

# Teoría de Matemáticas de Bachillerato

Pedro Ángel Fraile Manzano

20 de febrero de 2023



# Contenidos Generales

Apartados del libro	Página
<b>I Prefacios, Repaso y otras consideraciones</b>	<b>11</b>
<b>1. Operaciones sobre los números reales</b>	<b>13</b>
<b>Introducción</b>	<b>14</b>
1.1. Estructura de los números reales . . . . .	14
1.2. Potencias y Logaritmos . . . . .	15
1.3. Resolución de ecuaciones exponenciales . . . . .	17
1.4. Resolución de ecuaciones logarítmicas . . . . .	19
<b>2. Polinomios sobre el cuerpo de los reales y ecuaciones</b>	<b>21</b>
2.1. Conceptos básicos . . . . .	21
2.2. Operaciones con polinomios . . . . .	21
2.3. Divisibilidad de polinomios . . . . .	21
<b>3. Ecuaciones polinómicas</b>	<b>23</b>
3.1. Ecuaciones lineales . . . . .	23
3.2. Ecuaciones parabólicas . . . . .	23
3.3. Ecuaciones de grado mayor que 2 . . . . .	24
<b>4. Inecuaciones</b>	<b>25</b>
4.1. Inecuaciones lineales . . . . .	25
4.2. Inecuaciones no lineales . . . . .	25
<b>II Análisis Matemático</b>	<b>27</b>
<b>5. Preámbulos para análisis</b>	<b>29</b>
5.1. Topología sobre $\mathbb{R}$ . . . . .	30

<b>6. Cálculo de Límites</b>	<b>33</b>
6.1. Preámbulo sobre las sucesiones reales . . . . .	34
6.2. Definición . . . . .	34
6.3. Propiedades de los límites . . . . .	35
6.4. Cálculo efectivo de límites . . . . .	35
6.5. Indeterminaciones . . . . .	35
<b>7. Las funciones sobre <math>\mathbb{R}</math></b>	<b>37</b>
7.1. Definiciones previas . . . . .	38
<b>8. Derivabilidad sobre <math>\mathbb{R}</math></b>	<b>39</b>
8.1. Concepto de la derivada . . . . .	40
8.2. Derivabilidad de una función . . . . .	41
8.2.1. Estudio de la derivabilidad de una función . . . . .	41
8.3. Tabla de derivadas . . . . .	42
8.4. Algunas demostraciones de fórmulas de derivadas . . . . .	43
<b>9. Aplicaciones de la derivada</b>	<b>45</b>
9.1. Cálculo de mínimos y máximos . . . . .	46
9.2. Cálculo de la curvatura de las funciones . . . . .	46
9.3. Optimización de funciones . . . . .	46
<b>10. Representación de funciones</b>	<b>47</b>
10.1. Dominio . . . . .	48
10.2. Simetría y periodicidad . . . . .	49
10.3. Continuidad . . . . .	50
10.4. Corte con los ejes . . . . .	51
10.5. Asíntotas . . . . .	51
10.6. Monotonía . . . . .	51
10.7. Curvatura . . . . .	51
10.8. Análisis de cada tipo de función elemental . . . . .	51
<b>11. Integración sobre <math>\mathbb{R}</math></b>	<b>53</b>
11.1. Conceptos principales . . . . .	54
11.2. Cálculo efectivo de integrales . . . . .	56
11.2.1. Primitivas inmediatas . . . . .	56
11.2.2. Integración por partes . . . . .	57
11.2.4. Integración por cambio de variable . . . . .	57
11.2.5. Integración de funciones racionales . . . . .	57
11.2.6. Ejercicios . . . . .	58
11.3. Aplicaciones de la integral . . . . .	58

<i>CONTENIDOS GENERALES</i>	5
<b>III Ejercicios de Análisis Matemático</b>	<b>59</b>
<b>12.Representación de funciones</b>	<b>61</b>
Introducción . . . . .	61
12.1. Funciones polinómicas . . . . .	61
12.2. Funciones racionales . . . . .	62
12.3. Funciones irracionales . . . . .	62
12.4. Funciones exponenciales . . . . .	62
12.5. Funciones logarítmicas . . . . .	62
12.6. Funciones trigonométricas . . . . .	62
<b>IV Álgebra lineal</b>	<b>63</b>
<b>13.Espacios Vectoriales</b>	<b>65</b>
<b>14.Aplicaciones lineales</b>	<b>67</b>
<b>15.Matrices</b>	<b>69</b>
<b>16.Determinantes</b>	<b>71</b>
<b>17.Discusión de sistemas</b>	<b>73</b>
<b>V Cálculo de probabilidades</b>	<b>75</b>
<b>18.Probabilidades básicas</b>	<b>77</b>
<b>19.Variables aleatorias discretas</b>	<b>79</b>
<b>20.Variables aleatorias continuas</b>	<b>81</b>



# Preludio





# Indice de símbolos

Con el fin de poder resumir y dinamizar el lenguaje matemático se utilizarán a lo largo de estos apuntes



## Parte I

# Prefacios, Repaso y otras consideraciones



# Capítulo 1

## Operaciones sobre los números reales

### Índice del capítulo

---

1.1. Estructura de los números reales . . . . .	14
1.2. Potencias y Logaritmos . . . . .	15
1.3. Resolución de ecuaciones exponenciales . . . . .	17
1.4. Resolución de ecuaciones logarítmicas . . . . .	19

---

## Introducción

Los distintos conjuntos de números surgen de la necesidad de resolver distintas ecuaciones, es decir, a medida que necesitamos resolver ecuaciones más complejas, más se amplían el campo de números con los que podemos actuar:

### 1.1. Estructura de los números reales

Los números reales tiene estructura de cuerpo y te preguntará ¿Qué es un cuerpo?

**Definición 1.1.1.** Un cuerpo es una terna  $(\mathbb{K}, +, \cdot)$  donde:

1.  $\mathbb{K}$  es un conjunto de elementos
2.  $+$  es una operación sobre los elementos de  $\mathbb{K}$  que cumple:
  - Es una operación **conmutativa**, es decir, sean  $a, b \in \mathbb{K}$  entonces tendremos que  $a + b = b + a$
  - Es una operación **asociativa**, es decir dados  $a, b, c \in \mathbb{K}$  tenemos que  $a + (b + c) = (a + b) + c$
  - Existe un **elemento neutro**, es decir  $\exists e/e + a = a + e = a \quad \forall a \in \mathbb{K}$ .
  - Cada elemento  $a \in \mathbb{K}$  existe un elemento **inverso** que se denota por  $a^{-1}$  de tal manera que  $a + a^{-1} = a^{-1} + a = e$  (*Esto también se da cuando no se cumple la conmutativa*)
3.  $\cdot$  es una operación que cumple lo siguiente
  - Es una operación **asociativa**, es decir dados  $a, b, c \in \mathbb{K}$  tenemos que  $a \cdot (b \cdot c) = (a \cdot b) \cdot c$
  - Existe un **elemento neutro** para esta operación  $\exists e/e \cdot a = a \cdot e = a \quad \forall a \in \mathbb{K}$ .
  - Para todo elemento  $a \in \mathbb{K}$  entonces  $\exists a^{-1}/a \cdot a^{-1} = a^{-1} \cdot a = e$  (*Esto es lo que distingue un cuerpo a un anillo*)
  - $\cdot$  es **distributivo** respecto de  $+$  es decir,  $a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot b$

**Aclaración 1:** Aunque se denoten como  $+$ ,  $\cdot$  no tenemos por qué usar las definiciones habituales de la suma y la multiplicación. Por ejemplo, la suma y producto de números reales no son iguales que las mismas operaciones para las matrices (*quedarnos con ese nombre.*)

**Aclaración 2:** De esta manera que tenemos que lo que llamamos en los números reales la resta es la suma por el inverso y la división es el producto por el inverso.

**Ejercicio Propuesto.** Demostrar que  $\mathbb{R}$  y  $\mathbb{C}$  son cuerpos

## 1.2. Potencias y Logaritmos

**Definición 1.2.1.** Podemos definir las potencias como  $a^n = \overbrace{a \cdot \dots \cdot a}^{n \text{ veces}}$ . Una vez entendido esto tenemos las siguientes propiedades

### Propiedades

$$1. a^1 = a \text{ y } a^0 = 1 \text{ para cualquier } a \in \mathbb{R}$$

$$2. a^{-1} = \frac{1}{a}$$

$$3. a^n \cdot a^m = a^{n+m}$$

$$4. \frac{a^n}{a^m} = a^{n-m}$$

$$5. (a^n)^m = a^{n \cdot m}$$

$$6. \sqrt[n]{a} = a^{\frac{1}{n}}$$

$$7. (a \cdot b)^n = a^n \cdot b^n$$

$$8. \left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n}$$

### Demostración

1. Para la primera demostración no hace falta más que decir que estamos “poniendo” sólo una  $a$  y que  $a^0 = 1$  es básicamente proveniente del álgebra  $\mathbb{Z}$  modular.

2. En este caso, tenemos que al utilizar la propiedad 3 quedará más clara pero si nosotros tenemos  $a^1 \cdot a^{-1} = a^0 = 1 \Rightarrow a^{-1} = \frac{1}{a}$

3. Ahora tenemos que  $a^n \cdot a^m = \overbrace{a \cdot \dots \cdot a}^{n \text{ veces}} \cdot \overbrace{a \cdot \dots \cdot a}^{m \text{ veces}} = \overbrace{a \cdot \dots \cdot a}^{n+m \text{ veces}} = a^{m+n}$

4. Si combinamos la propiedad 2 y 3 queda probado  $\frac{a^n}{a^m} = a^n \cdot \frac{1}{a^m} = a^n \cdot a^{-m} = a^{n-m}$

5. Este se debe a que estamos multiplicando paquetitos del producto de  $n$   $a$ 's, es decir ,  $(a^n)^m = \overbrace{a^n \cdot \dots \cdot a^n}^{m \text{ veces}} = \underbrace{\overbrace{a \cdot \dots \cdot a}^{n \text{ veces}} \cdot \dots \cdot \overbrace{a \cdot \dots \cdot a}^{n \text{ veces}}}_{m \text{ veces}} = \underbrace{a \cdot \dots \cdot a}_{n \cdot m \text{ veces}} = a^{mn}$

6. Haciendo un razonamiento análogo pero con el producto lo tenemos

7. Tenemos lo siguiente  $(a \cdot b)^n = \overbrace{a \cdot b \cdot \dots \cdot a \cdot b}^{n \text{ veces}} = \underbrace{\overbrace{a \cdot \dots \cdot a}^{n \text{ veces}}}_{a^n} \cdot \underbrace{\overbrace{b \cdot \dots \cdot b}^{n \text{ veces}}}_{b^n} = a^n \cdot b^n$

8. Utilizando un razonamiento similar al anterior lo tenemos cambiando únicamente  $b$  por  $b^{-1}$

**Definición 1.2.2.** Definimos el logaritmo de  $b \in \mathbb{R}^+$  en base  $a > 0$  de la siguiente manera

$$\log_a b = x \Leftrightarrow a^x = b \quad (1.1)$$

Esta definición nos permite "traducir" de logaritmos a potencias y es lo que se utiliza para demostrar las siguientes propiedades

**Propiedades:** Sean  $P, Q, a \in \mathbb{R}^+$

1.  $\log_a 1 = 0$
2.  $\log_a a = 1$
3.  $\log_a (P \cdot Q) = \log_a P + \log_a Q$
4.  $\log_a \left( \frac{P}{Q} \right) = \log_a P - \log_a Q$
5.  $\log_a P^n = n \cdot \log_a P$

**Ejercicio Propuesto.** Se propone al lector la demostración de estas propiedades utilizando la definición de logaritmos y las propiedades de las potencias.



### 1.3. Resolución de ecuaciones exponenciales

**Definición 1.3.1.** Podemos definir una ecuación exponencial como aquella que tiene la incógnita en el exponente

$$a^x = b$$

Podemos distinguir los siguientes casos:

■ **Ecuaciones donde la incógnita aparece en un solo exponente**

El procedimiento es intentar poner todos los elementos como potencias de la base que tiene la incógnita

$$2^{x+1} = 8$$

$$2^{x+1} = 2^3$$

Tras esto, podemos hacer el logaritmo de cada uno de los lados ya que  $\log_a P = \log_a Q \Leftrightarrow P = Q$  en este caso  $a = 2$  de tal forma que lo anterior nos queda:

$$2^{x+1} = 2^3$$

$$\log_2(2^{x+1}) = \log_2(2^3)$$

$$x + 1 = 3$$

$$x = 2$$

También puede que no podamos descomponer en potencias de una sola base entonces tenemos el siguiente caso.

$$2^x = 127$$

Entonces tomamos logaritmos para poder resolverlo

$$2^x = 127$$

$$\log_2(2^x) = \log_2(127)$$

$$x \cdot \log_2(2) = \log_2(127)$$

$$x = \log_2(127)$$

A partir de aquí podemos utilizar un cambio de base de los logaritmos para poder usar el logaritmo en base 10 o  $e$ .

**Ejercicio 1.3.1.** Resuelve las siguientes ecuaciones.

a)  $4^{x+1} - 8 = 0$     b)  $3^{x+2} = 81$

c)  $x + 1$     d)  $e^x - 1 = 3$

■ ***Ecuaciones donde la incógnita está en más de una potencia***

El procedimiento es conseguir una expresión donde las potencias que tengan las incógnitas se reduzcan a las misma base y podamos hacer un cambio de variable  $a^x = t$  que después desharemos como si fuera un caso como el anterior.

Vamos a resolver el siguiente ejemplo

$$2^{x+1} + 2^{x-1} + 2^x = 7$$

Para empezar pongamos todo como una combinación lineal de  $2^x$  para ello aplicamos las propiedades de las potencias.

$$2^{x+1} + 2^{x-1} + 2^x = 7$$

$$2 \cdot 2^x + \frac{2^x}{2} + 2^x = 7$$

Ahora ya podemos tomar el cambio de variable  $2^x = t$  de manera que obtenemos lo siguiente.

$$2 \cdot 2^x + \frac{2^x}{2} + 2^x = 7$$

$$2 \cdot t + \frac{t}{2} + t = 7$$

La anterior ecuación es una ecuación fácilmente resoluble por tanto, ya hemos obtenido lo que queríamos, reducir la dificultad del ejercicio.

$$2 \cdot t + \frac{t}{2} + t = 7$$

$$\frac{7}{2} \cdot t = 7$$

$$t = 2$$

Por tanto sabemos que  $t = 2$  lo que implica entonces que  $2^x = t = 2$  y al aplicar logaritmos a ambos lados de la igualdad y obtenemos que

$$\log_2 2^x = \log_2 2$$

$$x = 1$$

## 1.4. Resolución de ecuaciones logarítmicas

**Definición 1.4.1.** Podemos definir una ecuación exponencial como aquella que tiene la incógnita dentro de un logaritmo.



## Capítulo 2

# Polinomios sobre el cuerpo de los reales y ecuaciones

### Índice del capítulo

2.1. Conceptos básicos . . . . .	21
2.2. Operaciones con polinomios . . . . .	21
2.3. Divisibilidad de polinomios . . . . .	21

### 2.1. Conceptos básicos

### 2.2. Operaciones con polinomios

### 2.3. Divisibilidad de polinomios



## Capítulo 3

# Ecuaciones polinómicas

### Índice del capítulo

3.1. Ecuaciones lineales . . . . .	23
3.2. Ecuaciones parabólicas . . . . .	23
3.3. Ecuaciones de grado mayor que 2 . . . . .	24

### 3.1. Ecuaciones lineales

Una ecuación lineal es de la forma  $ax + b = 0$  y es el tipo más simple que puede haber de ecuación. Para resolver este tipo de ecuaciones, hay que aplicar la operación inversa a ambos lados de tal manera que si tenemos

$$ax + b = 0$$

y restamos  $b$  a ambos lados obtenemos que

$$ax + b - b = -b \Rightarrow ax = -b$$

y ahora si dividimos cada lado entre  $a$  obtendremos que

$$\frac{ax}{a} = \frac{-b}{a} \Rightarrow x = \frac{-b}{a}$$

### 3.2. Ecuaciones parabólicas

La fórmula general de las ecuaciones de segundo grado o parabólicas son de la forma

$$ax^2 + bx + c = 0$$

Las soluciones de este tipo de ecuaciones en caso de tenerlas se calculan con la siguiente fórmula:

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{-b^2 - 4ac}}{2a}$$

En el caso de que  $b$   $c$  sean nulos entonces tendremos que:

- $c = 0$  Entonces tenemos  $ax^2 + bx$  sacamos factor común a  $x$ .

$$\begin{aligned} ax^2 + bx &= 0 \\ x \cdot (ax + b) &= 0 \end{aligned}$$

Entonces como el producto es igual a 0 entonces puede que uno de los factores sea 0.

$$\begin{aligned} ax + b &= 0 \\ x &= 0 \end{aligned}$$

- $b = 0$  En este caso se resuelve como una ecuación normal y al final aplicaremos una raíz cuadrada

$$\begin{aligned} ax^2 + b &= 0 \\ ax^2 &= -b \\ x^2 &= \frac{-b}{a} \\ x &= \pm \sqrt{\frac{-b}{a}} \end{aligned}$$

### 3.3. Ecuaciones de grado mayor que 2

Las ecuaciones de grado mayor que 2 se resuelven de manera muy parecida a las ecuaciones de 2º grado con  $c = 0$  se factoriza el polinomio y se va buscando las raíces de cada factor. De esta manera, podemos resolver ecuaciones del grado que queramos.



## Capítulo 4

# Inecuaciones

### Índice del capítulo

4.1. Inecuaciones lineales . . . . .	25
4.2. Inecuaciones no lineales . . . . .	25

#### 4.1. Inecuaciones lineales

#### 4.2. Inecuaciones no lineales



**Parte II**

**Análisis Matemático**



## Capítulo 5

# Preámbulos para análisis

### Índice del capítulo

5.1. Topología sobre $\mathbb{R}$ . . . . .	30
---	----

## 5.1. Topología sobre $\mathbb{R}$

La topología ocupa un lugar muy destacado cuando se trata del análisis matemático ya que es la rama que estudia que ocurre con ciertas propiedades de proximidad cuando a un conjunto le aplicas lo que hemos llamado funciones continuas en anteriores cursos.

**Definición 5.1.1.** Una **topología**,  $\tau$ , sobre el conjunto  $A$  es una familia de subconjuntos de finita o no que cumple las siguientes características:

- $A$  y  $\emptyset$  pertenecen a  $\tau$ .
- Dado  $\{A_i\}_{i \in I}$  una familia arbitraria (puede ser finita o no) de elementos de  $\tau$  entonces  $\cup_{i \in I} A_i$  también pertenece a la topología.
- Dado  $\{A_i\}_{i=0}^{i=k}$  una familia finita de elementos de la topología entonces  $\cap_{i=0}^{i=k} A_i$  es también un elemento de la topología.

A esta forma de definir una topología lo llamamos definir una topología por *abiertos*, ya que a los elementos de la topología definida así se les llama conjuntos abiertos.

**Ejercicio 5.1.1.** Comprobar que  $\mathbb{R}$  con los intervalos abiertos es una topología.

**Definición 5.1.2.** Diremos que un conjunto es **cerrado** cuando su complementario sea abierto.

**Aclaración:** Un conjunto puede no ser ni abierto ni cerrado y puede ser los dos a la vez, como por ejemplo el  $\emptyset$  ya que su contrario que sería el total es abierto, pero como está en la topología  $\tau$ , entonces es abierto. Ambas cosas no son contradictorias.

Ahora bien, supongamos que ya tenemos estas cualidades de espacio topológico, ahora vamos a definir lo que es un entorno abierto de un punto  $a$ .

**Definición 5.1.3.** Un entorno no es más que la vecindad de un punto (*Los puntos cercanos a él*), y diremos que un entorno  $E$  es abierto si  $\forall x \in E$  existe un abierto que está contenido en el entorno.

Ahora nos falta definir una medida sobre  $\mathbb{R}$  que nos permita decir de manera clara y concisa lo que está y lo que no está en las vecindades del punto. La medida más habitual sobre  $\mathbb{R}$  es el valor absoluto.

**Definición 5.1.4.** Una medida es una aplicación

$$\begin{aligned} ||: \mathbb{R} \times \mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{R} \\ (x, y) &\longmapsto dist(x, y) \end{aligned}$$

Que cumple las siguientes propiedades:

- $\forall x \in \mathbb{R}$  se cumple que  $dist(x, x) = 0$
- $\forall x, y \in \mathbb{R}$  se cumple que  $dist(x, y) = dist(y, x)$
- $\forall x, y, z \in \mathbb{R}$  se cumple que  $dist(x, z) \leq dist(x, y) + dist(y, z)$  Es decir, el camino más corto es el camino directo entre dos puntos.

**Ejercicio 5.1.2.** Probar que el valor absoluto es una medida sobre los números reales.

Ahora, vamos a definir la principal definición para la que usamos la topología. Las funciones continuas.

**Definición 5.1.5.** Una aplicación

$$f: X \longrightarrow Y$$

Diremos que es continua si  $\forall E$  abierto de  $B$  entonces se cumple que  $f^{-1}(B)$  es otro conjunto abierto.

Esta definición nos quiere decir que este tipo de funciones lo que hace es mandar puntos que están cerca a puntos que siguen cerca por así decirlo, ya que un entorno de  $f(a)$  viene de un entorno de  $a$ .

Continuará...





## Capítulo 6

# Cálculo de Límites

### Índice del capítulo

---

6.1. Preámbulo sobre las sucesiones reales . . . . .	34
6.2. Definición . . . . .	34
6.3. Propiedades de los límites . . . . .	35
6.4. Cálculo efectivo de límites . . . . .	35
6.5. Indeterminaciones . . . . .	35

---

## 6.1. Preámbulo sobre las sucesiones reales

**Definición 6.1.1.** Definimos una sucesión de números reales  $\{a_k\}$  como una aplicación de la forma:

$$\begin{aligned} \{a_k\}: \mathbb{N} &\longrightarrow \mathbb{R} \\ k &\longmapsto a_k \end{aligned}$$

Tenemos que tener claros unos cuantos conceptos sobre sucesiones antes de ponernos a definir lo que es una función o sucesión convergente y que es eso de convergente.

**Definición 6.1.2.** Se dice que una sucesión  $\{a_n\}$  es convergente en  $\mathbb{R}$ , o que es convergente a  $l \in \mathbb{R}$  o que su límite es  $l$  cuando si  $\forall \varepsilon \geq 0$  y  $\varepsilon \in \mathbb{R}$   $\exists n_0 \in \mathbb{N}$  de manera que cuando  $n \leq n_0 \Leftrightarrow |l - a_n| \leq \varepsilon$

**Aclaración:** Una sucesión que sea convergente tiene un único límite.

Esta definición lo que nos dice es que cogiendo un  $\varepsilon$  arbitrariamente pequeño se puede encontrar un  $n_0 \in \mathbb{N}$  de manera que la distancia entre el límite y un término posterior de  $\{a_n\}$  a  $a_{n_0}$  es menor que ese  $\varepsilon$

Podemos entonces extender esta definición a una aplicación del tipo

$$f: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$$

Entonces dejemos definido esta extensión a lo continuo

## 6.2. Definición

**Definición 6.2.1.** Una función es convergente a  $l$  cuando  $x \rightarrow a \forall \varepsilon \in \mathbb{R}$  entonces  $\exists \delta \geq 0$  de manera que  $|x - a| \leq \delta \Rightarrow |f(x) - f(a)| \leq \varepsilon$

Podemos definir de esta manera el límite ya que hemos definido la estructura de espacio métrico de  $\mathbb{R}$  ya que como demostramos anteriormente esta aplicación es una distancia.

**Ejercicio 6.2.1.** Probar que la función  $f(x) = x^2 + x + 1$  tiende a 1 en el punto  $x = 0$

*Demostración.* Tomemos un  $\varepsilon < 0$  entonces tomando como  $\delta < \min\{1, \frac{\varepsilon}{2}\} \Rightarrow \delta < 1 \Rightarrow \delta^2 < \delta$  por tanto, tenemos que  $|x| < \delta$

$$|f(x) - 1| = |x^2 + x| \leq |x^2| + |x| < \delta^2 + \delta < 2\delta < \varepsilon$$

□

### 6.3. Propiedades de los límites

Una función puede tener distintos límites dependiendo de que topología esté definida sobre el conjunto a estudiar pero hay que recordar que una vez fijada la topología, este es único.

Ahora vamos a ver y a comprender ciertas propiedades que nos ayudarán en el cálculo efectivo de límites

**Proposición 6.3.1.** Sean  $f, g$  dos funciones cuyos límites  $\lim_{x \rightarrow a} f$   $\lim_{x \rightarrow a} g$  existen entonces

- $\lim_{x \rightarrow a} (f + g)(x) = \lim_{x \rightarrow a} f(x) + \lim_{x \rightarrow a} g(x)$
- $\lim_{x \rightarrow a} (f \cdot g)(x) = \lim_{x \rightarrow a} f(x) \cdot \lim_{x \rightarrow a} g(x)$
- Sea  $\lambda \in \mathbb{R}$  entonces  $\lim_{x \rightarrow a} \lambda f(x) = \lambda \lim_{x \rightarrow a} f(x)$
- Si se cumple que  $\lim_{x \rightarrow a} g(x) \neq 0$  entonces  $\lim_{x \rightarrow a} \frac{1}{g(x)} = \frac{1}{\lim_{x \rightarrow a} g(x)}$

### 6.4. Cálculo efectivo de límites

Sea

### 6.5. Indeterminaciones



## Capítulo 7

# Las funciones sobre $\mathbb{R}$

### Índice del capítulo

---

7.1. Definiciones previas . . . . .	38
-------------------------------------	----

---

## 7.1. Definiciones previas

**Definición 7.1.1.** Una función  $f(x)$  es continua en un punto  $a$  cuando  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a)$ . Es otra forma de definir la continuidad y es equivalente a la definición que se puede dar de una aplicación continua que dábamos en el apartado de topología.

**Definición 7.1.2.** Diremos que una función es continua si lo es en todos sus puntos.

**Propiedades** Se cumplen las siguientes propiedades asociadas a las funciones continuas:

- Dadas  $f$  y  $g$  dos funciones continuas entonces tendremos que  $f + g$  también es una función
- Dada  $f$  una función continua y  $k \in \mathbb{R}$  entonces tenemos que  $k \cdot f$  es una función continua también
- Dadas dos funciones  $f, g$  continuas tenemos que  $f \cdot g$  también es continua
- La composición de funciones continuas  $f, g$  también es una función continua.

**Ejercicio 7.1.1.** Demostrar mediante las propiedades de los límites de linealidad y de conservación del producto.

**Ejercicio 7.1.2.** Comprueba si las siguientes funciones son continuas en  $x = 2$

$$a) f(x) = \frac{1}{x-2} \quad b) f(x) = \frac{3x-5}{x^2-4} \quad c) f(x) = \frac{x^2}{x^2+1} \quad d) f(x) = 3x^2 - \frac{2}{x}$$

Comprobar que una función es continua en un punto  $x = a$  es únicamente comprobar que el  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a)$  por tanto hay que tener en cuenta cuando no existe un límite

## Capítulo 8

# Derivabilidad sobre $\mathbb{R}$

### Índice del capítulo

---

8.1. Concepto de la derivada . . . . .	40
8.2. Derivabilidad de una función . . . . .	41
8.2.1. Estudio de la derivabilidad de una función . . . . .	41
8.3. Tabla de derivadas . . . . .	42
8.4. Algunas demostraciones de fórmulas de derivadas	43

---

## 8.1. Concepto de la derivada

Para empezar, tenemos que refrescar un concepto de geometría analítica, *la pendiente de una recta*

**Definición 8.1.1.** La pendiente de una recta en  $\mathbb{R}^2$  (*El plano real*) se define como la cantidad de unidades que avanza la  $y$  por cada unidad que avanza la  $x$ . Es decir, definiendo el incremento de  $y$  como  $y_1 - y_0 = \Delta y$  donde  $y_1$  es la coordenada  $y$  del punto final y  $y_0$  lo mismo pero del punto inicial. definimos de manera igual el  $\Delta x$ . Entonces definimos de manera matemática la fórmula de la pendiente como :

$$m = \frac{\Delta y}{\Delta x}$$

Ahora bien, sea  $f(x)$  una función de manera que  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  de la cual queremos obtener la recta secante que pasa por unos determinados puntos  $p_1 = (x_1, y_1), p_2 = (x_2, y_2)$ . Entonces tendremos la siguiente gráfica: Tendremos entonces que la fórmula de la recta secante a la función que pasa por esos dos puntos  $p_1, p_2$  es la siguiente:

$$(y - f(x_1)) = \frac{\Delta f(x)}{\Delta x}(x - x_1)$$

**Definición 8.1.2.** A la pendiente de la recta secante a la función  $f(x)$  en los puntos  $x_1, x_2$  se le conoce como **Tasa de Variación Media**

Supongamos ahora que escribimos  $x_1 = x$  y  $x_2 = x+h$  donde  $h \in \mathbb{R}$  entonces la ecuación anterior queda como:

$$(y - f(x_1)) = \frac{f(x_1 + h) - f(x_1)}{h}(x - x_1)$$

Si después de esto, si hacemos que la  $h \rightarrow 0$  obtendremos la recta tangente de manera que la pendiente  $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$ .

Es ese límite lo que definimos como *Derivada de una función*.

**Definición 8.1.3.** Llamaremos derivada de  $f(x)$  en el punto  $a$  al límite

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$$



## 8.2. Derivabilidad de una función

**Definición 8.2.1.** Diremos que una función es derivable en  $a$  si existe el límite  $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$ .

**Definición 8.2.2.** Diremos que una función es derivable si lo es en todos los puntos del dominio.

### 8.2.1. Estudio de la derivabilidad de una función

### 8.3. Tabla de derivadas

#### Propiedades de la derivada

Para empezar hay que tener en cuenta estas derivadas de operaciones de funciones básicas, sumar y restar, producto y división, producto por un escalar y composición

$$\begin{aligned}
 (f(x) + g(x))' &= f'(x) + g'(x) & (f(x) - g(x))' &= f'(x) - g'(x) \\
 (f(x) \cdot g(x))' &= f'(x)g(x) + g'(x)f(x) & \left(\frac{f(x)}{g(x)}\right)' &= \frac{f'(x)g(x) - g'(x)f(x)}{g^2(x)} \\
 (\lambda \cdot f(x))' &= \lambda f'(x) \quad \forall \lambda \in \mathbb{R} \\
 \text{Regla de la cadena: } (f \circ g(x))' &= f'(g(x)) \cdot g'(x)
 \end{aligned}$$

Estas son las propiedades básicas de todas las derivadas, la mayoría se demuestran con la definición de la derivada como un límite. Ahora veamos la tabla de la fórmulas de las derivadas habituales

Nombre de la función	Derivada	Composición
Potencial	$(x^n)' = nx^{n-1}$	$(f(x)^n)' = nf(x)^{n-1} \cdot f'(x)$
Exponencial en base e	$(e^x)' = e^x$	$(e^{f(x)})' = e^{f(x)} \cdot f'(x)$
Exponencial en base a	$(a^x)' = a^x \cdot \ln(a)$	$(a^{f(x)})' = a^{f(x)} \cdot f'(x) \cdot \ln(a)$
Logaritmo en base a	$(\log_a(x))' = \frac{1}{x \cdot \ln(a)}$	$(\log_a(f(x)))' = \frac{f'(x)}{\ln(a) \cdot f(x)}$
Logaritmo neperiano	$(\ln(x))' = \frac{1}{x}$	$(\ln(f(x)))' = \frac{f'(x)}{f(x)}$
Coseno	$(\cos(x))' = -\sin(x)$	$(f(x)^n)' = nf(x)^{n-1} \cdot f'(x)$
Senó	$(\sin(x))' = \cos(x)$	$(f(x)^n)' = nf(x)^{n-1} \cdot f'(x)$
Tangente	$(\tan(x))' = 1 + \tan^2(x)$	$(f(x)^n)' = nf(x)^{n-1} \cdot f'(x)$
Arcoseno	$(\arcsin(x))' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$(f(x)^n)' = nf(x)^{n-1} \cdot f'(x)$
Arcocoseno	$(\arccos(x))' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$(f(x)^n)' = nf(x)^{n-1} \cdot f'(x)$
Arcotangente	$(\arctan(x))' = \frac{1}{1+x^2}$	$(f(x)^n)' = nf(x)^{n-1} \cdot f'(x)$

**8.4. Algunas demostraciones de fórmulas de derivadas**



## Capítulo 9

# Aplicaciones de la derivada

### Índice del capítulo

---

9.1. Cálculo de mínimos y máximos . . . . .	46
9.2. Cálculo de la curvatura de las funciones . . . . .	46
9.3. Optimización de funciones . . . . .	46

---

- 9.1. Cálculo de mínimos y máximos
- 9.2. Cálculo de la curvatura de las funciones
- 9.3. Optimización de funciones

## Capítulo 10

# Representación de funciones

### Índice del capítulo

---

10.1. Dominio . . . . .	48
10.2. Simetría y periodicidad . . . . .	49
10.3. Continuidad . . . . .	50
10.4. Corte con los ejes . . . . .	51
10.5. Asíntotas . . . . .	51
10.6. Monotonía . . . . .	51
10.7. Curvatura . . . . .	51
10.8. Análisis de cada tipo de función elemental . . .	51

---

## 10.1. Dominio

Recordemos lo que era el dominio de una función de manera precisa

**Definición 10.1.1.** El dominio de una función o aplicación  $f : X \rightarrow Y$  es el subconjunto de puntos  $x \in X$  para el cual existe  $f(x)$ .

Para que lo entendamos de nuevo la función  $f$  en el caso que nos ocupa es algo a lo que le entran números, la función hace una operación, (*En el caso de  $2x$  sería que lo multiplica por dos*) y te devuelve ese valor operado. El dominio son los números que la función puede operar sin romperse, es decir, sin hacer cosas raras que no se pueden hacer en los números reales como por ejemplo:

- Dividir entre 0: Por tanto si tenemos una fracción habrá que comprobar cuando el denominador se hace 0. (Plantear la ecuación)
- Hacer la raíz de un número negativo: Para poder hacerlo tendríamos que extender nuestro campo a  $\mathbb{C}$  lo cual ahora mismo se nos escapa de nuestro alcance. Se plantea la inecuación
- Hacer el logaritmo de un número negativo

### Dominios de las funciones elementales

Ahora vamos a ir desmenuzando los tipos de funciones que conocemos y analizando su dominio:

- **Funciones Polinómicas** Son las funciones del tipo  $a_n \cdot x^n + \dots + a_0$  en este caso, su dominio es todo  $\mathbb{R}$ .
- **Funciones Racionales** Son las funciones del tipo  $\frac{a_n \cdot x^n + \dots + a_0}{b_m \cdot x^m + \dots + b_0}$  en este caso, su dominio es todo  $\mathbb{R}$ , salvo los puntos en los que se anule el denominador, por o tanto hay que resolver la ecuación  $b_m \cdot x^m + \dots + b_0 = 0$ .
- **Funciones Irracionales** Son las de tipo  $f(x) = \sqrt[n]{g(x)}$  tenemos que el dominio de  $f(x)$  es:
  - El mismo que  $g(x)$  si  $n$  es *impar*
  - Si  $n$  es par el dominio de  $f(x)$  son los  $x$  que cumplen que  $g(x) \geq 0$ .
- **Funciones Exponenciales** Son de la forma  $f(x) = a^{g(x)}$  con  $a > 0$  y  $a \neq 1$ , su dominio es  $\mathbb{R}$ .
- **Funciones Logarítmicas** Son de la forma  $f(x) = \log_a g(x)$   $a > 0$  y su dominio son los  $x$  tales que  $g(x) > 0$ .



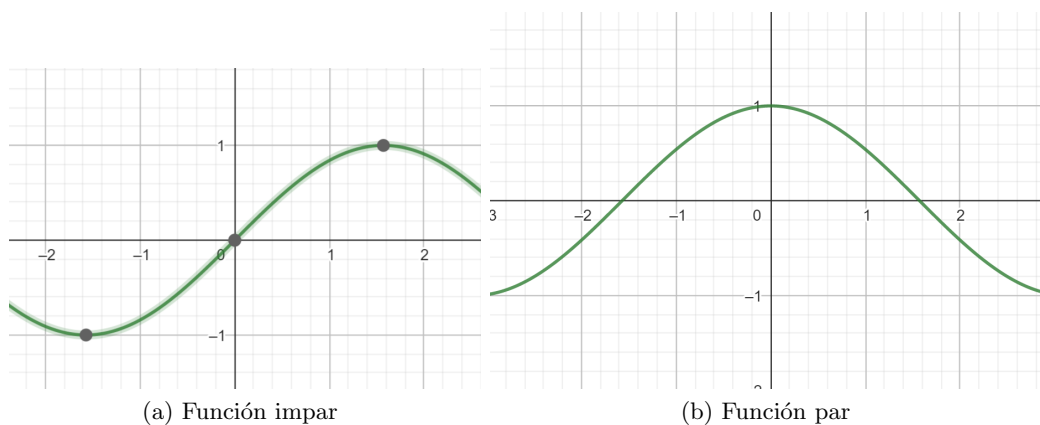
- **Funciones Trigonométricas Circulares** Tanto  $f(x) = \cos(x)$  como  $f(x) = \sin(x)$  su dominio es  $\mathbb{R}$  y de aquí se pueden considerar el resto de funciones trigonométricas.

## 10.2. Simetría y periodicidad

La simetría de una función se define de la siguiente manera:

**Definición 10.2.1.** Una función  $f : A \rightarrow \mathbb{R}$  es par si  $\forall x \in A$  se cumple que  $f(-x) = f(x)$ . Es decir, es simétrica respecto del eje de coordenadas  $OY$

**Definición 10.2.2.** Una función  $f : A \rightarrow \mathbb{R}$  es impar si  $\forall x \in A$  se cumple que  $f(-x) = -f(x)$ . Es decir, es simétrica respecto del origen de coordenadas



Estas cualidades lo que nos permiten es reducir el tamaño del conjunto de puntos a estudiar, en el caso de la simetría nos permite reducir a la parte positiva de los reales y la periodicidad a un solo periodo.

### 10.3. Continuidad

La continuidad de una función es una propiedad que se estudia dentro del dominio de una función y aunque no tiene sentido estudiar si se da en puntos que no son del dominio de la función solemos comprobar que pasa en las inmediaciones de los puntos que no pertenecen al dominio, manteniéndonos en el dominio. Es decir, si tengo un dominio que es  $\mathbb{R} - \{0\}$  haremos el límite de la función cuando  $x \rightarrow 0$  para saber que tenemos en las inmediaciones del punto. Tenemos dos casos:

- Que la función sea a trozos con ramas continuas a ambos lados del punto que las une

*Ejemplo.*

- Que la función tenga un punto singular

*Ejemplo.*

## 10.4. Corte con los ejes

Los cortes con los ejes son importantes por que nos dan una referencia de donde está situada la gráfica de la curva.

- Cortes con el eje X.
- Cortes con el eje Y.

## 10.5. Asíntotas

**Asíntotas Verticales**

**Asíntotas Horizontales**

**Asíntotas Oblicuas**

## 10.6. Monotonía

## 10.7. Curvatura

## 10.8. Análisis de cada tipo de función elemental

**Polinómicas**

**Dominio**

Las funciones polinómicas tienen como dominio todo  $\mathbb{R}$ .

**Simetría**

Solo las funciones que cumplen  $P(x) = \sum a_n \cdot x^{2n}$  con  $n \neq 0$  son pares

**Continuidad**

Los polinomios son funciones continuas en todo  $\mathbb{R}$

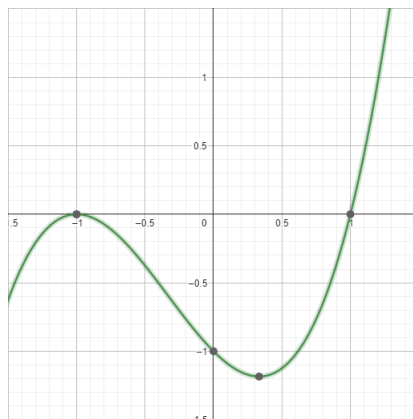
**Asíntotas**

Los polinomios no tienen asíntotas verticales, horizontales ni oblicuas.

**Monotonía y curvatura**

No es más que derivar funciones polinómicas.

*Ejemplo.* La función  $f(x) = x^3 + x^2 - x - 1$  tiene la siguiente función. En detalle podemos ver que efectivamente el dominio es todo  $\mathbb{R}$ , no es simétrica, es continua, no tiene asíntotas



# Capítulo 11

## Integración sobre $\mathbb{R}$

### Índice del capítulo

---

<b>11.1. Conceptos principales . . . . .</b>	<b>54</b>
<b>11.2. Cálculo efectivo de integrales . . . . .</b>	<b>56</b>
11.2.1. Primitivas inmediatas . . . . .	56
11.2.2. Integración por partes . . . . .	57
11.2.4. Integración por cambio de variable . . . . .	57
11.2.5. Integración de funciones racionales . . . . .	57
11.2.6. Ejercicios . . . . .	58
<b>11.3. Aplicaciones de la integral . . . . .</b>	<b>58</b>

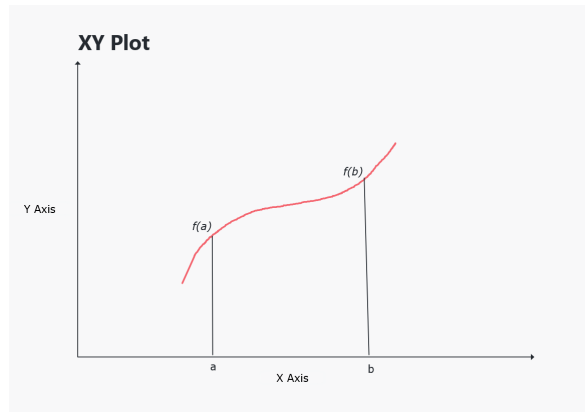
---

## 11.1. Conceptos principales

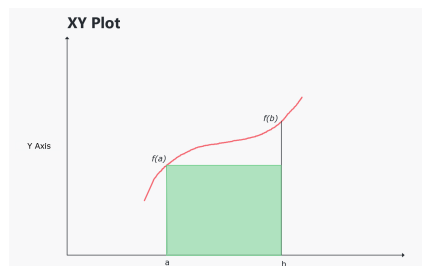
### ¿Qué demonios es una integral?

La integral es una suma, una suma infinita, normalmente se define como el área de bajo la gráfica que forma la curva con el eje de las x's.

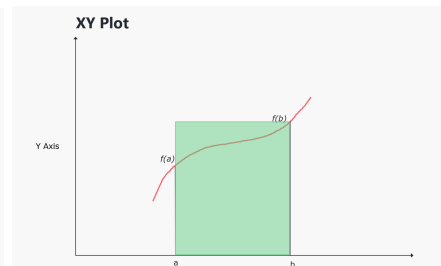
Sea una función  $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^+$  (por ahora vamos a considerar que es únicamente positiva, es decir, solo puede tomar valores positivos).



Entonces podemos hacer una primera aproximación del área por rectángulos. En principio, tenemos un rectángulo que cogiendo el mínimo de la función nos queda como se muestra en la imagen:



(a) Área la suma inferior

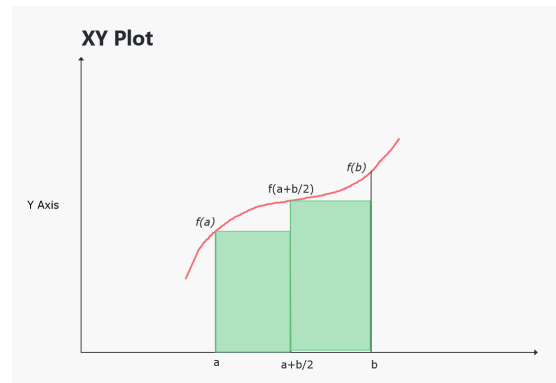


(b) Área la suma superior

De esta manera el cálculo del área bajo la curva que obtenemos es el siguiente

$$\inf(f(x)) \cdot (b - a) \quad \sup(f(x)) \cdot (b - a)$$

Es evidente que esto como aproximación del área bajo la curva deja bastante que desear, por tanto, se puede dividir el intervalo  $[a, b]$  a la mitad de manera que se obtenga una mejor aproximación como se ve en la imagen.



Como se puede ver en este caso de las áreas por debajo, se aproxima de mejor manera el área por debajo.

En general, podemos hacer una partición de  $n$  partes del intervalo  $[a, b]$ , es decir, sean  $\{x_0, x_1 \dots x_n\}$  donde  $a = x_0 < x_1 < \dots < x_{n-1} < x_n = b$ , de esta manera, tomar los rectángulos  $r_i, R_i$  debajo o por encima de la curva respectivamente tomando como altura el mínimo o máximo de  $f(x)$  en el intervalo  $[x_{i-1}, x_i]$  respectivamente.

De esta manera, el área de cada rectángulo es  $area(r_i) = \inf_{x \in [x_{i-1}, x_i]} (f(x)) \cdot (x_i - x_{i-1})$ , la suma de todos los rectángulos sería el área bajo la curva.

Si hacemos una partición infinitesimal, es decir hacemos que el número de los puntos  $x_i$  lleguen a ser infinitos podemos obtener el área bajo la curva.

**Definición 11.1.1.** Sea  $f(x)$  una función real continua, una función es integrable si al hacer infinitas particiones, la suma superior (la suma de las áreas que toma los supremos) y la suma inferior (lo mismo pero con los mínimos). A ese limite se le llama **Integral de  $f(x)$  en el intervalo  $[a, b]$**

## 11.2. Cálculo efectivo de integrales

Muchas veces se considera el operador integral como el operador inverso de la derivada para calcular la integral tenemos que desarrollar varias técnicas

### Primitivas

**Definición 11.2.1.** Sea una función  $F(x)$  diremos que es **primitiva** de la función  $f(x) \Leftrightarrow F'(x) = f(x)$

Para empezar, vamos a ver lo que se llaman **primitivas inmediatas**, es decir son las primitivas que no requieren ningún mecanismo más que las siguientes fórmulas

#### 11.2.1. Primitivas inmediatas

Para empezar hay que tener en cuenta que las integrales son límites lo que implica que tenemos la siguiente propiedad.

Sean  $f, g$  funciones integrables y  $\lambda \in \mathbb{R}$  entonces tenemos que:

$$\int f(x) + \lambda \cdot g(x) dx = \int f(x) dx + \lambda \int g(x) dx$$

Es decir la integral es un operador lineal sobre las funciones, ya que conserva las sumas de elementos y los productos de estos por escalares (Pero ya hablaremos de que es una aplicación lineal más tarde)

Aplicando esta propiedad y las fórmulas que se detallan a continuación podemos hacer bastantes integrales. A la izquierda se detalla como hacer la integral sobre nada más que una función y el derecho sobre una composición.

$\int x^n = \frac{1}{n+1} x^{n+1} + C \quad \forall n \neq -1$	$\int f(x)^n \cdot f'(x) dx = \frac{1}{n+1} f(x)^{n+1} + C \quad \forall n \neq -1$
$\int e^x dx = e^x + C$	$\int f(x)$
$\int \frac{1}{x} dx = \ln x  + C$	$\int \frac{f'(x)}{f(x)} dx = \ln f(x)  + C$
$\int \cos(x) dx = \sin(x) + C$	$\int \cos(f(x)) \cdot f'(x) dx = \sin(f(x)) + C$
$\int \sin(x) dx = -\cos(x) + C$	$\int \sin(f(x)) \cdot f'(x) dx = -\cos(f(x)) + C$
$\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} = \arcsen(x) + C$	$\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} = \arcsen(x) + C$
$\int \frac{1}{1+x^2} = \arctg(x) + C$	$\int f(x)$



### 11.2.2. Integración por partes

La integración por partes es una técnica que nos permite de manera sistemática la reducción de la complejidad del cálculo de la primitiva de la siguiente manera

**Proposición 11.2.3.** Sean dos funciones  $u(x), v(x)$  derivables e integrables. Entonces se cumple que:

$$\int u(x)dv(x)dx = u(x) \cdot v(x) - \int v(x) \cdot du(x)dx \quad (11.1)$$

En general se hace la elección de la función  $u$  (*Que es la que tendremos que derivar para hacer más sencilla la integral*) siguiendo la regla **ALPES**:

- **A:**  $\arcsen(x), \arccos(x), \arctg(x)$
- **L:** Logaritmos
- **P:** Polinomios
- **E:** Exponenciales
- **S:**  $\sen(x), \cos(x)$  y  $tg(x)$ .

Esta regla se sustenta en que derivar las primeras funciones, es decir, las funciones trigonométricas inversas y los logaritmos, es mucho más fácil que hacer su antiderivada o calcular su primitiva.

### 11.2.4. Integración por cambio de variable

### 11.2.5. Integración de funciones racionales

Sean dos polinomios  $P(x)$  y  $Q(x)$  entonces tenemos el caso de que queramos calcular la integral:

$$\int \frac{P(x)}{Q(x)} dx$$

Sólo discutiremos los casos en los que  $\text{grad}(P(x)) < \text{grad}(Q(x))$  ya que en el caso contrario se puede hacer la división y aplicando la linealidad de la integral volver al caso considerado.

Una vez reducido a nuestro caso de estudio tenemos que **factorizar** el polinomio  $Q(x)$ , tras esto se descompondrá la división como una suma de fracciones que tendrán como denominadores los factores del polinomio  $Q(x)$

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{P_1(x)}{Q_1(x)} + \frac{P_2(x)}{Q_2(x)} \dots + \frac{P_n(x)}{Q_n(x)} \quad (11.2)$$

Donde los  $Q_1(x) \dots Q_n(x)$

- **Caso 1:** *Factores lineales distintos*
- **Caso 2:** *Factores lineales con multiplicidad*
- **Caso 3:** *Factores cuadráticos distintos*

#### 11.2.6. Ejercicios

### 11.3. Aplicaciones de la integral

## Parte III

# Ejercicios de Análisis Matemático



## Capítulo 12

# Representación de funciones

### Índice del capítulo

---

Introducción . . . . .	61
12.1. Funciones polinómicas . . . . .	61
12.2. Funciones racionales . . . . .	62
12.3. Funciones irracionales . . . . .	62
12.4. Funciones exponenciales . . . . .	62
12.5. Funciones logarítmicas . . . . .	62
12.6. Funciones trigonométricas . . . . .	62

---

### Introducción

En esta capítulo vamos a recopilar todo los conocimiento de análisis que hemos recopilado durante todos los temas anteriores

### 12.1. Funciones polinómicas

#### Ejercicio 12.1.1.

$$f(x) = \frac{2x}{1+x^2}$$

*Demostración.* Hola

□

- 12.2. Funciones racionales**
- 12.3. Funciones irracionales**
- 12.4. Funciones exponenciales**
- 12.5. Funciones logarítmicas**
- 12.6. Funciones trigonométricas**

Parte IV

Álgebra lineal





## Capítulo 13

# Espacios Vectoriales



## Capítulo 14

# Aplicaciones lineales



## Capítulo 15

# Matrices



## Capítulo 16

# Determinantes





## Capítulo 17

# Discusión de sistemas



## Parte V

# Cálculo de probabilidades



## Capítulo 18

# Probabilidades básicas



## Capítulo 19

# Variables aleatorias discretas





## Capítulo 20

# Variables aleatorias continuas

