MAT1610 - Clase 6

Continuidad en un punto

Diego De la Vega

Facultad de Matemáticas
Pontificia Universidad Católica de Chile

18 de marzo del 2024

Objetivos

- Definir continuidad en un punto
- Revisar distintos tipos de discontinuidades

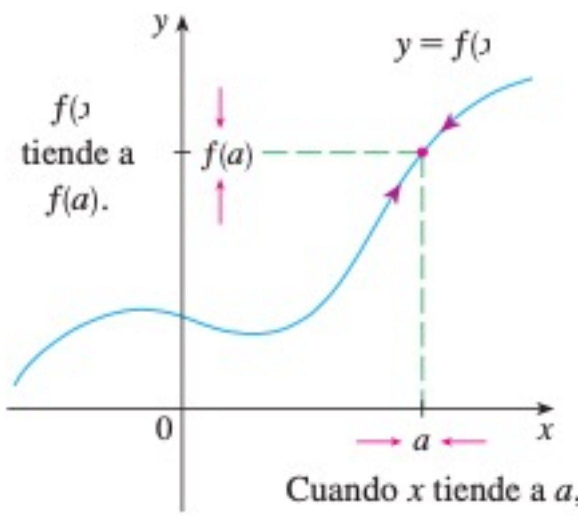
Definición

Sea f una función continua en un número $x = a$ si:

$$\lim_{x \to a} f(x) = f(a)$$

Lo anterior requiere que se cumplan tres condiciones. Si f es continua en a, entonces:

- $f(a)$ está definida ($a \epsilon Dom(f)$)
- $\lim_{x \to a} f(x)$ existe
- $\lim_{x \to a} f(x) = f(a)$

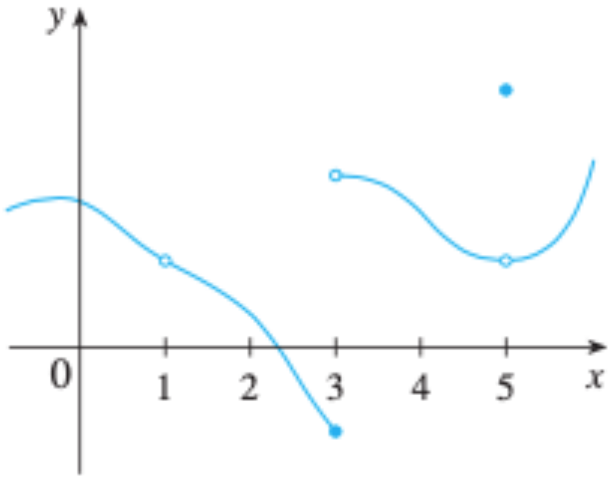


En funciones continua, un pequeño cambio en x implica un pequeño cambio en f.

Discontinuidades

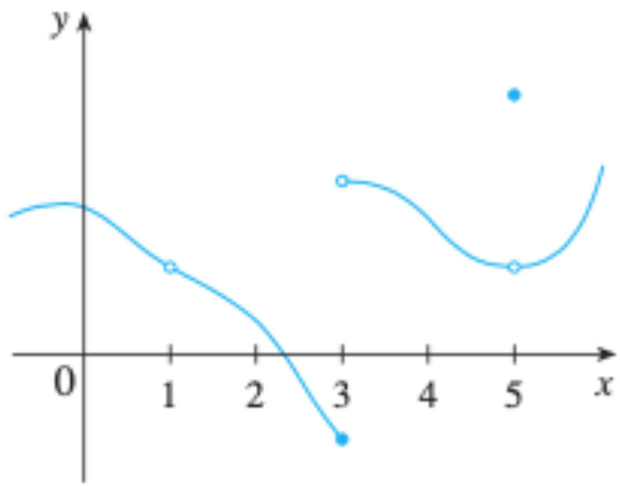
Si f está definida cerca de a (en otras palabras, f está definida sobre un intervalo abierto que contiene a a, excepto quizás en a), decimos que f es **discontinua en a** (o f tiene una **discontinuidad** en a) si f no es continua en a.

Geométricamente, una función continua en cada número de un intervalo puede pensarse como una función cuya gráfica no tiene interrupciones. La gráfica puede dibujarse sin levantar la pluma del papel.



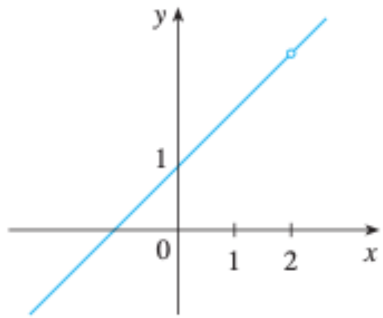
Discontinuidades

Ejercicio: ¿Para qué valores de $x = a$, f es discontinua?

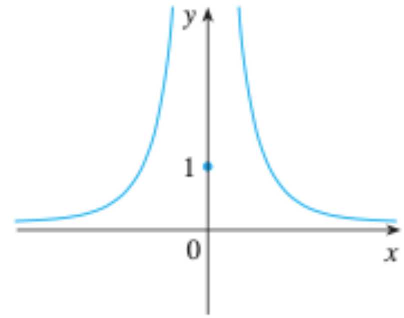


Discontinuidades

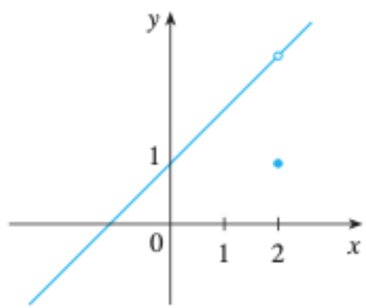
Ejercicio: ¿Para qué valores de $x = a$, f es discontinua?



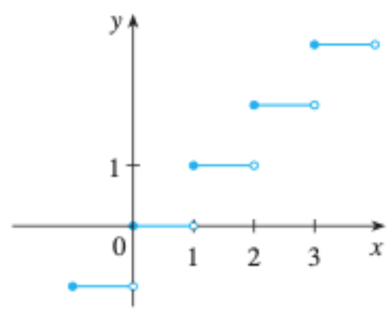
a) $f(x) = \dfrac{x^2 - x - 2}{x - 2}$



b) $f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{x^2} & \text{si } x \neq 0 \\ 1 & \text{si } x = 0 \end{cases}$



c) $f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2 - x - 2}{x - 2} & \text{si } x \neq 2 \\ 1 & \text{si } x = 2 \end{cases}$

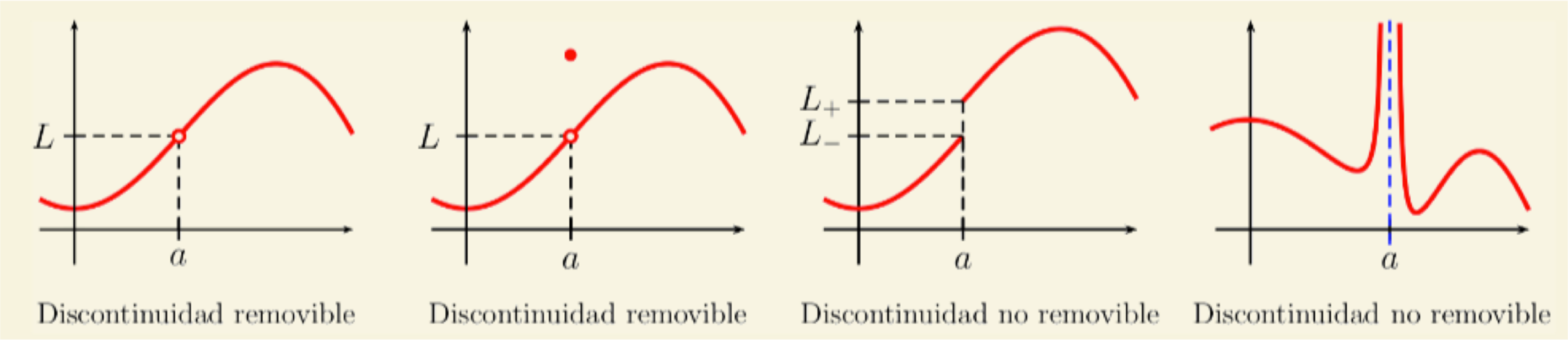


d) $f(x) = [\![x]\!]$

Casificación de discontinuidades

Sea f es discontinua en $x = a$.

- Si $\lim_{x \to a} f(x)$ existe, diremos que f tiene discontinuidad removible en $x = a$.
- Si $\lim_{x \to a} f(x)$ no existe, diremos que f tiene discontinuidad no removible (o esencial) en $x = a$.



Definición

Sea f una función continua por la derecha en un número $x = a$ si:

$$\lim_{x \to a^+} f(x) = f(a)$$

Sea f una función continua por la izquierda en un número $x = a$ si:

$$\lim_{x \to a^-} f(x) = f(a)$$

Ejemplo: La función entera

Definición

Una función f es continua sobre un intervalo si es continua en cada número en el intervalo. (Si f está definida sólo en un lado de un punto extremo del intervalo, entendemos por continua en el punto extremo, como continua por la derecha o continua por la izquierda).

Ejercicio: Demuestre que la función $f(x) = 1 - \sqrt{1 - x^2}$ es continua sobre el intervalo $[-1,1]$.

Teorema

Si f y g son continuas en $x = a$ y $c \in \mathbb{R}$,entonces las siguientes funciones son también continuas en $x = a$:

1. $f + g$
2. $f - g$
3. cf
4. fg
5. $\dfrac{f}{g}$ si $g(a) \neq 0$

Teorema

Cualquier función polinomial es continua en todo su dominio; es decir, es continua sobre $\mathbb{R}$.

Cualquier función racional es continua siempre que esté definida; es decir, es continua en su dominio.

Ejercicio: Determine si la función

$$f(x) = \frac{x^3 + 2x^2 - 1}{5 - 3x}$$

es continua en $x = -2$

Conclusión

- Abordamos continuidad en un punto y discontinuidades

Libro guía

- Págs. 118-122.