Teoría de Topología

Pedro Ángel Fraile Manzano

20 de noviembre de 2022

Contenidos Generales

Capítulo 1

Espacios Métricos

Definición 1.1. Si E es un $\mathbb{R}$ espacios vectorial una norma sobre E es una aplicación $\|\|: E \Longrightarrow \mathbb{R}$ que para cada $e, e' \in E$ y $a \in \mathbb{R}$ que verifica:

1. $\| e \| \geq 0; \| e \| = 0 \Leftrightarrow e = 0$
2. Desigualdad triangular $\| e + e' \| \leq \| e \| + \| e' \|$
3. $\| ae \| = a \| e \|$

Si E es un espacio vectorial y $\|\|$ una norma como la definida antes, el par $(E, \|\|)$ recibe el nombre de espacio normado

Definición 1.2. Sea E un $\mathbb{R}$-espacio vectorial. Diremos que un producto escalar

$$T_2 \colon E \times E \Longrightarrow \mathbb{R}$$

es euclídeo si es definido positivo, es decir si para cada $e \in E$, $T_2(e, e) \geq 0$ y $T_2(e, e) = 0 \Leftrightarrow e = 0$. Un espacio euclídeo es un par (E, T_2) donde

Lema 1.1. Sea (E, T_2) un espacio euclídeo y $\| e \| = sqrt T_2(e, e)$ Dados $e, e' \in E$ se verifica que:

1. *Desigualdad de Schwarz:* $|T_2(e, e')| \leq \| e \| \cdot \| e' \|$
2. *Desigualdad de Minkowski:* $\| e + e' \| \leq \| e \| + \| e' \|$

Demostración. Vamos a separar cada una de las proposiciones:

1. Para cada $a \in \mathbb{R}$ se tiene que:

$$0 \leq T_2(e + ae', e + ae') = T_2(e, e) + 2aT_2(e, e') + a^2 T_2(e', e')$$

Esta expresión se da ya que el T_2 es una aplicación bilineal, ya que es una aplicación la cual es lineal en cada uno de los términos. En este caso, el último término de la igualdad es un polinomio de grado 2 que no toma valores negativos, ya que ninguno de los productos euclídeos son positivos.Entonces, como no tiene solución el discriminante de este polinomio no puede ser positivo

$$4T_2(e, e') - 4T_2(e, e)T_2(e', e') \leq 0$$

Por tanto, $T_2(e, e')^2 \leq T_2(e, e)T_2(e', e')$ por tanto, se concluye.

2. Por darse la anterior proposición tenemos que

$$\| e + e' \|^2 = T_2(e + e', e + e') =$$
$$= T_2(e, e) + 2T_2(e, e') + T_2(e', e') \leq \| e \|^2 + \| e \| \| e' \| + \| e' \|^2 = (\| e \| + \| e' \|)^2$$

y tomando las raíces cuadradas se concluye

□

Proposición 1.1. Si (E, T_2) es un espacio euclídeo, la aplicación $\|\|: E \longrightarrow \mathbb{R}$ definida como $\| e \| = \sqrt{T_2(e, e)}$ es una norma en E.

La norma asociada con un producto escalar se denota habitualmente como $\|\|_2$, en $\mathbb{R}^n$ la norma $\|\|_2$ se puede calcular como:

$$\| x \|_2 = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} x_i^2}$$

Esta será la norma que no se especifique otra cosa

Definición 1.3. Sea X un copnjunto, una distancia en X es una aplicación $d: X \times X \longrightarrow \mathbb{R}^+$ para $x, y, z \in X$ se verifica:

- $d(x, y) \geq 0; d(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = y$
- $d(x, y) = d(y, x)$
- Desigualdad triangular $d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z)$

Las nociones anteriores únicamente se pueden aplicar a espacios vectoriales, pero la de distancia se puede aplicar a cualquier conjunto X.

Capítulo 2

Espacios Topológicos

Definición 2.1. Sea (X, d) un espacio métrico, dados $x \in X$ $r \in \mathbb{R}^+$, llamaremos bola abierta de centro x y radio r al conjunto

$$B(x, r) = \{y \in X : d(x, y) < r\}$$

y la bola cerrada de centro x y radio r.

$$\overline{B}(x, r) = \{y \in X : d(x, y) \leq r\}$$

Dependiendo de la distancia y la norma que se haya definido, las bolas tienen distinta forma, por ejemplo la norma infinito una bola es un cuadrado.

Definición 2.2. Sea (X, d) un espacio métrico. Diremos que un subconjunto U de X es abierto si para cada $x \in U \exists r > 0 : B(x, r) \subseteq U$

En un espacio métrico las bolas abiertas son abiertos de la topología

Proposición 2.1. Los abiertos de un espacio métrico (X,d), verifican las siguientes propiedades:

1. $\emptyset$ y X son abiertos
2. Si U y V son abiertos entonces $U \cap V$ también lo es. (Se cumple para cualquier conjunto finito de conjuntos)
3. Si $\{U_\alpha\}_{\alpha \in A}$ es una familia de abiertos, entonces $\bigcup_{\alpha \in A} U_\alpha$ también es abierto.