

MAT1610 - Clase 10

Derivabilidad y Continuidad, Derivadas de Orden Superior

Diego De la Vega

Facultad de Matemáticas Pontificia Universidad Católica de Chile

27 de marzo del 2024

Objetivo

- > Comprender la relación entre derivabilidad y continuidad.
- > Definir las derivadas de orden superior.

Definición

Una función f es derivable en x = a si f'(a) existe. Es **derivable sobre un** intervalo abierto (a, b), si es derivable en todo número del intervalo.

Teorema

Si f es derivable en x = a, entonces f es continua en x = a.

NOTA: El inverso de este teorema es falso, hay funciones continuas pero que no son derivables en un punto. Ej: f(x) = |x| en x = 0.

Ejemplo: Determine los valores los valores de a y b para que la función

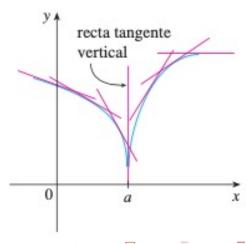
$$f(x) = \begin{cases} x^2 + 2x + 5 , \text{ si } x \le 2 \\ ax + b , \text{ si } x > 2 \end{cases}$$

Sea derivable en x = 2

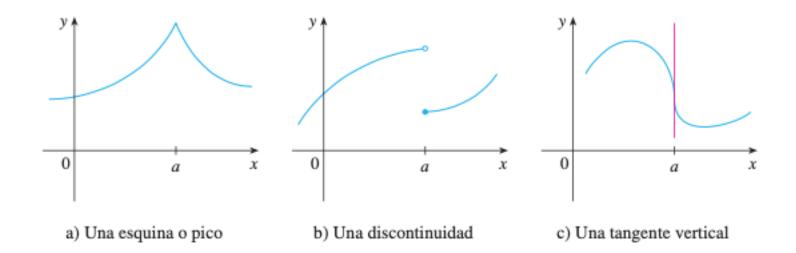
¿Cómo dejar de ser derivable una función?

- \triangleright Si la gráfica de una función f tiene "esquinas" o "picos", la gráfica de f no tiene recta tangente en esos puntos y f no es derivable allí.
- El teorema anterior señala otra forma en que una función no tiene derivada. En este se afirma que si f no es continua en x=a, entonces f no es derivable en x=a. Por ende, en cualquier discontinuidad (una discontinuidad de salto, por ejemplo), f no es derivable.
- Una tercera posibilidad es que la curva tenga una **recta tangente vertical** cuando x = a; es decir, f es continua en x = a y

$$\lim_{x \to a} |f'(x)| = \infty$$



¿Cómo dejar de ser derivable una función?



Derivadas superiores

- \triangleright Si f es una función derivable, entonces su derivada f también es una función, así que f puede tener una derivada de sí misma, señalada por (f')' = f''.
- Esta nueva función f'' se denomina **segunda derivada** de f porque es la derivada de la derivada de f.
- \triangleright Usando la notación de Leibniz, la segunda derivada de y = f(x) es

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{dy}{dx}\right) = \frac{d^2y}{dx^2}$$

- ▶ La tercera derivada f''' es la derivada de la segunda derivada: f''' = (f'')'
- Esta tercera derivada puede interpretarse como la pendiente de la curva. y = f''(x) o como la razón de cambio de f''(x).

Derivadas superiores

En general, la *n*-ésima derivada de f se denota mediante $f^{(n)}$ (excepto la primera, segunda y tercera derivada) y se obtiene derivando n veces a f. Si y = f(x), escribimos

$$y^{(n)} = f^{(n)}(x) = \frac{d^n y}{dx^n}$$

Ejemplo: Sea $f(x) = x^3 - x$, halle $f^{(3)}(x)$.

Conclusión

- > Vimos la relación entre derivabilidad y continuidad.
- > Definimos las derivadas de orden superior.

Libro guía

> Págs. 158-161.