MAT1610 - Clase 3

Cálculo de límites usando las leyes de los límites

Diego De la Vega

Facultad de Matemáticas
Pontificia Universidad Católica de Chile

11 de marzo del 2024

Objetivos

- Aprender las leyes de los límites
- Introducir la propiedad de sustitución directa

Cálculo de límites usando las leyes de los límites

Suponga que los límites

$$\lim_{x\to a} f(x) \;\text{ y }\; \lim_{x\to a} g(x)$$

Existen. Entonces,

$$\lim_{x\to a}[f(x)+g(x)] = \lim_{x\to a} f(x) + \lim_{x\to a} g(x)$$

Demostración: Si

$$\lim_{x\to a} f(x) = L \;\text{ y }\; \lim_{x\to a} g(x) = \mathrm{M}$$

Sea $\varepsilon > 0$, debemos encontrar un $\delta > 0$ tal que:

$$\text{Si } 0 < |x-a| < \delta, \text{ entonces } |f(x)+g(x)-(L+M)| < \varepsilon$$

Utilizando la desigualdad del triángulo podemos escribir

$$|f(x)+g(x)-(L+M)| \leq |f(x)-L| + |g(x)-M|$$

Cálculo de límites usando las leyes de los límites

Llevamos a cabo $|f(x) + g(x) - (L + M)|$ menor que ε haciendo cada uno de los términos $|f(x) - L|$ y $|g(x) - M|$ menores que $\varepsilon/2$.

Dado que $\frac{\varepsilon}{2} > 0$ y $\lim_{x \to a} f(x) = L$, existe un número $\delta_1 > 0$ tal que

$$\text{Si } \ 0 < |x - a| < \delta_1, \ \text{ entonces } |f(x) - L| < \varepsilon/2$$

Dado que $\frac{\varepsilon}{2} > 0$ y $\lim_{x \to a} g(x) = M$, existe un número $\delta_2 > 0$ tal que

$$\text{Si } \ 0 < |x - a| < \delta_2, \ \text{ entonces } |g(x) - M| < \varepsilon/2$$

Sea $\delta = \min(\delta_1, \delta_2)$. Note que

$$\text{Si } \ 0 < |x - a| < \delta, \ \text{ entonces } \ 0 < |x - a| < \delta_1 \text{ y } 0 < |x - a| < \delta_2$$

Así que, $|f(x) - L| < \varepsilon/2$ y $|g(x) - M| < \varepsilon/2$

Cálculo de límites usando las leyes de los límites

Finalmente,

$$|f(x) + g(x) - (L + M)| \leq |f(x) - L| + |g(x) - M| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

En resumen,

$$\text{Si } \; 0 < |x - a| < \delta, \; \text{ entonces } |f(x) + g(x) - (L + M)| < \varepsilon$$

Así que, por definición de límite,

$$\lim_{x \to a} [f(x) + g(x)] = L + M$$

Cálculo de límites usando las leyes de los límites

Suponga que los límites

$$\lim_{x\to a} f(x) \text{ y } \lim_{x\to a} g(x)$$

Existen. Entonces,

1) $\lim_{x\to a}[f(x) + g(x)] = \lim_{x\to a} f(x) + \lim_{x\to a} g(x)$

2) $\lim_{x\to a}[f(x) - g(x)] = \lim_{x\to a} f(x) - \lim_{x\to a} g(x)$

3) $\lim_{x\to a}[cf(x)] = c\lim_{x\to a} f(x)$

4) $\lim_{x\to a}[f(x) * g(x)] = \lim_{x\to a} f(x) * \lim_{x\to a} g(x)$

5) $\lim_{x\to a}\left[\frac{f(x)}{g(x)}\right] = \frac{\lim_{x\to a} f(x)}{\lim_{x\to a} g(x)}, \qquad \lim_{x\to a} g(x) \neq 0$

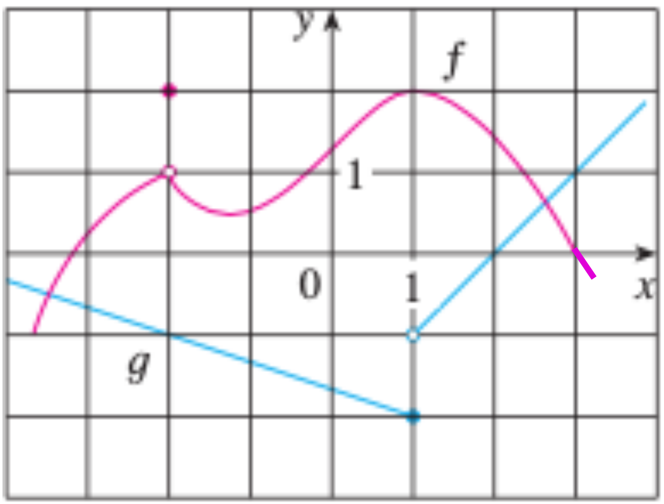
Cálculo de límites usando las leyes de los límites

Ejercicio: Determine

a) $\lim_{x \to -2} [f(x) + 5g(x)]$

b) $\lim_{x \to 1} [f(x)g(x)]$

c) $\lim_{x \to 3} \dfrac{f(x)}{g(x)}$



Otras leyes de los límites

6) $\lim_{x \to a} [f(x)^n] = (\lim_{x \to a} f(x))^n$, donde n es un número entero positivo

7) $\lim_{x \to a} c = c$

8) $\lim_{x \to a} x = a$

9) $\lim_{x \to a} x^n = a^n$, donde n es un número es entero positivo

10) $\lim_{x \to a} \sqrt[n]{x} = \sqrt[n]{a}$, donde n es un número es entero positivo

(si n es par, se supone que $a > 0$)

11) $\lim_{x \to a} \sqrt[n]{f(x)} = \sqrt[n]{\lim_{x \to a} f(x)}$, donde n es un número es entero positivo

(si n es par, se supone que $\lim_{x \to a} f(x) > 0$)

Otras leyes de los límites

Ejercicio: Evalúe los siguientes límites

$$\lim_{x\to 5}(2x^2 - 3x + 4)$$

$$\lim_{x\to -2}\frac{x^3 + 2x^2 - 1}{5 - 3x}$$

Propiedad de sustitución directa

Si f es una función polinomial o una función racional y a está en el dominio de f, entonces

$$\lim_{x \to a} f(x) = f(a)$$

Ejercicio: Encuentre

$$\lim_{x \to -1} \frac{x^2 - 1}{x - 1}$$

Ejercicio: Encuentre

$$\lim_{x \to 1} \frac{x^2 - 1}{x - 1}$$

Si $f(x) = g(x)$ cuando $x \neq a$, entonces $\lim_{x \to a} f(x) = \lim_{x \to a} g(x)$ siempre que el límite exista.

Ejercicio: Encuentre

$$\lim_{t \to 0} \frac{\sqrt{t^2 + 9} - 3}{t^2}$$

Otros ejercicios

Ejercicio: Determine $\lim\limits_{x\to 0} |x|$

Ejercicio: Determine $\lim\limits_{x\to 0} \frac{|x|}{x}$

Ejercicio: Determine $\lim\limits_{x\to 4} f(x)$, con

$$f(x) = \begin{cases} \sqrt{x-4}, & x > 4 \\ 8 - 2x, & x < 4 \end{cases}$$

Conclusión

- Abordamos las leyes de los límites y propiedad de sustitución directa

Libro guía

- Págs. 99-104.