text{ veces}} \cdot \overbrace{b \cdot \dots \cdot b}^{n \text{ veces}}}_{n \text{ veces}} = a^n \cdot b^n$
8. Utilizando un razonamiento similar al anterior lo tenemos cambiando únicamente b por b^{-1}

Definición 1.2.2. Definimos el logaritmo de $b \in \mathbb{R}^+$ en base $a > 0$ de la siguiente manera

$$\log_a b = x \Leftrightarrow a^x = b \quad (1.1)$$

Esta definición nos permite "traducir" de logaritmos a potencias y es lo que se utiliza para demostrar las siguientes propiedades

Propiedades: Sean $P, Q, a \in \mathbb{R}^+$

1. $\log_a 1 = 0$
2. $\log_a a = 1$
3. $\log_a (P \cdot Q) = \log_a P + \log_a Q$
4. $\log_a \left(\frac{P}{Q} \right) = \log_a P - \log_a Q$
5. $\log_a P^n = n \cdot \log_a P$

Ejercicio Propuesto. Se propone al lector la demostración de estas propiedades utilizando la definición de logaritmos y las propiedades de las potencias.

1.3. Resolución de ecuaciones exponenciales

Definición 1.3.1. Podemos definir una ecuación exponencial como aquella que tiene la incógnita en el exponente

$$a^x = b$$

Podemos distinguir los siguientes casos:

■ ***Ecuaciones donde la incógnita aparece en un solo exponente***

El procedimiento es intentar poner todos los elementos como potencias de la base que tiene la incógnita

$$2^{x+1} = 8$$

$$2^{x+1} = 2^3$$

Tras esto, podemos hacer el logaritmo de cada uno de los lados ya que $\log_a P = \log_a Q \Leftrightarrow P = Q$ en este caso $a = 2$ de tal forma que lo anterior nos queda:

$$2^{x+1} = 2^3$$

$$\log_2(2^{x+1}) = \log_2(2^3)$$

$$x + 1 = 3$$

$$x = 2$$

También puede que no podamos descomponer en potencias de una sola base entonces tenemos el siguiente caso.

$$2^x = 127$$

Entonces tomamos logaritmos para poder resolverlo

$$2^x = 127$$

$$\log_2(2^x) = \log_2(127)$$

$$x \cdot \log_2(2) = \log_2(127)$$

$$x = \log_2(127)$$

A partir de aquí podemos utilizar un cambio de base de los logaritmos para poder usar el logaritmo en base 10 o e .

Ejercicio 1.3.1. Resuelve las siguientes ecuaciones.

a) $4^{x+1} - 8 = 0$ b) $3^{x+2} = 81$

c) $x + 1$ d) $e^x - 1 = 3$

■ ***Ecuaciones donde la incógnita está en más de una potencia***

El procedimiento es conseguir una expresión donde las potencias que tengan las incógnitas se reduzcan a las misma base y podamos hacer un cambio de variable $a^x = t$ que después desharemos como si fuera un caso como el anterior.

Vamos a resolver el siguiente ejemplo

$$2^{x+1} + 2^{x-1} + 2^x = 7$$

Para empezar pongamos todo como una combinación lineal de 2^x para ello aplicamos las propiedades de las potencias.

$$2^{x+1} + 2^{x-1} + 2^x = 7$$

$$2 \cdot 2^x + \frac{2^x}{2} + 2^x = 7$$

Ahora ya podemos tomar el cambio de variable $2^x = t$ de manera que obtenemos lo siguiente.

$$2 \cdot 2^x + \frac{2^x}{2} + 2^x = 7$$

$$2 \cdot t + \frac{t}{2} + t = 7$$

La anterior ecuación es una ecuación fácilmente resoluble por tanto, ya hemos obtenido lo que queríamos, reducir la dificultad del ejercicio.

$$2 \cdot t + \frac{t}{2} + t = 7$$

$$\frac{7}{2} \cdot t = 7$$

$$t = 2$$

Por tanto sabemos que $t = 2$ lo que implica entonces que $2^x = t = 2$ y al aplicar logaritmos a ambos lados de la igualdad y obtenemos que

$$\log_2 2^x = \log_2 2$$

$$x = 1$$

1.4. Resolución de ecuaciones logarítmicas

Definición 1.4.1. Podemos definir una ecuación exponencial como aquella que tiene la incógnita dentro de un logaritmo.

Capítulo 2

Polinomios sobre el cuerpo de los reales y ecuaciones

Índice del capítulo

2.1. Conceptos básicos	17
2.2. Operaciones con polinomios	17
2.3. Divisibilidad de polinomios	17

2.1. Conceptos básicos

2.2. Operaciones con polinomios

2.3. Divisibilidad de polinomios

Capítulo 3

Ecuaciones polinómicas

Índice del capítulo

3.1. Ecuaciones lineales	19
3.2. Ecuaciones parabólicas	19
3.3. Ecuaciones de grado mayor que 2	19

3.1. Ecuaciones lineales

3.2. Ecuaciones parabólicas

3.3. Ecuaciones de grado mayor que 2

Capítulo 4

Inecuaciones

Índice del capítulo

4.1. Inecuaciones lineales	21
4.2. Inecuaciones no lineales	21

4.1. Inecuaciones lineales

4.2. Inecuaciones no lineales

Parte II

Análisis Matemático

Capítulo 5

Preámbulos para análisis

Índice del capítulo

5.1. Topología sobre \mathbb{R}	26
---	----

5.1. Topología sobre \mathbb{R}

La topología ocupa un lugar muy destacado cuando se trata del análisis matemático ya que es la rama que estudia que ocurre con ciertas propiedades de proximidad cuando a un conjunto le aplicas lo que hemos llamado funciones continuas en anteriores cursos.

Definición 5.1.1. Una **topología**, τ , sobre el conjunto A es una familia de subconjuntos de finita o no que cumple las siguientes características:

- A y \emptyset pertenecen a τ .
- Dado $\{A_i\}_{i \in I}$ una familia arbitraria (puede ser finita o no) de elementos de τ entonces $\cup_{i \in I} A_i$ también pertenece a la topología.
- Dado $\{A_i\}_{i=0}^{i=k}$ una familia finita de elementos de la topología entonces $\cap_{i=0}^{i=k} A_i$ es también un elemento de la topología.

A esta forma de definir una topología lo llamamos definir una topología por *abiertos*, ya que a los elementos de la topología definida así se les llama conjuntos abiertos.

Ejercicio 5.1.1. Comprobar que \mathbb{R} con los intervalos abiertos es una topología.

Definición 5.1.2. Diremos que un conjunto es **cerrado** cuando su complementario sea abierto.

Aclaración: Un conjunto puede no ser ni abierto ni cerrado y puede ser los dos a la vez, como por ejemplo el \emptyset ya que su contrario que sería el total es abierto, pero como está en la topología τ , entonces es abierto. Ambas cosas no son contradictorias.

Ahora bien, supongamos que ya tenemos estas cualidades de espacio topológico, ahora vamos a definir lo que es un entorno abierto de un punto a .

Definición 5.1.3. Un entorno no es más que la vecindad de un punto (*Los puntos cercanos a él*), y diremos que un entorno E es abierto si $\forall x \in E$ existe un abierto que está contenido en el entorno.

Ahora nos falta definir una medida sobre \mathbb{R} que nos permita decir de manera clara y concisa lo que está y lo que no está en las vecindades del punto. La medida más habitual sobre \mathbb{R} es el valor absoluto.

Capítulo 6

Cálculo de Límites

Capítulo 7

Las funciones sobre \mathbb{R}

Capítulo 8

Derivabilidad sobre \mathbb{R}

Índice del capítulo

8.1. Concepto de la derivada	32
8.2. Derivabilidad de una función	33
8.2.1. Estudio de la derivabilidad de una función	33
8.3. Tabla de derivadas	34
8.4. Algunas demostraciones de fórmulas de derivadas	34

8.1. Concepto de la derivada

Para empezar, tenemos que refrescar un concepto de geometría analítica, *la pendiente de una recta*

Definición 8.1.1. La pendiente de una recta en \mathbb{R}^2 (*El plano real*) se define como la cantidad de unidades que avanza la y por cada unidad que avanza la x . Es decir, definiendo el incremento de y como $y_1 - y_0 = \Delta y$ donde y_1 es la coordenada y del punto final y y_0 lo mismo pero del punto inicial. definimos de manera igual el Δx . Entonces definimos de manera matemática la fórmula de la pendiente como :

$$m = \frac{\Delta y}{\Delta x}$$

Ahora bien, sea $f(x)$ una función de manera que $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ de la cual queremos obtener la recta secante que pasa por unos determinados puntos $p_1 = (x_1, y_1), p_2 = (x_2, y_2)$. Entonces tendremos la siguiente gráfica: Tendremos entonces que la fórmula de la recta secante a la función que pasa por esos dos puntos p_1, p_2 es la siguiente:

$$(y - f(x_1)) = \frac{\Delta f(x)}{\Delta x}(x - x_1)$$

Definición 8.1.2. A la pendiente de la recta secante a la función $f(x)$ en los puntos x_1, x_2 se le conoce como **Tasa de Variación Media**

Supongamos ahora que escribimos $x_1 = x$ y $x_2 = x + h$ donde $h \in \mathbb{R}$ entonces la ecuación anterior queda como:

$$(y - f(x_1)) = \frac{f(x_1 + h) - f(x_1)}{h}(x - x_1)$$

Si después de esto, si hacemos que la $h \rightarrow 0$ obtendremos la recta tangente de manera que la pendiente $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$.

Es ese límite lo que definimos como *Derivada de una función*.

Definición 8.1.3. Llamaremos derivada de $f(x)$ en el punto a al límite

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$$

8.2. Derivabilidad de una función

Definición 8.2.1. Diremos que una función es derivable en a si existe el límite $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$.

Definición 8.2.2. Diremos que una función es derivable si lo es en todos los puntos del dominio.

8.2.1. Estudio de la derivabilidad de una función

8.3. Tabla de derivadas

Para empezar hay que tener en cuenta estas derivadas de operaciones de funciones básicas, sumar y restar, producto y división, producto por un escalar y composición

Sean $a \in \mathbb{R}$

8.4. Algunas demostraciones de fórmulas de derivadas

Capítulo 9

Aplicaciones de la derivada

Índice del capítulo

9.1. Cálculo de mínimos y máximos	36
9.2. Cálculo de la curvatura de las funciones	36
9.3. Optimización de funciones	36

- 9.1. Cálculo de mínimos y máximos
- 9.2. Cálculo de la curvatura de las funciones
- 9.3. Optimización de funciones

Capítulo 10

Representación de funciones

Índice del capítulo

10.1. Dominio	38
10.2. Simetría	39
10.3. Continuidad	39
10.4. Corte con los ejes	39
10.5. Asíntotas	39
10.6. Monotonía	39
10.7. Curvatura	39

10.1. Dominio

Recordemos lo que era el dominio de una función de manera precisa

Definición 10.1.1. El dominio de una función o aplicación $f : X \rightarrow Y$ es el subconjunto de puntos $x \in X$ para el cual existe $f(x)$.

Para que lo entendamos de nuevo la función f en el caso que nos ocupa es algo a lo que le entran números, la función hace una operación, (*En el caso de $2x$ sería que lo multiplica por dos*) y te devuelve ese valor operado. El dominio son los números que la función puede operar sin romperse, es decir, sin hacer cosas raras que no se pueden hacer en los números reales como por ejemplo:

- Dividir entre 0: Por tanto si tenemos una fracción habrá que comprobar cuando el denominador se hace 0. (Plantear la ecuación)
- Hacer la raíz de un número negativo: Para poder hacerlo tendríamos que extender nuestro campo a \mathbb{C} lo cual ahora mismo se nos escapa de nuestro alcance. Se plantea la inecuación
- Hacer el logaritmo de un número negativo

Dominios de las funciones elementales

Ahora vamos a ir desmenuzando los tipos de funciones que conocemos y analizando su dominio:

- **Funciones Polinómicas** Son las funciones del tipo $a_n \cdot x^n + \dots + a_0$ en este caso, su dominio es todo \mathbb{R} .
- **Funciones Racionales** Son las funciones del tipo $\frac{a_n \cdot x^n + \dots + a_0}{b_m \cdot x^m + \dots + b_0}$ en este caso, su dominio es todo \mathbb{R} , salvo los puntos en los que se anule el denominador, por o tanto hay que resolver la ecuación $b_m \cdot x^m + \dots + b_0 = 0$.
- **Funciones Irracionales** Son las de tipo $f(x) = \sqrt[n]{g(x)}$ tenemos que el dominio de $f(x)$ es:
 - El mismo que $g(x)$ si n es *impar*
 - Si n es par el dominio de $f(x)$ son los x que cumplen que $g(x) \geq 0$.
- **Funciones Exponenciales** Son de la forma $f(x) = a^{g(x)}$ con $a > 0$ y $a \neq 1$, su dominio es \mathbb{R} .

- **Funciones Logarítmicas** Son de la forma $f(x) = \log_a g(x)$ $a > 0$ y su dominio son los x tales que $g(x) > 0$.
- **Funciones Trigonométricas Circulares** Tanto $f(x) = \cos(x)$ como $f(x) = \sin(x)$ su dominio es \mathbb{R} y de aquí se pueden considerar el resto de funciones trigonométricas.

10.2. Simetría

10.3. Continuidad

10.4. Corte con los ejes

10.5. Asíntotas

10.6. Monotonía

10.7. Curvatura

Capítulo 11

Integración sobre \mathbb{R}

Parte III

Ejercicios de Análisis
Matemático

Capítulo 12

Representación de funciones

Índice del capítulo

Introducción	45
12.1. Funciones polinómicas	45
12.2. Funciones racionales	46
12.3. Funciones irracionales	46
12.4. Funciones exponenciales	46
12.5. Funciones logarítmicas	46
12.6. Funciones trigonométricas	46

Introducción

En esta capítulo vamos a recopilar todo los conocimiento de análisis que hemos recopilado durante todos los temas anteriores

12.1. Funciones polinómicas

Ejercicio 12.1.1.

$$f(x) = \frac{2x}{1+x^2}$$

Demostración. Hola

□

- 12.2. Funciones racionales**
- 12.3. Funciones irracionales**
- 12.4. Funciones exponenciales**
- 12.5. Funciones logarítmicas**
- 12.6. Funciones trigonométricas**

Parte IV

Álgebra lineal

Capítulo 13

Espacios Vectoriales

Capítulo 14

Aplicaciones lineales

Capítulo 15

Matrices

Capítulo 16

Determinantes

Capítulo 17

Discusión de sistemas

Parte V

Cálculo de probabilidades

Capítulo 18

Probabilidades básicas

Capítulo 19

Variables aleatorias discretas

Capítulo 20

Variables aleatorias continuas