



MAT1610 - Clase 5

Teorema de compresión y límites notables

Diego De la Vega

Facultad de Matemáticas
Pontificia Universidad Católica de Chile

15 de marzo del 2024

Objetivos

- Aprender el teorema de compresión
- Comprender el uso de cambios de variables
- Aprender límites notables

Teorema de compresión

Sean f, g, h funcionales tales que:

$$g(x) \leq f(x) \leq h(x)$$

para todo x cercano al punto $x = a$, salvo quizás, para $x = a$. Si,

$$\lim_{x \rightarrow a} g(x) = \lim_{x \rightarrow a} h(x) = L \quad \text{entonces} \quad \lim_{x \rightarrow a} f(x) = L$$

El Teorema del Sandwich es cierto para límites laterales

Teorema de compresión

Ejercicio: Demuestre que

$$\lim_{x \rightarrow 0} x^2 \sin\left(\frac{1}{x}\right) = 0$$

Ejercicio: Sea f una función tal que

$$x^2 - x + 2 \leq f(x) \leq \frac{x^2 - 1}{x - 1}$$

Para todo $x \in (0, 2) - \{1\}$. ¿Qué puede decir respecto de la existencia del $\lim_{x \rightarrow 1} f(x)$?

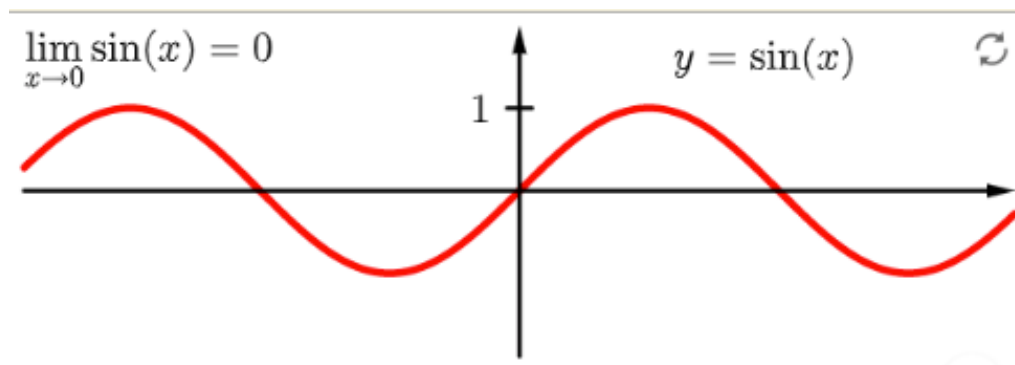
Límites notables

$$\lim_{x \rightarrow 0} \sin(x) = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(x)}{x}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \cos(x)$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{x}$$



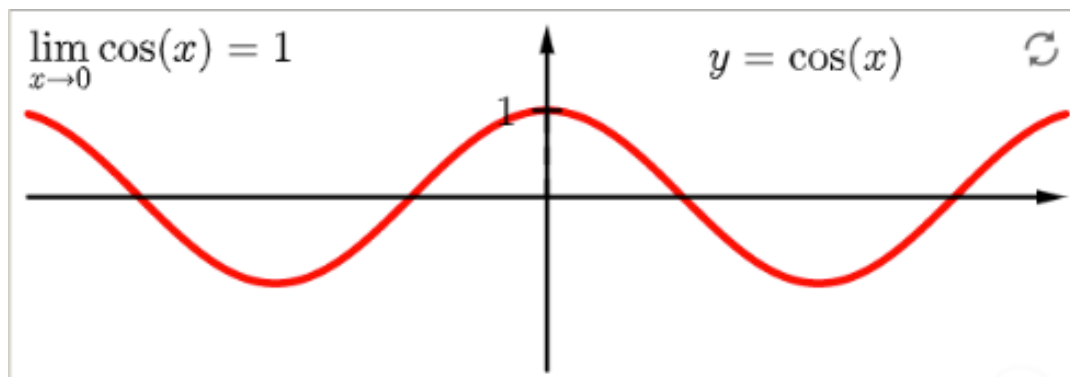
Límites notables

$$\lim_{x \rightarrow 0} \sin(x) = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(x)}{x}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \cos(x) = 1$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{x}$$



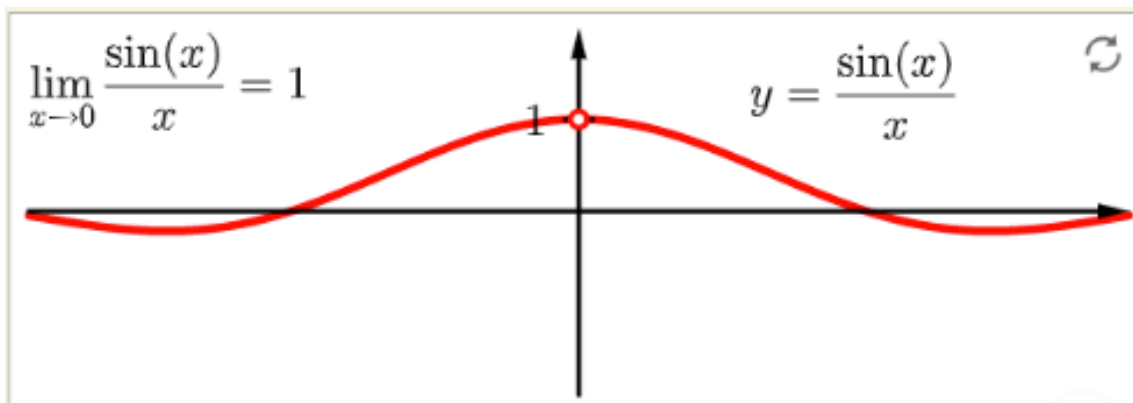
Límites notables

$$\lim_{x \rightarrow 0} \sin(x) = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(x)}{x} = 1$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \cos(x) = 1$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{x}$$



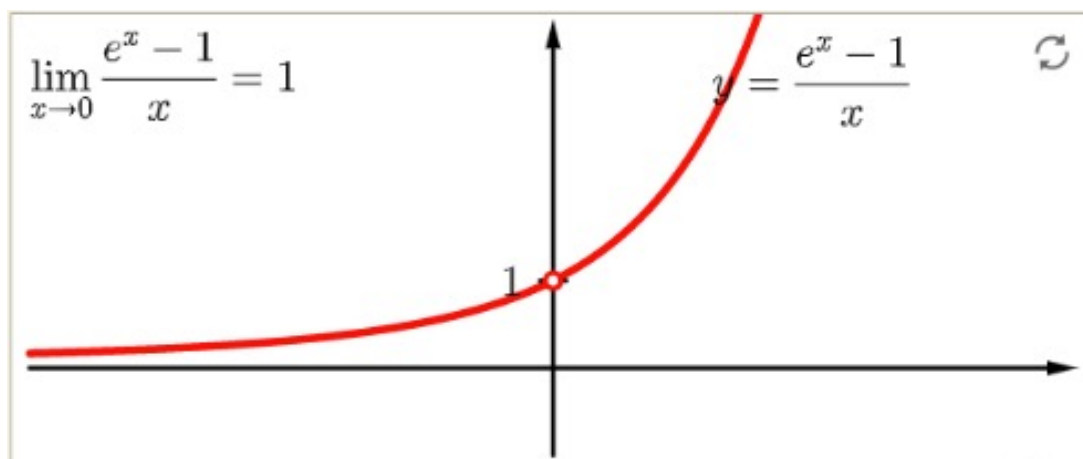
Límites notables

$$\lim_{x \rightarrow 0} \sin(x) = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(x)}{x} = 1$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \cos(x) = 1$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1$$



Límites notables

Ejercicio: Determine

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos(x) - 1}{x}$$

Ejercicio: Determine

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos(x)}{x^2}$$

Ejercicio: Determine

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(x) + x}{x \cos(x)}$$

Cambio de variable

Si $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = b$ y $\lim_{y \rightarrow b} g(y) = L$ existe, entonces

$$\lim_{x \rightarrow a} g(f(x)) = L$$

Ejercicio: Determine

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{2x} - 1}{x}$$

Ejercicio: Determine

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(5x)}{x}$$

Ejercicio: Determine

$$\lim_{y \rightarrow 1} \frac{\sqrt{y} - 1}{\sqrt[3]{y} - 1}$$

Otros

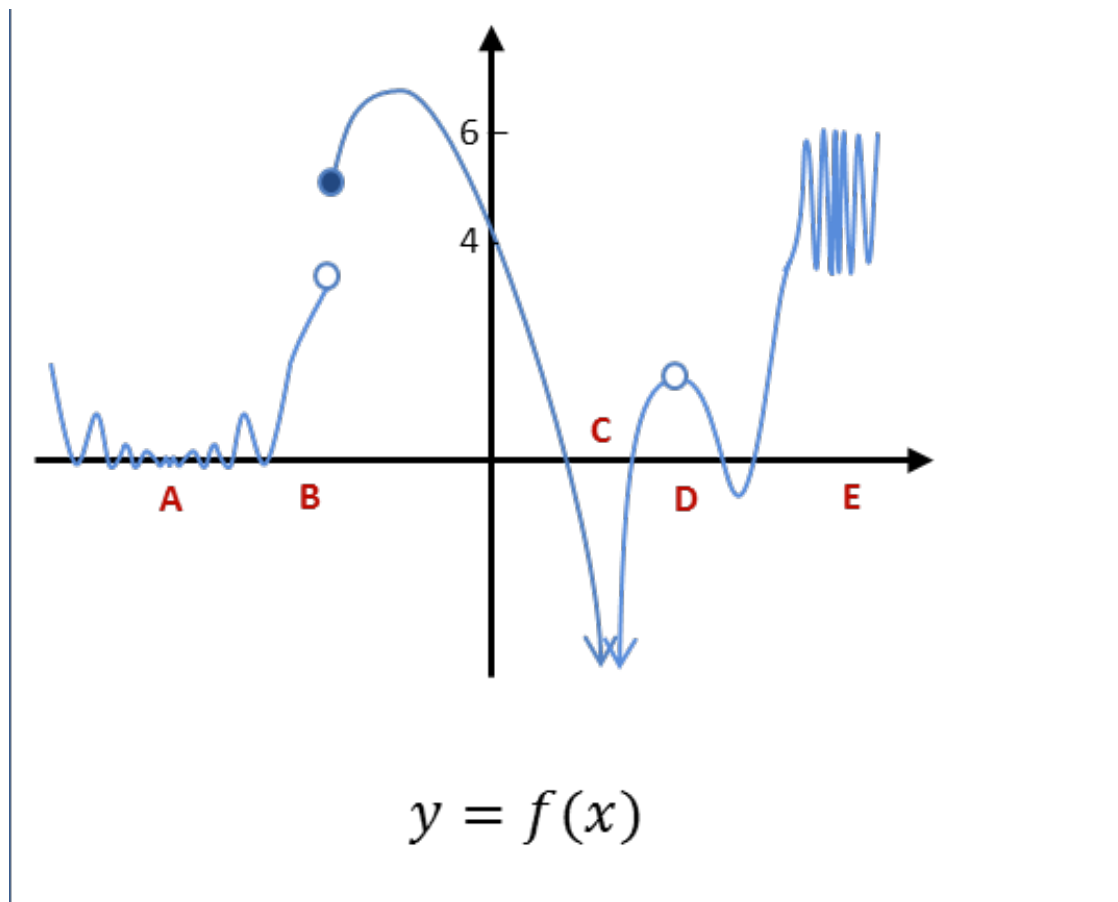
$$e = \lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x$$

Constante de Euler

Ejercicio: Determine

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^{2x-1}$$

Otros – Límites que no existen



Conclusión

- Abordamos teorema de compresión, teoremas notables y cambio de variable

Libro guía

- Págs. 105-106, 191-193 .