CI1238 - Otimização - Primeiro Trabalho Prático

Aluno: Pedro Beber de Queiroz Vidal GRR:20205105

April 9, 2024

Resumo do Problema

O problema apresentado envolve uma empresa que deseja maximizar seu lucro transportando produtos entre duas cidades, utilizando uma rede de transporte composta por várias cidades e rotas. Cada rota tem uma capacidade limitada de carga e requer um conjunto mínimo de recursos para ser utilizada. A empresa pode adquirir estes recursos em pacotes, cada um com um custo associado.

Objetivo

Maximizar o lucro da empresa transportando a maior quantidade possível de produto da cidade de origem para a cidade de destino, considerando as restrições de capacidade das rotas e a necessidade de recursos.

Variáveis

- n: Número de cidades na rede de transporte.
- m: Número de rotas disponíveis.
- k: Número de tipos de recursos necessários.
- q: Número de tipos de pacotes de recursos disponíveis no mercado.
- p: Lucro por tonelada de produto transportado, descontando o custo de produção.

Restrições

- Cada rota tem uma capacidade limitada de carga por dia.
- Para utilizar uma rota, a empresa deve possuir uma quantidade mínima de cada recurso necessário, específico para aquela rota.
- Os recursos são adquiridos em pacotes, cada um com uma composição específica e um custo.

Entrada

A entrada consiste em números inteiros que representam, respectivamente, a quantidade de cidades, rotas, recursos, pacotes, e o lucro por tonelada. Seguem-se m descrições de rota (cidades conectadas, capacidade, e recursos necessários) e q descrições de cada pacote de recursos (custo e quantidade de cada recurso). Segue um exemplo de entrada (1)

$$\begin{array}{cccccc}
4 & 5 & 3 & 2 & 100 & \\
1 & 2 & 5 & 1 & 1 & 5 \\
1 & 3 & 2 & 2 & 2 & 0 \\
2 & 3 & 5 & 1 & 2 & 0 \\
2 & 4 & 2 & 2 & 1 & 0 \\
3 & 4 & 5 & 3 & 4 & 6 \\
10 & 4 & 2 & 0 & & \\
20 & 5 & 2 & 1 & &
\end{array} \tag{1}$$

Saída

A saída deve ser um arquivo no formato aceito pelo `lp solve`, um programa de solução de problemas de programação linear, detalhando o modelo matemático para resolver a instância do problema fornecida.

Modelagem do problema

Como o objetivo de solucionar o problema, ele foi dividido em duas partes: uma passível de ser modelada como um problema de fluxo e outra como o problema da dieta. No caso do problema do fluxo, para cada cidade não pertencente a origem e o destino, cria-se uma restrição de fluxo que define uma igual quantidade de entrada e saída. A partir do examplo da figura 1, é possível descrever as equações de fluxo que restringem a solução.

$$x_{23} + x_{24} = x_{12} \tag{2}$$

$$x_{34} = x_{13} + x_{23} \tag{3}$$

A equação 1 descreve o fluxo que sai de do vértice 2, representado pelo lado esquerdo da igualdade e fluxo que entra no vértice 2, representado pelo lado direito da igualdade. A equação 2 descreve o mesmo fato para o vértice 3. De forma genérica, as restrições de fluxo foram implementadas para cada cidade excluido-se as cidades de origem e destino, que possuem somente fluxos que saem e que entram respectivamente. Ou seja, a soma de toneladas que saem de uma rota devem ser iguais a soma das toneladas que entram nela. Apesar de os fluxos serem modelados a partir de uma perspectiva de um grafo direcionado, o problema deve ser tratado como tendo rotas bidirecionais, e portanto os valores de cada um dos vértices podem assumir valores negativos (indicando que o fluxo

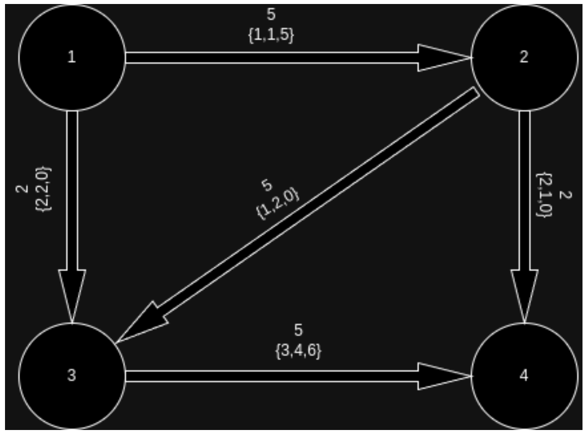

Figure 1: Grafo que representa o quantidade máxima que pode ser transportada pela rota e os recursos necessários para atravessá-la. Corresponde a rede de transporte definida pela entrada (1)

vai na direção oposta do que foi descrito na entrada), conforme o problema 2.2 "Flow in a Network" utlizado como exemplo em [1].

Além das restrições de fluxo deve-se modelar as desigualdes referentes ao número de produtos consumidos nas rotas ser menor ou igual a soma dos produtos comprados nos pacotes. No caso do exemplo da figura, cada produto terá as seguintes restrições.

$$|x_{12}| \cdot 1 + |x_{13}| \cdot 2 + |x_{23}| \cdot 1 + |x_{24}| \cdot 2 + |x_{34}| \cdot 3 \leq n_1 \cdot 4 + n_2 \cdot 5, \tag{4}$$

$$|x_{12}| \cdot 1 + |x_{13}| \cdot 2 + |x_{23}| \cdot 2 + |x_{24}| \cdot 1 + |x_{34}| \cdot 4 \leq n_1 \cdot 2 + n_2 \cdot 2, \tag{5}$$

$$|x_{12}| \cdot 5 + |x_{13}| \cdot 0 + |x_{23}| \cdot 0 + |x_{24}| \cdot 0 + |x_{34}| \cdot 6 \leq n_1 \cdot 0 + n_2 \cdot 1. \tag{6}$$

As equações enforçam que a quantidade de produto somada utlizada para transporte de x toneladas em cada uma das rotas deve ser menor ou igual a quantidade total de produtos representada pelo número de pacotes (que contém recursos) de cada tipo. De forma genérica, é preciso especificar uma desigualdade para cada produto, que contém m rotas que potencialmente irão transportar carga e consumir tal produto.

No entanto, tal implementação utliza-se módulo, que introduz não linearidade ao problema. Para lidar com esse problema, foi escolhido utilzar o Método Binário, que consiste em dividir o módulo ou expressão em uma parte positiva e outra negativa, e uma variável binária para forçar uma ou outra a ser zero [2]. Matematicamente, isso se parece como:

$$L \leq x \leq U, \tag{7}$$
$$x = x^+ - x^-, \tag{8}$$
$$0 \leq x^+ \leq Uy, \tag{9}$$
$$0 \leq x^- \leq |L|(1-y), \tag{10}$$
$$y \in \{0, 1\}. \tag{11}$$

Assim, cada variável $x_{12}, x_{13}, x_{23}, x_{24}, x_{34}$ que representa o fluxo da rota em questão será modelada como da seguinte forma, a exemplo x_{12}:

$$x_{12} = a120 - a_{121}, \tag{12}$$
$$0 \leq a_{120} \leq 5y, \tag{13}$$
$$0 \leq a_{121} \leq 5(1 - y_{12}), \tag{14}$$
$$y_{12} \in \{0, 1\}. \tag{15}$$

$x^+ - x^-$ são trocadas por $a120$ e $a121$ em que os dois primeiros algarismos do índice representam a rota a ser seguida, e o terceiro algarismo (0 ou 1) representa a parte positiva e parte negativa respectivamente. É nesse sentido que as restrições modeladas com valores absolutos são trocadas de $|x_{12}| \cdot 1$ para $a_{120} \cdot 1 + a_{121} \cdot 1$, por exemplo.

Por fim, basta definir a função de maximização do problema. No caso, trata-se das toneladas transportas pela cidade de origem (que se espalham pela rede e chegam ao destino em mesma quantidade) menos os custos envolvidos com a compra de pacotes. Dessa forma, a equação de maximização do exemplo está definida pela equação (16), onde v_x representa o custo do pacote de índice x, n_x a quantidade de pacotes de índice x comprados e o ganho por tonelada transportada (p).

$$\max \quad pX_{12} + pX_{13} - n_1 v_1 - n_2 v_2 \tag{16}$$

A partir do programa transporte.c é possível definir a modelagem completa das equações para o exemplo utlizado, que resulta em:

$$
\begin{aligned}
\text{maximize} \quad & 100x_{12} + 100x_{13} - n_1 \cdot 10 - n_2 \cdot 20 \\
\text{subject to} \quad & x_{23} + x_{24} = x_{12}, \\
& x_{34} = x_{13} + x_{23}, \\
& a_{120} + a_{121} + a_{130} \cdot 2 + a_{131} \cdot 2 + a_{230} + a_{231} \\
& \qquad + a_{240} \cdot 2 + a_{241} \cdot 2 + a_{340} \cdot 3 + a_{341} \cdot 3 \leq n_1 \cdot 4 + n_2 \cdot 5, \\
& a_{120} + a_{121} + a_{130} \cdot 2 + a_{131} \cdot 2 + a_{230} \cdot 2 + a_{231} \cdot 2 \\
& \qquad + a_{240} + a_{241} + a_{340} \cdot 4 + a_{341} \cdot 4 \leq n_1 \cdot 2 + n_2 \cdot 2, \\
& a_{120} \cdot 5 + a_{121} \cdot 5 + a_{340} \cdot 6 + a_{341} \cdot 6 \leq n_2, \\
& x_{12} = a_{120} - a_{121}, \\
& a_{120} \geq 0, \quad a_{120} \leq 5y_{12}, \\
& a_{121} \geq 0, \quad a_{121} \leq 5(1 - y_{12}), \\
& \text{bin } y_{12}, \\
& x_{13} = a_{130} - a_{131}, \\
& a_{130} \geq 0, \quad a_{130} \leq 2y_{13}, \\
& a_{131} \geq 0, \quad a_{131} \leq 2(1 - y_{13}), \\
& \text{bin } y_{13}, \\
& \vdots \\
& x_{34} = a_{340} - a_{341}, \\
& a_{340} \geq 0, \quad a_{340} \leq 5y_{34}, \\
& a_{341} \geq 0, \quad a_{341} \leq 5(1 - y_{34}), \\
& \text{bin } y_{34}.
\end{aligned}
$$

[1] Jiří Matoušek and Bernd Gärtner. *Understanding and Using Linear Programming*. Berlin, Heidelberg: Springer, 2007. ISBN: 978-3-540-30697-9.

[2] Paul A. Rubin. *Modeling Absolute Values*. `https://orinanobworld.blogspot.com/2012/07/modeling-absolute-values.html`. Blog post. July 2012.