MAT1610 - Clase 2

Definición exacta de límite y de límites infinitos

Diego De la Vega

Facultad de Matemáticas
Pontificia Universidad Católica de Chile

08 de marzo del 2023

Objetivos

- Introducir la definición exacta de límite
- Introducir la definición exacta de límite no acotado
- Introducir la asíntota vertical

Definición exacta de límites

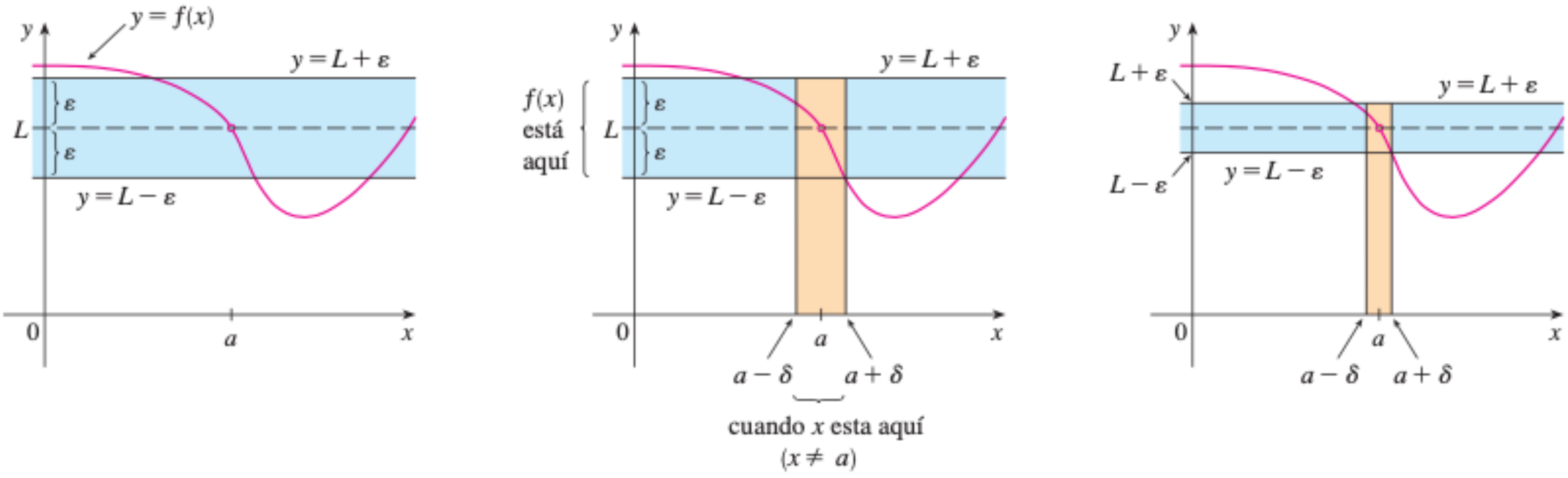
Sea f la función definida sobre algún intervalo abierto que contiene el número a, excepto posiblemente en a misma. Entonces, decimos que el **límite de $f(x)$ cuando x tiende a a es L**, y lo expresamos como

$$\lim_{x \to a} f(x) = L$$

Si para cada número $\varepsilon > 0$ existe un número $\delta > 0$ tal que

$$\text{Si } 0 < |x - a| < \delta \text{ entonces } |f(x) - L| < \varepsilon$$

Definición exacta de límites



Ejercicio 1: Pruebe que el $\lim_{x \to 3} (4x - 5) = 7$

Ejercicio 1: Pruebe que el $\lim_{x\to 3}(4x-5)=7$

Análisis preliminar (intuir relación entre ε y δ):

Queremos encontrar un número de δ tal que:

$$\text{Si } 0<|x-3|<\delta \text{ entonces } |(4x-5)-7|<\varepsilon$$

Pero $|(4x-5)-7|=|4x-12|=4|x-3|$. Queremos encontrar un número de δ tal que:

$$\text{Si } 0<|x-3|<\delta \text{ entonces } 4|x-3|<\varepsilon$$

Equivalente a

$$\text{Si } 0<|x-3|<\delta \text{ entonces } |x-3|<\frac{\varepsilon}{4}$$

Esto último indica que se debe elegir en $\delta=\varepsilon/4$

Ejercicio 1: Pruebe que el $\lim_{x \to 3}(4x-5) = 7$

Demostración:

Dado $\varepsilon > 0$, se escoge $\delta = \varepsilon/4$.

Si $0 < |x-3| < \delta$ entonces,

$$|(4x-5)-7| = |4x-12| = 4|x-3| < 4\delta = 4\frac{\varepsilon}{4} = \varepsilon$$

Así,

$$\text{Si } 0 < |x-3| < \delta \text{ entonces} |(4x-5)-7| < \varepsilon$$

Por lo tanto, por la definición de límite,

$$\lim_{x \to 3}(4x-5) = 7$$

Definición de límite por la izquierda

Escribiremos

$$\lim_{x \to a^-} f(x) = L$$

Si para todo $\varepsilon > 0$ existe un número $\delta > 0$ tal que:

Si $a - \delta < x < a$ entonces $|f(x) - L| < \varepsilon$

Definición de límite por la derecha

Escribiremos

$$\lim_{x \to a^+} f(x) = L$$

Si para todo $\varepsilon > 0$ existe un número $\delta > 0$ tal que:

Si $a < x < a + \delta$ entonces $|f(x) - L| < \varepsilon$

Ejercicio 2: Pruebe que el $\lim_{x \to 0^+} \sqrt{x} = 0$

Ejercicio 2: Pruebe que el $\lim_{x \to 0^+} \sqrt{x} = 0$

Análisis preliminar (intuir relación entre ε y δ):

Queremos encontrar un número de δ tal que:

$$\text{Si } 0 < x < \delta \text{ entonces } \left|\sqrt{x} - 0\right| < \varepsilon$$

Es decir,

$$\text{Si } 0 < x < \delta \text{ entonces } \sqrt{x} < \varepsilon$$

Elevando al cuadrado,

$$\text{Si } 0 < x < \delta \text{ entonces } x < \varepsilon^2$$

Esto último indica que se debe elegir en $\delta = \varepsilon^2$

Ejercicio 2: Pruebe que el $\lim_{x \to 0^+} \sqrt{x} = 0$

Demostración:

Dado $\varepsilon > 0$, se escoge $\delta = \varepsilon^2$.

Si $0 < x < \delta$ entonces,

$$\sqrt{x} < \sqrt{\delta} = \sqrt{\varepsilon^2} = \varepsilon$$

Así,

$$\left|\sqrt{x} - 0\right| < \varepsilon$$

Por lo tanto, por la definición de límite,

$$\lim_{x \to 0^+} \sqrt{x} = 0$$

Definición exacta de límites infinitos

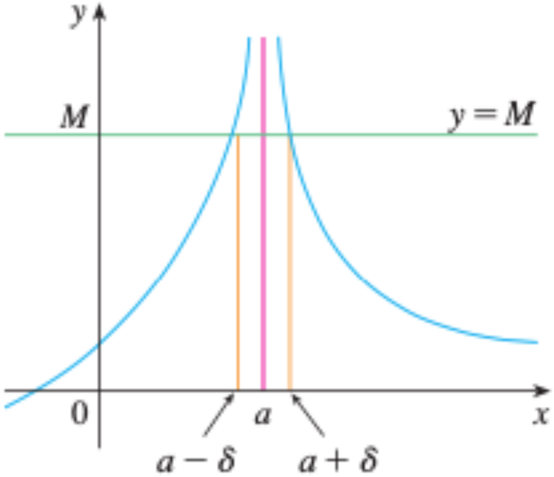
Sea f una función definida sobre algún intervalo abierto que contiene al número a, excepto posiblemente en a misma. Entonces

$$\lim_{x \to a} f(x) = \infty$$

significa que para todo número positivo M existe un número positivo δ tal que

Si $0 < |x - a| < \delta$ entonces $f(x) > M$

Ejercicio 3: Demostrar que $\lim_{x \to 0} \frac{1}{x^2} = \infty$



Ejercicio 3: Demostrar que $\lim_{x \to 0} \frac{1}{x^2} = \infty$

Sea M un número positivo dado. Queremos encontrar un número δ tal que

$$\text{Si } 0 < |x| < \delta \text{ entonces } \frac{1}{x^2} > M$$

Pero,

$$\frac{1}{x^2} > M \iff x^2 < \frac{1}{M} \iff |x| < \frac{1}{\sqrt{M}}$$

Si elegimos $\delta = \frac{1}{\sqrt{M}}$,

$$0 < |x| < \delta = \frac{1}{\sqrt{M}}, \text{ entonces } \frac{1}{x^2} > M$$

Esto muestra que $\frac{1}{x^2} \to \infty$ conforme $x \to 0$.

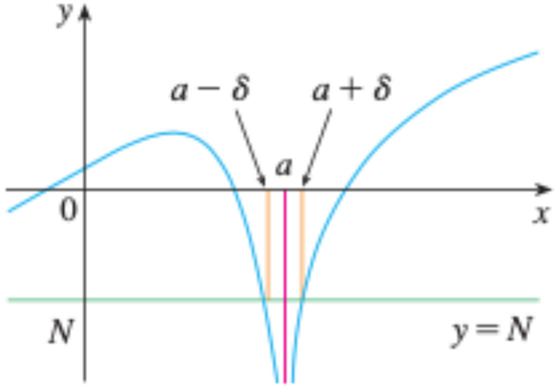
Definición exacta de límites infinitos

Sea f una función definida sobre algún intervalo abierto que contiene al número a, excepto posiblemente en a misma. Entonces

$$\lim_{x \to a} f(x) = -\infty$$

significa que para todo número negativo N existe un número positivo δ tal que

Si $0 < |x - a| < \delta$ entonces $f(x) < N$



Límites infinitos

Escribiremos

$$\lim_{x \to a} f(x) = \infty$$

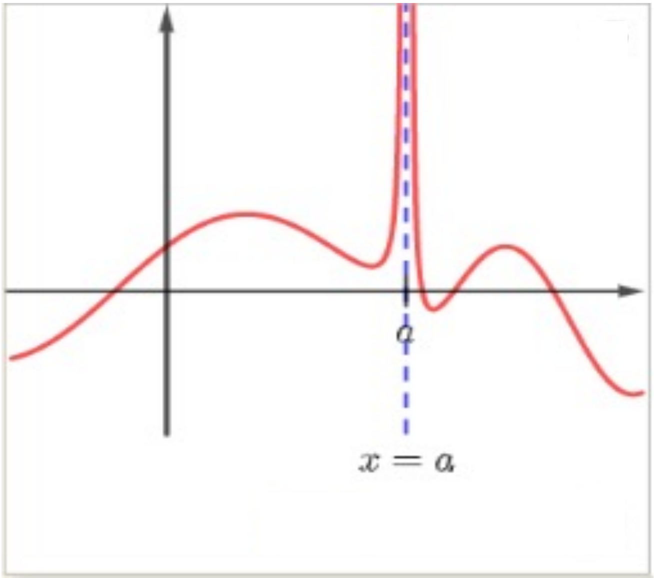
Si x se acerca al número a entonces $f(x)$ se hace arbitrariamente grande y positivo.

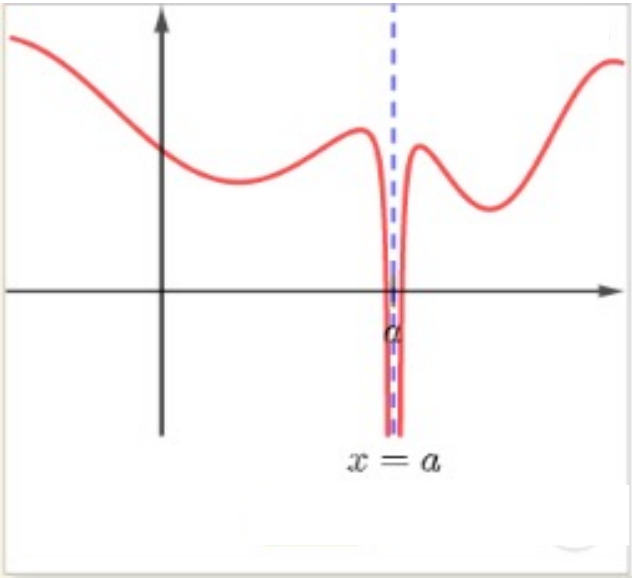
Escribiremos

$$\lim_{x \to a} f(x) = -\infty$$

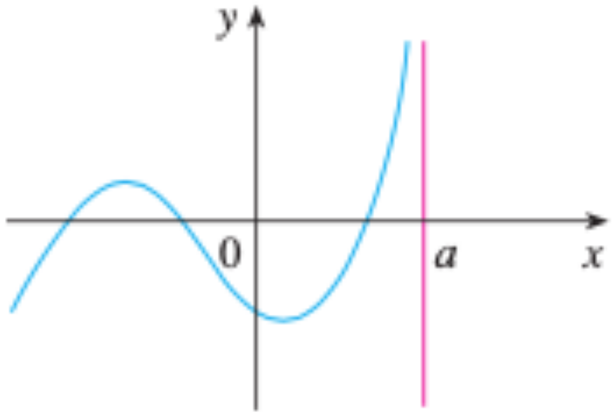
Si x se acerca al número a entonces $f(x)$ se hace arbitrariamente grande y negativo.

En cualquiera de estos dos casos diremos que **el límite no existe**.

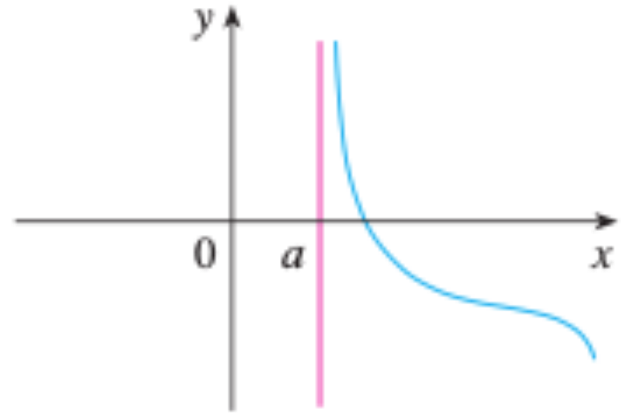




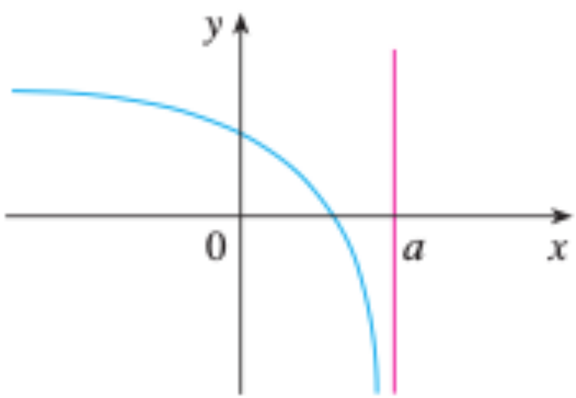
Límites laterales infinitos



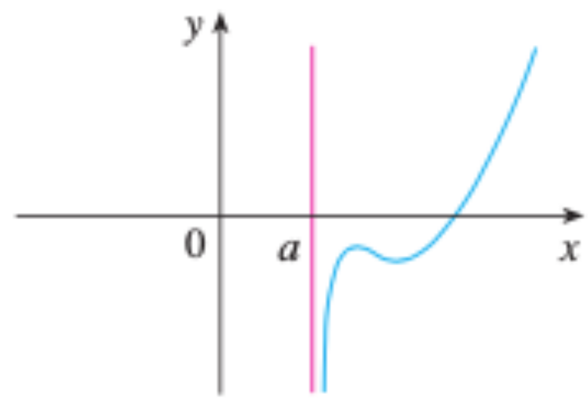
$$\lim_{x \to a^-} f(x) = \infty$$



$$\lim_{x \to a^+} f(x) = \infty$$



$$\lim_{x \to a^-} f(x) = -\infty$$



$$\lim_{x \to a^+} f(x) = -\infty$$

Asíntota vertical

La recta $x = a$ se llama **asíntota vertical** de la curva $y = f(x)$ si al menos una de las siguientes afirmaciones son verdaderas:

$$\lim_{x\to a} f(x) = \infty \qquad \lim_{x\to a^-} f(x) = \infty \qquad \lim_{x\to a^+} f(x) = \infty$$

$$\lim_{x\to a} f(x) = -\infty \qquad \lim_{x\to a^-} f(x) = -\infty \qquad \lim_{x\to a^+} f(x) = -\infty$$

Ejercicio 4: A partir de la gráfica de f, determine cada uno de los siguientes límites y las ecuaciones de las asíntotas verticales.

a) $\displaystyle\lim_{x\to -3^-} f(x)$

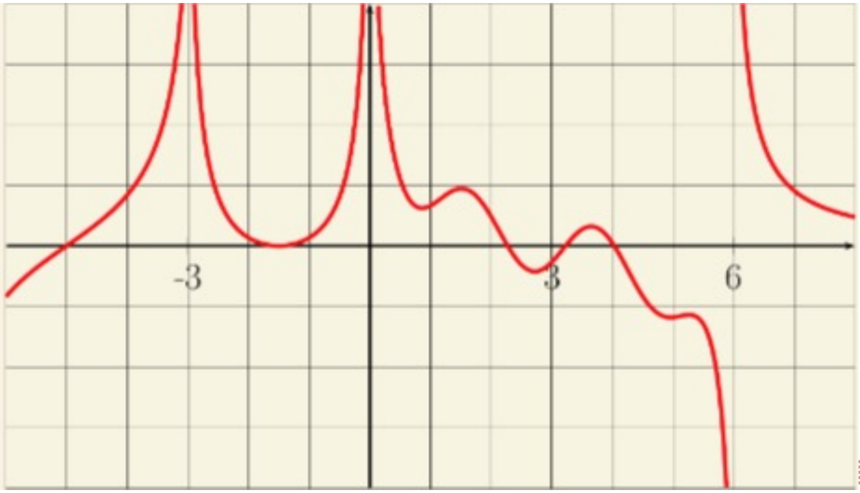
b) $\displaystyle\lim_{x\to -3^+} f(x)$

c) $\displaystyle\lim_{x\to -3} f(x)$

d) $\displaystyle\lim_{x\to 6} f(x)$

e) $\displaystyle\lim_{x\to 6^+} f(x)$

f) $\displaystyle\lim_{x\to 6} f(x)$



Asíntota vertical

Ejercicio 4: Encuentre las asíntotas verticales de

$$f(x) = \frac{x^2 - 4}{x^2 - 3x + 2}$$

Ejercicio 5: Encuentre las asíntotas verticales de

$$f(x) = \tan(x)$$

Conclusión

- Abordamos la definición exacta de límites y asíntota vertical

Libro guía

- Págs. 109-116.