MAT1610 - Clase 4

Los límites al infinito

Diego De la Vega

Facultad de Matemáticas
Pontificia Universidad Católica de Chile

13 de marzo del 2024

Objetivos

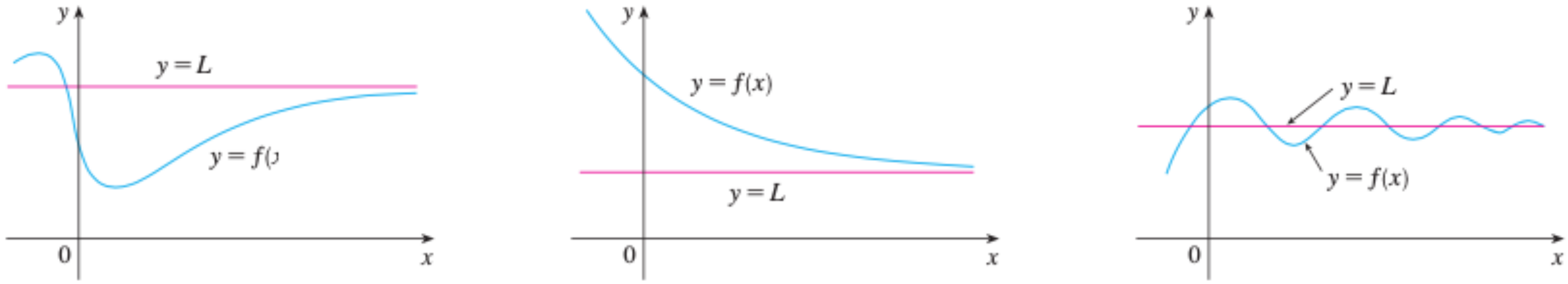
- Aprender límites al infinito
- Aprender sobre asíntotas horizontales

Límites al infinito

Sea f una función definida sobre algún intervalo (a, ∞). Entonces,

$$\lim_{x \to \infty} f(x) = L$$

Significa que los valores de $f(x)$ pueden aproximarse arbitrariamente a L tanto como desee, eligiendo a x suficientemente grande.



Límites al infinito

Sea f una función definida sobre algún intervalo $(-\infty, a)$. Entonces,

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = L$$

Significa que los valores de $f(x)$ pueden aproximarse arbitrariamente a L tanto como desee, eligiendo a x *sea negativa y* suficientemente grande en magnitud

Ejercicio: Calcule los siguientes límites:

1) $\displaystyle \lim_{x \to \infty} \frac{x^2 - 1}{x^2 + 1}$

2) $\displaystyle \lim_{x \to -\infty} \frac{x^2 - 1}{x^2 + 1}$

Asíntotas horizontales

La recta $y = L$ se llama **asíntota horizontal** de la curva $y = f(x)$ si

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = L \qquad \text{ó} \qquad \lim_{x\to\infty} f(x) = L$$

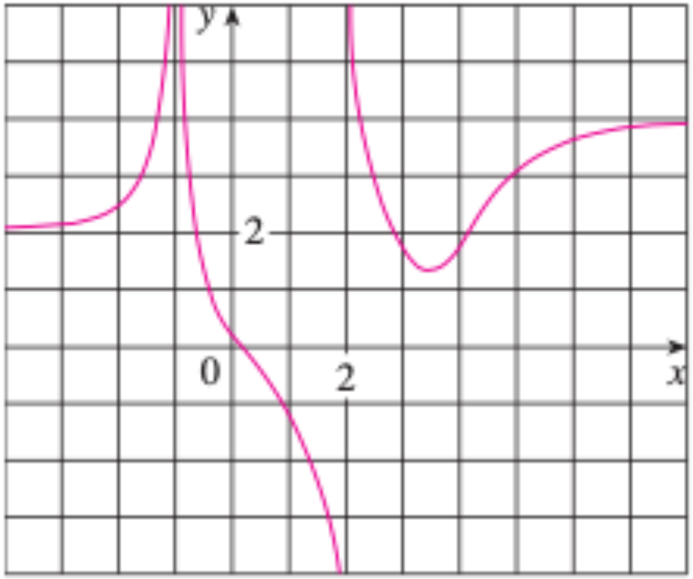
Ejemplo: La recta $y = 1$ es asíntota horizontal de la función $f(x) = \frac{x^2-1}{x^2+1}$, dado que:

$$\lim_{x\to\infty} \frac{x^2-1}{x^2+1} = 1$$

Ejercicio: Determine la(s) asíntota(s) horizontales(es) de $f(x) = \arctan(x)$

Asíntotas

Ejercicio: Determine las asíntotas de la función cuya gráfica es la siguiente:



Asíntotas

Teorema: Si $r > 0$ es un número racional, entonces

$$\lim_{x\to\infty} \frac{1}{x^r} = 0$$

Si $r > 0$ es un número racional tal que x^r está definida por toda x, entonces

$$\lim_{x\to-\infty} \frac{1}{x^r} = 0$$

Ejercicio: Determine las asíntotas horizontales de $f(x) = \frac{1}{x}$

Ejercicios

Ejercicio 1: Determine

$$\lim_{x\to\infty} \frac{3x^2 - x - 2}{5x^2 + 4x + 1}$$

Ejercicio 2: Encuentre la asíntotas horizontales y verticales de la función

$$f(x) = \frac{\sqrt{2x^2+1}}{3x-5}$$

Ejercicio 3: Determine

$$\lim_{x\to\infty} \left(\sqrt{x^2+1} - x\right)$$

Ejercicio 4: Determine

$$\lim_{x\to 2^+} arctan\left(\frac{1}{x-2}\right)$$

Ejercicios

Ejercicio 5: Determine

$$\lim_{x \to -\infty} e^{x}$$

Ejercicio 6: Determine

$$\lim_{x \to 0^{-}} e^{1/x}$$

Ejercicio 7: Determine

$$\lim_{x \to \infty} e^{1/x}$$

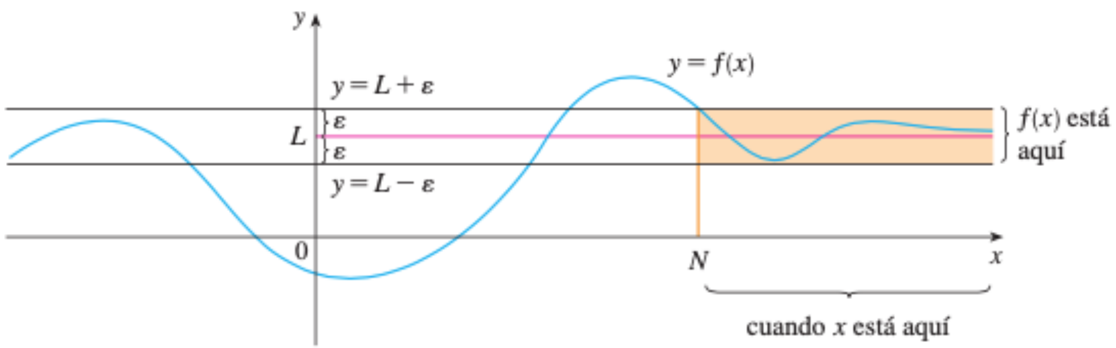
Límites al infinito – Definición exacta

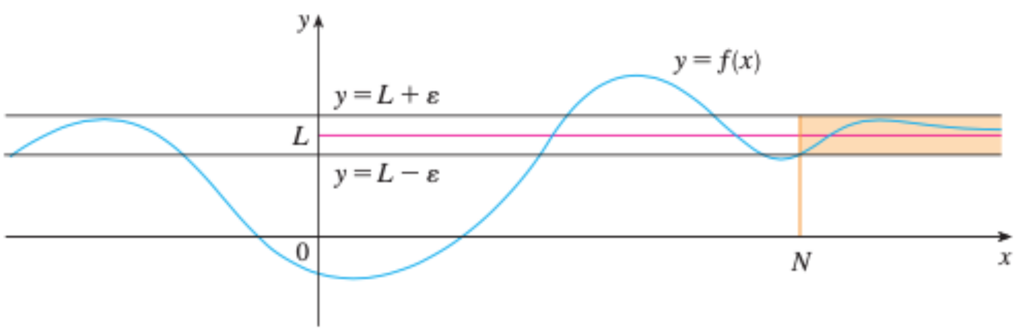
Sea f una función definida sobre algún intervalo (a, ∞). Entonces,

$$\lim_{x \to \infty} f(x) = L$$

Significa que para todo $\varepsilon > 0$ existe un correspondiente número N tal que

Si $x > N$ entonces $|f(x) - L| < \varepsilon$





Límites al infinito – Definición exacta

Ejemplo: Demuestre, por definición, que $\lim_{x\to\infty} \frac{1}{x} = 0$

Dado $\varepsilon > 0$, queremos encontrar N tal que:

$$\text{Si } x > N \text{ entonces } |\frac{1}{x} - 0| < \varepsilon$$

Al calcular el límite podemos suponer que $x > 0$. Luego,

$$\frac{1}{x} < \varepsilon \quad \Leftrightarrow \quad x > \frac{1}{\varepsilon}$$

Elegimos $N = 1/\varepsilon$.

Límites al infinito – Definición exacta

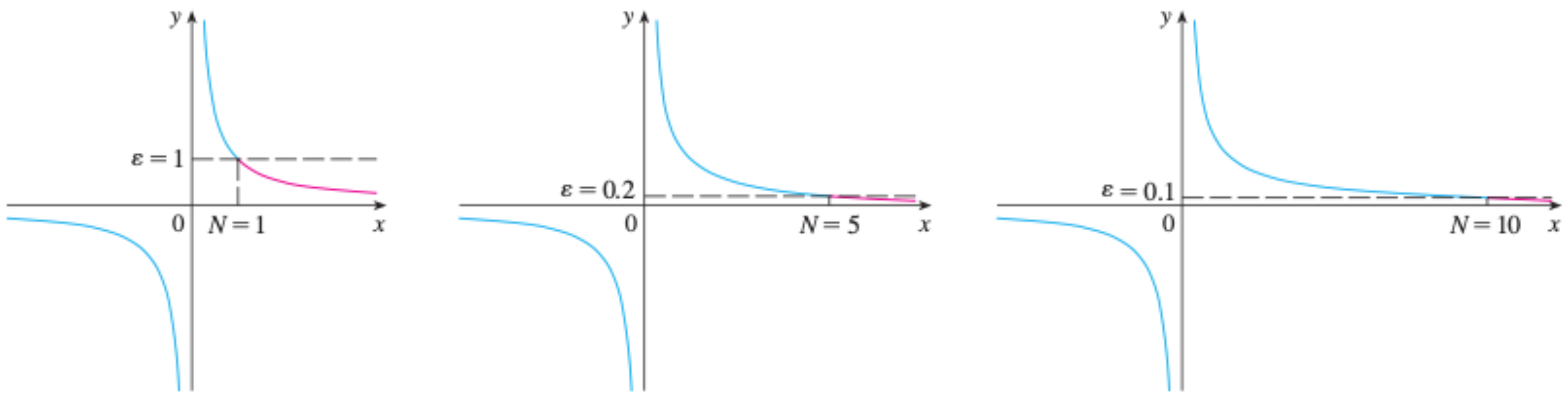
Ejemplo: Demuestre, por definición, que $\lim_{x\to\infty} \frac{1}{x} = 0$

Demostración: Para todo $\varepsilon > 0$, se escoge $N = 1/\varepsilon$, así que

$$\text{Si } x > N = \frac{1}{\varepsilon}, \text{ luego } x > \frac{1}{\varepsilon} \Leftrightarrow \frac{1}{x} < \varepsilon \Leftrightarrow |\frac{1}{x} - 0| < \varepsilon$$

Por lo tanto, por definición,

$$\lim_{x\to\infty} \frac{1}{x} = 0$$



Límites infinitos en el infinito

La notación

$$\lim_{x \to \infty} f(x) = \infty$$

se utiliza para indicar que los valores de $f(x)$ se hacen más grandes cuando x se hace muy grande. Un significado similar está asociado con los siguientes símbolos:

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = \infty \qquad \lim_{x \to \infty} f(x) = -\infty \qquad \lim_{x \to -\infty} f(x) = -\infty$$

Límites infinitos en el infinito

Ejercicio: Determine

$$\lim_{x\to\infty} x^3 \quad \text{y} \quad \lim_{x\to-\infty} x^3$$

Ejercicio 2: Determine

$$\lim_{x\to\infty} x^2 - x$$

Ejercicio 3: Determine

$$\lim_{x\to\infty} \frac{x^2+x}{3-x}$$

Ejercicio 4: Determine la gráfica de $y = (x-2)^4(x+1)^3(x-1)$ encontrando las intersecciones y sus límites cuando $x \to -\infty$ y $x \to \infty$

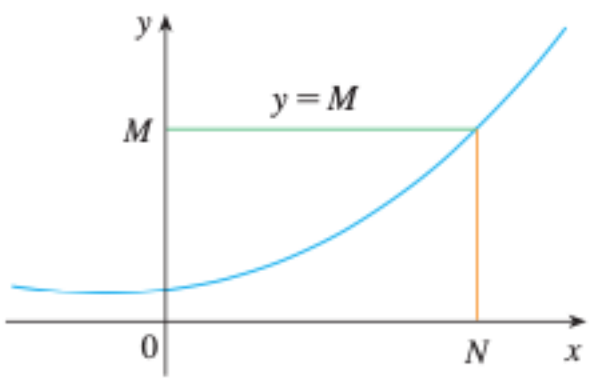
Límites infinitos en el infinito – Definición exacta

Sea f una función definida sobre algún intervalo (a, ∞). Entonces,

$$\lim_{x \to \infty} f(x) = \infty$$

Significa que para todo número positivo M existe un correspondiente número positivo N tal que

Si $x > N$ entonces $f(x) > M$



Conclusión

- Abordamos los límites al infinito y asíntotas horizontales.

Libro guía

- Págs. 130-140.