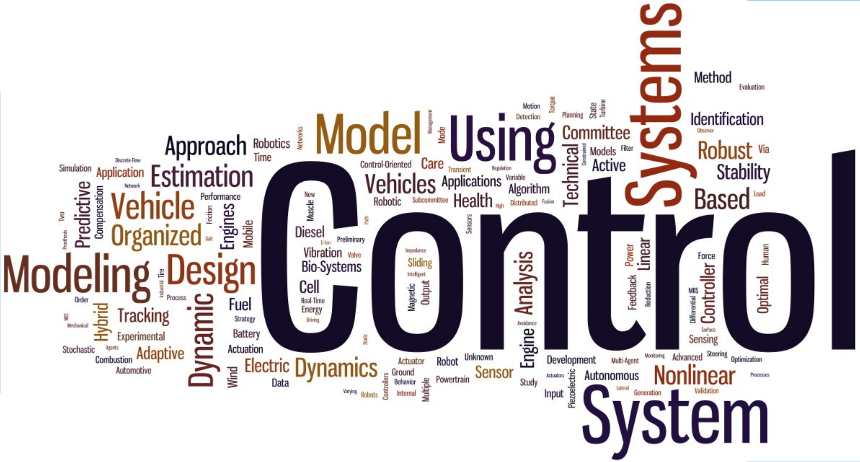
Engenharia Eletrônica

Sistemas Realimentados



Prof. Dr.
Paulo J. D. O. Evald

Prof. Dr.
Paulo J. D. O. Evald

Centro de Engenharias
Sala 211

paulo.evald@ufpel.edu.br

Objetivos da aula:

- Espaço de Estados
  - Representação de sistemas com variáveis de estado;
  - Conversão entre função de transferência e espaço de estados;
  - Controle por Realimentação de Estados.

Espaço de Estados

A representação de um sistema por função de transferência, fornece a informação que relaciona a entrada e a saída da planta;

Na teoria de controle moderno, utiliza-se uma descrição baseada em equações diferenciais de primeira ordem, que são concomitantes em uma forma matricial devidamente organizada;

Vantagens da teoria de controle moderno em relação a teoria de controle clássico:

- É aplicável a sistemas lineares e não lineares, SISO, SIMO, MISO e MIMO, bem como sistemas variantes no tempo;
- É trabalhado no domínio do tempo, enquanto o controle clássico é atuado no domínio da frequência complexa.

Espaço de Estados

Definições

Estado: é o menor conjunto de variáveis que determinam o comportamento dinâmico do sistema, se conhecido seu estado inicial e a entrada aplicada ao sistema;

Variáveis de estado: são as variáveis que determinam os estados futuros de um sistema dinâmico, diante de uma entrada conhecida. Ressalta-se que essas variáveis não necessitam ter representar uma grandeza física mensurável;

Vetor de estados: é o vetor que contém as n variáveis para descrever o comportamento do estado do sistema;

Espaço de estados: é o espaço n-dimensional cujos eixos coordenados são as variáveis de estado.

Espaço de Estados

Um sistema pode ser representado no espaço de estados como

$$\dot{\boldsymbol{x}}(t) = f(x, u, t)$$
$$\boldsymbol{y}(t) = \mathrm{g}(x, u, t)$$

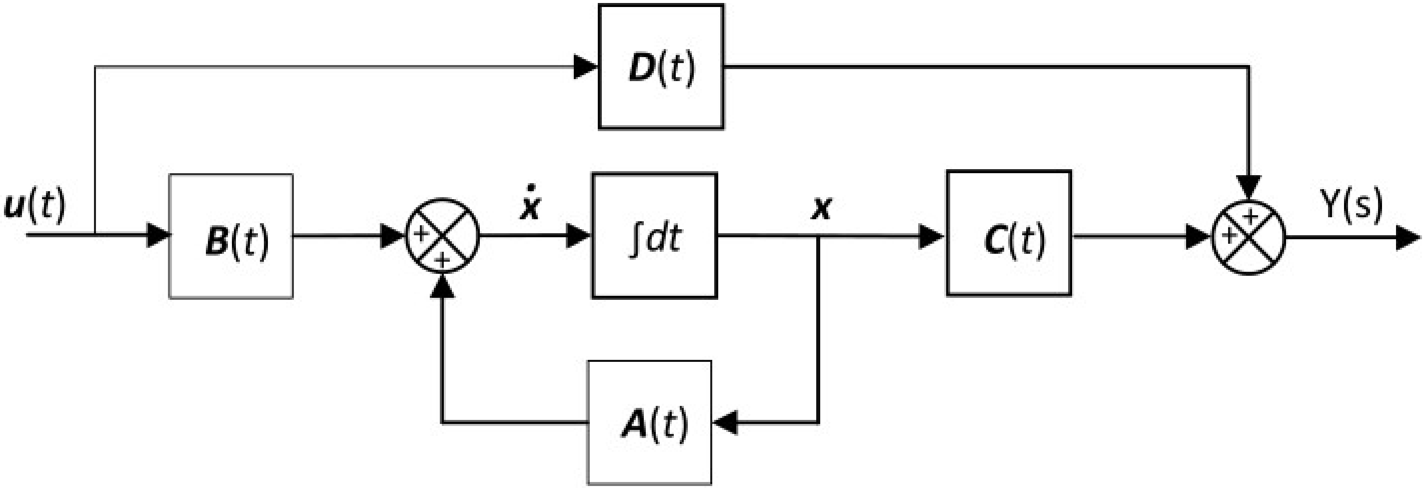
que pode ser linearizado em torno de um ponto de operação e organizado na forma matricial,

$$\dot{\boldsymbol{x}}(t) = \boldsymbol{A}\boldsymbol{x}(t) + \boldsymbol{B}\boldsymbol{u}(t)$$
$$\boldsymbol{y}(t) = \boldsymbol{C}\boldsymbol{x}(t) + \boldsymbol{D}\boldsymbol{u}(t)$$

onde A: matriz de estado, B: matriz de entrada, C: matriz de saída, D: matriz de transmissão direta.

Espaço de Estados

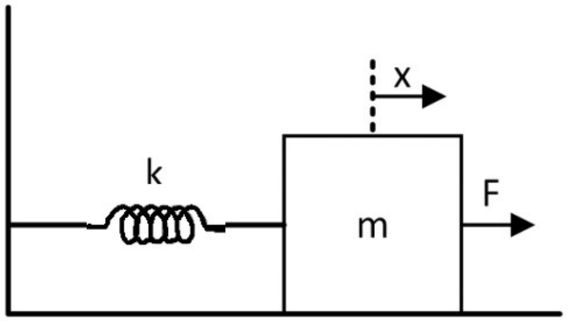
Diagrama de blocos da representação de sistemas no espaço de estados



$$\dot{\boldsymbol{x}}(t) = \boldsymbol{A}\boldsymbol{x}(t) + \boldsymbol{B}\boldsymbol{u}(t)$$
$$\boldsymbol{y}(t) = \boldsymbol{C}\boldsymbol{x}(t) + \boldsymbol{D}\boldsymbol{u}(t)$$

Espaço de Estados

Ex.: Represente o sistema massa-mola no espaço de estados.



$$F_t = m\ddot{x}$$

$$F_{mola} + F + F_{atrito} = m\ddot{x}$$

$$-kx \quad + F \; - b\dot{x} \quad = m\ddot{x}$$

$$\ddot{x} + \frac{b}{m}\dot{x} + \frac{k}{m}x = \frac{1}{m}F$$

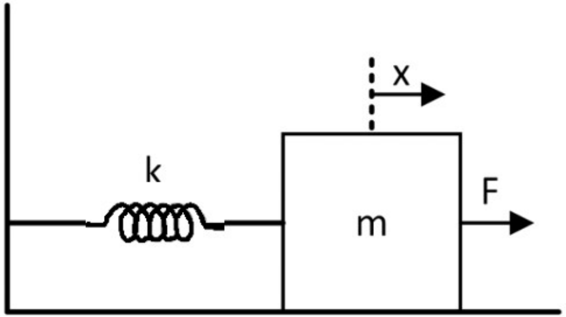
Espaço de Estados

Ex.: Represente o sistema massa-mola no espaço de estados.

Escolhendo a variável $\mathbf{x_1 = x}$, então $\mathbf{x_2 = \dot{x}_1}$. Assim, o vetor de estados é $\mathbf{x(t) = [\ x_1\ x_2\ ]}$.

A ação de controle u(t) é a força aplicada ao bloco, F(t).

$$\ddot{x} + \frac{b}{m}\dot{x} + \frac{k}{m}x = \frac{1}{m}F \longrightarrow \ddot{x} = -\frac{b}{m}\dot{x} - \frac{k}{m}x + \frac{1}{m}F$$



$$\dot{x}(t) = \begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{k}{m} & -\frac{b}{m} \end{bmatrix} x(t) + \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{1}{m} \end{bmatrix} u(t)$$

$$y(t) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} x(t) + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} u(t)$$

Espaço de Estados

Conferindo...

$$\ddot{x} = -\frac{b}{m}\dot{x} - \frac{k}{m}x + \frac{1}{m}F$$

$$\dot{x}(t) = \begin{bmatrix}\dot{x}_1\\ \dot{x}_2\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}0 & 1\\ -\frac{k}{m} & -\frac{b}{m}\end{bmatrix}x(t) + \begin{bmatrix}0\\ \frac{1}{m}\end{bmatrix}u(t)$$

$$y(t) = [1 \quad 0]x(t) + \begin{bmatrix}0\\0\end{bmatrix}u(t)$$

$$x_2 = \dot{x}_1 \rightarrow$$

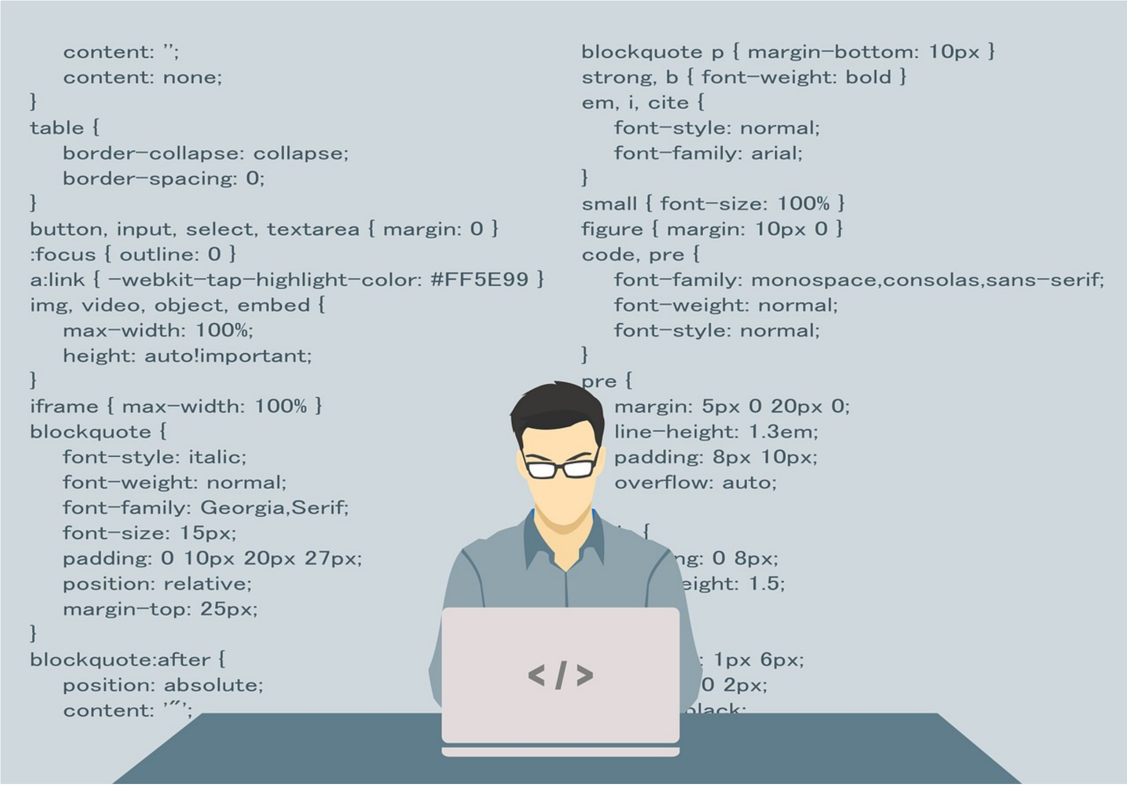
$$x_1 = x \rightarrow$$

$$x_2 = \dot{x}_1 = \ddot{x}$$

$$\dot{x}_1 = 0.x_1 + 1x_2 + 0.F \quad \Rightarrow \quad \dot{x}_1 = x_2$$

$$\dot{x}_2 = -\frac{k}{m}.x_1 - \frac{b}{m}x_2 + \frac{1}{m}F \quad \Rightarrow \quad \dot{x}_2 + \frac{k}{m}x_1 + \frac{b}{m}x_2 = \frac{1}{m}F$$

Espaço de Estados



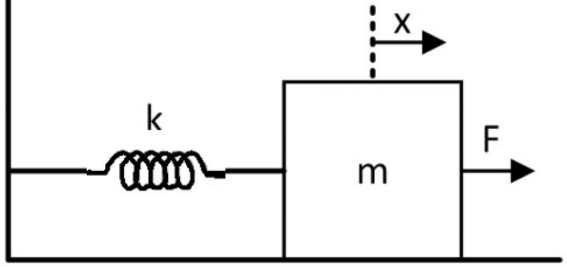
Atividade

Espaço de Estados

Simule no Octave a resposta ao degrau do sistema massa-mola representado no espaço de estados. Varie os parâmetros k, b e m para obter uma resposta subamortecida.

Considere a variável $x_1 = x$, então $x_2 = \dot{x}_1$. Assim, o vetor de estados é $x(t) = [\ x_1\ x_2\ ]$.

A ação de controle u(t) é a força aplicada ao bloco, F(t).



$$\dot{x}(t) = \begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{k}{m} & -\frac{b}{m} \end{bmatrix} x(t) + \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{1}{m} \end{bmatrix} u(t)$$

$$y(t) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} x(t) + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} u(t)$$

Espaço de Estados

Se não houver derivadas na entrada, a representação no espaço de estados pode ser determinada escolhendo o seguinte conjunto de variáveis de estado,

$$
\begin{aligned}
x_1 &= y \\
x_2 &= \dot{y} \\
&\vdots \\
x_n &= \overset{(n-1)}{y}
\end{aligned}
\quad \Rightarrow \quad
\begin{aligned}
\dot{x}_1 &= x_2 \\
\dot{x}_2 &= x_3 \\
&\vdots \\
\dot{x}_{(n-1)} &= x_n \\
\dot{x}_n &= a_n x_1 - \cdots - a_1 x_n + u
\end{aligned}
\quad \Rightarrow \quad
x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}
$$

Espaço de Estados

Portanto, o sistema é descrito como

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t)$$

$$\boldsymbol{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} \quad \boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \\ -a_n & -a_{n-1} & -a_{n-2} & \cdots & -a_1 \end{bmatrix} \quad \boldsymbol{B} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix}$$

Espaço de Estados

Logo, a saída do sistema é dada por

$$\boldsymbol{y} = \boldsymbol{C}\,\boldsymbol{x}$$

$$\boldsymbol{y} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$$

Espaço de Estados

Obs.: Se o sistema tiver ganho na entrada, ou seja,

$$\overset{(n)}{y} + a_1 \overset{(n-1)}{y} + \cdots + a_{n-1}\dot{y} + a_n y = b_0 u$$

Basta indicar o ganho na matriz B. Isto é,

$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ 0 \\ b_0 \end{bmatrix}$$

Espaço de Estados

Quando há derivadas no sinal de entrada, u,

$$\overset{(n)}{y} + a_1 \overset{(n-1)}{y} + \cdots + a_{n-1}\dot{y} + a_n y = b_0 \overset{(n)}{u} + b_1 \overset{(n-1)}{u} + \cdots + b_{n-1}\dot{u} + b_n u$$

As variáveis de estado devem ser escolhidas de modo que eliminem as derivadas de u na equação de estado. Para tal, as variáveis de estado podem ser definidas como

$$x_1 = y - \beta_0 u$$

$$x_2 = \dot{y} - \beta_0\dot{u} - \beta_1 u = \dot{x}_1 - \beta_1 u$$

$$x_3 = \ddot{y} - \beta_0\ddot{u} - \beta_1\dot{u} - \beta_2 u = \dot{x}_2 - \beta_2 u$$

$$\vdots$$

$$x_n = \overset{(n-1)}{y} - \beta_0 \overset{(n-1)}{u} - \beta_1 \overset{(n-2)}{u} - \cdots - \beta_{n-2}\dot{u} - \beta_{n-1} u = \dot{x}_{(n-1)} - \beta_{(n-1)} u$$

Espaço de Estados

Os parâmetros β são calculados para a existência e a unicidade da solução das equações, da seguinte forma,

$$\begin{aligned}
\beta_0 &= b_0 \\
\beta_1 &= b_1 - a_1\beta_0 \\
\beta_2 &= b_2 - a_1\beta_1 - a_2\beta_0 \\
\beta_3 &= b_3 - a_1\beta_2 - a_2\beta_1 - a_3\beta_0 \\
&\vdots \\
\beta_n &= b_n - a_1\beta_{n-1} - \cdots - a_{n-1}\beta_1 - a_n\beta_0
\end{aligned}$$

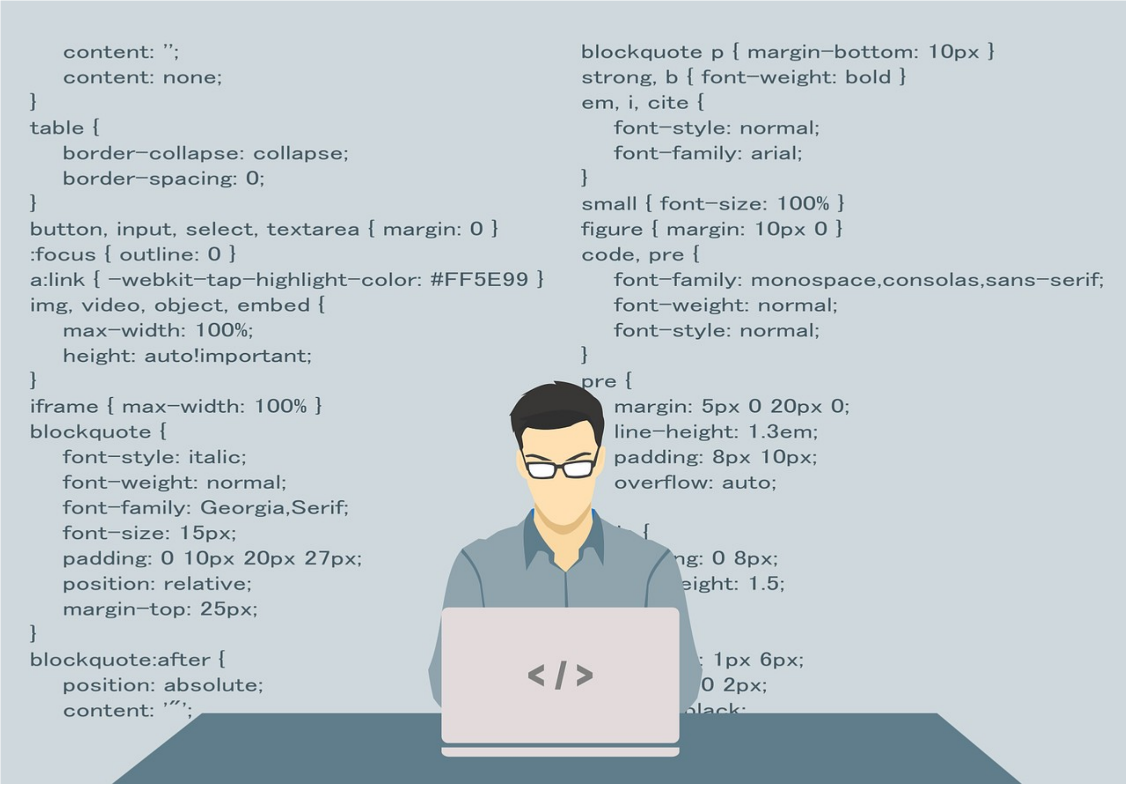
Espaço de Estados

Matricialmente, organiza-se a representação da seguinte forma:

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \vdots \\ \dot{x}_{n-1} \\ \dot{x}_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \\ -a_n & -a_{n-1} & -a_{n-2} & \cdots & -a_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_{n-1} \\ x_n \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \\ \vdots \\ \beta_{n-1} \\ \beta_n \end{bmatrix} u$$

$$y = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} + \beta_0 u$$

Espaço de Estados



Atividade

Espaço de Estados

Represente o seguinte sistema no espaço de estados e simule a resposta ao degrau no Octave. Varie os parêmetros k, b e m para obter uma resposta subamortecida.

$$m\frac{d^2y}{dt^2} + b\frac{dy}{dt} + ky = b\frac{du}{dt} + ku$$

Conversão de EE para FT

Existe uma relação entre as representações por função de transferência e variáveis de estado que permitem uma rápida conversão de uma representação para outra;

A Transformada de Laplace de funções derivativas é a chave nesta metodologia;

Considere o sistema no espaço de estados, descrito por

$$\dot{x}(t) = \mathbf{A}x(t) + \mathbf{B}u(t)$$
$$y(t) = \mathbf{C}x(t) + \mathbf{D}u(t)$$

Aplicando a Transformada de Laplace, obtém-se

$$s\mathbf{X}(s) - \mathbf{x}(0) = \mathbf{A}\mathbf{X}(s) + \mathbf{B}\mathbf{U}(s)$$
$$Y(s) = \mathbf{C}X(s) + \mathbf{D}U(s)$$

Conversão de EE para FT

Se as condições iniciais forem nulas, então

$$s\mathbf{X}(s) = \mathbf{A}X(s) + \mathbf{B}U(s)$$

$$s\mathbf{X}(s) - \mathbf{A}X(s) = \mathbf{B}U(s)$$

$$(\, s\mathbf{I} - \mathbf{A}\,)X(s) = \mathbf{B}U(s)$$

Multiplicando ambos os lados por $(sI-A)^{-1}$ a esquerda, obtém-se

$$X(s) = (\, s\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1}\,\mathbf{B}U(s)$$

Conversão de EE para FT

Substituindo a equação anterior na equação da saída,

$$X(s) = (s\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1}\mathbf{B}U(s) \qquad Y(s) = \mathbf{C}X(s) + \mathbf{D}U(s)$$

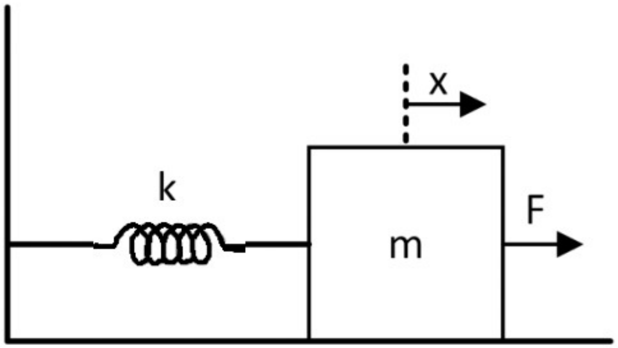
$$Y(s) = [\mathbf{C}(s\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1}\mathbf{B} + D]U(s)$$

$$G(s) = \mathbf{C}(s\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1}\mathbf{B} + D$$

Conversão de EE para FT

Ex.: Considere o sistema abaixo. Determine sua função de transferência:

$$\ddot{x} + \frac{b}{m}\dot{x} + \frac{k}{m}x = \frac{1}{m}F$$



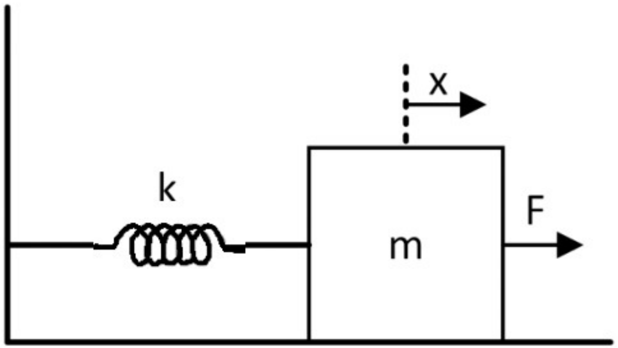
Conversão de EE para FT

Ex.: Considere o sistema abaixo. Determine sua função de transferência:

$$\ddot{x} + \frac{b}{m}\dot{x} + \frac{k}{m}x = \frac{1}{m}F$$

$$\dot{x}(t) = \begin{bmatrix}\dot{x}_1\\ \dot{x}_2\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}0 & 1\\ -\frac{k}{m} & -\frac{b}{m}\end{bmatrix}x(t) + \begin{bmatrix}0\\ \frac{1}{m}\end{bmatrix}u(t)$$

$$y(t) = \begin{bmatrix}1 & 0\end{bmatrix}x(t) + \begin{bmatrix}0\\ 0\end{bmatrix}u(t)$$



Conversão de EE para FT

Substituindo A, B, C e D em

$$Y(s) = [\mathbf{C}(s\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1}\mathbf{B} + D]U(s)$$

obtém-se

$$G(s) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \left\{ \begin{bmatrix} s & 0 \\ 0 & s \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -k/M & -b/M \end{bmatrix} \right\}^{-1} \begin{bmatrix} 0 \\ 1/M \end{bmatrix} + 0$$

$$G(s) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} s & -1 \\ k/M & s + b/M \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 0 \\ 1/M \end{bmatrix}$$

Conversão de EE para FT

Como

$$\begin{bmatrix} s & -1 \\ k/M & s+b/M \end{bmatrix}^{-1} = \frac{1}{s^2+\frac{b}{M}s+\frac{k}{M}}\begin{bmatrix} s+\frac{b}{M} & 1 \\ -\frac{k}{M} & s \end{bmatrix}$$

então,

$$G(s)=\begin{bmatrix}1 & 0\end{bmatrix}\frac{1}{s^2+\frac{b}{M}s+\frac{k}{M}}\begin{bmatrix} s+\frac{b}{M} & 1 \\ -\frac{k}{M} & s \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 \\ \frac{1}{M} \end{bmatrix}$$

Logo,

$$G(s)=\frac{1}{Ms^2+bs+k}$$

Conversão de EE para FT

Atividade

Conversão de EE para FT

Obtenha a função de transferência do seguinte sistema representado no espaço de estados:

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \mathrm{u(t)}$$

$$\mathrm{y(t)} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$$

Conversão de FT para EE

A conversão da função de transferência para espaço de estados é direta e usa a o conceito dos coeficientes dos polinômios que descrevem a equação diferencial do modelo para formação das matrizes A e B.

Seja o sistema descrito por

$$\overset{(n)}{y} + a_1 \overset{(n-1)}{y} + \cdots + a_{n-1}\dot{y} + a_n y = u$$

Conversão de FT para EE

Cujas variáveis de estado sejam definidas como

$$
\begin{aligned}
x_1 &= y \\
x_2 &= \frac{dy}{dt} \\
x_3 &= \frac{d^2y}{dt^2} \\
&\vdots \\
x_n &= \frac{d^{n-1}y}{dt^{n-1}}
\end{aligned}
$$

Portanto,

$$
\begin{aligned}
\dot{x}_1 &= x_2 \\
\dot{x}_2 &= x_3 \\
&\vdots \\
\dot{x}_{n-1} &= x_n \\
\dot{x}_n &= -a_n x_1 - \cdots - a_1 x_n + u
\end{aligned}
$$

Conversão de FT para EE

Assim,

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{B}u$$

$$y = \mathbf{C}\mathbf{x}$$

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ x_n \end{bmatrix}, \quad \mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & & \cdot \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \\ -a_n & -a_{n-1} & -a_{n-2} & \cdots & -a_1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$y = [1 \quad 0 \quad \cdots \quad 0] \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ x_n \end{bmatrix}$$

Conversão de FT para EE

Obs.: Se o sistema tiver ganho na entrada, ou seja,

$$\overset{(n)}{y} + a_1 \overset{(n-1)}{y} + \cdots + a_{n-1}\dot{y} + a_n y = b_0 u$$

Basta indicar o ganho na matriz B. Isto é,

$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ 0 \\ b_0 \end{bmatrix}$$

Conversão de FT para EE

Ex.: Converter a função de transferência abaixo para a representação no espaço de estados.

$$\frac{C(s)}{R(s)} = \frac{24}{(s^3 + 9s^2 + 26s + 24)}$$

Conversão de FT para EE

Ex.: Converter a função de transferência abaixo para a representação no espaço de estados.

$$\frac{C(s)}{R(s)} = \frac{24}{(s^3 + 9s^2 + 26s + 24)}$$

$$(s^3 + 9s^2 + 26s + 24)C(s) = 24R(s)$$

$$\dddot{c} + 9\ddot{c} + 26\dot{c} + 24c = 24r$$

$$\boxed{\begin{aligned} x_1 &= c \\ x_2 &= \dot{c} \\ x_3 &= \ddot{c} \end{aligned}}$$

Conversão de FT para EE

Ex.: Converter a função de transferência abaixo para a representação no espaço de estados.

$$\frac{C(s)}{R(s)} = \frac{24}{(s^3 + 9s^2 + 26s + 24)}$$

$$(s^3 + 9s^2 + 26s + 24)C(s) = 24R(s)$$

$$\dddot{c} + 9\ddot{c} + 26\dot{c} + 24c = 24r$$

$$\boxed{\begin{aligned} x_1 &= c \\ x_2 &= \dot{c} \\ x_3 &= \ddot{c} \end{aligned}}$$

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -24 & -26 & -9 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 24 \end{bmatrix} r$$

$$y = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$$

Conversão de FT para EE

Atividade

Conversão de FT e EE

Converter a função de transferência abaixo para a representação no espaço de estados.

$$G(s) = \frac{1}{s^2 + 7s + 9}$$

Próxima aula:

Espaço de Estados

Controle por Realimentação de Estados

Bibliografia Básica

AGUIRRE, Luiz Antonio (Ed). **Enciclopédia de automática: controle & automação**. São Paulo: Atlas, 2007. 3 v. ISBN 9788521204084

ASTOLFI, Alessandro. **Nonlinear and Adaptive Control with Applications**. XVI, 290 p (Communications and Control Engineering, 0178-5354).

CHERNOUSKO, Felix L. **Control of Nonlinear Dynamical Systems: Methods and Applications**. XII, 396 p. 121 illus (Communications and Control Engineering, 0178-5354).

Bibliografia Complementar

KHALIL, H. K., **Nonlinear systems**, 3rd Edition, Prentice Hall, 2002.

SLOTINE, J. J. E.; LI, W., **Applied nonlinear control**, Prentice Hall, 1991.

FRANKLIN, G.; POWELL, J.D.; EMAMI-NAENI, A., **Feedback Control of Dynamic Systems**, 6ª Edition, Prentice Hall, 2010.

ZHOU, Jing. **Adaptive Backstepping Control of Uncertain Systems: Nonsmooth Nonlinearities, Interactions or Time-Variations**. XIV, 242 p. 94 illus (Lecture Notes in Control and Information Sciences, 0170-8643 ; 372).