MAT1203 secc 1 y 2
Clases 1-2
Sistemas lineales.

Universidad Católica de Chile
Facultad de Matemática

5 de marzo de 2024

Ecuación lineal.

Ecuación lineal.

Definición

Se llama ecuación lineal, a una ecuación de la forma

$$a_1x_1 + a_2x_2 + \cdots + a_nx_n = b$$

donde los ***coeficientes*** a_i *y el* ***término libre*** b *son números reales o complejos.*

Sistemas lineales

Ecuación lineal.

Definición

Se llama ecuación lineal, a una ecuación de la forma

$$a_1x_1 + a_2x_2 + \cdots + a_nx_n = b$$

donde los ***coeficientes*** a_i *y el* ***término libre*** b *son números reales o complejos.*

Ejemplos

Son ecuaciones lineales

Sistemas lineales

Ecuación lineal.

Definición

Se llama ecuación lineal, a una ecuación de la forma

$$a_1x_1 + a_2x_2 + \cdots + a_nx_n = b$$

donde los ***coeficientes*** a_i *y el* ***término libre*** b *son números reales o complejos.*

Ejemplos

Son ecuaciones lineales

1. $2x_1 + 3x_2 = 6$

2. $2x_1 + 5x_2 - x_3 + 7x_4 = 0$

3. $2x_1 + 5x_2 + x_4 - 2x_6 = 10$

Sistemas lineales

Ecuación lineal.

Definición

Se llama ecuación lineal, a una ecuación de la forma

$$a_1x_1 + a_2x_2 + \cdots + a_nx_n = b$$

donde los ***coeficientes*** a_i *y el* ***término libre*** b *son números reales o complejos.*

Ejemplos

Son ecuaciones lineales

1. $2x_1 + 3x_2 = 6$

2. $2x_1 + 5x_2 - x_3 + 7x_4 = 0$

3. $2x_1 + 5x_2 + x_4 - 2x_6 = 10$

Sistema lineal

Definición

*Se llama **sistema lineal**(o **sistema de ecuaciones lineales**) a una o más ecuaciones lieales, que se acostumbra a escribir de la forma*

Sistema lineal

Definición

Se llama ***sistema lineal****(o* ***sistema de ecuaciones lineales****) a una o más ecuaciones lieales, que se acostumbra a escribir de la forma*

$$\begin{array}{c} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \cdots \quad \cdots \quad \cdots \quad \cdots \quad \cdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = b_m \end{array}$$

y se dice que es un sistema lineal de m ecuaciones con n variables.

Ejemplo

4. Un sistema de 3 ecuaciones $m = 3$ con 4 variables $n = 4$ por ejemplo es:

$$\begin{array}{c} 2x_1 + 3x_2 - 4x_4 = 12 \\ -x_1 + x_2 + 2x_3 + 6x_4 = -5 \\ 5x_1 - 4x_3 + 2x_4 = 3 \end{array}$$

Solución de un sistema

Una solución de un sistema lineal es una lista de números $(s_1, s_2, \ldots, s_n)$ que **da validez a cada ecuación** del sistema cuando se utilizan los valores $s_1, s_2, \ldots, s_n$ en lugar de las variables $x_1, x_2, \ldots, x_n$ respectivamente.

Solución de un sistema

Una solución de un sistema lineal es una lista de números $(s_1, s_2, \ldots, s_n)$ que **da validez a cada ecuación** del sistema cuando se utilizan los valores $s_1, s_2, \ldots, s_n$ en lugar de las variables $x_1, x_2, \ldots, x_n$ respectivamente.
Por ejemplo $(1, 2, 0, -1)$ es una solución del sistema del ejemplo 4.

Solución de un sistema

Una solución de un sistema lineal es una lista de números $(s_1, s_2, \ldots, s_n)$ que **da validez a cada ecuación** del sistema cuando se utilizan los valores $s_1, s_2, \ldots, s_n$ en lugar de las variables $x_1, x_2, \ldots, x_n$ respectivamente.
Por ejemplo $(1, 2, 0, -1)$ es una solución del sistema del ejemplo 4.

Definición

El conjunto de todas las posibles soluciones de un sistema lineal, se llama ***conjunto solución*** *del sistema.*

Definición

Se dice que dos sistemas lineales son ***equivalentes*** *si y solo si tienen el mismo conjunto solución.*

Solución de un sistema

Una solución de un sistema lineal es una lista de números $(s_1, s_2, \ldots, s_n)$ que **da validez a cada ecuación** del sistema cuando se utilizan los valores $s_1, s_2, \ldots, s_n$ en lugar de las variables $x_1, x_2, \ldots, x_n$ respectivamente.
Por ejemplo $(1, 2, 0, -1)$ es una solución del sistema del ejemplo 4.

Definición

El conjunto de todas las posibles soluciones de un sistema lineal, se llama ***conjunto solución*** *del sistema.*

Definición

Se dice que dos sistemas lineales son ***equivalentes*** *si y solo si tienen el mismo conjunto solución.*

Ejemplo

5. Dados los sistemas:

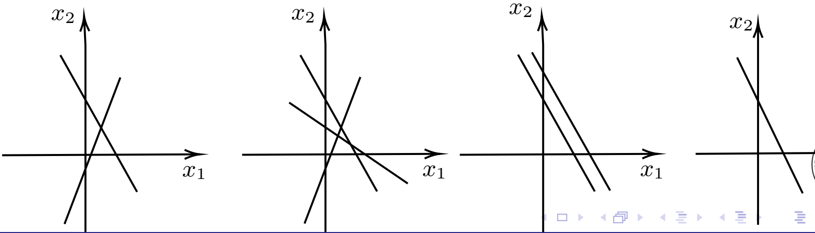
$a)\ \begin{array}{r} 2x_1 + x_2 = 4 \\ 3x_1 - x_2 = 1 \end{array}$ $\quad b)\ \begin{array}{r} 5x_1 - 3x_2 = -1 \\ x_1 + x_2 = 3 \end{array}$ $\quad c)\ 2x_1 + x_2 = 4$

Es claro que los sistemas a) y b) son equivalentes pues tienen el mismo conjunto solución, que es $\{1, 2\}$, en tanto que el sistema dado en c) no es equivalente a los sistemas dados en a) y en b) si bien el conjunto $\{1, 2\}$ es solución de c), no asi **las** soluciones del sistema dado en c) no son soluciones de los sistemas a) o b).

Ejemplo

6. Considere los sistemas y sus gráficos:

$a)\ \begin{array}{c} 2x_1 + x_2 = 4 \\ 3x_1 - x_2 = 1 \end{array}$ $\quad b)\ \begin{array}{c} 2x_1 + x_2 = 4 \\ 3x_1 - x_2 = 1 \\ 2x_1 + 3x_2 = 6 \end{array}$ $\quad c)\ \begin{array}{c} 2x_1 + x_2 = 4 \\ x_1 + 0{,}5x_2 = 3 \end{array}$ $\quad d)\ 2x_1 + x_2 = 4$



Es claro que en el caso a) la solución del sistema es única, pues la intersección se produce en un solo punto, en el caso b) no hay solución pues no existe un punto o puntos que satisfagan simultaneamente las tres ecuaciones, para el caso c) la intersección es vacía por tanto el sistema no tiene solución y para el caso d) hay muchos puntos(infinitos) que son solución del sistema.

Es claro que en el caso a) la solución del sistema es única, pues la intersección se produce en un solo punto, en el caso b) no hay solución pues no existe un punto o puntos que satisfagan simultaneamente las tres ecuaciones, para el caso c) la intersección es vacía por tanto el sistema no tiene solución y para el caso d) hay muchos puntos(infinitos) que son solución del sistema.

En general los sistemas lineales de m ecuaciones con n variables tienen solución o bien no tienen solución, en caso de que tengan solución ésta puede ser única o bien más de una solución(infinitas), cualquiera que sea el sistema.

Es claro que en el caso a) la solución del sistema es única, pues la intersección se produce en un solo punto, en el caso b) no hay solución pues no existe un punto o puntos que satisfagan simultaneamente las tres ecuaciones, para el caso c) la intersección es vacía por tanto el sistema no tiene solución y para el caso d) hay muchos puntos(infinitos) que son solución del sistema.

En general los sistemas lineales de m ecuaciones con n variables tienen solución o bien no tienen solución, en caso de que tengan solución ésta puede ser única o bien más de una solución(infinitas), cualquiera que sea el sistema.

Definición

Se dice que un sistema lineal es ***consistente*** *si tiene una solución o un número infinito de soluciones.*

Es claro que en el caso a) la solución del sistema es única, pues la intersección se produce en un solo punto, en el caso b) no hay solución pues no existe un punto o puntos que satisfagan simultaneamente las tres ecuaciones, para el caso c) la intersección es vacía por tanto el sistema no tiene solución y para el caso d) hay muchos puntos(infinitos) que son solución del sistema.

En general los sistemas lineales de m ecuaciones con n variables tienen solución o bien no tienen solución, en caso de que tengan solución ésta puede ser única o bien más de una solución(infinitas), cualquiera que sea el sistema.

Definición

Se dice que un sistema lineal es ***consistente*** *si tiene una solución o un número infinito de soluciones.*

Se dice que un sistema lineal es ***inconsistente*** *cuando no tiene ninguna solución.*

Matriz

Un sistema lineal cualquiera en forma natural se puede representar por un arreglo rectangular llamado **matriz**.

Matriz

Un sistema lineal cualquiera en forma natural se puede representar por un arreglo rectangular llamado **matriz**.

Ejemplo

Dado el sistema

Matriz

Un sistema lineal cualquiera en forma natural se puede representar por un arreglo rectangular llamado **matriz**.

Ejemplo

Dado el sistema

$$
\begin{gathered}
2x_1 + 3x_2 - 4x_4 = 12 \\
-x_1 + x_2 + 2x_3 + 6x_4 = -5 \\
5x_1 - 4x_3 + 2x_4 = 3
\end{gathered}
$$

La matriz

$$
\begin{bmatrix}
2 & 3 & 0 & -4 \\
-1 & 1 & 2 & 6 \\
5 & 0 & -4 & 2
\end{bmatrix}
$$

se llama **matriz de coeficientes**(o **Matriz coeficiente**) del sistema.

Matriz aumentada

La matriz

$$\begin{bmatrix} 2 & 3 & 0 & -4 & 12 \\ -1 & 1 & 2 & 6 & -5 \\ 5 & 0 & -4 & 2 & 3 \end{bmatrix}$$

se llama **matriz aumentada**(o **matriz ampliada**) del sistema.

Matriz aumentada

La matriz

$$\begin{bmatrix} 2 & 3 & 0 & -4 & 12 \\ -1 & 1 & 2 & 6 & -5 \\ 5 & 0 & -4 & 2 & 3 \end{bmatrix}$$

se llama **matriz aumentada**(o **matriz ampliada**) del sistema.

El **tamaño**(u **orden**)de una matriz indica su número de filas y columnas. Note que la matriz de coeficientes es de tamaño 3×4 se lee "3 por 4", en tanto que la matriz aumentada en este caso es de 3×5.

Matriz aumentada

La matriz

$$\begin{bmatrix} 2 & 3 & 0 & -4 & 12 \\ -1 & 1 & 2 & 6 & -5 \\ 5 & 0 & -4 & 2 & 3 \end{bmatrix}$$

se llama **matriz aumentada**(o **matriz ampliada**) del sistema.

El **tamaño**(u **orden**)de una matriz indica su número de filas y columnas. Note que la matriz de coeficientes es de tamaño 3×4 se lee "3 por 4", en tanto que la matriz aumentada en este caso es de 3×5.

Definición

Se llama matriz de $m \times n$, con m y n enteros positivos, a un arreglo rectangular de números de m filas y n columnas.

Matriz aumentada

La matriz

$$\begin{bmatrix} 2 & 3 & 0 & -4 & 12 \\ -1 & 1 & 2 & 6 & -5 \\ 5 & 0 & -4 & 2 & 3 \end{bmatrix}$$

se llama **matriz aumentada**(o **matriz ampliada**) del sistema.

El **tamaño**(u **orden**)de una matriz indica su número de filas y columnas. Note que la matriz de coeficientes es de tamaño 3×4 se lee "3 por 4", en tanto que la matriz aumentada en este caso es de 3×5.

Definición

Se llama matriz de $m \times n$, con m y n enteros positivos, a un arreglo rectangular de números de m filas y n columnas.

Operaciones elementales fila

Definición

1. Remplazo(Sumar)Sustituir una fila por la suma de si misma y un múltiplo de otra fila.

Operaciones elementales fila

Definición

1. Remplazo(Sumar)Sustituir una fila por la suma de si misma y un múltiplo de otra fila.

$$F_i + kF_j \to F_i, \quad k \in \mathbb{R}$$

2. Intercambio(Permutar)Intercambiar dos filas.

Operaciones elementales fila

Definición

1. Remplazo(Sumar)Sustituir una fila por la suma de si misma y un múltiplo de otra fila.

$$F_i + kF_j \to F_i, \quad k \in \mathbb{R}$$

2. Intercambio(Permutar)Intercambiar dos filas.

$$F_i \updownarrow F_j$$

3. Multiplicar(Escalamiento) Multiplicar todos los elementos de una fila por una constante diferente de cero.

Operaciones elementales fila

Definición

1. Remplazo(Sumar)Sustituir una fila por la suma de si misma y un múltiplo de otra fila.

$$F_i + kF_j \to F_i, \quad k \in \mathbb{R}$$

2. Intercambio(Permutar)Intercambiar dos filas.

$$F_i \updownarrow F_j$$

3. Multiplicar(Escalamiento) Multiplicar todos los elementos de una fila por una constante diferente de cero.

$$kF_i, \quad k \neq 0$$

Las operaciones elementales fila pueden aplicarse a cualquier matriz, no solo a las matrices aumentadas de un sistema lineal.

Operaciones elementales fila

Definición

1. Remplazo(Sumar)Sustituir una fila por la suma de si misma y un múltiplo de otra fila.

$$F_i + kF_j \to F_i, \quad k \in \mathbb{R}$$

2. Intercambio(Permutar)Intercambiar dos filas.

$$F_i \updownarrow F_j$$

3. Multiplicar(Escalamiento) Multiplicar todos los elementos de una fila por una constante diferente de cero.

$$kF_i, \quad k \neq 0$$

Las operaciones elementales fila pueden aplicarse a cualquier matriz, no solo a las matrices aumentadas de un sistema lineal.

Definición

Se dice que dos matrices son equivalentes por filas($A \sim B$)si existe una sucesión de operaciones elementales fila que transforme una matriz en otra.

Operaciones elementales fila

Definición

1. Remplazo(Sumar)Sustituir una fila por la suma de si misma y un múltiplo de otra fila.

$$F_i + kF_j \to F_i, \quad k \in \mathbb{R}$$

2. Intercambio(Permutar)Intercambiar dos filas.

$$F_i \updownarrow F_j$$

3. Multiplicar(Escalamiento) Multiplicar todos los elementos de una fila por una constante diferente de cero.

$$kF_i, \quad k \neq 0$$

Las operaciones elementales fila pueden aplicarse a cualquier matriz, no solo a las matrices aumentadas de un sistema lineal.

Definición

Se dice que dos matrices son equivalentes por filas($A \sim B$)si existe una sucesión de operaciones elementales fila que transforme una matriz en otra.

Notar que las operaciones elementales fila son **reversibles**.

Notar que las operaciones elementales fila son **reversibles**.

Observaciónes.

1. Una sucesión finita de operaciones elementales fila, aplicadas sobre la matriz ampliada de un sistema lineal, no alteran la consistencia o inconsistencia del sistema.
2. Si las matrices aumentadas de dos sistemas son equivalentes por filas, entonces los dos sistemas tienen el mismo conjunto solución.

Notar que las operaciones elementales fila son **reversibles**.

Observaciónes.

1. Una sucesión finita de operaciones elementales fila, aplicadas sobre la matriz ampliada de un sistema lineal, no alteran la consistencia o inconsistencia del sistema.
2. Si las matrices aumentadas de dos sistemas son equivalentes por filas, entonces los dos sistemas tienen el mismo conjunto solución.

3. Con respecto a la solución de un sistema lineal.

Un sistema lineal puede tener solución o bien no tener solución.
En caso de tener solución se dice que el sistema es consistente.
En un sistema consistente, la solución puede ser única es decir una sola solución y en caso de no ser única entonces el sistema tiene infinitas soluciones.

Notar que las operaciones elementales fila son **reversibles**.

Observaciónes.

1. Una sucesión finita de operaciones elementales fila, aplicadas sobre la matriz ampliada de un sistema lineal, no alteran la consistencia o inconsistencia del sistema.

2. Si las matrices aumentadas de dos sistemas son equivalentes por filas, entonces los dos sistemas tienen el mismo conjunto solución.

3. Con respecto a la solución de un sistema lineal.

Un sistema lineal puede tener solución o bien no tener solución.
En caso de tener solución se dice que el sistema es consistente.
En un sistema consistente, la solución puede ser única es decir una sola solución y en caso de no ser única entonces el sistema tiene infinitas soluciones.

Ejemplos

Determine si los siguientes sistemas son consistentes

Notar que las operaciones elementales fila son **reversibles**.

Observaciónes.

1. Una sucesión finita de operaciones elementales fila, aplicadas sobre la matriz ampliada de un sistema lineal, no alteran la consistencia o inconsistencia del sistema.
2. Si las matrices aumentadas de dos sistemas son equivalentes por filas, entonces los dos sistemas tienen el mismo conjunto solución.

3. Con respecto a la solución de un sistema lineal.

Un sistema lineal puede tener solución o bien no tener solución.
En caso de tener solución se dice que el sistema es consistente.
En un sistema consistente, la solución puede ser única es decir una sola solución y en caso de no ser única entonces el sistema tiene infinitas soluciones.

Ejemplos

Determine si los siguientes sistemas son consistentes

$$a)\ \begin{array}{r} 2x_1+3x_2-x_3=6 \\ x_1+2x_2-2x_3=4 \\ 3x_1-x_2+5x_3=-12 \end{array} \quad b)\ \begin{array}{r} 2x_1+3x_2-x_3=6 \\ x_1+2x_2-2x_3=4 \\ 3x_1+5x_2-3x_3=-2 \end{array} \quad c)\ \begin{array}{r} 2x_1+3x_2-x_3=6 \\ x_1+2x_2-2x_3=4 \\ x_2-3x_3=2 \end{array}$$

Forma escalonada(o escalonada por filas).

Forma escalonada(o escalonada por filas).

Una matriz está en forma escalonada si tiene las siguientes tres propiedades:

Forma escalonada(o escalonada por filas).

Una matriz está en forma escalonada si tiene las siguientes tres propiedades:

1. Todas las filas diferentes de cero están por arriba de las filas que solo contienen ceros.

Forma escalonada(o escalonada por filas).

Una matriz está en forma escalonada si tiene las siguientes tres propiedades:

1. Todas las filas diferentes de cero están por arriba de las filas que solo contienen ceros.
2. Cada entrada principal de una fila está en una columna a la derecha de la entrada principal de la fila superior.

Forma escalonada(o escalonada por filas).

Una matriz está en forma escalonada si tiene las siguientes tres propiedades:

1. Todas las filas diferentes de cero están por arriba de las filas que solo contienen ceros.
2. Cada entrada principal de una fila está en una columna a la derecha de la entrada principal de la fila superior.
3. En una columna todas las entradas debajo de la entrada principal son ceros.

Forma escalonada(o escalonada por filas).

Una matriz está en forma escalonada si tiene las siguientes tres propiedades:

1. Todas las filas diferentes de cero están por arriba de las filas que solo contienen ceros.
2. Cada entrada principal de una fila está en una columna a la derecha de la entrada principal de la fila superior.
3. En una columna todas las entradas debajo de la entrada principal son ceros.

Forma escalonada reducida(o escalonada reducida por filas).

Formas: Escalonada y Escalonada reducida

Forma escalonada(o escalonada por filas).

Una matriz está en forma escalonada si tiene las siguientes tres propiedades:

1. Todas las filas diferentes de cero están por arriba de las filas que solo contienen ceros.
2. Cada entrada principal de una fila está en una columna a la derecha de la entrada principal de la fila superior.
3. En una columna todas las entradas debajo de la entrada principal son ceros.

Forma escalonada reducida(o escalonada reducida por filas).

Además de las tres condiciones anteriores se debe tener

Formas: Escalonada y Escalonada reducida

Forma escalonada(o escalonada por filas).

Una matriz está en forma escalonada si tiene las siguientes tres propiedades:

1. Todas las filas diferentes de cero están por arriba de las filas que solo contienen ceros.
2. Cada entrada principal de una fila está en una columna a la derecha de la entrada principal de la fila superior.
3. En una columna todas las entradas debajo de la entrada principal son ceros.

Forma escalonada reducida(o escalonada reducida por filas).

Además de las tres condiciones anteriores se debe tener

1. La entrada principal en cada fila diferente de cero es 1.

Forma escalonada(o escalonada por filas).

Una matriz está en forma escalonada si tiene las siguientes tres propiedades:

1. Todas las filas diferentes de cero están por arriba de las filas que solo contienen ceros.
2. Cada entrada principal de una fila está en una columna a la derecha de la entrada principal de la fila superior.
3. En una columna todas las entradas debajo de la entrada principal son ceros.

Forma escalonada reducida(o escalonada reducida por filas).

Además de las tres condiciones anteriores se debe tener

1. La entrada principal en cada fila diferente de cero es 1.
2. Cada entrada principal 1 es la única entrada distinta de cero en su columna.

Formas: Escalonada y Escalonada reducida

Forma escalonada(o escalonada por filas).

Una matriz está en forma escalonada si tiene las siguientes tres propiedades:

1. Todas las filas diferentes de cero están por arriba de las filas que solo contienen ceros.
2. Cada entrada principal de una fila está en una columna a la derecha de la entrada principal de la fila superior.
3. En una columna todas las entradas debajo de la entrada principal son ceros.

Forma escalonada reducida(o escalonada reducida por filas).

Además de las tres condiciones anteriores se debe tener

1. La entrada principal en cada fila diferente de cero es 1.
2. Cada entrada principal 1 es la única entrada distinta de cero en su columna.

Ejemplo

Las matrices:

$$\begin{bmatrix} 4 & -2 & 3 & 0 \\ 0 & 2 & -1 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 5 \end{bmatrix} \quad y \quad \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 10 \\ 0 & 1 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 15 \end{bmatrix}$$

están en forma escalonada, la segunda además está en forma escalonada reducida.

Ejemplo

Las matrices:

$$\begin{bmatrix} 4 & -2 & 3 & 0 \\ 0 & 2 & -1 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 5 \end{bmatrix} \quad y \quad \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 10 \\ 0 & 1 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 15 \end{bmatrix}$$

están en forma escalonada, la segunda además está en forma escalonada reducida.

Ejemplo

Las matrices:

$$\begin{bmatrix} 4 & -2 & 3 & 0 \\ 0 & 2 & -1 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad y \quad \begin{bmatrix} 0 & 2 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 10 & 4 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

están en forma escalonada.

Ejemplo

Las matrices:

$$\begin{bmatrix} 4 & -2 & 3 & 0 \\ 0 & 2 & -1 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 5 \end{bmatrix} \quad y \quad \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 10 \\ 0 & 1 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 15 \end{bmatrix}$$

están en forma escalonada, la segunda además está en forma escalonada reducida.

Ejemplo

Las matrices:

$$\begin{bmatrix} 4 & -2 & 3 & 0 \\ 0 & 2 & -1 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad y \quad \begin{bmatrix} 0 & 2 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 10 & 4 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

están en forma escalonada.

Propiedad.

Propiedad.

Cada matriz es equivalente por filas a una y solo a una matriz escalonada reducida.

Propiedad.

Cada matriz es equivalente por filas a una y solo a una matriz escalonada reducida.

Definición

Una ***posición pivote*** *en una matriz A es una ubicación en A que corresponde a un 1 principal en la forma escalonada reducida de A.*

Propiedad.

Cada matriz es equivalente por filas a una y solo a una matriz escalonada reducida.

Definición

*Una **posición pivote** en una matriz A es una ubicación en A que corresponde a un 1 principal en la forma escalonada reducida de A. Una **columna pivote** es una columna de A que contiene una posición pivote.*

Ejemplo

$$\begin{bmatrix} 4 & -2 & 13 & 0 & 10 \\ 1 & 0 & 3 & 0 & 3 \\ 0 & -4 & 3 & 5 & 1 \\ -1 & -4 & 0 & 5 & -2 \end{bmatrix} F_1 \updownarrow F_2 \sim$$

$$\begin{bmatrix} \boxed{1} & 0 & 3 & 0 & 3 \\ 4 & -2 & 13 & 0 & 10 \\ 0 & -4 & 3 & 5 & 1 \\ -1 & -4 & 0 & 5 & -2 \end{bmatrix} \begin{matrix} F_2 - 4F_1 \to F_2 \\ F_4 + F_1 \to F_4 \end{matrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 & 0 & 3 \\ 0 & \boxed{-2} & 1 & 0 & -2 \\ 0 & -4 & 3 & 5 & 1 \\ 0 & -4 & 3 & 5 & 1 \end{bmatrix} \begin{matrix} F_3 - 2F_2 \to F_3 \\ F_4 - F_3 \to F_4 \end{matrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 & 0 & 3 \\ 0 & -2 & 1 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & \boxed{1} & 5 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{matrix} F_1 - 3F_3 \to F_1 \\ F_2 - F_3 \to F_2 \end{matrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -15 & -12 \\ 0 & \boxed{-2} & 0 & -5 & -7 \\ 0 & 0 & 1 & 5 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} -\frac{1}{2}F_2 \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -15 & -12 \\ 0 & 1 & 0 & 5/2 & 7/2 \\ 0 & 0 & 1 & 5 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Solución de un sistema lineal.

Solución de un sistema lineal.

El algoritmo de reducción de filas conduce directamente a una descrpción explícita del conjunto solución de un sistema lineal, cuando se aplica a la matriz aumentada del sistema.

Solución de un sistema lineal.

El algoritmo de reducción de filas conduce directamente a una descrpción explícita del conjunto solución de un sistema lineal, cuando se aplica a la matriz aumentada del sistema.

Teorema

Teorema de existencia y unicidad Un sistema lineal cs consistente si y solo si la columna más a la derecha de la matriz aumentada no es una columna pivote, es decir, si y solo si una forma escalonada de la matriz aumentada no tiene filas del tipo

$$\begin{bmatrix} 0 & \cdots & 0 & b \end{bmatrix} \text{ con } b \text{ diferente de cero}$$

Si un sistema lineal es consistente, entonces el conjunto solución contiene: **i**. *una única solución, cuando no existen variables libres, o ii. una infinidad de soluciones, cuando hay al menos una variable libre.*

De la Solución de un sistema.

De la Solución de un sistema.

En los siguientes 3 ejemplos, sobre la matriz ampliada de cada sistema se efectuaron la reducción por filas o escalonamiento, luego para cada uno de ellos expresaremos su posible solución.

De la Solución de un sistema.
En los siguientes 3 ejemplos, sobre la matriz ampliada de cada sistema se efectuaron la reducción por filas o escalonamiento, luego para cada uno de ellos expresaremos su posible solución.

Ejemplo

$$a)\ \begin{bmatrix} 4 & -2 & 3 & 0 \\ 0 & 2 & -1 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \qquad b)\ \begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \qquad c)\ \begin{bmatrix} 0 & 2 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 10 & 4 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

La solución en el caso $a)$ es $x_3 = 2$ y de la fila 2 se tiene $2x_2 - x_3 = 4$ entonces $x_2 = 3$ y de la fila 1 se obtiene $4x_1 - 2x_2 + 3x_3 = 0$ de donde remplazando los valores de x_2 y x_3 resulta $x_1 = 0$

De la Solución de un sistema.

En los siguientes 3 ejemplos, sobre la matriz ampliada de cada sistema se efectuaron la reducción por filas o escalonamiento, luego para cada uno de ellos expresaremos su posible solución.

Ejemplo

$a)\ \begin{bmatrix} 4 & -2 & 3 & 0 \\ 0 & 2 & -1 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad b)\ \begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad c)\ \begin{bmatrix} 0 & 2 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 10 & 4 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

La solución en el caso $a)$ es $x_3 = 2$ y de la fila 2 se tiene $2x_2 - x_3 = 4$ entonces $x_2 = 3$ y de la fila 1 se obtiene $4x_1 - 2x_2 + 3x_3 = 0$ de donde remplazando los valores de x_2 y x_3 resulta $x_1 = 0$ con lo que la solución es:

$$x_1 = 0,\ x_2 = 3,\ x_3 = 2$$

Para el caso $b)$ se tiene

De la Solución de un sistema.
En los siguientes 3 ejemplos, sobre la matriz ampliada de cada sistema se efectuaron la reducción por filas o escalonamiento, luego para cada uno de ellos expresaremos su posible solución.

Ejemplo

$$a) \begin{bmatrix} 4 & -2 & 3 & 0 \\ 0 & 2 & -1 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad b) \begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad c) \begin{bmatrix} 0 & 2 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 10 & 4 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

La solución en el caso $a)$ es $x_3 = 2$ y de la fila 2 se tiene $2x_2 - x_3 = 4$ entonces $x_2 = 3$ y de la fila 1 se obtiene $4x_1 - 2x_2 + 3x_3 = 0$ de donde remplazando los valores de x_2 y x_3 resulta $x_1 = 0$ con lo que la solución es:

$$x_1 = 0,\ x_2 = 3,\ x_3 = 2$$

Para el caso $b)$ se tiene

$x_1 + 3x_3 = 0$ y $x_2 - x_3 = 4$, entonces x_3 se considera una variable libre(o parámetro), por tanto la solución resulta:

$$x_1 = -3x_3, \quad x_2 = 4 + x_3, \quad x_3 \in \mathbb{R}$$

Para el caso c) el sistema es inconsistente, pues la cuarta ecuación muestra una falsedad $(0 = 1)$?.

$$x_1 = -3x_3, \quad x_2 = 4 + x_3, \quad x_3 \in \mathbb{R}$$

Para el caso c) el sistema es inconsistente, pues la cuarta ecuación muestra una falsedad $(0 = 1)$?.

Ejemplo

Resolver el sistema

$$x_1 = -3x_3, \quad x_2 = 4 + x_3, \quad x_3 \in \mathbb{R}$$

Para el caso c) el sistema es inconsistente, pues la cuarta ecuación muestra una falsedad $(0 = 1)$?.

Ejemplo

Resolver el sistema

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 + 2x_3 &= 6 \\ 2x_1 + 3x_2 &= 4 \\ 3x_1 + 16x_3 &= 8 \end{aligned}$$

Solución.

$$(1) \quad \begin{aligned} x_1 + x_2 + 2x_3 &= 6 \\ 2x_1 + 3x_2 &= 4 \\ 3x_1 + 16x_3 &= 8 \end{aligned} \quad \leftrightarrow \quad \begin{bmatrix} \boxed{1} & 1 & 2 & 6 \\ 2 & 3 & 0 & 4 \\ 3 & 0 & 16 & 8 \end{bmatrix}$$

$$(2) \quad \begin{aligned} x_1 + x_2 + 2x_3 &= 6 \\ x_2 - 4x_3 &= -8 \\ -3x_2 + 10x_3 &= -10 \end{aligned} \quad \leftrightarrow \quad \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & 6 \\ 0 & \boxed{1} & -4 & -8 \\ 0 & -3 & 10 & -10 \end{bmatrix}$$

Ejemplo

$$(3) \quad \begin{array}{rl} x_1 \quad + 6x_3 &= 14 \\ x_2 - 4x_3 &= -8 \\ -2x_3 &= -34 \end{array} \quad \leftrightarrow \quad \begin{bmatrix} 1 & 0 & 6 & 14 \\ 0 & 1 & -4 & -8 \\ 0 & 0 & \boxed{-2} & -34 \end{bmatrix}$$

$$(4) \quad \begin{array}{rl} x_1 \qquad\qquad &= -88 \\ x_2 \qquad &= 60 \\ x_3 &= 17 \end{array} \quad \leftrightarrow \quad \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -88 \\ 0 & 1 & 0 & 60 \\ 0 & 0 & 1 & 17 \end{bmatrix}$$

Notemos que los sistemas: (2), (3) y (4) son equivalentes con el sistema dado (1), pues no ha cambiado la solución de ninguno, dado que se sabe que las operaciones empleadas para la eliminación de las variables no alteran la solución del sistema, el más simple es el sistema lineal dado en (4), donde cada ecuación precisa finalmente el valor de las variables, por tanto la solución del sistema dado es justamente ésta solución.

Ejemplo

$$
(3) \quad \begin{aligned} x_1 \quad + 6x_3 &= 14 \\ x_2 - 4x_3 &= -8 \\ -2x_3 &= -34 \end{aligned} \quad \leftrightarrow \quad \begin{bmatrix} 1 & 0 & 6 & 14 \\ 0 & 1 & -4 & -8 \\ 0 & 0 & \boxed{-2} & -34 \end{bmatrix}
$$

$$
(4) \quad \begin{aligned} x_1 \qquad\qquad &= -88 \\ x_2 \qquad &= 60 \\ x_3 &= 17 \end{aligned} \quad \leftrightarrow \quad \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -88 \\ 0 & 1 & 0 & 60 \\ 0 & 0 & 1 & 17 \end{bmatrix}
$$

Notemos que los sistemas: $(2), (3)$ y (4) son equivalentes con el sistema dado (1), pues no ha cambiado la solución de ninguno, dado que se sabe que las operaciones empleadas para la eliminación de las variables no alteran la solución del sistema, el más simple es el sistema lineal dado en (4), donde cada ecuación precisa finalmente el valor de las variables, por tanto la solución del sistema dado es justamente ésta solución.
Hay que notar que la solución

Ejemplo

$$(3)\quad \begin{aligned} x_1 \quad + 6x_3 &= 14 \\ x_2 - 4x_3 &= -8 \\ -2x_3 &= -34 \end{aligned} \quad \leftrightarrow \quad \begin{bmatrix} 1 & 0 & 6 & 14 \\ 0 & 1 & -4 & -8 \\ 0 & 0 & \boxed{-2} & -34 \end{bmatrix}$$

$$(4)\quad \begin{aligned} x_1 \qquad\qquad &= -88 \\ x_2 \qquad &= 60 \\ x_3 &= 17 \end{aligned} \quad \leftrightarrow \quad \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -88 \\ 0 & 1 & 0 & 60 \\ 0 & 0 & 1 & 17 \end{bmatrix}$$

Notemos que los sistemas: $(2), (3)$ y (4) son equivalentes con el sistema dado (1), pues no ha cambiado la solución de ninguno, dado que se sabe que las operaciones empleadas para la eliminación de las variables no alteran la solución del sistema, el más simple es el sistema lineal dado en (4), donde cada ecuación precisa finalmente el valor de las variables, por tanto la solución del sistema dado es justamente ésta solución.
Hay que notar que la solución

$$x_1 = -88, \quad x_2 = 60 \quad x_3 = 17$$

es solución de los sistemas: $(1), (2), (3)$ y (4).

Ejemplo

$$(3) \quad \begin{aligned} x_1 \quad + 6x_3 &= 14 \\ x_2 - 4x_3 &= -8 \\ -2x_3 &= -34 \end{aligned} \quad \leftrightarrow \quad \begin{bmatrix} 1 & 0 & 6 & 14 \\ 0 & 1 & -4 & -8 \\ 0 & 0 & \boxed{-2} & -34 \end{bmatrix}$$

$$(4) \quad \begin{aligned} x_1 \qquad\qquad &= -88 \\ x_2 \qquad &= 60 \\ x_3 &= 17 \end{aligned} \quad \leftrightarrow \quad \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -88 \\ 0 & 1 & 0 & 60 \\ 0 & 0 & 1 & 17 \end{bmatrix}$$

Notemos que los sistemas: $(2), (3)$ y (4) son equivalentes con el sistema dado (1), pues no ha cambiado la solución de ninguno, dado que se sabe que las operaciones empleadas para la eliminación de las variables no alteran la solución del sistema, el más simple es el sistema lineal dado en (4), donde cada ecuación precisa finalmente el valor de las variables, por tanto la solución del sistema dado es justamente ésta solución.
Hay que notar que la solución

$$x_1 = -88, \quad x_2 = 60 \quad x_3 = 17$$

es solución de los sistemas: $(1), (2), (3)$ y (4).

Ejercicio

Determine los valores de a, b y c de modo que el sistema dado sea consistente o inconsistente. En caso de ser consistente, diga si tiene solución única o infinitas soluciones.

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 + x_3 &= 1 \\ ax_1 + x_2 + x_3 &= 1 \\ x_1 + x_2 + bx_3 &= 1 \\ x_1 + x_2 + \frac{1}{2}(1+b)x_3 &= \frac{1}{2}c + 1 \end{aligned}$$

Escribiendo la matriz aumentada del sistema, se tiene

$$\begin{bmatrix} \boxed{1} & 1 & 1 & 1 \\ a & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & b & 1 \\ 1 & 1 & \frac{1}{2}(1+b) & \frac{1}{2}c+1 \end{bmatrix}$$

$$\sim \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1-a & 1-a & 1-a \\ 0 & 0 & \boxed{\text{b-1}} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2}(b-1) & \frac{1}{2}c \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1-a & 1-a & 1-a \\ 0 & 0 & b-1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2}c \end{bmatrix}$$

Luego, podemos ver que la consistencia del sistema depende de los valores de c.

$$\sim \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1-a & 1-a & 1-a \\ 0 & 0 & \boxed{\text{b-1}} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2}(b-1) & \frac{1}{2}c \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1-a & 1-a & 1-a \\ 0 & 0 & b-1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2}c \end{bmatrix}$$

Luego, podemos ver que la consistencia del sistema depende de los valores de c.

El sistema será inconsistente cuando $c \neq 0$, $a, b \in \mathbb{R}$.

$$\sim \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1-a & 1-a & 1-a \\ 0 & 0 & \boxed{\text{b-1}} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2}(b-1) & \frac{1}{2}c \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1-a & 1-a & 1-a \\ 0 & 0 & b-1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2}c \end{bmatrix}$$

Luego, podemos ver que la consistencia del sistema depende de los valores de c.

El sistema será inconsistente cuando $c \neq 0$, $a, b \in \mathbb{R}$.
En tanto, que para $c = 0$, $a, b \in \mathbb{R}$ el sistema es consistente.

$$\sim \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1-a & 1-a & 1-a \\ 0 & 0 & \boxed{\text{b-1}} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2}(b-1) & \frac{1}{2}c \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1-a & 1-a & 1-a \\ 0 & 0 & b-1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2}c \end{bmatrix}$$

Luego, podemos ver que la consistencia del sistema depende de los valores de c.

El sistema será inconsistente cuando $c \neq 0$, $a, b \in \mathbb{R}$.
En tanto, que para $c = 0$, $a, b \in \mathbb{R}$ el sistema es consistente.

Ahora, considerando $c = 0$:

$$\sim \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1-a & 1-a & 1-a \\ 0 & 0 & \boxed{\text{b-1}} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2}(b-1) & \frac{1}{2}c \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1-a & 1-a & 1-a \\ 0 & 0 & b-1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2}c \end{bmatrix}$$

Luego, podemos ver que la consistencia del sistema depende de los valores de c.

El sistema será inconsistente cuando $c \neq 0$, $a, b \in \mathbb{R}$.
En tanto, que para $c = 0$, $a, b \in \mathbb{R}$ el sistema es consistente.

Ahora, considerando $c = 0$:

Si, $b = 1$ y $a \neq 1$ o $b \neq 1$ y $a = 1$, el sistema tiene infinitas soluciones , con 1 variable libre.(dos pivotes)

$$\sim \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1-a & 1-a & 1-a \\ 0 & 0 & \boxed{\text{b-1}} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2}(b-1) & \frac{1}{2}c \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1-a & 1-a & 1-a \\ 0 & 0 & b-1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2}c \end{bmatrix}$$

Luego, podemos ver que la consistencia del sistema depende de los valores de c.

El sistema será inconsistente cuando $c \neq 0$, $a, b \in \mathbb{R}$.
En tanto, que para $c = 0$, $a, b \in \mathbb{R}$ el sistema es consistente.

Ahora, considerando $c = 0$:

Si, $b = 1$ y $a \neq 1$ o $b \neq 1$ y $a = 1$, el sistema tiene infinitas soluciones , con 1 variable libre.(dos pivotes)
Si, $a = b = 1$ el sistema tiene también infinitas soluciones, pero con 2 variables libres.(un pivote)

$$\sim \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1-a & 1-a & 1-a \\ 0 & 0 & \boxed{\text{b-1}} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2}(b-1) & \frac{1}{2}c \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1-a & 1-a & 1-a \\ 0 & 0 & b-1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2}c \end{bmatrix}$$

Luego, podemos ver que la consistencia del sistema depende de los valores de c.

El sistema será inconsistente cuando $c \neq 0$, $a, b \in \mathbb{R}$.
En tanto, que para $c = 0$, $a, b \in \mathbb{R}$ el sistema es consistente.

Ahora, considerando $c = 0$:

Si, $b = 1$ y $a \neq 1$ o $b \neq 1$ y $a = 1$, el sistema tiene infinitas soluciones , con 1 variable libre.(dos pivotes)
Si, $a = b = 1$ el sistema tiene también infinitas soluciones, pero con 2 variables libres.(un pivote)
Finalmente, si $a \neq 1$ y $b \neq 1$ el sistema tendrá solución única.(tres pivotes).

$$\sim \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1-a & 1-a & 1-a \\ 0 & 0 & \boxed{\text{b-1}} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2}(b-1) & \frac{1}{2}c \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1-a & 1-a & 1-a \\ 0 & 0 & b-1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2}c \end{bmatrix}$$

Luego, podemos ver que la consistencia del sistema depende de los valores de c.

El sistema será inconsistente cuando $c \neq 0$, $a, b \in \mathbb{R}$.
En tanto, que para $c = 0$, $a, b \in \mathbb{R}$ el sistema es consistente.

Ahora, considerando $c = 0$:

Si, $b = 1$ y $a \neq 1$ o $b \neq 1$ y $a = 1$, el sistema tiene infinitas soluciones , con 1 variable libre.(dos pivotes)
Si, $a = b = 1$ el sistema tiene también infinitas soluciones, pero con 2 variables libres.(un pivote)
Finalmente, si $a \neq 1$ y $b \neq 1$ el sistema tendrá solución única.(tres pivotes).

Ejercicios

Determine los valores de a y b de modo que el sistema dado sea consistente o inconsistente. En caso de ser consistente, diga si tiene solución única o infinitas soluciones.

Ejercicios

Determine los valores de a y b de modo que el sistema dado sea consistente o inconsistente. En caso de ser consistente, diga si tiene solución única o infinitas soluciones.

1.

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 + ax_3 &= 1 \\ x_1 + ax_2 + x_3 &= b \\ ax_1 + x_2 + x_3 &= 2b - 1 \\ x_1 + (2a-1)x_2 + (2-a)x_3 &= 2b - 1 \end{aligned}$$

2.

$$\begin{aligned} -x_1 + ax_2 + x_4 &= 1 \\ x_2 + x_3 + x_4 &= 1 \\ ax_1 + x_2 + ax_4 &= 0 \\ x_1 + (1-a)x_2 + 2x_3 + 3x_4 &= b \end{aligned}$$