Variantes da Torre de Hanói

Tássio Naia dos Santos* e
José Augusto Ramos Soares (orientador)

Universidade de São Paulo (USP), Brasil
jose@ime.usp.br

1. Introdução

> Le mandarin N. Claus (de Siam) nous raconte qu'il a vu, dans ses voyages pour la publication des écrits de l'illustre Fer-Fer-Tam-Tam, dans le grand temple de Bénarès, au-dessous du dôme qui marque le centre du monde, trois aiguilles de diamant, plantées dans une dalle d'airain, hautes d'une coudée et grosses comme le corps d'une abeille. Sur une de ces aiguilles Dieu enfila, au commencement des siècles, soixante-quatre disques d'or pur, le plus large reposant sur l'airain, et les autres, de plus en plus étroits, superposés jusqu'au sommet. C'est la tour sacrée de Brahma. Nuit et jour, les prêtes se succèdent sur les marches de l'autel, occupés à transporter la tour de la première aiguille de diamant sur la troisième, sans s'écarter des règles fixes que nous venons d'indiquer, et qui on été imposées par Brahma. Quand tout sera fini, la tour et les brahmes tomberont, et ce sera la fin des mondes!

> O mandarim N. Claus (de Sião) nos conta que viu, em suas viagens para a publicação dos escritos do ilustre Fer-Fer-Tam-Tam, no grande templo de Bénarès, sob o domo que marca o centro do mundo, três agulhas de diamante, assentadas sobre uma laje de latão, altas de um côvado[1] e grossas como o corpo de uma abelha. Sobre uma dessas agulhas, Deus empilhou, no começo dos séculos, sessenta e quatro discos de ouro puro, o maior repousando sobre a laje, e os outros, cada vez menores, sobrepostos até o pico. Esta é a torre sagrada de Brahma. Dia e noite, os monges se sucedem nos afazeres do altar, ocupados a transportar a torre da primeira agulha de diamante para a terceira, sem se descuidar das regras fixas que acabamos de indicar, e que foram impostas por Brahma. Quando tudo estiver terminado, a torre e os brâmanes cairão, e será o fim dos mundos!

Os enunciados acima são do conhecido quebra-cabeça Torre de Hanói [15], proposto comercialmente pelo matemático francês Édouard Lucas em 1983. O problema consiste em determinar a menor seqüência de movimentos que perfazem a tarefa dos monges.

Um problema já de si interessante, utilizado freqüentemente como exemplo em introduções a estruturas recursivas e indução, a Torre de Hanói rende material para estudo há mais de um século, e suas variantes ainda apresentam questões em aberto.

Numerosos foram os estudos sobre sua estrutura matemática, e foram observadas relações entre o quebra-cabeça e objetos matemáticos conhecidos, como os triângulos de Sierpiński e de Pascal, a seqüência diatômica de Stern [4] e os números de Stirling de segundo tipo [2]. Uma extensa referência bibliográfica (com mais de 350 entradas), sobre diversos aspectos do problema e suas variantes, foi compilada por Stockmeyer [11].

Mesmo exibindo diversas propriedades interessantes, a solução do quebra-cabeça original é atualmente já bem conhecida. Por outro lado a investigação de suas diversas variantes tem descortinado uma imensidão de questões complexas, que desafiam pesquisadores há décadas.

De longe, a variante mais conhecida, mais antiga e estudada da Torre de Hanói advém do incremento do número de pinos disponíveis para empilhar os discos. Essa variante data de 1904 [1], quando que são considerados 4 pinos.

Afora essa, diversas outras variantes nasceram da imposição de restrições a movimentos de discos entre certos pinos. Abordamos aqui três delas. Chama a atenção o fato de que, nessa família de variantes, a quantidade de pinos se apresentar como um fator determinante da complexidade da análise: as variantes generalizáveis para um número arbitrário de pinos são questões em aberto se o número de pinos for maior ou igual a quatro.

Nas seções 3, 4 e 5, apresentamos resultados conhecidos da Torre de Hanói e de algumas variantes bem conhecidas, a *variante estendida*, proposta em sua forma generalizada para um número qualquer de pinos em [13], as variantes *circular* [5], *estelar* [12] e *linha* [5].

*tassio@poli.usp.br

[1] Côvado: medida correspondente à distância entre o cotovelo e as pontas dos dedos, aproximadamente equivalente a 45 cm.

2. Notação e definições

Discos e pinos. O número de discos e de pinos envolvidos nos problemas a serem discutidos serão denotados, respectivamente, por n e p. Os discos $1, 2, \ldots, n$ são numerados em ordem crescente de tamanho, e os pinos são numerados de 1 a p.

Configurações. Chamamos *configuração* uma disposição válida de discos nos pinos, i.e.: uma distribuição dos discos em pilhas em ordem crescente de tamanho do topo para a base. Muitas vezes, a uma dada configuração faremos corresponder uma n-upla (a_i), com $1 \leq i \leq n$ e $1 \leq a_i \leq p$, que representa que o disco i repousa no pino a_i.

Uma configuração $a = (a_n, a_{n-1}, \ldots, a_1)$ é dita *simples* se $a_i = k$ para todo i, $1 \leq i \leq n$. Denotaremos tais configurações S_n^k.

Indicaremos ainda a passagem de uma configuração c_1 a outra, c_2, por $c_1 \rightarrow c_2$. Quando tratarmos da tarefa de mover uma pilha de discos de um pino a outro, $(S_n^a \rightarrow S_n^b, a, b$ pinos) chamaremos o pino a de *origem* e o pino b de *destino*.

Grafos. Denotaremos o conjunto de vértices de um grafo G por $V(G)$, e seu conjunto de arestas por $E(G)$. Quando tratarmos de um grafo orientado, $A(G)$ denotará o conjunto de seus arcos.

3. A Torre de Hanói

Dispõe-se de três pinos, em um dos quais há discos empilhados em ordem crescente de tamanho do topo para a base. Deseja-se transportar a pilha para um dos outros pinos, de modo que:

1. somente seja movido um disco por vez;
2. o disco a ser movido a cada passo seja o menor da pilha em que está; e
3. jamais um disco repouse sobre outro de menor tamanho.

Se a pilha consistir de apenas um disco, basta um movimento para resolver o problema. Consideremos, sem perda de generalidade, que o pino de origem seja denotado por A, e o de destino seja o C (vide figura 1 (a)). Quando a quantidade de discos, n, for igual a 2, faz-se necessário liberar o maior deles — já que em algum momento ele terá que ser movido — colocando o menor em um pino auxiliar (pino B) e, a seguir, mover, primeiro o maior e depois o menor, para o pino de destino, num total de 3 movimentos.

As restrições do quebra-cabeça condicionam o movimento do maior dos discos de A para C a uma única disposição dos demais discos: devem estar todos em B. Essa característica sugere o emprego de

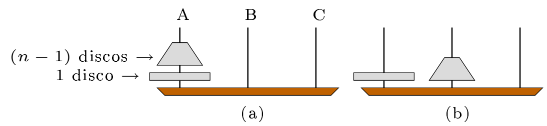

Figura 1. Recursão na Torre de Hanói

uma estratégia recursiva para a resolução do problema, já que, para que se chegue ao dito estado, é necessário mover uma pilha menor para o pino auxiliar. Em outras palavras, o problema reduz-se a uma instância menor do problema inicial.

Denotemos por $f(n)$ o número mínimo de movimentos em que é possível mover uma pilha de n discos de um pino a outro. Então, no momento representado pela figura 1 (b), já terão sido efetuados, no mínimo, $f(n-1)$ movimentos. Pode-se agora mover o maior disco para o pino de destino. Mas a situação após esse movimento é a mesma de antes, se trocarmos os rótulos dos pinos A e C. Por simetria, a seqüência que demanda o menor número de movimentos possível já está neste ponto determinada, e basta perfazer mais $f(n-1)$ movimentos.

Outro esquema possível de movimentação dos discos seria fazer com que o maior disco (n) fosse de A para B antes de chegar a C. Ora, essa opção implica necessariamente a passagem por três configurações intermediárias antes que seja possível finalmente mover o maior disco para C:

- o disco maior está em A, e todos os demais discos estão em C;
- o disco maior está em B e todos os demais estão em C; e
- o disco maior está em B e os demais estão em A;

e, ao menos, $2f(n-1)+1$ movimentos são necessários nesse caso.

Conseqüentemente, a seqüência de movimentos em que o maior disco é movido duas vezes para alcançar o pino C tem tamanho $3f(n-1)+2$, em contraste com $2f(n-1)+1$ do outro esquema de movimentação, e, portanto, não faz parte da solução procurada[2]. Assim, a relação que expressa o número procurado é

$$f(n) = 2f(n-1) + 1. \tag{1}$$

[2]Isso fica claro quando se considera que $f(1) = 1$ para ambas as estratégias de movimentação, e que $3f(n-1)+2 > 2f(n-1)+1$, se $n \geq 0$.

Donde $f(n)+1 = 2(f(n)+1)$, com $f(1) = 1$, e, fazendo $f(n)+1 = g(n)$,

$$\begin{cases} g(n) = 2g(n-1), \\ g(1) = 2 \end{cases} \Rightarrow g(n) = 2^n.$$

Finalmente, obtemos

$$f(n) = 2^n - 1. \tag{2}$$

O algoritmo 1 (recursivo) obtém os movimentos necessários para resolver o problema com o mínimo possível de movimentos.

Algoritmo 1 `mover (n,origem, destino, auxiliar)`

Requer: $\texttt{n} \geq 1$, $\{\texttt{origem}, \texttt{destino}, \texttt{auxiliar}\} = \{\text{A, B, C}\}$
Garante: Gera uma seqüência de movimentos para a transferência de uma pilha de `n` discos em `origem` para `destino`, de tamanho $2^n - 1$.

se `n = 1` **então**
  mova o disco no topo do pino `origem` para `destino`
senão
  `mover (n - 1, origem, auxiliar, destino)`
  mova o disco no topo do pino `origem` para `destino`
  `mover (n - 1, auxiliar, destino, origem)`
fim se

3.1 Resultados

Essa seção aborda o problema tradicional da Torre de Hanói, para 3 pinos e n discos. Wood [8] discute o caso em que as configurações inicial e final são quaisquer. Xuemiao [9] introduz (em 1986) o termo *grafos de Hanói*, formalizando a abordagem de Scorer, Grundy e Smith [5] (1944), e demonstra que há no máximo duas seqüências distintas de comprimento mínimo entre duas configurações. Uma expressão para a determinação da quantidade de tais seqüências para um dado par de configurações — expressa em termos da seqüência diatômica de Stern — é obtida por Hinz e outros [4]. A seguir, listamos alguns resultados desses artigos. Para isso serão necessárias algumas definições.

Começamos pela definição dos grafos de Hanói H_n, que se tornaram uma ferramenta muito popular no estudo da Torre de Hanói e suas variantes.

Os grafos de Hanói são definidos por Xuemiao, recursivamente, da seguinte forma: H_1 (figura 2) é o grafo completo com três vértices, com rótulos (1), (2), e (3).

Para $n > 1$, H_n consiste de três subgrafos, H_n^1, H_n^2, e H_n^3. Cada H_n^i é obtido de H_{n-1} pela adição do prefixo i aos rótulos de seus vértices, e de três arestas conectando os pares de vértices

$$(i, k, \dots, k) \text{ e } (j, k, \dots, k),$$

onde $\{i, j, k\} = \{1, 2, 3\}$. Por construção, H_n possui a estrutura exibida na figura 3.

Lembramos que a n-upla $(a_n, a_{n-1}, \dots, a_1)$ representa a configuração tal que o disco i está no pino a_i. Pela definição de H_n, cada um de seus vértices corresponde naturalmente à uma configuração. A conexão entre as configurações do quebra-cabeça e o grafo de configurações H_n é estabelecida pela proposição a seguir.

Proposição 3.1. Para quaisquer vértices u e v em $V(H_n)$, se c_u e c_v são as configurações correspondentes, então $\{u, v\} \in E(H_n)$ se, e somente se, existir um movimento (válido) que leve c_u a c_v.

Prova. Claramente, a proposição é válida para $n = 1$. Suponhamos, por indução, que a proposição seja válida para todo número de discos menor que um certo $n > 1$. Consideremos dois vértices distintos em H_n.

Sabemos que H_{n-1}^i é obtido de H_{n-1} pela adição do maior disco à base da pilha sobre o pino i. Conseqüentemente, se as configurações diferirem pela posição de algum dos $n-1$ menores discos, pela hipótese de indução a proposição será válida. Por outro lado, se as configurações diferirem pela posição do maior disco, estarão ligadas se, e somente se, os $n-1$ menores discos estiverem no mesmo pino em ambas as configurações, o que é garantido por construção. $\square$

É importante notar que uma condição necessária (mas não suficiente) para que duas configurações tenham respectivos vértices *vizinhos* em H_n é que estes difiram em apenas uma coordenada. Em outras palavras, deve-se ter apenas um disco em uma posição diferente, restando os demais na mesma posição em ambas as configurações.

Um *caminho* do nó s ao nó t em H_n é uma seqüência de vértices $(v_0, v_1, \dots, v_m)$, com $v_0 = s$ e $v_m = t$, tal que $\{v_i, v_{i+1}\} \in E(H_n)$, $0 \leq i < m$. Um caminho de s a t é dito *mínimo* se não houver outro caminho $(w_0, w_1, \dots, w_l)$ de s a t com $l < m$. Neste caso, dizemos que a distância entre s e t, denotada

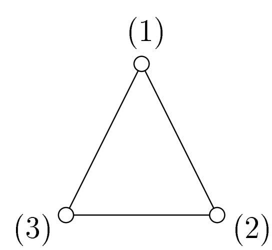

Figura 2. Grafo de configurações H_1

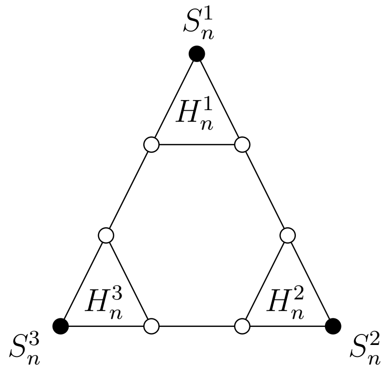

Figura 3. Estrutura recursiva de H_n

$dist(u,v)$, é m.

O lema a seguir, bem conhecido em teoria dos grafos, justifica chamar a função $dist$ de distância: a função é realmente uma métrica.

Lema 3.2. A distância $dist$ entre vértices em H_n, satisfaz as seguintes propriedades, para quaisquer vértices $u, v, w \in V(H_n)$:

(i) $dist(u,v) \geq 0$ sendo que $dist(u,v) = 0$ se e somente se $u = v$,

(ii) $dist(u,v) = dist(v,u)$,

(iii) $dist(u,v) \leq dist(u,w) + dist(w,v)$.

Segue um resultado básico da Torre de Hanói (equação (2)), reescrito em termos dos vértices de H_n.

Lema 3.3. Para todo $n > 0$, e $i \neq j, (1 \leq i, j \leq 3)$,

$$dist(S_n^i, S_n^j) = 2^n - 1. \tag{3}$$

Denotemos $\overline{H}_n^i$ o grafo obtido de H_n^i quando apagamos o prefixo i de cada um de seus vértices, e, se u é um vértice em H_n^i, então $\overline{u}$ será usado para denotar o vértice em $\overline{H}_n^i$ obtido de u pela exclusão do prefixo. Então $\overline{H}_n^i$ é H_{n-1}. E temos

Lema 3.4 (Xuemiao). Se dois vértices u e v pertencem a H_n^i, então

1. $dist(u,v) = dist(\overline{u}, \overline{v})$;
2. todo caminho mínimo de u a v pode ser obtido de um caminho mínimo de $\overline{u}$ a $\overline{v}$ adicionando-se o prefixo i a cada um dos vértices que o compõe; e
3. todo caminho mínimo de $\overline{u}$ a $\overline{v}$ pode ser obtido de um caminho mínimo de u a v retirando-se o prefixo i a cada um dos vértices que o compõe.

Lema 3.5 (Xuemiao). Para todo $n > 0$ e dois vértices arbitrários u e v em H_n

$$dist(u,v) \leq 2^n - 1. \tag{4}$$

Prova. Provamos o resultado por indução em n. Para $n = 1$,

$$dist(u,v) = 1 = 2^1 - 1 \qquad \forall u \neq v \in V(H_1).$$

Suponha agora que $n > 1$ e que o lema é válido para número de discos menor do que n. Vamos mostrar que o lema é válido também para n discos.

Considere as configurações c_u e c_v correspondentes aos vértices u e v. Vamos considerar dois casos.

Se o disco n está no mesmo pino em c_u e em c_v, digamos, pino j, então temos que u e v estão no subgrafo H_n^j que é isomorfo a H_{n-1}. Portanto

$$dist(u,v) = dist(\overline{u}, \overline{v}),$$

onde $\overline{u}$ e $\overline{v}$ indicam, respectivamente, os vértices correspondentes a u e v em H_{n-1}.

Pela hipótese de indução, isso implica

$$dist(u,v) \leq 2^{n-1} - 1,$$

o que prova o lema para este caso.

Suponha agora que o disco n está em torres diferentes em c_u e c_v. Sem perda de generalidade, podemos assumir que o disco n está no pino 1 em c_u e no pino 2 em c_v. Considere um caminho de u a v usando a aresta $e = \{w_1, w_2\}$, onde $w_1 = (1,3,3,\ldots,3)$ e $w_2 = (2,3,3,\ldots,3)$. Note que o disco n está no mesmo pino em c_u e na configuração correspondente a w_1 e que também o disco n está no mesmo pino em c_v e na configuração correspondente ao vértice w_2. Usando o argumento do caso anterior obtemos que

$$\begin{aligned} dist(u,v) &\leq dist(u,w_1) + dist(w_1,w_2) \\ &\quad + dist(w_2,v) \\ &\leq 2^{n-1} - 1 + 1 + 2^{n-1} - 1 \\ &= 2^n - 1. \end{aligned}$$

□

A propriedade seguinte é bem conhecida para grafos.

Lema 3.6. Seja G um grafo. Para quaisquer vértices u, w e v em $V(G)$, w está em um caminho mínimo de u para v se e só se

$$dist(u,v) = dist(u,w) + dist(w,v). \tag{5}$$

Lema 3.7 (Xuemiao). Sejam $\{i,j,k\} = \{1,2,3\}$ e $n > 0$. Então, para qualquer nó u em H_n^j, cada caminho mínimo de S_n^i a u contém os vértices $(i,k,\ldots,k)$ e $(j,k,\ldots,k)$.

Prova. Por simetria, basta provar o lema para $i = 1$ e $j = 3$. Isto é, qualquer caminho mínimo de S_n^1 a u precisa conter os vértices $v_1 = (1, 2, 2, \ldots, 2)$ e $v_2 = (3, 2, 2, \ldots, 2)$. Ou seja, o disco n é movimento somente uma vez (do pino 1 para o pino 3). Por contradição, suponha que não. Então, para o disco n terminar no pino 3, ele precisa passar pelo pino 2. Isso corresponde ao caminho mínimo conter os vértices $w_1 = (1, 3, 3, \ldots, 3)$ e $w_2 = (2, 3, 3, \ldots, 3)$ — para mover o disco n do pino 1 ao pino 2 — e $w_3 = (2, 1, 1, \ldots, 1)$ e $w_4 = (3, 1, 1, \ldots, 1)$ — para mover o disco n do pino 2 ao pino 3.

Assim, pelo lema 3.6

$$\begin{aligned}
dist(S_n^1, u) &\geq dist(S_n^1, w_1) + dist(w_1, w_2) \\
&\quad + dist(w_2, w_3) + dist(w_3, w_4) \\
&\quad + dist(w_4, u) \\
&\geq dist(S_n^1, w_1) + 1 + dist(w_2, w_3) + 1 \\
&= 2^{n-1} + 2^{n-1} \text{ pelo lema 3.3} \\
&= 2^n,
\end{aligned}$$

o que contradiz o lema 3.5. □

Temos agora condição de demonstrar um dos teoremas centrais de [9].

Teorema 3.8 (Xuemiao). Sejam $n > 0$ e u um vértice em H_n. Então, para todo i

(i) o caminho mínimo de S_n^i a u é único; e

(ii) $dist(S_n^i, u)$ pode ser calculada em tempo e espaço $\mathcal{O}(n)$.

Prova. Por simetria, basta provarmos o teorema para $i = 1$.

Vamos mostrar, por indução em n, que vale a propriedade *(i)*.

A propriedade vale para o grafo H_1.

Agora, para um $n > 1$, vamos assumir que a propriedade vale para valores menores que n e considerar dois casos.

Caso 1. O vértice u está em H_n^1. Como $\overline{S}_n^1 = S_{n-1}^1$, pela hipótese de indução o caminho mínimo de S_{n-1}^1 a u é único, o mesmo valendo para o caminho de S_n^1 a u.

Caso 2. O vértice u está em algum H_n^j ($j \neq 1$). Pelo lema 3.7, todo caminho mínimo de S_n a u contém os vértices

$$w_1 = (1, k, \ldots, k) \text{ e } w_2 = (j, k, \ldots, k), k \neq 1 \text{ e } k \neq j.$$

Então ele pode ser dividido em duas partes: a primeira é um caminho mínimo de S_n^1 a w_1 e a segunda um caminho mínimo de w_2 a u. Pelo mesmo raciocínio do Caso 1 ambos são únicos e o mesmo vale para o caminho de S_n^1 a u. Com isso, a propriedade *(i)* está provada.

Como, pelo lema 3.3, $dist(S_n^1, w_1) = 2^{n-1} - 1$, então $dist(S_n^1, w_2) = 2^{n-1}$. Usando a argumentação dos parágrafos anteriores, temos que, para $n > 1$, vale a recorrência:

$$dist(S_n^1, u) = \begin{cases} 2^{n-1} + dist(\overline{w_2}, \overline{u}), \text{ se } u \notin V(H_n^1) \\ dist(S_{n-1}^1, \overline{u}), \text{ se } u \in V(H_n^1). \end{cases}$$

Aplicando a recorrência acima $n - 1$ vezes, e usando diretamente a distância entre vértices de H_1, a distância entre S_n^1 e u é determinada. Note que a computação definida pela recorrência pode ser feita em tempo e espaço $\mathcal{O}(n)$, o que confirma (ii). □

Teorema 3.9 (Xuemiao). Para todo $n \geq 0$, e quaisquer vértices u e v em H_n

1. $dist(u, v)$ pode ser calculada em espaço e tempo $\mathcal{O}(n)$, e
2. há, no máximo, dois caminhos de comprimento mínimo entre u e v.

Prova. Se u e v estão em $V(H_n^j)$ para algum j, então o problema pode ser estudado em H_{n-1}. Portanto, vamos supor que $u \in V(H_n^i)$ e $v \in V(H_n^j)$ para $i \neq j$.

Novamente por simetria, pode-se supor que u está em $V(H_n^1)$ e v em $V(H_n^3)$. Note que num caminho mínimo o disco n é movido diretamente do pino 1 ao pino 3, ou pe movido do pino 1 ao pino 2 e do pino 2 ao pino 3. No primeiro caso, os vértices $v_1 = (1, 2, 2, \ldots, 2)$ e $v_2 = (3, 2, 2, \ldots, 2)$ estão no caminho, e a distância percorrida é

$$\begin{aligned}
d_1 &= dist(u, v1) + dist(v_1, v_2) + dist(v_2, v) \\
&= dist(u, v1) + 1 + dist(v_2, v).
\end{aligned}$$

No segundo caso, os vértices $w_1 = (1, 3, 3, \ldots, 3)$, $w_2 = (2, 3, 3, \ldots, 3)$, $w_3 = (2, 1, 1, \ldots, 1)$ e ($w_4 = (3, 1, 1, \ldots, 1)$ estão no caminho e a distância percorrida, usando lema 3.3, é

$$\begin{aligned}
d_2 &= dist(u, w1) + dist(w_1, w_2) + dist(w_2, w_3) \\
&\quad + dist(w_3, w_4) + dist(w_4, v) \\
&= dist(u, w1) + 1 + 2^{n-1} - 1 + 1 + dist(w_4, v) \\
&= dist(u, w1) + dist(w_4, v) + 2^{n-1} + 1.
\end{aligned}$$

A distância entre u e v será o mínimo entre d_1 e d_2.

Isso significa que para calcular $dist(u, v)$ basta calcular $dist(u, v_1)$, $dist(v_2, v)$, $dist(u, w_1)$ e $dist(w_4, v)$, o que pode, segundo o teorema 3.8, ser feito em tempo e espaço $\mathcal{O}(n)$, o que prova (1).

Note que, também pelo teorema 3.8, cada um dos caminhos mínimos que definem as 4 distâncias mencionadas são únicos e, portanto, d_1 e d_2 definem caminhos únicos. Portanto, ou o caminho de comprimento mínimo entre u e v é único — quando $d_1 \neq d_2$

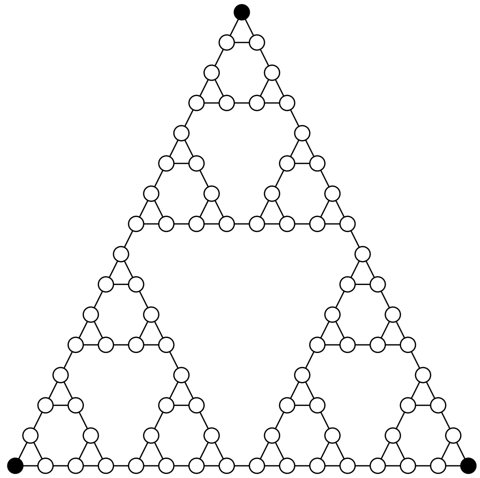

Figura 4. Grafo de configurações H_4

— ou $d_1 = d_2$ e existem dois caminhos de comprimento mínimo entre u e v, o que prova (2). □

4. Grafos de Hanói

Como já foi mencionado, as variantes abordadas neste artigo derivam da mudança de dois parâmetros da Hanói original,

1. número de pinos; e
2. restrições ao movimento entre certos pares de pinos.

Dito isto, ao empregarmos no que segue estaremos sempre nos referindo a variantes dessa forma. Em geral, para o estudo dessas variantes são considerados com freqüencia dois grafos, G e H, assunto dessa seção.

O *grafo das configurações*, que denotaremos por H, é tal que seus vértices correspondem a configurações da variante em questão, e, dadas u, v configurações $\{u, v\} \in E(H)$ se, e somente se, é possível, a partir de u chegar a v com um movimento legal. Quando as regras de movimentação não permitem simetria de movimentos, os grafos considerados são grafos *orientados*, com arcos no lugar de arestas. As figuras 2 e 4 exemplificam esse conceito.

Outro grafo comumente utilizado para descrever uma variante com essas características consiste em um mapa dos possíveis movimentos de discos entre pinos. Denotá-lo-emos G. Cada vértice em G corresponde a um pino, e $(a, b) \in E(G)$ se, e só se, existir a possibilidade de mover um disco do topo do pino a para o topo do pino b. As figuras 5 a 8 exibem esse tipo de grafos.

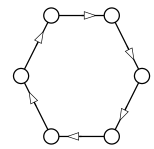

Figura 5. Variante cíclica: $n = 1, p = 6$

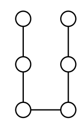

Figura 6. Variante linha com $n = 1, p = 6$

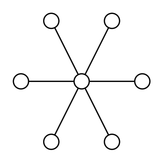

Figura 7. Variante estrela: $n = 1, p = 6$

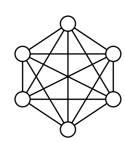

Figura 8. Variante estendida: $n = 1, p = 6$

Lema 4.1. Sejam G um grafo definido conforme a discussão acima, e H_n o grafo das configurações de uma certa variante para uma quantidade n de discos, então

$$G = H_1. \tag{6}$$

Prova. Basta observar que a única restrição do movimento do disco 1 entre dois pinos a e b é que $(a, b) \in G$, donde cada vértice e aresta de H_1 possui um correspondente vértice ou aresta, respectivamente, em G. □

Uma pergunta que surge naturalmente da observação dos grafos G é *sob que condições pode-se garantir que o problema terá solução?* Mais especificamente, dado um grafo que mapeia as movimentações possíveis para o menor disco, quais as constrições necessárias para que seja possível, partindo de qualquer configuração válida com n discos, chegar a outro estado qualquer? Uma condição suficiente para que isso seja possível é G ser fortemente conexo e possuir ao menos 3 vértices (pode possuir 2 vértices caso haja no máximo 1 disco envolvido no problema).

4.1 Contagem de vértices

Outra característica comum aos grafos H dessas variantes é o fato de seu número de vértices $|H|$, ser

$$|H| = p^n. \tag{7}$$

O que decorre do fato de haver p possíveis escolhas de pinos em que colocar cada um dos discos, e de, uma vez determinado um conjunto de discos, haver exatamente uma maneira de empilhá-los em um dado pino, já que todos os os discos têm tamanhos distintos.

4.2 Contagem de arestas

A definição dos grafos de Hanói sugere uma abordagem recursiva para a contagem das arestas de uma variante. Consideremos o grafo de configurações de uma determinada variante com n discos e p pinos, denotado H_n, e seja $G = H_1$. Esse grafo (H_n) pode ser construído recursivamente, por meio de uma generalização da construção do grafo de Hanói proposto por Xuemiao [9].

O grafo H_n é gerado recursivamente a partir de G da seguinte forma: H_1 é (isomorfo a) G, e possui os vértices numerados de 1 a p; e H_n é o grafo formado

1. pelos grafos $H^1_{n-1}, H^2_{n-1}, \ldots, H^p_{n-1}$, em que cada H^i_{n-1} é obtido a partir de H_{n-1} pela adição do prefixo i a seus vértices, e
2. pelas arestas
$$\{(i, c_1, c_2, \ldots, c_n), (j, c_1, c_2, \ldots, c_n))\}$$
tais que $c_i \neq i$, $c_i \neq j$ e $\{i, j\} \in E(G)$.

Ressaltamos que, para o caso de uma variante orientada, substitui-se a noção de aresta por arco. Por brevidade, no restante da seção trataremos apenas de variantes não-orientadas, mas a abordagem para o caso orientado é a mesma (no âmbito da contagem), substituindo-se apenas $E(G)$ por $A(G)$.

Lema 4.2. Seja H_n o grafo de configurações de uma variante da Torre de Hanói. Se $a_n = |E(H_n)|$, então a_n satisfaz a recursão

$$a_n = pa_{n-1} + a_1(p-2)^{n-1} \tag{8}$$

Prova. Essa recursão deriva diretamente da construção acima descrita. □

Desenvolvendo a expressão, obtemos

$$\begin{aligned}
a_n &= pa_{n-1} + a_1(p-2)^{n-1} \\
&= p\left(pa_{n-2} + a_1(p-2)^{n-2}\right) + a_1(p-2)^{n-1} \\
&= p^2\left(pa_{n-3} + a_1(p-2)^{n-3}\right) + \\
&\quad + a_1\left((p-2)^{n-1} + p(p-2)^{n-2}\right) \\
&= p^3 a_{n-3} + a_1\Big((p-2)^{n-1} + \\
&\quad + p(p-2)^{n-2} + p^2(p-2)^{n-3}\Big) \\
&\cdots \\
&= p^{n-1}a_1 + a_1\Big((p-2)^{n-1} + p(p-2)^{n-2} \\
&\quad + \cdots + p^{n-2}(p-2)\Big) \\
&= a_1 \textstyle\sum_{i=0}^{n-1} p^i (p-2)^{n-1-i}.
\end{aligned}$$

Resolvendo o somatório, chegamos a uma expressão concisa para o número de arestas em H_n.

$$a_n = a_1 \frac{p^n - (p-2)^n}{2} \tag{9}$$

5. Variantes

Nesta seção apresentamos a definição de algumas variantes conhecidas da Torre de Hanói.

5.1 Variante estendida

Uma das primeiras variantes do quebra-cabeça, uma extensão para quatro pinos – conhecida como *Reeve's Puzzle* – foi proposta por Henry Dudeney em [1]. O problema da obtenção de um algorimo que realize a tarefa ótimamente, isto é, com o menor número de movimentos possível, está em aberto, embora haja uma *solução presumidamente ótima* – comprovada ótima para até 20 discos (conforme [6]).

5.2 Variante circular

A variante circular foi proposta por Scorer, Grundy e Smith em [5]. Consiste em dispor os pinos em um ciclo e permitir apenas movimentos em um sentido — digamos, horário. Uma análise do que ocorre para um número arbitrário de pinos e discos é feita por Berend e Sapir [3, 7], que obtêm uma série de resultados interessantes. O problema também foi alvo de estudos em [10, 12, 14] entre outros, sem que tenha sido obtida a resposta para o problema com mais de três pinos.

5.3 Variante linha

Nesta versão, os vértices $v_i, 1 \leq i \leq p$ são dispostos em uma fila, e somente são permitidos movimentos entre v_j e $v_{j+1}, 1 \leq j < p$.

5.4 Variante estrela

Na variante estrela, São dados p pinos, numerados de 1 a p, dispostos em um círculo, e ainda outro no centro deste, denotado "C". Nenhum disco pode jamais ser movido diretamente entre os pinos numerados, isto é, podem apenas partir de C para algum outro pino qualquer ou de um destes para C.

Stockmeyer [12] introduziu essa variante, e estudou-a no caso $p = 3$. Quando $p = 2$, a variante é idêntica à variante linha (subseção 5.3) com $p = 3$, e foi estudada em [14].

6. Condições de solubilidade

É interessante considerar os fatores que determinam a existência de uma solução para o quebra-cabeça. Apesar de, originalmente, serem apenas consideradas as seqüências de movimentos de mínimo comprimento entre configurações simples, o problema (por vezes chamado de *problema geral* da Torre de Hanói) em que as configurações inicial e final são quaisquer também foi alvo de considerável atenção [8, 9].

Avaliamos a seguir as condições de existência de soluções para o "problema geral" das variantes.

Definição 1. Diremos que um problema é *geralmente solúvel* se, para qualquer par ordenado (a, b) de configurações existir uma seqüência de movimentos válidos que leve a a b.

Lema 6.1. Uma variante com grafo associado $H(n, p)$ é geralmente solúvel se e somente se $H(1, p)$ for fortemente conexo.

Prova. Decorre da construção do grafo de configurações $H(n, p) = H_n$ (subseção 4.2) que existe um caminho entre cada par de subgrafos H^i_{n-1}, $1 \leq i \leq p$ de H_n se, e só se,H_1 for fortemente conexo. Como, or indução, cada um dos H^i_{n-1} é conexo se e somente se H_1 o for, haverá um caminho entre qualquer par de vértices em H_n, quer estejam ou não no mesmo H^i_{n-1}, se e somente se $H(1, p)$ for fortemente conexo. □

7. Agradecimentos

Este trabalho teve apoio financeiro da FAPESP (Fundação de Amparo à Pesquisa do Estado de São Paulo), no processo de referência 2007/05285-2.

Referências

[1] H. E. Dudeney, *The Canterbury Puzzles (and Other Curious Problems)*, E.P. Dutton, 1908.

[2] S. Klavžar and U. Milutinović and C. Petr, *Combinatorics of topmost discs of multi-peg Tower of Hanoi problem*, 2001.

[3] D. Berend and A. Sapir, *The cyclic multi-peg Tower of Hanoi*, ACM Trans. Algorithms **2** (2006), 297–317.

[4] A. M. Hinz and S. Klavžar and U. Milutinović and D. Parisse and C. Petr, *Metric properties of the Tower of Hanoi graphs and Stern's diatomic sequence*, 2005.

[5] R. S. Scorer and P. M. Grundy and C. A. B. Smith, *Some binary games*, MG **28** (1944), 96-103.

[6] B. Houston and H. Masun, *Explorations in 4-peg Tower of Hanoi*, Technical Report TR-04-10 (2004).

[7] D. Berend and A. Sapir, *The diameter of Hanoi graphs*, Inf. Process. Lett. **98** (2006), no. 2, 79–85, DOI http://dx.doi.org/10.1016/j.ipl.2005.12.004.

[8] D. Wood, *Adjudicating a towers of hanoi contest*, International Journal of Computer Mathematics **14** (1983), 199–207.

[9] L. Xuemiao, *Towers of hanoi graphs*, International Journal of Computer Mathematics **19** (1986), 23–38.

[10] P. K. Stockmeyer, *The Average Distance between Nodes in the Cyclic Tower of Hanoi Digraph.*

[11] ———, *The Tower of Hanoi: A Bibliography*, 2005".

[12] ———, *Variations on the four-post Tower of Hanoi puzzle*, CN **102** (1994), 3-12.

[13] J. S. Frame, *Solution to Advanced Problem 3918*, American Mathematical Monthly **48** (1941), no. 3, 216–219.

[14] A. Sapir, *The Tower of Hanoi with Forbidden Moves*, Comput. J. **47** (2004), no. 1, 20-24.

[15] É. Lucas, *Récréations Mathématiques*, Vol. III, Gauthier-Villars et Fils (Paris), 1893.

[16] D. G. Poole, *The Towers and Triangles of Professor Claus (or, Pascal Knows Hanoi)*, Mathematics Magazine **67** (1994), no. 5, 323-344.