Guia de Prática: Projeto de Controladores via Lugar das Raízes

Laboratório de Teoria de Controle

October 28, 2025

1 Introdução

Para um sistema de segunda ordem com função de transferência característica:

$$1 + KG(s) = 0,$$

os polos dominantes podem ser escritos como:

$$s = -\zeta\omega_n \pm j\,\omega_n\sqrt{1-\zeta^2},$$

em que ζ é o coeficiente de amortecimento e ω_n a frequência natural.
As especificações de projeto em termos de tempo de acomodação (t_s) e overshoot (M_p) são aproximadas por:

$$t_s \approx \frac{4}{\zeta\,\omega_n}, \qquad M_p \approx e^{-\frac{\pi\zeta}{\sqrt{1-\zeta^2}}} \times 100\%.$$

2 Restrições no Plano s

As especificações de desempenho podem ser representadas graficamente no plano complexo.

2.1 Restrição pelo Tempo de Acomodação

A relação aproximada entre o tempo de acomodação e os polos dominantes é:

$$t_s \approx \frac{4}{\zeta\omega_n}$$

Assim, para atender à especificação $t_s \leq t_s^{\max}$, os polos devem possuir parte real

$$\sigma = \zeta\omega_n$$

o que delimita uma linha vertical no plano s, à esquerda da qual os polos devem se localizar.

2.2 Restrição do Sobressinal

No plano s, o coeficiente de amortecimento está relacionado ao ângulo θ do polo em relação ao eixo real negativo:

$$\zeta = \cos\theta \quad \Rightarrow \quad \theta \leq \cos^{-1}(\zeta_{\min})$$

Essa restrição define um cone no plano s (cone de amortecimento): os polos devem estar dentro das retas radiais com ângulos $\pm\theta_{\max}$ em relação ao eixo real negativo.

2.3 Região de Projeto

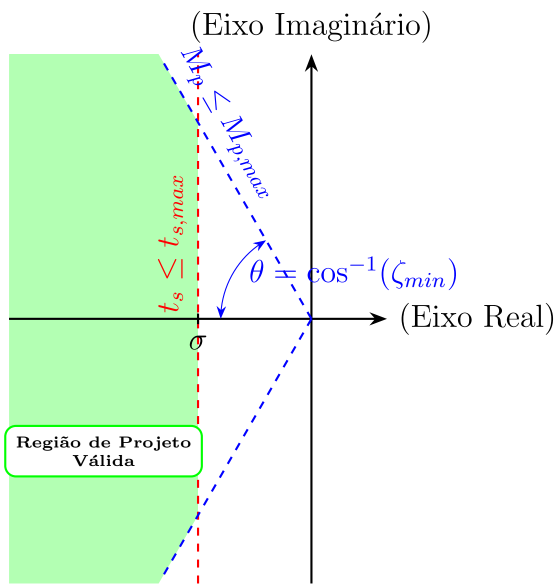

Figure 1: Representação das restrições de projeto no plano s.

A interseção das duas restrições define a região onde os polos de malha fechada devem estar localizados para satisfazer ambas as especificações:

$$\mathrm{Re}(s) \leq \sigma, \quad |\angle s| \leq \theta_{\max}$$

Determinando essa região no plano s, ilustrada na Figura 1, é possível calcular o valor do ganho K do controlador a partir do lugar das raízes.

3 Objetivos

Esta prática tem como objetivos:

- Representar as restrições de projeto (t_s e M_p) no plano s;
- Projetar controladores P, I e PI via Lugar das Raízes;
- Analisar as respostas ao degrau dos sistemas controlados.

4 Prática

Considere o sistema de controle em realimentação mostrado na Figura 2.

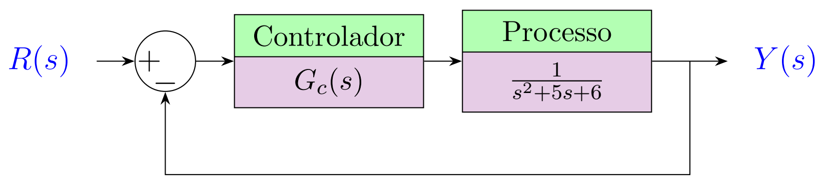

Figure 2: Sistema de Controle

São propostas três possíveis leis de controle para esse sistema:

1. $G_c(s) = K$ (controlador proporcional)
2. $G_c(s) = \dfrac{K}{s}$ (controlador integrador)
3. $G_c(s) = K\left(1 + \dfrac{1}{s}\right)$ (controlador proporcional–integral, PI)

As especificações de projeto são:

$$t_s \leq 10 \text{ s} \qquad \text{e} \qquad M_p \leq 10\%$$

para uma entrada degrau unitário.

a) Para o controlador proporcional $G_c(s) = K$: desenhe o lugar das raízes para $0 < K < \infty$ e determine o valor de K que satisfaça as especificações de projeto (t_s e M_p).

b) Repetir o item (a) para o controlador integrador.

c) Repetir o item (a) para o controlador PI.

d) Plote, em um mesmo gráfico, as respostas ao degrau unitário em malha fechada para os sistemas com os controladores projetados nos itens (a)–(c).

e) Complete a tabela:

Table 1: Comparação de desempenho

	K	t_s (s)	M_p (%)	Erro em Regime Permanente
Proporcional				
Integrador				
PI				