MC558 - Lista Avaliativa 2

Pedro Brasil Barroso - RA 260637

Universidade Estadual de Campinas
Instituto de Computação

Árvore Geradora Mínima

- **Problema escolhido:** *Acacias*, 8 pontos.

- **Definição do problema:**

- **Entrada:** Um inteiro N, que representa o número de vértices, numerados de 1 a N, seguido de $N-1$ linhas. Cada linha i consiste em um inteiro não-negativo k, seguido de k pares de inteiros j e c_{ij}, tal que existe uma aresta não direcionada de i para j com peso c_{ij}.

- **Saída:** Uma linha com dois inteiros, tais que o primeiro representa o número de componentes conexas no grafo e o segundo, a soma dos custos das árvores mínimas de cada componente.

- **Solução:** O problema pode ser resolvido diretamente com pequenas alterações ao algoritmo de Kruskal visto em aula:

Algoritmo: AGM-Kruskal-Acacias(G, w)

$A \leftarrow \emptyset$
componentes $\leftarrow |V[G]|$
custo $\leftarrow 0$
para cada $u \in V[G]$
    Make-Set(u)
ordene as arestas em ordem não decrescente de peso
para cada $(u, v) \in E[G]$ na ordem obtida
    se Find-Set(u) $\neq$ Find-Set(v)
        $A \leftarrow A \cup \{(u, v)\}$
        Union(u, v)
        custo $\leftarrow$ *custo* $+$ w(u, v)
        componentes $\leftarrow$ *componentes* $- 1$
devolva *custo*, *componentes*, A

- **Complexidade:** Como visto em aula, o algoritmo de Kruskal para árvores geradoras mínimas apresenta complexidade $O(E \log E)$, onde E é o número de arestas do grafo.
  Como as operações adicionadas (instanciação e soma nas variáveis "componentes" e "custo") são realizadas em O(1), AGM-Kruskal-Acacias possui complexidade $O(E \log E)$.

- **Corretude:**
  Note que, como G pode ser desconexo, AGM-KRUSKAL-ACACIAS retorna uma floresta de árvores geradoras mínimas.
  Para provar a corretude, é necessário utilizar a seguinte invariante:

  > *No início de cada iteração do laço* **para** *da linha* 7 *: (1) pesos é a soma dos pesos das arestas em A e (2) componentes é o número de componentes conexas em $G_A = (V, A)$.*

  Base: No início do algoritmo, $A = \emptyset$. Inicialmente, *pesos* $= 0$ e *componentes* $= |V[G]|$; portanto, a invariante é trivialmente verdadeira.

  Hipótese: Suponha que a invariante é verdadeira no início da iteração i.

  Passo: Na iteração $i + 1$:
  Caso 1: A aresta (u, v) é adicionada a A.

  - (1) Então u e v são unidos em uma mesma componente conexa, reduzindo o número total de componentes em 1. Na linha 12, *componentes* é decrementada em 1.
  - (2) Além disso, o peso da aresta (u, v) é somado a *pesos* na linha 11.

  Caso 2: A aresta (u, v) não é adicionada a A.

  - (1) Neste caso, u e v já pertencem à mesma componente conexa, e *componentes* não é alterada.
  - (2) O peso da aresta (u, v) não é somado a *pesos*.

  Portanto, ao fim da iteracão $i + 1$, a invariante é mantida.

  Conclusão: A invariante é mantida em todas as iterações; logo, ao final do algoritmo, *componentes* é o número de componentes conexas em G_A e *custo* é a soma dos pesos das arestas em A.

Caminhos mínimos

\- **Problema escolhido:** *Trip to BH*, 8 pontos.

\- **Definição do problema:**

- **Entrada:** Uma linha contendo dois inteiros N e M, indicando, respectivamente, o número de vértices (numerados de 1 a N) e de arestas. Em seguida, M linhas, cada uma contendo quatro inteiros A B T R, indicando que existe uma aresta de A para B com tipo T (0 ou 1) e peso R.

- **Saída:** A menor distância entre os vértices 1 e N dentre os caminhos que utilizam apenas arestas de um mesmo tipo.

- **Solução:** O problema pode ser resolvido diretamente com uma pequena alteração ao algoritmo de Dijkstra visto em aula: basta adicionar um parâmetro t a DIJKSTRA que indica o tipo da aresta que será considerada na iteração. Dessa forma, uma aresta só deverá ser considerada se seu tipo for igual a t. Então, basta executar o algoritmo duas vezes, uma para cada tipo de aresta ($t = 0$ e $t = 1$), e comparar os resultados.

- **Complexidade:** Como visto em aula, o algoritmo de Dijkstra para caminhos mínimos apresenta complexidade $O((V + E) \log E)$. No enunciado do exercício, é explicitado que $M \leq 2(N^2 - N)$, então $|V| = N$ e $|E| = O(N^2)$.
  Note que a verificação de qual tipo de aresta será considerada é realizada em O(1), pois basta comparar o tipo da aresta antes de adicioná-la à fila de prioridade.
  A complexidade total de executar o algoritmo duas vezes, uma para $t = 0$ e outra para $t = 1$, é, portanto, $O(N^2 \log N)$.

- **Corretude:** Sejam $G_0 = (V, E_0)$ e $G_1 = (V, E_1)$, onde $E_t = \{e \in E \mid e.T = t\}$ ($e.T$ indica o tipo de e). Então executar DIJKSTRA duas vezes, uma para G_0 e outra para G_1, resulta em caminhos mínimos que contêm apenas arestas de um mesmo tipo.
  A alteração sugerida ao algoritmo de Dijkstra garante que, em cada iteração, apenas arestas do tipo t sejam consideradas. Isso equivale a processar apenas o subgrafo G_t, provando a corretude dessa solução.

Fluxo em redes

- **Problema escolhido:** *My T-Shirt Suits Me*, 6 pontos.

- **Definição do problema:**

- **Entrada:**
  Uma linha contendo dois inteiros N e M, $N \geq M$, indicando, respectivamente, o número de camisetas e de voluntários. Em seguida, M linhas, cada uma contendo dois tamanhos de camiseta (dentre *XXL,*

XL, L, M, S ou *XS*) que podem ser usados por cada voluntário. N sempre é um múltiplo de 6.

- **Saída:** *YES*, se for possível distribuir todas as camisetas de forma que cada voluntário receba uma camiseta de um tamanho que possa usar, ou *NO*, caso contrário.

- **Solução:**
  Seja $G = (V, E)$ um grafo que possui um vértice para cada camiseta e um vértice para cada voluntário, e $C, P \subset V$ conjuntos que contêm os vértices associados às camisetas e aos voluntários, respectivamente. Adicione uma aresta de capacidade 1 indo de $c \in C$ para $v \in P$ se v puder vestir c. Então $|V| = 6 + M$ e $|E| = 2M$, pois cada voluntário pode vestir dois tamanhos diferentes, e G é um grafo bipartido com bipartição (C, P).
  Em seguida, crie e conecte um vértice s a cada vértice $c \in C$ por uma aresta de capacidade $N/6$, e conecte cada vértice $v \in P$ a um novo vértice t com uma aresta de capacidade 1. Agora, $|V| = 6 + M + 2 = M + 8$ e $|E| = 2M + M + 6 = 3M + 6$
  Nessa configuração, se f for um fluxo máximo e $|f| = M = c(\{s\} \cup C \cup P, \{t\})$, então é possível distribuir todas as camisetas. É possível encontrar f ao executar o algoritmo Edmonds-Karp para a rede (G, c, s, t), onde c armazena as capacidades das arestas, e então retornar *YES* se $|f| = M$, e *NO* caso contrário.

- **Complexidade:**
  - A leitura pode ser feita em $O(M)$, pois são lidos M pares de tamanhos de camiseta;
  - A instanciação do grafo G e a adição das arestas de capacidade 1 podem ser feitas com complexidade $O(M)$, uma vez que $|V| = O(M)$ e $|E| = O(M)$;
  - A implementação de Edmonds-Karp possui complexidade $O(VE^2)$.
  - Para descobrir o valor do fluxo máximo, basta somar o fluxo das 6 arestas que saem de s, o que pode ser feito em $O(1)$, tal como a checagem para determinar se $|f| = M$ (no algoritmo submetido ao Beecrowd, foi feita uma alteração a Edmonds-Karp para que isso fosse realizado durante sua execução).

Portanto, com $|V| = M+8$ e $|E| = 3M+6$, a complexidade total será:

$$O(M)+O(M)+O((M+8)\cdot(3M+6)^2)+O(1) = O(M\cdot M^2) = O(M^3)$$

- **Corretude:**
  Sejam $G = (V, E)$, C, P, s e t definidos como anteriormente. Então cada vértice $c \in C$ possui uma aresta de capacidade $N/6$ incidente; portanto, a capacidade total das arestas que saem de s é $N/6 \cdot 6 = N$, representando as N camisetas. Como há arestas de peso 1 indo das camisetas para os voluntários nos quais os tamanhos servem, um fluxo nesse grafo representa uma possível distribuição de camisetas.
  Além disso, as únicas arestas incidentes em t são as M arestas de peso 1 que representam os M voluntários. Portanto, $c(V - \{t\}, \{t\}) = M$, logo, sendo f' um fluxo qualquer em G, $|f'| = f(V - \{t\}, \{t\}) \leq M$.
  Dessa forma, há duas possibilidades para um fluxo máximo f em G:

  1. $|f| = M$. Então $f(v,t) = 1\ \forall v \in P$, ou seja, todos os voluntários pertencem a um caminho de s a t em f. Nesse caso, cada voluntário receberá uma camiseta que pode vestir.
  2. $|f| < M$. Então $(\exists v \in P)\ f(v,t) = 0$, i.e., ao menos um voluntário não receberá uma camiseta.

  Portanto, se $|f| = M$, a resposta é *YES*; caso contrário, a resposta é *NO*.