Teoria de Matemáticas de Bachillerato

Pedro Ángel Fraile Manzano

6 de noviembre de 2022

Parte I

Prefacios, Repaso y otras consideraciones

Capítulo 1

Operaciones sobre los números reales

Índice del capítulo

Introducción

Los distintos conjuntos de números surgen de la necesidad de resolver distintas ecuaciones, es decir, a medida que necesitamos resolver ecuaciones más complejas, más se amplían el campo de números con los que podemos actuar:

1.1. Estructura de los números reales

Los números reales tiene estructura de cuerpo y te preguntarás ¿ Qué es un cuerpo?

Definición 1. Un cuerpo es una terna $(\mathbb{K}, +, \cdot)$ donde:

1. $\mathbb{K}$ es un conjunto de elementos
2. $+$ es una operación sobre los elementos de $\mathbb{K}$ que cumple:
   - Es una operación **conmutativa**, es decir, sean $a, b \in \mathbb{K}$ entonces tendremos que $a + b = b + a$
   - Es una operación **asociativa**, es decir dados $a, b, c \in \mathbb{K}$ tenemos que $a + (b + c) = (a + b) + c$
   - Existe un **elemento neutro**, es decir $\exists e / e+a = a+e = a \; \forall a \in \mathbb{K}$.
   - Cada elemento $a \in \mathbb{K}$ existe un elemento **inverso** que se denota por a^{-1} de tal manera que $a + a^{-1} = a^{-1} + a = e$ (*Esto también se da cuando no se cumple la conmutativa*)
3. $\cdot$ es una operación que cumple lo siguiente
   - Es una operación **asociativa**, es decir dados $a, b, c \in \mathbb{K}$ tenemos que $a \cdot (b \cdot c) = (a \cdot b) \cdot c$
   - Existe un **elemento neutro** para esta operación $\exists e / e \cdot a = a \cdot e = a$ $\forall a \in \mathbb{K}$.
   - Para todo elemento $a \in \mathbb{K}$ entonces $\exists a^{-1} / a \cdot a^{-1} = a^{-1} \cdot a = e$ (*Esto es lo que distingue un cuerpo a un anillo*)
   - $\cdot$ es **distributivo** respecto de $+$ es decir, $a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot b$

Aclaración 1: Aunque se denoten como $+, \cdot$ no tenemos por qué usar las definiciones habituales de la suma y la multiplicación. Por ejemplo, la suma y producto de números reales no son iguales que las mismas operaciones para las matrices *(quedaros con ese nombre.)*

Aclaración 2: De esta manera que tenemos que lo que llamamos en los números reales la resta es la suma por el inverso y la división es el producto por el inverso.

Ejercicio Propuesto. Demostrar que $\mathbb{R}$ y $\mathbb{C}$ son cuerpos

1.2. Potencias y sus propiedades

Definición 2. Podemos definir las potencias como $a^n = \overbrace{a \cdot \ldots \cdot a}^{\text{n veces}}$. Una vez entendido esto tenemos las siguientes propiedades

Propiedades

1. $a^1 = a$ y $a^0 = 1$ para cualquier $a \in \mathbb{R}$
2. $a^{-1} = \dfrac{1}{a}$
3. $a^n \cdot a^m = a^{n+m}$
4. $\dfrac{a^n}{a^m} = a^{n-m}$
5. $(a^n)^m = a^{n \cdot m}$
6. $\sqrt[n]{a} = a^{\frac{1}{n}}$
7. $(a \cdot b)^n = a^n \cdot b^n$
8. $\left(\dfrac{a}{b}\right)^n = \dfrac{a^n}{b^n}$

Demostración

1. Para la primera demostración no hace falta más que decir que estamos "poniendo" sólo una a y que $a^0 = 1$ es básicamente proveniente del álgebra $\mathbb{Z}$ modular.
2. En este caso, tenemos que al utilizar la propiedad 3 quedará más clara pero si nosotros tenemos $a^1 \cdot a^{-1} = a^0 = 1 \Rightarrow a^{-1} = \dfrac{1}{a}$
3. Ahora tenemos que $a^n \cdot a^m = \overbrace{a \cdot \ldots \cdot a}^{\text{n veces}} \cdot \overbrace{a \cdot \ldots \cdot a}^{\text{m veces}} = \overbrace{a \cdot \ldots \cdot a}^{\text{n+m veces}} = a^{m+n}$

4. Si combinamos la propiedad 2 y 3 queda probado $\frac{a^n}{a^m} = a^n \cdot \frac{1}{a^m} = a^n \cdot a^{-m} = a^{n-m}$

5. Este se debe a que estamos multiplicando paquetitos del producto de n a's, es decir , $(a^n)^m = \overbrace{a^n \cdot \ldots \cdot a^n}^{\text{m veces}} = \overbrace{\underbrace{a \cdot \ldots \cdot a}_{\text{n veces}} \cdot \ldots \cdot \underbrace{a \cdot \ldots \cdot a}_{\text{n veces}}}^{\text{m veces}} = \overbrace{a \cdot \ldots \cdot a}^{\text{n m veces}} = a^{mn}$

6. Haciendo un razonamiento análogo pero con el producto lo tenemos

7. Tenemos lo siguiente $(a \cdot b)^n = \overbrace{a \cdot b \cdot \ldots \cdot a \cdot b}^{\text{n veces}} = \overbrace{a \cdot \ldots \cdot a}^{\text{n veces}} \cdot \overbrace{b \cdot \ldots \cdot b}^{\text{n veces}} = a^n \cdot b^n$

8. Utilizando un razonamiento similar al anterior lo tenemos cambiando únicamente b por b^{-1}

Capítulo 2

Un segundo capítulo

Índice del capítulo

2.1.

2.2.

Apéndice A

Mi primer apéndice