MAT1610 - Clase 1

Introducción a Límites

Diego De la Vega

Facultad de Matemáticas
Pontificia Universidad Católica de Chile

06 de marzo del 2023

Objetivos

- Comprender, intuitivamente, el concepto de límites.
- Aprender sobre límites laterales.
- Abordar, inicialmente, el concepto de límites infinitos.

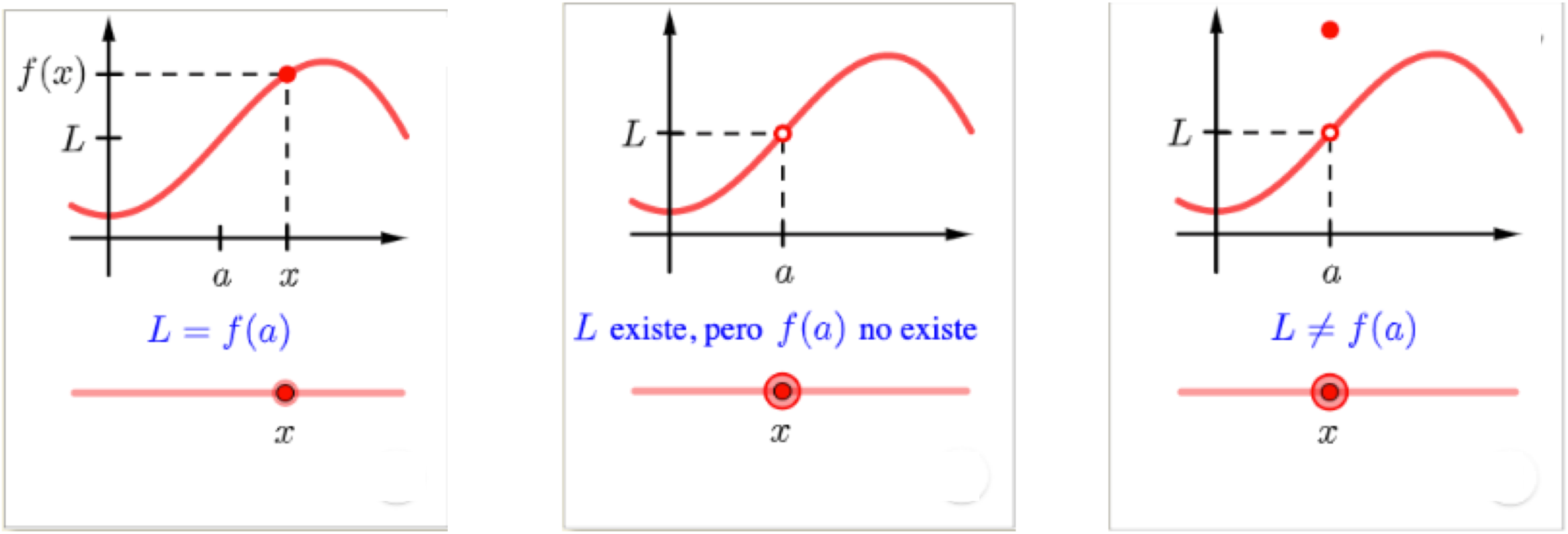
Límite de una función

Escribiremos

$$\lim_{x \to a} f(x) = L$$

Para decir que $f(x)$ se acerca a L cuando x se acerca al número a.

En tal caso diremos que el **límite existe** y es igual a L.



Ejemplo 1

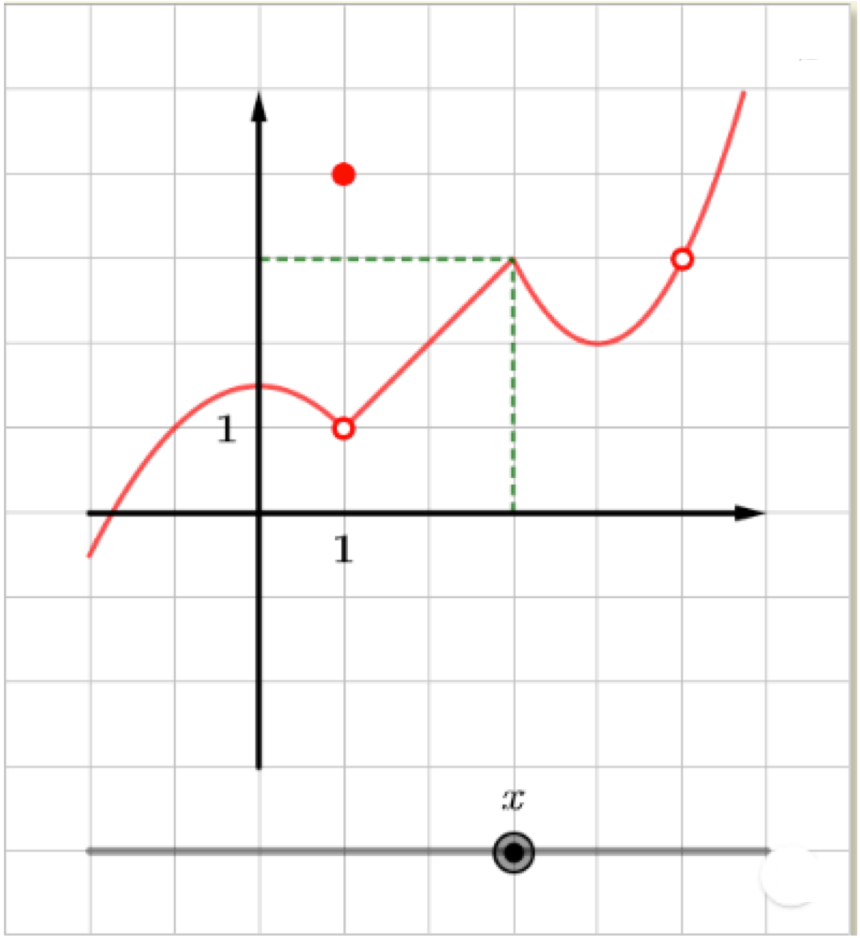
Decida si los siguientes valores existen o no. En caso de existir, deduzca su valor.

a) $f(1), f(2), f(5)$

b) $\lim_{x \to 1} f(x)$

c) $\lim_{x \to 2} f(x)$

d) $\lim_{x \to 5} f(x)$



Ejemplo 2

Considere la siguiente función

$$f(x) = \frac{x^2 - 1}{x - 1}$$

- Identifique el dominio de f
- Esboce a gráfica de f
- A partir de la gráfica de f, conjetura el valor del siguiente límite

$$\lim_{x \to 1} f(x)$$

Ejemplo 3

Considere la siguiente función

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{x}{\sqrt{|x|}} & , \quad x \neq 0 \\ 1 & , \quad x = 0 \end{cases}$$

- Identifique el dominio de f
- Determine una expresión simplificada para f cuando $x > 0$ como cuando $x < 0$.
- Esboce a gráfica de f
- A partir de la gráfica de f, conjetura el valor del siguiente límite

$$\lim_{x \to 0} f(x)$$

Ejemplo 4

Considere la siguiente función

$$f(x) = \begin{cases} (x+2)^2 + 1 & , \quad x \leq -1 \\ x+3 & , \quad x > -1 \end{cases}$$

- Identifique el dominio de f
- Esboce a gráfica de f
- A partir de la gráfica de f, conjetura el valor del siguiente límite

$$\lim_{x \to -1} f(x)$$

Límites laterales

Escribiremos

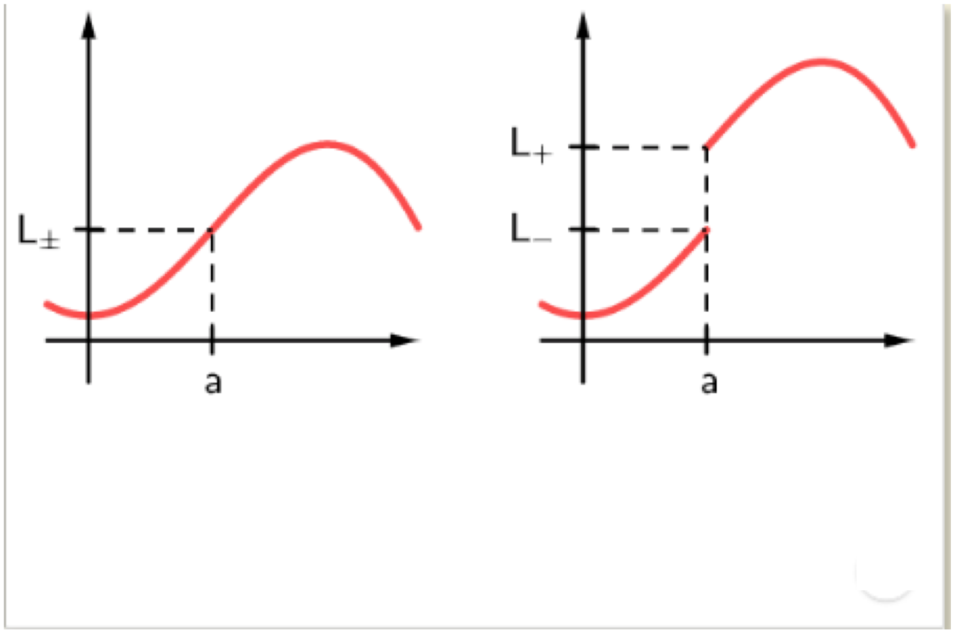
$$\lim_{x \to a^-} f(x) = L_-$$

Si x se acerca por la **izquierda** al número a cuando $f(x)$ se acerca al número L_-.

Escribiremos

$$\lim_{x \to a^+} f(x) = L_+$$

Si x se acerca por la **derecha** al número a cuando $f(x)$ se acerca al número L_+.



Teorema

$$\lim_{x \to a} f(x) = L \quad \leftrightarrow \lim_{x \to a^-} f(x) \ = \lim_{x \to a^+} f(x) \ = L$$

Corolario

Sean L_- y L_+ números reales tales que

$$\lim_{x \to a^-} f(x) = L_- \qquad \text{y} \qquad \lim_{x \to a^+} f(x) = L_+$$

Si $L_- \neq L_+$, entonces límite **no existe**.

Ejemplo 5

A continuación se muestra la gráfica de una función f. Determine, en caso se existir, los siguientes valores.

a) $\lim_{x \to 2^-} f(x)$

b) $\lim_{x \to 2^+} f(x)$

c) $\lim_{x \to 2} f(x)$

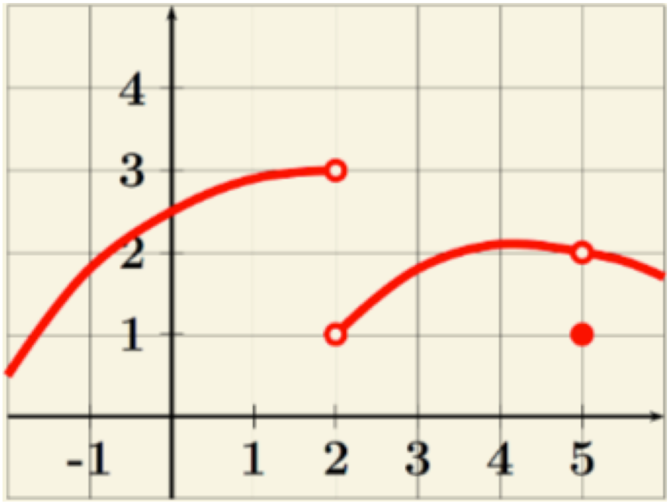
d) $f(2)$

e) $\lim_{x \to 5^-} f(x)$

f) $\lim_{x \to 5^+} f(x)$

g) $\lim_{x \to 5} f(x)$

h) $f(5)$

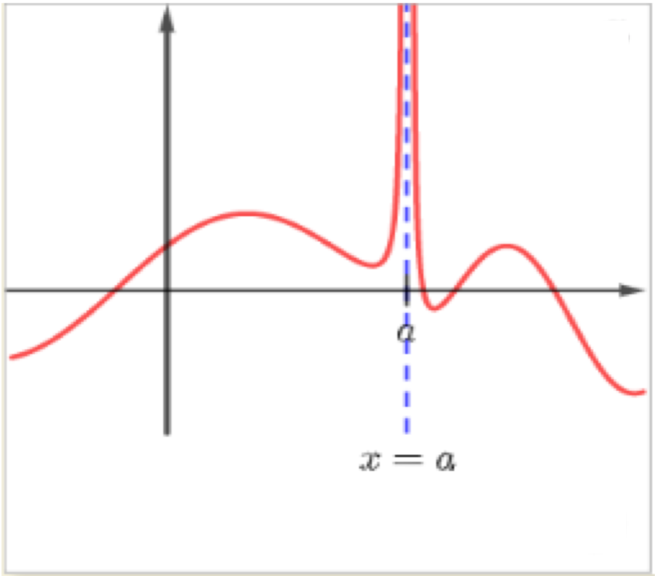


Límites infinitos

Sea f una función definida por ambos lados de a, excepto posiblemente en la misma a. Entonces

$$\lim_{x \to a} f(x) = \infty$$

significa que los valores de $f(x)$ pueden ser arbitrariamente grandes (tan grandes como queramos), tomando x suficientemente cerca de a, pero no igual a a.



Ejemplo:

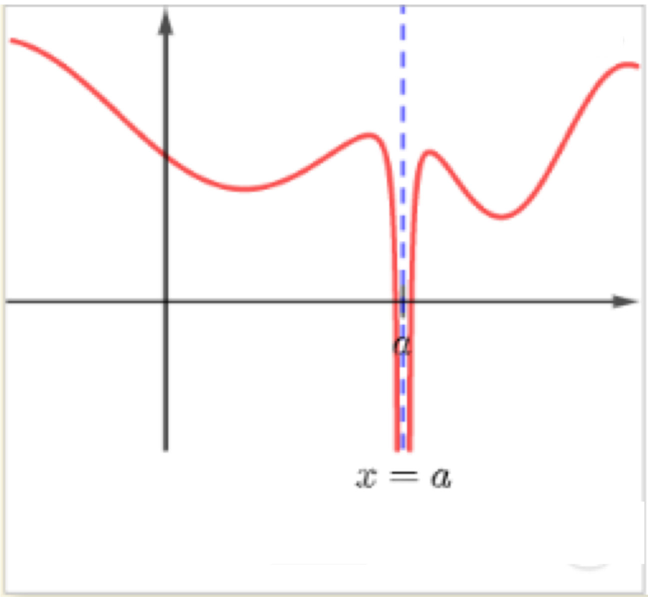
Encuentre $\lim_{x \to 0} \frac{1}{x^2}$ si existe.

Límites infinitos

Sea f una función definida por ambos lados de a, excepto posiblemente en la misma a. Entonces

$$\lim_{x \to a} f(x) = -\infty$$

significa que los valores de $f(x)$ pueden ser negativos arbitrariamente grandes (tan grandes como queramos), tomando x suficientemente cerca de a, pero no igual a a.



Conclusión

- Abordamos una intuición de límites.

Libro guía

- Págs. 87 – 95.