MAT1610 - Clase 11

Reglas básicas de derivación

Diego De la Vega

Facultad de Matemáticas
Pontificia Universidad Católica de Chile

01 de abril del 2024

Objetivo

- Revisar reglas básicas de derivación
- Revisar derivadas básicas

Teorema

Si f es derivable en $x = a$, entonces f es continua en $x = a$.

Derivada de una función constante

Sea c una constante,

$$\frac{d}{dx}(c) = 0$$

Demostración:

Sea $f(x) = c$, una función constante, luego

$$f'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{c-c}{h} = \lim_{h\to 0} 0 = 0$$

Derivada de una función potencia

$$\frac{d}{dx}(x) = 1$$

Demostración:

Sea $f(x) = x$, luego

$$\begin{aligned} f'(x) &= \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h} \\ &= \lim_{h\to 0} \frac{x+h-x}{h} \\ &= \lim_{h\to 0} \frac{h}{h} \\ &= \lim_{h\to 0} 1 \\ &= 1 \end{aligned}$$

Derivada de una función potencia

$$\frac{d}{dx}(x^2) = 2x$$

Demostración:

Sea $f(x) = x^2$, luego

$$\begin{aligned}
f'(x) &= \lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h} \\
&= \lim_{h\to 0}\frac{(x+h)^2-x^2}{h} \\
&= \lim_{h\to 0}\frac{x^2+2xh+h^2-x^2}{h} \\
&= \lim_{h\to 0}\frac{2xh+h^2}{h} \\
&= \lim_{h\to 0}(2x+h) \\
&= 2x
\end{aligned}$$

Derivada de una función potencia

$$\frac{d}{dx}(x^3) = 3x^2$$

Demostración:

Sea $f(x) = x^3$, luego

$$\begin{aligned} f'(x) &= \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} \\ &= \lim_{h \to 0} \frac{(x+h)^3 - x^3}{h} \\ &= \lim_{h \to 0} \frac{x^3 + 3x^2h + 3xh^2 + h^3 - x^3}{h} \\ &= \lim_{h \to 0} \frac{3x^2h + 3xh^2 + h^3}{h} \\ &= \lim_{h \to 0} (3x^2 + 3xh + h^2) \\ &= 3x^2 \end{aligned}$$

Derivada de una función potencia

$$\frac{d}{dx}(x^4) = 4x^3$$

Demostración:

Sea $f(x) = x^4$, luego

$$\begin{aligned}
f'(x) &= \lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h} \\
&= \lim_{h\to 0}\frac{(x+h)^4-x^4}{h} \\
&= \lim_{h\to 0}\frac{x^4+4x^3h+6x^2h^2+4xh^3+h^4-x^4}{h} \\
&= \lim_{h\to 0}\frac{4x^3h+6x^2h^2+4xh^3+h^4}{h} \\
&= \lim_{h\to 0}(4x^3+6x^2h+4xh^2+h^4) \\
&= 4x^3
\end{aligned}$$

Derivada de una función potencia

$$\frac{d}{dx}(x^4) = 4x^3$$

Demostración:

Sea $f(x) = x^4$, luego

$$\begin{aligned}
f'(x) &= \lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}\\
&= \lim_{h\to 0}\frac{(x+h)^4 - x^4}{h}\\
&= \lim_{h\to 0}\frac{x^4 + 4x^3h + 6x^2h^2 + 4xh^3 + h^4 - x^4}{h}\\
&= \lim_{h\to 0}\frac{4x^3h + 6x^2h^2 + 4xh^3 + h^4}{h}\\
&= \lim_{h\to 0}(4x^3 + 6x^2h + 4xh^2 + h^4)\\
&= 4x^3
\end{aligned}$$

Regla de la potencia

Si n es un entero positivo, entonces

$$\frac{d}{dx}(x^n) = nx^{n-1}$$

Ejercicios: Determine las derivadas de las siguientes funciones

1. $f(x) = x^8$
2. $f(x) = x^{13}$

Regla de la potencia

Versión general

Si n es cualquier número real, entonces

$$\frac{d}{dx}(x^n) = nx^{n-1}$$

Ejercicios: Determine las derivadas de las siguientes funciones

1. $f(x) = x^{-1}$
2. $f(x) = \sqrt{x}$
3. $f(x) = x^{3/5}$

Regla del múltiplo constante

Si c es una constante y f es una función derivable, entonces

$$\frac{d}{dx}[c\,f(x)] = c\,\frac{d}{dx}\,f(x)$$

Ejercicios: Determine las derivadas de las siguientes funciones

1. $f(x) = -x$
2. $f(x) = 5x^3$

Regla de la suma

Si f y g son funciones derivable, entonces

$$\frac{d}{dx}[f(x) + g(x)] = \frac{d}{dx}\,f(x) + \frac{d}{dx}\,g(x)$$

Regla de la diferencia

Si f y g son funciones derivable, entonces

$$\frac{d}{dx}[f(x) - g(x)] = \frac{d}{dx}\,f(x) - \frac{d}{dx}\,g(x)$$

Ejercicio

Calcule la derivada de la función polinomial

$$f(x) = x^8 + 12x^5 - 4x^4 + 10x^3 - 6x + 5$$

Conclusión

- Vimos algunas reglas básicas de derivación.

Libro guía

- Págs. 174-178.