Temario 3º de la ESO

Pedro Ángel Fraile Manzano

2023

Índice general

Capítulo 1

Operaciones sobre $\mathbb{Q}$

El conjunto de los números racionales $\mathbb{Q}$ es el conjunto que se pueden dar como una pareja de números enteros.

Definición 1.1. Llamaremos numerador al número entero que está arriba en la fracción.

$$\frac{a}{b} \text{ El término a} \tag{1.0.1}$$

Definición 1.2. Llamaremos denominador al número entero que está abajo en la fracción.

$$\frac{a}{b} \text{ El término b} \tag{1.0.2}$$

1.1. Suma y resta de Fracciones

Cuando tienes un par de fracciones sólo se pueden sumar si tienen el mismo denominador.

Para sumar dos fracciones **con el mismo denominador**, basta con mantener el denominador y se suman los denominadores:

$$\frac{a}{b} + \frac{c}{b} = \frac{a+c}{b} \tag{1.1.1}$$

En el caso de que no tengan el mismo denominador hay que dar la siguiente definición:

Definición 1.3. Dos fracciones $\frac{a}{b}, \frac{c}{d}$ son equivalentes si se cumple que :

$$a \cdot d = b \cdot c \tag{1.1.2}$$

Ejemplo 1.1.1. Las fracciones $\frac{3}{5}, \frac{6}{10}, \frac{12}{20}$ son equivalentes

Hay que definir el concepto de *fracción irreducible*

Definición 1.4. Una fracción es irreducible si el máximo común divisor del numerador y el denominador es 1.

Ejemplo 1.1.2. La fracción $\frac{14}{16}$ es reducible, ya que el máximo común divisor es 2, dividiendo entre 2 tanto denominador como el numerador obtendremos la fracción irreducible $\frac{7}{8}$

Un método para obtener fracciones equivalentes es multiplicar denominador y numerador por el mismo número.

Ejemplo 1.1.3. Las fracciones $\frac{3}{5} = \frac{3\cdot 4}{5\cdot 4} = \frac{12}{20}$ son equivalentes

Para sumar dos fracciones con denominadores distintos se sigue el siguiente procedimiento:

1. Se calcula el mínimo común múltiplo de los denominadores.
2. Se divide el mínimo común múltiplo por cada uno de los denominadores.
3. Se multiplica el numerador y el denominador por el resultado de la división.

De esta manera, se obtienen dos fracciones que son equivalentes a las anteriores pero con el mismo denominador.

Ejemplo

Reducir a común denominador las fracciones $\frac{2}{5}$ *y* $\frac{1}{3}$

$$\frac{2}{5} \text{ y } \frac{1}{3} \rightarrow m.c.m.(5,3) = 3 \cdot 5 = 15 \rightarrow \begin{cases} \frac{2}{5} = \frac{?}{15} \rightarrow \frac{(15:5) \cdot 2}{15} = \frac{3 \cdot 2}{15} = \frac{6}{15} \rightarrow \frac{2}{5} = \frac{6}{15} \\ \frac{1}{3} = \frac{?}{15} \rightarrow \frac{(15:3) \cdot 1}{15} = \frac{5 \cdot 1}{15} = \frac{5}{15} \rightarrow \frac{1}{3} = \frac{5}{15} \end{cases}$$

Piensa y practica					
2.- Reduce a común denominador y ordena de menor a mayor las siguientes fracciones:					
$\frac{5}{6}$	$\frac{3}{5}$	$\frac{2}{3}$	$\frac{7}{10}$	$\frac{8}{15}$	$\frac{7}{30}$

1.5.1.- Suma y resta de fracciones

- ***Con igual denominador:***

Para sumar o restar fracciones con el mismo denominador, simplemente, se suman o se restan los numeradores y se deja intacto el denominador:

Ejemplo

$$\frac{1}{5}+\frac{3}{5}=\frac{1+3}{5}=\frac{4}{5} \qquad \frac{2}{7}+\frac{4}{7}=\frac{2+4}{7}=\frac{6}{7} \qquad \frac{4}{9}+\frac{7}{9}=\frac{4+7}{9}=\frac{11}{9} \qquad \frac{8}{15}+\frac{13}{15}=\frac{8+13}{15}=\frac{21}{15}$$

- ***Con distinto denominador:***

Para sumar o restar fracciones con diferente denominador, primero se reducen a común denominador y, después, se suman o se restan los numeradores dejando el nuevo denominador. Si alguno de los sumandos es entero lo transformaremos en una fracción de denominador 1.

Ejemplo

$$\underbrace{\frac{1}{5}+\frac{3}{4}}_{m.c.m(4,5)=20}=\begin{cases}\frac{1}{5}=\frac{4\cdot 1}{4\cdot 5}=\frac{4}{20}\\ \frac{3}{4}=\frac{5\cdot 1}{5\cdot 4}=\frac{5}{20}\end{cases} \rightarrow \frac{1}{5}+\frac{3}{4}=\frac{4}{20}+\frac{5}{20}=\frac{9}{20}$$

Los sumandos enteros se transforman en fracciones de denominador 1

$$\frac{1}{2}+2=\frac{1}{2}+\frac{2}{1}=\frac{1}{2}+\frac{4}{2}=\frac{5}{2}$$

Siempre que se opera con fracciones tenemos que dar el resultado en la *fracción irreducible*, por tanto, si se puede reducir siempre se reducirá.

Ejemplo

$$\underbrace{\frac{7}{6}+\frac{5}{2}-3+\frac{1}{5}}_{m.c.m(2,5,6)=30}=\begin{cases}\frac{7}{6}=\frac{5\cdot 7}{5\cdot 6}=\frac{35}{30} & y & 3=\frac{3}{1}=\frac{30\cdot 3}{30\cdot 1}=\frac{90}{30}\\ \frac{5}{2}=\frac{15\cdot 5}{15\cdot 2}=\frac{75}{30} & y & \frac{1}{5}=\frac{6\cdot 1}{6\cdot 5}=\frac{6}{30}\end{cases} \rightarrow \frac{7}{6}+\frac{5}{2}-3+\frac{1}{5}=\frac{35}{30}+\frac{75}{30}-\frac{90}{30}+\frac{6}{30}=$$

$$=\frac{35+75-90+6}{30}=\frac{26}{30}\xrightarrow{\text{Simplificando}}=\frac{26:2}{30:2}=\frac{13}{15}\ \underset{\text{por tanto}}{\rightarrow}\ \frac{7}{6}+\frac{5}{2}-3+\frac{1}{5}=\frac{13}{15}$$

Además es importante no esperar hasta el final para simplificar sino que podemos (mas bien debemos) hacerlo en cualquier momento, incluso al principio.

Ejemplo

$$\frac{24}{10}+\frac{12}{30}-\frac{15}{25}\ \underset{\substack{\text{Simplificamos antes de operar}\\ \text{para facilitar los cálculos}\\ \text{(Fracción irreducible)}}}{=}\ \begin{cases}\frac{24}{10}=\frac{12}{5}\\ \frac{12}{30}=\frac{6}{15}=\frac{2}{5}\\ \frac{15}{25}=\frac{3}{5}\end{cases}\ \underset{\substack{\text{Y Observamos que no es necesario}\\ \text{reducir a común denominador porque}\\ \text{ya tienen el mismo denominador.}\\ \text{SIMPLEMENTE OPERAMOS}}}{\rightarrow}\ =\frac{12}{5}+\frac{2}{5}-\frac{3}{5}=\frac{11}{5}$$

1.5.2.- La fracción opuesta:

Una fracción $\frac{a}{b}$ tiene siempre una fracción opuesta, que es de la forma $-\frac{a}{b}$ ó $\frac{-a}{b}$ y nunca $\frac{a}{-b}$.

$$\text{Opuesta de } \frac{a}{b} \rightarrow -\frac{b}{a}$$

1.2. Producto y la división de Fracciones

Para realizar el producto de fracciones, basta con multiplicar los numeradores y los denominadores entre si.

Para la división se sigue el siguiente esquema:

Para dividir dos fracciones:

$\frac{a}{b} : \frac{c}{d} = \frac{a \cdot d}{b \cdot c}$ $\leftrightarrow$ Se multiplican los términos cruzados.

Definición 1.5. Llamaremos *fracción inversa* de una fracción a la que cambia los términos, es decir la que cambia denominador y numerador

$$\frac{a}{b} \Rightarrow \frac{b}{a} \tag{1.2.1}$$

Otra propiedad es que si las multiplicas entre sí es $\frac{a}{b} \cdot \frac{b}{a} = \frac{ab}{ba} = 1$

1) $\frac{8}{5}\left[\frac{2}{7}+\left(\frac{-1}{5}\right)+\frac{2}{3}\right]$ 2) $\frac{5}{3}\cdot\frac{1}{3}\left[\frac{1}{5}+\frac{1}{7}\right]\left(\frac{-1}{3}\right)$ 3) $\frac{3}{4}\left[\frac{2}{7}+\frac{3}{4}\right]\frac{5}{7}$

4) $\left[\left(\frac{-1}{4}\right)+\frac{1}{5}\right]\frac{7}{4}+\frac{1}{5}$ 5) $\left[\frac{2}{7}+\left(\frac{3}{-4}\right)+\frac{1}{7}\right]\frac{3}{4}$ 6) $\frac{8}{3}\left[\frac{5}{4}+\left(\frac{-2}{7}\right)\right]+\frac{3}{7}$

7) $\left(\frac{8}{3}+\frac{1}{5}\right)\cdot\left(\frac{3}{4}+\frac{5}{3}\right)+\frac{1}{7}$ 8) $\left(\frac{3}{5}\cdot\frac{8}{4}\right)+\left[\frac{7}{3}\cdot\left(\frac{-1}{5}\right)\right]+\frac{3}{7}$ 9) $\frac{4}{3}\cdot\left(\frac{2}{5}+\frac{1}{7}\right)\cdot\left(-\frac{2}{3}\right)$

10) $\left(\frac{2}{3}+\frac{1}{5}-\frac{1}{7}\right)\cdot\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{5}$ 11) $\frac{3}{4}\left(\frac{2}{5}+\frac{1}{7}\right)+\frac{2}{7}\left(\frac{4}{3}+\frac{9}{8}\right)$ 12) $\left(\frac{2}{7}+\frac{2}{7}\right)\cdot\frac{3}{4}+\frac{1}{5}$

13) $\left(\frac{7}{8}+\frac{3}{4}\right)\cdot\left(\frac{1}{3}+\frac{2}{7}\right)+\frac{3}{4}$ 14) $\left(\frac{-2}{3}\right)\cdot\left(\frac{8}{-5}\right)+\left(-\frac{3}{4}\cdot\frac{4}{3}\right)$ 15) $\frac{3}{5}\cdot\frac{8}{4}\cdot\frac{3}{9}\cdot\left[\frac{2}{5}+\frac{1}{7}\right]$

16) $\frac{2}{7}\cdot\left[\left(\frac{3}{4}+\frac{2}{7}\right):\left(\frac{1}{9}-\frac{2}{5}\right)\right]$ 17) $\left(\frac{7}{4}+\frac{2}{7}-\frac{1}{5}\right):\left(\frac{2}{4}+\frac{1}{9}-\frac{1}{10}\right)$ 18) $\left(\frac{3}{9}:\frac{4}{3}\right)-\left(\frac{2}{7}:\frac{3}{9}\right)+\frac{2}{5}$

19) $\left[\left(3+\frac{5}{9}\right):\left(\frac{3}{7}-5\right)\right]+\frac{2}{7}$ 20) $\left[\left(\frac{4}{9}+\frac{8}{3}\right):\left(\frac{4}{5}-\frac{1}{7}\right)\right]:\frac{3}{8}$ 21) $\left(3+\frac{4}{5}\right)\cdot\left(\frac{1}{2}:\frac{3}{2}\right)$

22) $\left[\left(\frac{1}{5}+\frac{1}{7}+\frac{3}{8}\right)-\frac{1}{7}\right]:\left(\frac{2}{3}+\frac{1}{4}\right)$ 23) $\left[\left(\frac{1}{5}:\frac{2}{3}\right)\cdot\frac{2}{7}\right]:\left(\frac{2}{9}-\frac{1}{5}\right)$ 24) $\left(\frac{1}{2}-\frac{5}{3}\right):3-\frac{4}{3}\cdot\frac{5}{6}$

25) $1-\left(1:\frac{3}{4}\right)+\frac{8}{5}:\left(\frac{7}{2}-3\right)$ 26) $\left[\left(\frac{2}{3}+\frac{7}{4}\right):\left(\frac{2}{7}-\frac{1}{5}\right)\right]\cdot\frac{2}{9}$ 27) $\left(\frac{8}{5}:\frac{9}{4}\right):\frac{3}{6}+\frac{2}{5}$

28) $\dfrac{\frac{2}{3}+5\left(\frac{1}{2}-1\right)}{2+\frac{7}{4}}$ 29) $\dfrac{3-\frac{1}{2}\cdot\frac{4}{5}}{\left(\frac{1}{2}+4\right)\cdot 7}$ 30) $\dfrac{\frac{6}{5}-2}{-\frac{1}{2}\cdot\left(\frac{3}{4}-\frac{1}{4}\right)}$ 31) $\dfrac{1-\dfrac{2}{3-\frac{2}{3}}}{2+\frac{2}{5}}$

32) $\dfrac{1}{\frac{1}{3}+\frac{1}{5}}+3\cdot\dfrac{5}{-1+\frac{3}{4}}$ 33) $6-\frac{2}{5}\cdot\frac{1}{3}+\dfrac{4-\frac{3}{2}\cdot\frac{1}{3}}{4+5\cdot\frac{7}{3}}$ 34) $\dfrac{\frac{5}{6}+\frac{3}{4}}{\frac{5}{7}+\frac{3}{5}}$

35) $\left(8+\frac{1}{4}\right)\cdot\frac{2}{3}-\dfrac{1-\frac{1}{2}}{3+\frac{5}{6}}$ 36) $\frac{2}{3}\left(\dfrac{2-\frac{1}{4}}{5-2}-\dfrac{\frac{2}{5}-1}{\frac{1}{4}+3}\right)$ 37) $\frac{1}{5}:\dfrac{4+\frac{1}{7}\cdot 3}{\left(2-\frac{8}{3}\right)\cdot\frac{1}{5}}$

38) $\left(\dfrac{\frac{2}{5}:\frac{-1}{3}}{1+\frac{4}{5}}-\dfrac{2-\frac{8}{3}}{4\cdot\frac{7}{2}}\right)\cdot\frac{4}{7}$ 39) $\dfrac{\frac{4}{5}:\frac{4}{9}}{\frac{-3}{2}:\frac{3}{7}}:\dfrac{\frac{-6}{7}:\frac{6}{2}}{\frac{8}{9}:\frac{8}{5}}$ 40) $\dfrac{\frac{3}{5}\cdot\frac{2}{9}}{-1-\frac{4}{3}}-\dfrac{-2+\frac{1}{6}}{\frac{1}{7}\cdot\frac{7}{8}}$

Soluciones:1) 632/525, 2) -4/63, 3) 435/784, 4) 9/80, 5) -27/112, 6) 3, 7) 8909/1260, 8) 122/105, 9) -152/315, 10) 76/1575, 11) 233/210, 12) 22/35, 13) 295/168, 14) 1/15, 15) 38/175, 16) -1305/1274, 17) 2313/644, 18) -29/140, 19) -31/63, 20) 7840/621, 21) 19/15, 22) 69/110, 23) 27/7, 24) -3/2, 25) 43/15, 26) 503/18, 27) 82/45, 28) -22/45, 29) 26/315, 30) 16/5, 31) 5/84, 32) -465/8, 33) 8587/1410, 34) 665/552, 35) 247/46, 36) 599/1170, 37) -14/2325, 38) -52/147, 39) 1, 40) 1534/105

1.3. Fracciones como operadores