Unidad I: Computabilidad

El problema de la parada

Clase 07 - Lógica para Ciencia de la Computación/Teoría de la Computación

Prof. Miguel Romero

Definamos el siguiente lenguaje sobre $\{0,1\}$:

$$\text{Halting} = \{\langle M, w\rangle \mid M \text{ es una MT, } w \in \{0,1\}^* \text{ y } M \text{ se detiene con } w\}$$

Proposición:

Halting es recursivamente enumerable.

Basta modificar la MUT U definida anteriormente.

MUT modificada para Halting

Sobre entrada $z \in \{0,1\}^*$:

1. Verificar que $z = \langle M, w \rangle$ para alguna MT M y $w \in \{0,1\}^*$. Si no, **rechazar**.
2. Escribir w en la cinta 2 y poner la cabeza al inicio de w.
3. Escribir 0 en la cinta 3 (estado inicial).
4. Si el contenido de la cinta 3 es 0^n, **aceptar**. (n es la cantidad de estados.)
5. Buscar en la cinta 1 una transición de la forma $\delta(s_i, a) = (s_j, b, D)$ donde 0^i es el contenido de la cinta 3 y la cabeza de la cinta 2 está sobre a. Si no hay tal transición, **aceptar**.
6. Reemplazar 0^i por 0^j en la cinta 3.
7. Reemplazar a por b en la cinta 2.
8. Mover la cabeza de la cinta 2 a la izquierda o derecha, según D.
9. Volver al paso (4).

Definamos el siguiente lenguaje sobre $\{0, 1\}$:

$$\text{Halting} = \{\langle M, w\rangle \mid M \text{ es una MT, } w \in \{0,1\}^* \text{ y } M \text{ se detiene con } w\}$$

Teorema:

Halting es indecidible.

Por contradicción, supongamos que existe una MT H que decide Halting.

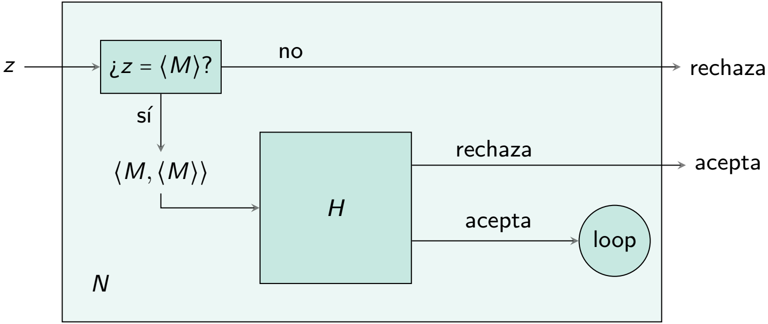
- H se detiene sobre toda entrada $z \in \{0,1\}^*$.
- Para toda MT M y $w \in \{0,1\}^*$:
  - Si M **se detiene** con w, entonces H **acepta** $\langle M, w\rangle$.
  - Si M **no se detiene** con w, entonces H **rechaza** $\langle M, w\rangle$.

A partir de H podemos definir la siguiente MT N.

Sobre entrada $z \in \{0,1\}^*$:

1. Verificar que $z = \langle M \rangle$ para alguna MT M. Si no es así, **rechazar**.
2. Simular H sobre $\langle M, \langle M \rangle \rangle$.
3. Si H acepta, quedarse en un **loop infinito**.
4. Si H rechaza, **aceptar**.

Demostración



Por la definición de lenguaje aceptado de una MT, tenemos:

$$\langle M \rangle \in L(N) \iff N \text{ acepta } \langle M \rangle \iff N \text{ se detiene con } \langle M \rangle$$

Por la definición de H, tenemos:

$$\langle M \rangle \in L(N) \iff H \text{ rechaza } \langle M, \langle M \rangle \rangle \iff M \text{ no se detiene con } \langle M \rangle$$

¿Qué sucede si ejecutamos N sobre su propio código $\langle N \rangle$?

$$N \text{ se detiene con } \langle N \rangle \iff \langle N \rangle \in L(N) \iff N \text{ no se detiene con } \langle N \rangle$$

Contradicción.

N no puede existir, y luego H no puede existir.

Concluimos que Halting es indecidible.

Lo anterior se puede ver como un argumento de **diagonalización**.

Sabemos que el conjunto $\mathcal{M}$ de todas las MTs es infinito numerable.

Podemos ordenar el conjunto $\mathcal{M}$ en una lista infinita:

$$M_1,\ M_2,\ M_3,\ M_4,\ \ldots$$

Considere la siguiente matriz:

	$\langle M_1 \rangle$	$\langle M_2 \rangle$	$\langle M_3 \rangle$	$\langle M_4 \rangle$	$\cdots$
M_1	para	loop	loop	para	$\cdots$
M_2	loop	loop	loop	para	$\cdots$
M_3	para	para	para	loop	$\cdots$
M_4	para	loop	loop	para	$\cdots$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\ddots$

para $=$ se detiene con la entrada
loop $=$ no se detiene con la entrada

La MT N usa H para **complementar la diagonal**.

$$
\begin{array}{c|ccccc}
 & \langle M_1 \rangle & \langle M_2 \rangle & \langle M_3 \rangle & \langle M_4 \rangle & \cdots \\
\hline
M_1 & \underline{\text{para}} & \text{loop} & \text{loop} & \text{para} & \cdots \\
M_2 & \text{loop} & \underline{\text{loop}} & \text{loop} & \text{para} & \cdots \\
M_3 & \text{para} & \text{para} & \underline{\text{para}} & \text{loop} & \cdots \\
M_4 & \text{para} & \text{loop} & \text{loop} & \underline{\text{para}} & \cdots \\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \\
N & \text{loop} & \text{para} & \text{loop} & \text{loop} & \cdots \\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots &
\end{array}
$$

N se detiene con $\langle M_i \rangle \iff M_i$ no se detiene con $\langle M_i \rangle$

Demostración

La MT N usa H para **complementar la diagonal**.

	$\langle M_1 \rangle$	$\langle M_2 \rangle$	$\langle M_3 \rangle$	$\langle M_4 \rangle$	$\cdots$	$\langle N \rangle$	$\cdots$
M_1	<u>para</u>	loop	loop	para	$\cdots$	loop	$\cdots$
M_2	loop	<u>loop</u>	loop	para	$\cdots$	loop	$\cdots$
M_3	para	para	<u>para</u>	loop	$\cdots$	para	$\cdots$
M_4	para	loop	loop	<u>para</u>	$\cdots$	para	$\cdots$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\ddots$	$\vdots$	
N	loop	para	loop	loop	$\cdots$	<u>?</u>	$\cdots$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$		$\vdots$	$\ddots$

¿Dónde está la contradicción?

La entrada <u>?</u> tiene que ser el complemento de sí misma.

Un problema que no es recursivamente enumerable

Recordar que $\overline{L}$ denota el complemento del lenguaje L.

Corolario:

$\overline{\text{Halting}}$ no es recursivamente enumerable.

¿Cómo demuestra esto?