MC558 - Lista Avaliativa 3

Pedro Brasil Barroso - RA 260637

Universidade Estadual de Campinas
Instituto de Computação

Problema selecionado: 7 - *Fábrica de sorvetes*

(a) Apresente o programa linear explicando as variáveis, função objetivo e restrições.

Variáveis:

- x_c: quantidade de sorvete de chocolate (em litros) a ser produzida.
- x_b: quantidade de sorvete de baunilha (em litros) a ser produzida.
- x_m: quantidade de sorvete de morango (em litros) a ser produzida.

Função objetivo: maximizar o lucro total obtido com a venda dos sorvetes.

Restrições: Cada tipo de sorvete requer uma quantidade específica de leite, açúcar e saborizantes para ser produzido. Além disso, há uma quantidade limitada desses ingredientes disponíveis e uma quantidade mínima de cada tipo de sorvete que deve ser produzida:

Tipos de Sorvete:

Sorvete	Leite (L/L)	Açúcar (kg/L)	Saborizantes (g/L)	Lucro por Litro (R$)	Demanda Mínima (L)
Chocolate	0.5	0.1	10	12	80
Baunilha	0.4	0.15	8	10	60
Morango	0.45	0.12	9	11	50

Recursos disponíveis:

- **Leite total disponível:** 500 L
- **Açúcar total disponível:** 80 kg
- **Saborizantes totais disponíveis:** 2000 g

Programa linear:

$$\max\ 12x_c + 10x_b + 11x_m \tag{1}$$

s.a:

$$0.5x_c + 0.4x_b + 0.45x_m \leq 500 \tag{2}$$

$$0.1x_c + 0.15x_b + 0.12x_m \leq 80 \tag{3}$$

$$10x_c + 8x_b + 9x_m \leq 2000 \tag{4}$$

$$x_c \geq 80 \tag{5}$$

$$x_b \geq 60 \tag{6}$$

$$x_m \geq 50 \tag{7}$$

$$x_c, x_b, x_m \in \mathbb{Q}^+ \tag{8}$$

Programa linear primal:

$$\min \; -12x_c - 10x_b - 11x_m \tag{9}$$

$$\begin{aligned}
&\text{s.a:}\\
-0.5x_c - 0.4x_b - 0.45x_m &\geq -500 \quad (10)\\
-0.1x_c - 0.15x_b - 0.12x_m &\geq -80 \quad (11)\\
-10x_c - 8x_b - 9x_m &\geq -2000 \quad (12)\\
x_c &\geq 80 \quad (13)\\
x_b &\geq 60 \quad (14)\\
x_m &\geq 50 \quad (15)\\
x_c, x_b, x_m &\in \mathbb{Q}^+ \quad (16)
\end{aligned}$$

(b) Apresente o programa dual do entregue no item anterior. Proponha uma interpretação para as variáveis duais.

Programa linear dual:

$$\max \; -500y_l - 80y_a - 2000y_s + 80y_c + 60y_b + 50y_m \tag{17}$$

$$\begin{aligned}
&\text{s.a:}\\
-0.5y_l - 0.1y_a - 10y_s + y_c &\leq -12 \quad (18)\\
-0.4y_l - 0.15y_a - 8y_s + y_b &\leq -10 \quad (19)\\
-0.45y_l - 0.12y_a - 9y_s + y_m &\leq -11 \quad (20)\\
y_l, y_a, y_s, y_c, y_b, y_m &\in \mathbb{Q}^+ \quad (21)
\end{aligned}$$

Interpretação das variáveis duais:

- y_l: impacto de aumentar a quantidade de leite disponível.
- y_a: impacto de aumentar a quantidade de açúcar disponível.
- y_s: impacto de aumentar a quantidade de saborizante disponível.
- y_c: impacto de aumentar a produção de sorvete de chocolate.
- y_b: impacto de aumentar a produção de sorvete de baunilha.
- y_m: impacto de aumentar a produção de sorvete de morango.

(c) Uma solução viável mas não ótima do primal e, usando folgas completares, mostre como deduzir que tal solução não é ótima. (e) Explique o passo-a-passo.

Sejam $x_c = 80$, $x_b = 60$, $x_m = 50$. Substituindo os valores nas restrições do primal, obtemos:

$$-0.5x_c - 0.4x_b - 0.45x_m = -86.5 > -500 \ (y_l = 0) \tag{22}$$
$$-0.1x_c - 0.15x_b - 0.12x_m = -23 > -80 \ (y_a = 0) \tag{23}$$
$$-10x_c - 8x_b - 9x_m = -1730 > -2000 \ (y_s = 0) \tag{24}$$
$$x_c = 80 \ (y_c \geq 0) \tag{25}$$
$$x_b = 60 \ (y_b \geq 0) \tag{26}$$
$$x_m = 50 \ (y_m \geq 0) \tag{27}$$

Todos os valores encontrados satisfazem as inequações do primal; portanto, a solução é viável. Para testar sua otimalidade, utilizaremos o teorema das folgas complementares.

Seguindo tal teorema, nas equações 22, 23 e 24, o valor é maior que o da restrição, então é necessário que, no dual, $y_l, y_a, y_s = 0$. Além disso, nas equações 25, 26 e 27, o valor é igual ao da restrição, então no dual deve-se ter $y_c, y_b, y_m > 0$.

Dessa forma, analisando as restrições do programa dual, temos:

$$-0.5y_l - 0.1y_a - 10y_s + y_c = y_c = -12 \tag{28}$$
$$-0.4y_l - 0.15y_a - 8y_s + y_b = y_b = -10 \tag{29}$$
$$-0.45y_l - 0.12y_a - 9y_s + y_m = y_m = -11 \tag{30}$$

Pelo teorema das folgas complementares, como $y_c, y_b, y_m < 0$, não há solução viável para o dual. Logo, a solução não é ótima.

(d) Apresente uma solução ótima do primal e, usando folgas complementares, mostre como provar a otimalidade. (e) Explique o passo-a-passo.

Sejam $x_c = 80$, $x_b = 93,75$, $x_m = 50$. Substituindo os valores nas restrições do primal, obtemos:

$$-0.5x_c - 0.4x_b - 0.45x_m = -100 > -500 \ (y_l = 0) \tag{31}$$
$$-0.1x_c - 0.15x_b - 0.12x_m = -28,0625 > -80 \ (y_a = 0) \tag{32}$$
$$-10x_c - 8x_b - 9x_m = -2000 \ (y_s \geq 0) \tag{33}$$
$$x_c = 80 \ (y_c \geq 0) \tag{34}$$
$$x_b = 93,75 > 80 \ (y_b = 0) \tag{35}$$
$$x_m = 50 \ (y_m \geq 0) \tag{36}$$

Todos os valores satisfazem as inequações do primal; portanto, a solução é viável. Para testar sua otimalidade teremos, analogamente ao item anterior, $y_l, y_a, y_b = 0$ e $y_c, y_s, y_m > 0$.

Dessa forma, analisando as equações do programa dual, temos:

$$-0.5y_l - 0.1y_a - 10y_s + y_c = -10y_s + y_c = -12 \tag{37}$$
$$-0.4y_l - 0.15y_a - 8y_s + y_b = -8y_s = -10 \tag{38}$$
$$-0.45y_l - 0.12y_a - 9y_s + y_m = -9y_s + y_m = -11 \tag{39}$$

A solução desse sistema é $y_s = 1,25 > 0$, $y_c = 0,5 > 0$ e $y_m = 0,25 > 0$. Logo, pelo teorema das folgas complementares, a solução é ótima.