UNIVERSIDADE FEDERAL DO PARÁ
BIBLIOTECA DE OBJETOS MATEMÁTICOS

-

TEXTO:
TORRE DE HANÓI E TRIÂNGULO DE SIERPINSKI

AUTOR:
Mayara Brito
(estagiária da BOM)
André Brito
(estagiário da BOM)

ORIENTADOR:
Prof. Dr. Professor Márcio Lima
(coordenador da BOM)

Torre de Hanói e Triângulo de Sierpinski

Você conhece a Torre de Hanói? É um jogo baseado em uma lenda e inventado pelo matemático francês Édouard Lucas em 1883. Dada três hastes e alguns discos de tamanhos diferentes, inicialmente empilhados em uma das três hastes por tamanhos decrescentes (de cima para baixo),o que chamaremos de torre. O objetivo é transferir a torre inteira para uma das outras hastes, movendo apenas um disco de cada vez e nunca colocando um disco maior em cima de um menor. (Para mais detalhes, olhar o texto próprio da Torre de Hanói no site da BOM)

E o Triângulo de Sierpinski, já ouviu falar? Esse "triângulo"pertence a uma classe de objetos matemáticos conhecidos como *fractais.* Foi descrito por Waclaw Sierpinski, em 1915 e obtém-se como limite de um processo iterativo. Para começar o processo, parte-se de uma área triangular formada por um triângulo equilátero, em seguida unem-se os pontos médios de cada lado do triângulo, formando quatro outras áreas triangulares equiláteras em que três delas têm um lado em comum com a área triangular do centro. Depois, retira-se a área triangular central. O processo consiste em repetir indefinidamente o procedimento anterior em relação a cada uma das áreas triangulares obtidas, como na figura abaixo:

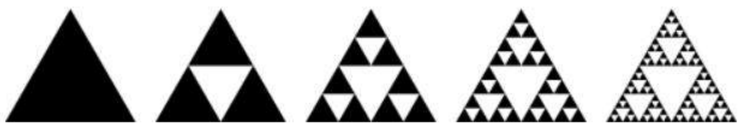


Figura 1: *Essa figura que mostramos, na verdade, mostra as etapas de construção do fractal. É difícil visualizar o processo todo.*

O Triângulo de Sierpinski é a figura resultante desse processo *infinito* de retiradas.

Agora que você já sabe o que é cada um deles, é possível imaginar uma ligação entre a Torre de Hanói e o Triângulo de Sierpinski? Por incrível que pareça, Lucas – que era assombrado pelo Triângulo – encontrou uma relação entre ambos, algum tempo depois.

Porém, antes de falar da relação entre tais objetos, devemos colocar algumas observações. A primeira delas é que existe uma fórmula para calcular a quantidade mínima de movimentos para se conseguir o objetivo do jogo da Torre de Hanói. A fórmula é: $2^n - 1$, onde n é o número de discos. Você pode ver a demonstração da fórmula no texto sobre a Torre de Hanói informado no inicio desse texto.

É bem fácil resolver a Torre com um disco, não e mesmo? Numa jogada só tudo de resolve. Com dois discos também é simples, como veremos a seguir. Quanto maior a quantidade de discos, a quantidade de jogadas para completar o desafio da Torre aumenta substancialmente. Na verdade, aumenta exponencialmente ($2^n - 1$). Essa é uma função exponencial $f(n) = 2^n - 1$ que aparece na fórmula dos movimentos mínimos para conseguir o objetivo da Torre de Hanói.

Sabemos que você está curioso para saber qual a relação que já foi mencionada. Então, vamos lá. Existe uma representação para os movimentos possíveis para cada uma das quantidades de discos da Torre de Hanói. A partir de agora é aconselhável que você tenha em mãos um exemplar da Torre de Hanói para acompanhar e comprovar os diagramas que serão feitos, chamados de *grafos*. Qualquer quebra-cabeça desse tipo geral (mover objetos, número finito de posições) pode ser associado a um grafo H_n, que são os possíveis movimentos da Torre de Hanói e n é o número de discos, cujos vértices sejam as posições permitidas dos discos e cujas arestas ligam (representam) os movimentos permitidos entre as posições.

Agora, numere as hastes da torre da esquerda para a direita (1,2 e 3) e os discos também, do menor para o maior (1,2,..., e n).

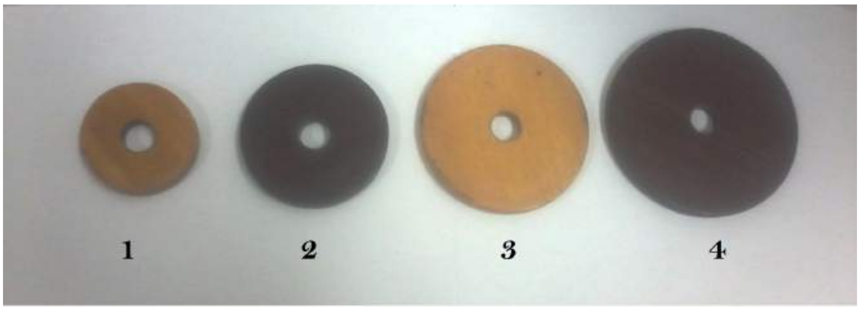


Figura 2: *discos numerados em ordem crescente do menor para o maior.*

Vamos definir os movimentos possíveis como sendo sequencias de números tais que, o primeiro número indica o número da haste em que o menor disco está, o segundo número indica o número da haste em que o segundo menor disco está, e assim sucessivamente. Por exemplo, para um movimento de uma torre com três discos, suponha que o disco 1 esteja no pino 2, o

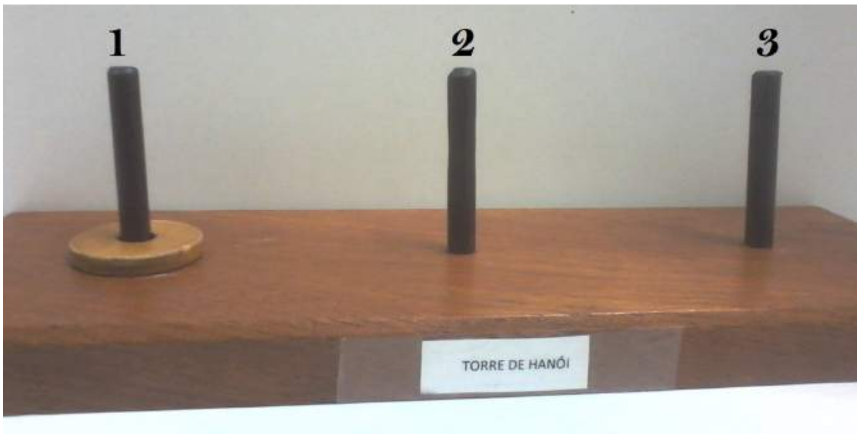


Figura 3: *As hastes estão numeradas em ordem crescente da esquerda para a direita.*

disco 2 esteja no pino 1 e o disco 3 esteja no pino 2, dessa forma, definimos perfeitamente a posição do jogo, por que as regras determinam que o disco 3 deve estar embaixo do disco 1, por ser maior que ele. Assim, a codificação da sequência será 212.

Figura 4: *observe que na primeira haste está o disco dois, na segunda haste estão os discos 1 e 3, então a numeração fica 212. A numeração diz que o disco 1 (o primeiro número) está na haste dois, o disco 2 (o segundo número) está na haste um e o disco 3(o terceiro disco) está na haste dois*

Usaremos as instruções da sequência que acaba de ser ensinada. Qual é a aparência de H_n, isto é, o grafo com os possíveis movimentos para o jogo da Torre de Hanói com n discos?

Vamos começar com o H_1. Na torre com um disco apenas, só teremos 3 possibilidades de posição: o disco está na haste 1, o disco está na haste 2 ou o disco está na haste 3, e você pode movimentar o disco para qualquer haste.

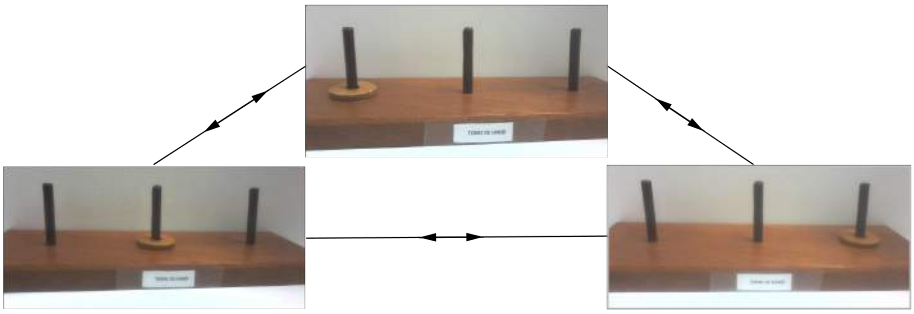


Figura 5: *Observe que você pode fazer os seguintes movimentos seguindo as setas.*

Então, nossa representação H_1 fica:

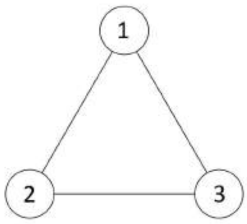


Figura 6: Grafo H_1

Entendeu? Agora faremos o H_2. Teremos 2 discos e cada posição no jogo com 2 discos corresponde a uma sequência de dois algarismos, de valores 1, 2 ou 3 (número correspondente as hastes em que os discos estarão). Existe $3^2 = 9$ posições, por que cada disco pode estar em qualquer pino, independentemente dos demais. Quais são os movimentos permitidos? O menor disco de determinado pino deve estar no topo, portanto corresponde ao primeiro surgimento do número desse pino na sequência. Para mover esse disco (legalmente, obedecendo as regras do jogo) devemos mudar seu número, de modo que se torne o primeiro surgimento de algum outro número. Por exemplo, da posição 21, podemos fazer movimentos legais para as posições 31 e 23 e somente essas. Desse modo, podemos encontrar todas as 9 posições e todas as jogadas possíveis, estão representadas na foto a seguir:

E o grafo H_2 ficará assim:

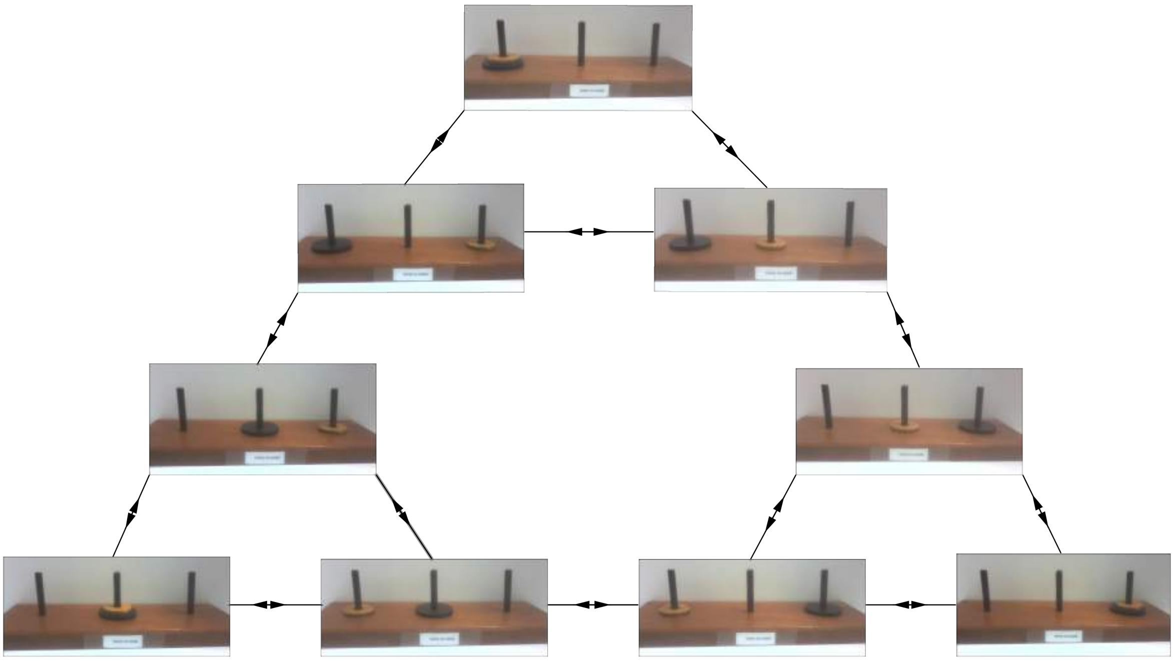


Figura 7: *todos os possiveis movimentos e suas ordens de uma Torre com dois discos*

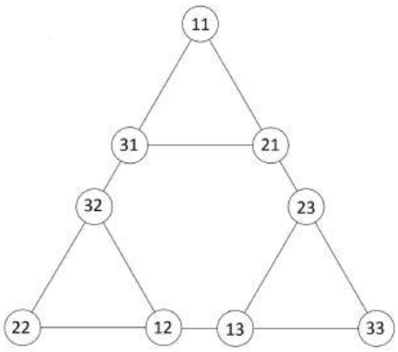


Figura 8: *Grafo H_2*

Repetindo o processo, e fazendo todas as análises que acabamos de fazer dos movimentos possíveis, obedecendo as regras do jogo com 3 discos, podemos montar o grafo H_3, com $3^3 = 27$ posições, que ficará assim:

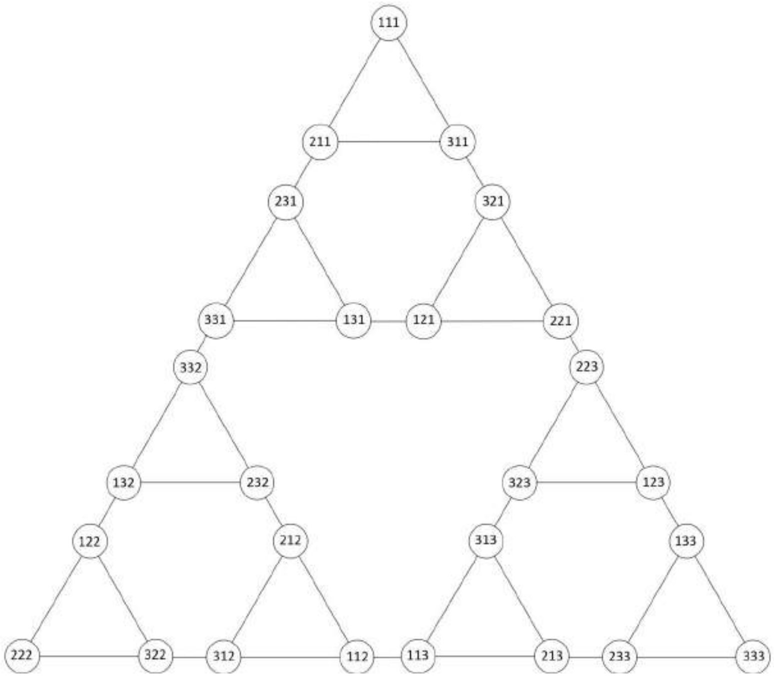


Figura 9: *Grafo H_3, todos os possiveis movimentos.*

Observe que o grafo H_3 acima é formado por três cópias de um grafo menor (de fato, H_2), ligadas por três arestas, formando um triângulo. Agora volte um pouco no texto e perceba também que o grafo H_2 também é formado por três cópias de H_1, formando um triângulo.

Cada grafo H_2 menor de H_3 tem uma estrutura tripla semelhante, o que é uma consequência da solução recursiva (aquela que você deduz a solução do jogo de n discos, sabendo a de $n-1$ discos). As arestas que unem os três grafos H_2 são as maneiras pelas quais movemos os discos de baixo, e as três cópias de H_2 são as maneiras pelas quais podemos mover somente os dois discos de cima – uma cópia para cada posição possível do terceiro disco. Lembrando, mais uma vez, que você deve ter uma cópia da torre para acompanhar todos os movimentos.

Você está se perguntando: o por que das três arestas, qual o motivo de, por exemplo, a numeração 332 não ter uma aresta que ligue ao 323? Para responder, observe as seguintes imagens.

Figura 10: *posição 332*

Figura 11: *posição 323*

Observe que para passar da posição 332 para a 323 é necessário mais de um movimento, por isso não tem uma aresta no grafo H_3 que una as duas numerações. O mesmo motivo é para as numeração 221 e 232, e para as demais posições que não apresentarem ligações por arestas.

O grafo H_n: este grafo é formado por três cópias de H_{n-1}, ligadas de um modo triangular. A figura abaixo mostra H_5:

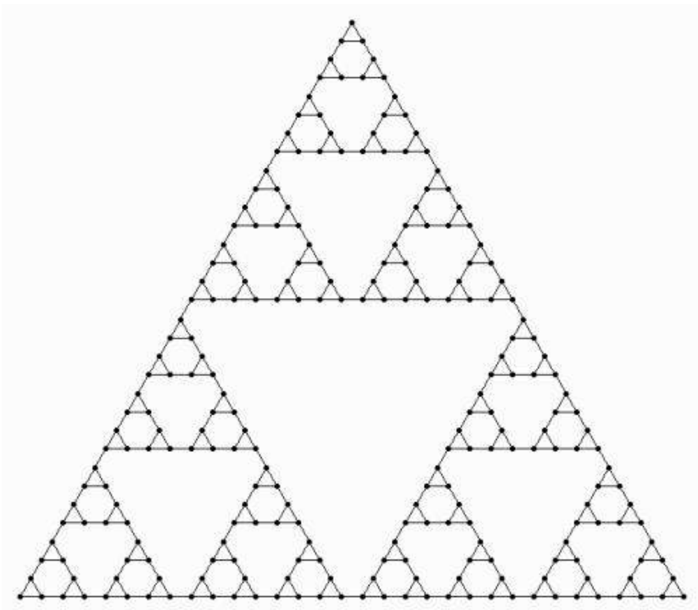
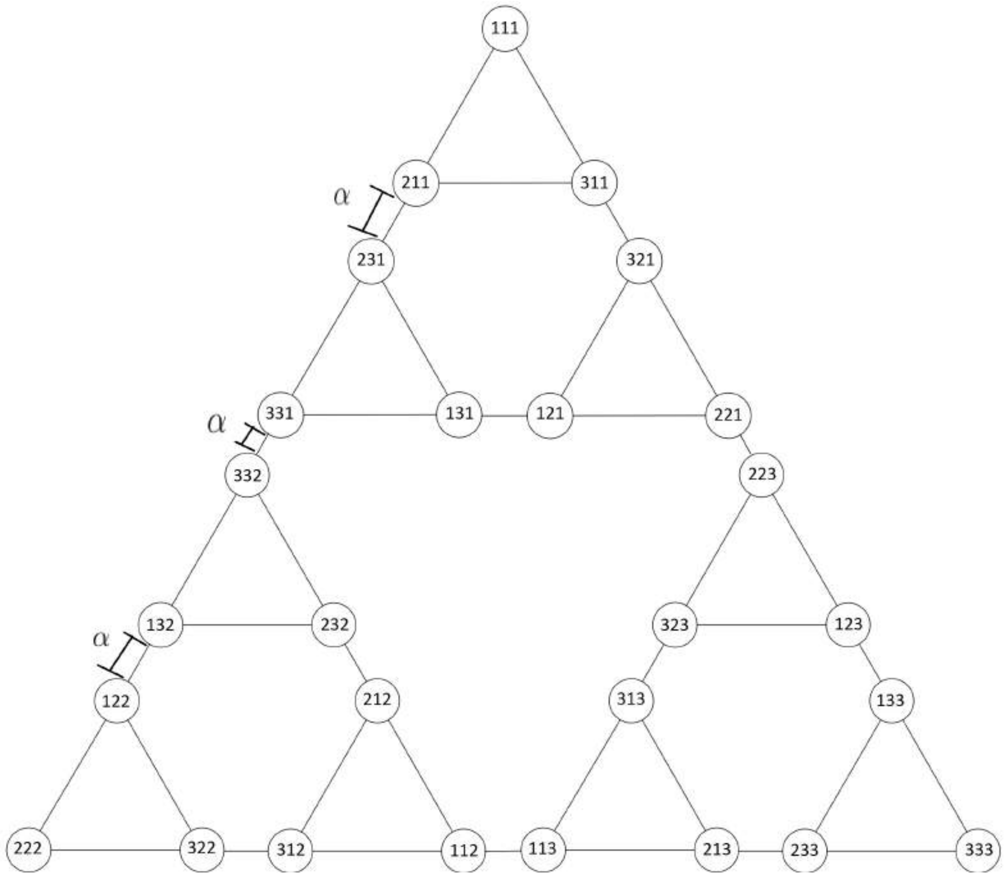


Figura 12: *Grafo H_n, já está se aproximando da aparencia do triângulo de Sierpinski*

Nesse ponto, você já consegue enxergar aonde se quer chegar, mas vamos continuar nossas análises. Caso não tenha percebido, observe que à medida que o número de discos aumenta, o grafo se torna cada vez mais parecido com o Triângulo de Sierpinski. Podemos usar o grafo para resolver todo tipo de pergunta sobre o quebra-cabeça. Por exemplo, o grafo é claramente conectado (é uma estrutura única, sem divisões), portanto podemos nos mover de qualquer posição para qualquer outra. O caminho mínimo da posição inicial habitual para a posição final habitual corre em linha reta ao longo de uma das margens do grafo, portanto tem dimensão $2^n - 1$. Esse resultado é conhecido há muitos anos na forma "o disco maior se move apenas uma vez". Mas você deve está se perguntando "e o espaço que há entra cada H_1?", veja que na figura a baixo chamamos essa medida de α e que se tendermos ele a zero, veremos que o grafo H_n tende ao Triângulo de Sierpinski.



Agora que você já conhece a relação,é fácil perceber que o número de movimentos mínimos está representado nas laterais do triângulo, ou seja, os lados do triângulos são o caminho mais curto para a solução.