MAT1610 - Clase 8

Definición de derivada en un punto

Diego De la Vega

Facultad de Matemáticas
Pontificia Universidad Católica de Chile

22 de marzo del 2024

Objetivo

- Comprender concepto e interpretación de la derivada en un punto

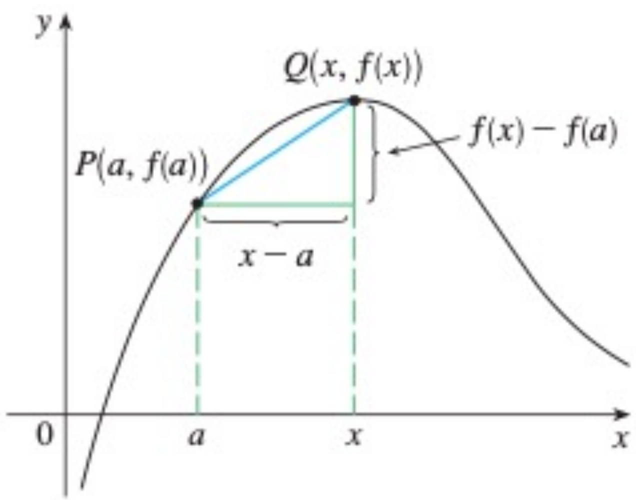
Recta tangente

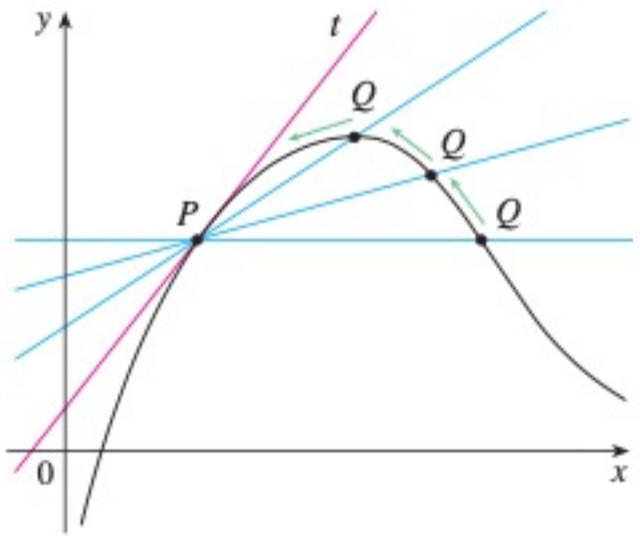
Se define la **recta tangente** a la gráfica de f en el punto $P_0(a, f(a))$ por la ecuación

$$y - f(a) = m\,(x - a)$$

Siempre y cuando exista

$$m = \lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$$





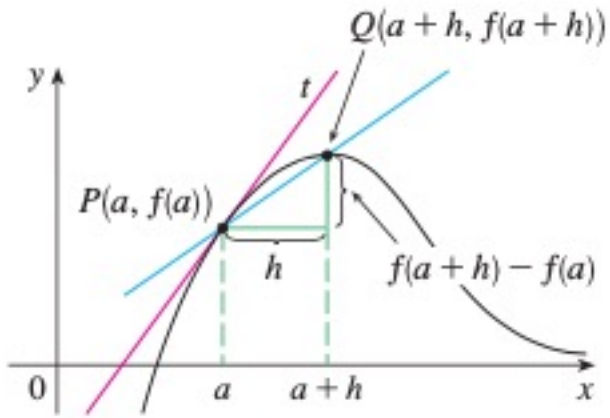
Recta tangente

Ejemplo: Encuentre la ecuación de la recta tangente a la parábola $y = x^2$, en el punto $P(1,1)$.

Recta tangente

Existe otra expresión para la pendiente de la recta tangente que a veces es más fácil de usar. Si $h = x - a$, en este caso $x = a + h$, entonces la pendiente de la recta secante *PQ* es

$$m = \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$$



Conforme x se aproxima a a, h se acerca a 0 y, por ende, la expresión de la pendiente de la recta tangente, se convierte en

$$m = \lim_{h \to 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$$

Recta tangente

Ejemplo: Encuentre la recta tangente a la hipérbola $f(x) = 3/x$, en el punto $P(3,1)$.

Derivada

La **derivada** de una función f en el número $x = a$, que denotaremos $f'(a)$, se define por

$$f'(a) = \lim_{h \to 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$$

si el límite existe. En tal caso diremos que la función es **derivable** en $x = a$.

NOTA: Si $f'(a)$ existe, una ecuación para la recta tangente en el punto $P_0(a, f(a))$ es:

$$y - f(a) = f'(a)\,(x - a)$$

Ejemplo: Encuentre la derivada de la función $f(x) = x^2 - 8x + 9$ en el número $x = a$

Razones de cambio

Suponga que y es una cantidad que depende de otra cantidad x. Así, y es una función de x y lo expresamos como $y = f(x)$. Si x cambia de x_1 a x_2, entonces el cambio en x (conocido como **incremento** de x) es:

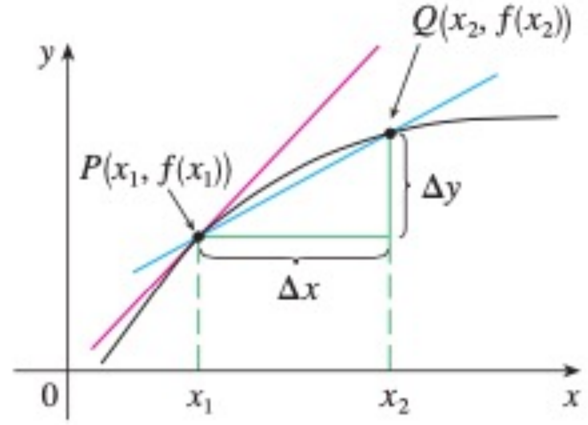
$$\Delta x = x_2 - x_1$$

El cambio en y corresponde a:

$$\Delta y = f(x_2) - f(x_1)$$

El cociente de diferencias:

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}$$



Se define como **razón de cambio promedio de y respecto a x** sobre el intervalo $[x_1, x_2]$ y puede interpretarse como la pendiente de la recta secante PQ

Razones de cambio

El límite de estas razones de cambio promedio se llama **razón de cambio (instantánea) de y respecto a x** en $x = x_1$, lo cual se interpreta como la pendiente de la recta tangente a la curva $y = f(x)$ en $P(x_1, f(x_1))$:

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{x_1 \to x_2} \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} = f'(x_1)$$

La derivada $f'(a)$ es la razón de cambio instantánea de $y = f(x)$ respecto de x cuando $x = a$

Aplicación - velocidades

- Considere la función posición $s = f(t)$
- Sea la velocidad promedio como

$$Velocidad = \frac{desplazamiento}{tiempo} = \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$$

(Considerando en el intervalo $t = a$ a $t = a + h$)

- Se considera la velocidad instantánea en el instante $t = a$ como

$$v(a) = \lim_{h \to 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$$

Conclusión

- Abordamos concepto e interpretación de la derivada en un punto

Libro guía

- Págs. 143-150.