Teoria de Matemáticas de Bachillerato

Pedro Ángel Fraile Manzano

8 de noviembre de 2022

Contenidos Generales

Apartados del libro **Página**

Parte I

Prefacios, Repaso y otras consideraciones

Capítulo 1

Operaciones sobre los números reales

Índice del capítulo

Introducción

Los distintos conjuntos de números surgen de la necesidad de resolver distintas ecuaciones, es decir, a medida que necesitamos resolver ecuaciones más complejas, más se amplían el campo de números con los que podemos actuar:

1.1. Estructura de los números reales

Los números reales tiene estructura de cuerpo y te preguntarás ¿ Qué es un cuerpo?

Definición 1.1.1. Un cuerpo es una terna $(\mathbb{K}, +, \cdot)$ donde:

1. $\mathbb{K}$ es un conjunto de elementos
2. $+$ es una operación sobre los elementos de $\mathbb{K}$ que cumple:
   - Es una operación **conmutativa**, es decir, sean $a, b \in \mathbb{K}$ entonces tendremos que $a + b = b + a$
   - Es una operación **asociativa**, es decir dados $a, b, c \in \mathbb{K}$ tenemos que $a + (b + c) = (a + b) + c$
   - Existe un **elemento neutro**, es decir $\exists e / e+a = a+e = a \ \forall a \in \mathbb{K}$.
   - Cada elemento $a \in \mathbb{K}$ existe un elemento **inverso** que se denota por a^{-1} de tal manera que $a + a^{-1} = a^{-1} + a = e$ (*Esto también se da cuando no se cumple la conmutativa*)
3. $\cdot$ es una operación que cumple lo siguiente
   - Es una operación **asociativa**, es decir dados $a, b, c \in \mathbb{K}$ tenemos que $a \cdot (b \cdot c) = (a \cdot b) \cdot c$
   - Existe un **elemento neutro** para esta operación $\exists e / e \cdot a = a \cdot e = a$ $\forall a \in \mathbb{K}$.
   - Para todo elemento $a \in \mathbb{K}$ entonces $\exists a^{-1} / a \cdot a^{-1} = a^{-1} \cdot a = e$ (*Esto es lo que distingue un cuerpo a un anillo*)
   - $\cdot$ es **distributivo** respecto de $+$ es decir, $a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot b$

Aclaración 1: Aunque se denoten como $+, \cdot$ no tenemos por qué usar las definiciones habituales de la suma y la multiplicación. Por ejemplo, la suma y producto de números reales no son iguales que las mismas operaciones para las matrices *(quedaros con ese nombre.)*
Aclaración 2: De esta manera que tenemos que lo que llamamos en los números reales la resta es la suma por el inverso y la división es el producto por el inverso.

Ejercicio Propuesto. Demostrar que $\mathbb{R}$ y $\mathbb{C}$ son cuerpos

1.2. Potencias y Logaritmos

Definición 1.2.1. Podemos definir las potencias como $a^n = \overbrace{a \cdot \ldots \cdot a}^{\text{n veces}}$. Una vez entendido esto tenemos las siguientes propiedades

Propiedades

1. $a^1 = a$ y $a^0 = 1$ para cualquier $a \in \mathbb{R}$
2. $a^{-1} = \dfrac{1}{a}$
3. $a^n \cdot a^m = a^{n+m}$
4. $\dfrac{a^n}{a^m} = a^{n-m}$
5. $(a^n)^m = a^{n \cdot m}$
6. $\sqrt[n]{a} = a^{\frac{1}{n}}$
7. $(a \cdot b)^n = a^n \cdot b^n$
8. $\left(\dfrac{a}{b}\right)^n = \dfrac{a^n}{b^n}$

Demostración

1. Para la primera demostración no hace falta más que decir que estamos "poniendo" sólo una a y que $a^0 = 1$ es básicamente proveniente del álgebra $\mathbb{Z}$ modular.
2. En este caso, tenemos que al utilizar la propiedad 3 quedará más clara pero si nosotros tenemos $a^1 \cdot a^{-1} = a^0 = 1 \Rightarrow a^{-1} = \dfrac{1}{a}$

3. Ahora tenemos que $a^n \cdot a^m = \overbrace{a \cdot \ldots \cdot a}^{\text{n veces}} \cdot \overbrace{a \cdot \ldots \cdot a}^{\text{m veces}} = \overbrace{a \cdot \ldots \cdot a}^{\text{n+m veces}} = a^{m+n}$

4. Si combinamos la propiedad 2 y 3 queda probado $\dfrac{a^n}{a^m} = a^n \cdot \dfrac{1}{a^m} = a^n \cdot a^{-m} = a^{n-m}$

5. Este se debe a que estamos multiplicando paquetitos del producto de n a's, es decir , $(a^n)^m = \overbrace{a^n \cdot \ldots \cdot a^n}^{\text{m veces}} = \overbrace{\underbrace{a \cdot \ldots \cdot a}_{\text{n veces}} \cdot \ldots \cdot \underbrace{a \cdot \ldots \cdot a}_{\text{n veces}}}^{\text{m veces}} = \overbrace{a \cdot \ldots \cdot a}^{\text{n m veces}} = a^{mn}$

6. Haciendo un razonamiento análogo pero con el producto lo tenemos

7. Tenemos lo siguiente $(a \cdot b)^n = \overbrace{a \cdot b \cdot \ldots \cdot a \cdot b}^{\text{n veces}} = \overbrace{a \cdot \ldots \cdot a}^{\text{n veces}} \cdot \overbrace{b \cdot \ldots \cdot b}^{\text{n veces}} = a^n \cdot b^n$

8. Utilizando un razonamiento similar al anterior lo tenemos cambiando únicamente b por b^{-1}

Definición 1.2.2. Definimos el logaritmo de $b \in \mathbb{R}^+$ en base $a > 0$ de la siguiente manera

$$log_a b = x \Leftrightarrow a^x = b \tag{1.1}$$

Esta definición nos permite "traducir"de logaritmos a potencias y es lo que se utiliza para demostrar las siguientes propiedades

Propiedades: Sean $P, Q, a \in \mathbb{R}^+$

1. $log_a 1 = 0$
2. $log_a a = 1$
3. $log_a(P \cdot Q) = log_a P + log_a Q$
4. $log_a \left(\dfrac{P}{Q}\right) = log_a P - log_a Q$
5. $log_a P^n = n \cdot log_a P$

Ejercicio Propuesto. Se propone al lector la demostración de estas propiedades utilizando la definición de logaritmos y las propiedades de las potencias.

1.3. Resolución de ecuaciones exponenciales

Definición 1.3.1. Podemos definir una ecuación exponencial como aquella que tiene la incógnita en el exponente

1.4. Resolución de ecuaciones logarítmicas

Definición 1.4.1. Podemos definir una ecuación exponencial como aquella que tiene la incógnita dentro de un logaritmo.

Capítulo 2

Polinomios sobre el cuerpo de los reales y ecuaciones

Índice del capítulo

2.1. Conceptos básicos

2.2. Operaciones con polinomios

2.3. Divisibilidad de polinomios

Capítulo 3

Ecuaciones polinómicas

Índice del capítulo

3.1. Ecuaciones lineales

3.2. Ecuaciones parabólicas

3.3. Ecuaciones de grado mayor que 2

Capítulo 4

Inecuaciones

Índice del capítulo

4.1. Inecuaciones lineales

4.2. Inecuaciones no lineales

Parte II

Ejercicios de Análisis Matemático

Capítulo 5

Representación de funciones

Índice del capítulo

Introducción

En esta capítulo vamos a recopilar todo los conocimiento de análisis que hemos recopilado durante todos los temas anteriores

5.1. Funciones polinómicas

Ejercicio 5.1.1.

$$f(x) = \frac{2x}{1 + x^2}$$

Demostración. Hola □

5.2. Funciones racionales

5.3. Funciones irracionales

5.4. Funciones exponenciales

5.5. Funciones logarítmicas

5.6. Funciones trigonométricas