Engenharia de Controle e Automação

Controle Preditivo

Prof. Dr.
Paulo J. D. O. Evald

Prof. Dr.
Paulo J. D. O. Evald

Centro de Engenharias
Sala 211

paulo.evald@ufpel.edu.br

Objetivos da aula:

- Controle Preditivo
  - Introdução;
  - Modelo de espaço de estados aumentado.

Controle Preditivo

O objetivo geral do projeto de controle preditivo por modelo é calcular uma trajetória de uma variável manipulada *u* para otimizar o comportamento futuro da saída da planta *y*;

A otimização é realizada dentro de uma janela de tempo limitada, fornecendo informações da planta no início da janela de tempo;

Há 3 fatores fundamentais nesse processo:

- Um modelo verossímil;
- Acesso às medidas no instante de tempo atual;
- O controlador preditivo.

Controle Preditivo

Termos básicos do Controle Preditivo:

Janela de horizonte móvel: é dependente do tempo, inicia em um tempo arbitrário *ti* e vai até *ti* + *Tp*, sendo *Tp* o comprimento constante da janela;

Horizonte de predição: indica até onde deseja-se predizer, cujo valor é *Tp*;

Recending Horizon Control: embora a trajetória ótima do sinal de controle futuro seja completamente descrita dentro da janela do horizonte móvel, a entrada de controle real para a planta utiliza apenas a primeira amostra do sinal de controle, desprezando as demais;

Função de custo (*J*): a ação de controle ótima é encontrada minimizando esta função de custo dentro da janela de otimização.

Controle Preditivo

Modelos de resposta ao impulso finito (FIR): usado na formulação de *Dynamic Matrix Control* (DMC) e *Quadratic* DMC

- Fornece uma descrição transparente do atraso de tempo do processo, tempo de resposta e ganho;
- Frequentemente, utiliza modelos de alta ordem (30 a 60 coeficientes da resposta ao impulso);
- Limitado a plantas estáveis;

Modelo de resposta ao degrau: utilizado no *Generalized Predictive Control* (GPC);

- Aplicável em plantas estáveis e instáveis;
- Geralmente, não apresenta alto desempenho em sistemas multivariáveis.

Controle Preditivo

Modelo em espaço de estados: as informações atuais necessárias para prever o futuro são representadas pela variável de estado no momento atual;

Para uma planta SISO (*Single Input Single Output*),

$$x_m(k+1) = A_m x_m(k) + B_m u(k),$$
$$y(k) = C_m x_m(k),$$

Obs.: A forma original no espaço de estados é $y(k) = C_m x_m(k) + D_m u(k)$. Porém, como o *receding horizon control* usa uma informação atual da planta para predição do sistema e da ação de controle, assume-se implicitamente que a entrada $u(k)$ não pode afetar a saída $y(k)$ ao mesmo tempo em que é medida. Assim, $D = 0$ no modelo da planta.

Controle Preditivo

Aplicando $-x_m(k)$ em ambos lados do modelo, obtém-se

$$x_m(k+1) - x_m(k) = A_m(x_m(k) - x_m(k-1)) + B_m(u(k) - u(k-1))$$

Logo,

$$\Delta x_m(k+1) = x_m(k+1) - x_m(k)$$

que pode ser escrita de forma equivalente como

$$\Delta x_m(k) = x_m(k) - x_m(k-1)$$

Controle Preditivo

A equação da diferença da ação de controle é

$$\Delta u(k) = u(k) - u(k-1)$$

Portanto, a representação no espaço de estados por equação de diferenças é

$$\Delta x_m(k+1) = A_m \Delta x_m(k) + B_m \Delta u(k)$$

Entrada da
planta

Controle Preditivo

O novo vetor de variável de estado é

$$x(k) = \left[\, \Delta x_m(k)^T \;\; y(k) \,\right]^T$$

Ainda,

$$y(k+1) - y(k) = C_m(x_m(k+1) - x_m(k))$$

$$= C_m \underline{\Delta x_m(k+1)}$$

$$= C_m A_m \Delta x_m(k) + C_m B_m \Delta u(k)$$

$$\Delta x_m(k+1) = A_m \Delta x_m(k) + B_m \Delta u(k)$$

Controle Preditivo

Assim, o modelo aumentado usado no controle preditivo é

$$\overbrace{\begin{bmatrix} \Delta x_m(k+1) \\ y(k+1) \end{bmatrix}}^{x(k+1)} = \overbrace{\begin{bmatrix} A_m & o_m^T \\ C_m A_m & 1 \end{bmatrix}}^{A} \overbrace{\begin{bmatrix} \Delta x_m(k) \\ y(k) \end{bmatrix}}^{x(k)} + \overbrace{\begin{bmatrix} B_m \\ C_m B_m \end{bmatrix}}^{B} \Delta u(k)$$

$$y(k) = \overbrace{\begin{bmatrix} o_m & 1 \end{bmatrix}}^{C} \begin{bmatrix} \Delta x_m(k) \\ y(k) \end{bmatrix}$$

onde $o_m = \overbrace{\begin{bmatrix} 0 & 0 & \ldots & 0 \end{bmatrix}}^{n_1}$, sendo n_1 a dimensão do vetor de variáveis de estado da planta, ou seja, antes de aumetar o modelo.

Controle Preditivo

Exemplo: Determine o modelo aumentado do sistema representado por

$$A_m = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}; B_m = \begin{bmatrix} 0.5 \\ 1 \end{bmatrix}; C_m = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Solução: Note que $n_1 = 2$ e portanto $o_m = [\ 0\ 0\ ]$. Logo, o modelo aumentado é

$$A = \begin{bmatrix} A_m & o_m^T \\ C_m A_m & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} B_m \\ C_m B_m \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.5 \\ 1 \\ 0.5 \end{bmatrix} \qquad C = \begin{bmatrix} o_m & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Como pode ser notado há 3 integradores no modelo aumentado, onde 2 são da própria planta e 1 é adicionado pela transformação.

Controle Preditivo

Prática: Implemente um script para obter o modelo aumentado discreto a partir das matrizes que representam o seguinte sistema no espaço de estados em tempo contínuo:

$$\dot{x}_m(t) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} x_m(t) + \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 3 \end{bmatrix} u(t)$$

$$y(t) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} x_m(t).$$

Discretize com *Ts* = 1.

Controle Preditivo

```
Ac = [ 0   1   0;  3   0   1;  0   1   0 ];
Bc = [ 1;   1;  3 ];
Cc = [ 0   1   0 ];
Dc = zeros( 1, 1 );
Ts = 1;
[Ad, Bd, Cd, Dd] = c2dm(Ac, Bc, Cc, Dc, Ts);

[ m1, n1 ]  = size(Cd);
[ n1, n_in ]= size(Bd);
```

```
A_e = eye( n1+m1, n1+m1 );
A_e( 1:n1, 1:n1 ) = Ad;
A_e( n1+1:n1+m1, 1:n1 ) = Cd*Ad;
B_e = zeros( n1+m1, n_in );
B_e( 1:n1 , : ) = Bd;
B_e( n1+1:n1+m1, : ) = Cd*Bd;
C_e = zeros( m1, n1+m1 );
C_e( :, n1+1:n1+m1 ) = eye( m1, m1 );
```

Controle Preditivo

O próximo passo no projeto de um sistema de controle preditivo é calcular a predição da saída da planta com o sinal de controle futuro como as variáveis ajustáveis. Essa previsão é descrita em uma janela de otimização;

Assumindo que no instante de amostragem k_i, o vetor de variável de estado $x(k_i)$ está disponível para medição, então o estado $x(k_i)$ fornece a informação atual da planta. Logo, a trajetória de controle futuro é denotada por

$$\Delta u(k_i), \Delta u(k_i + 1), \ldots, \Delta u(k_i + N_c - 1)$$

onde N_c é chamado de horizonte de controle, escolhido para ser menor que (ou igual a) o horizonte de previsão N_p.

Controle Preditivo

Com a informação atual $x(k_i)$, as variáveis de estado futuras são previstas para N_p amostras (horizonte de previsão);

Obs.: a janela de otimização também tem comprimento N_p.

As variáveis de estado futuras são denotadas como

$$x(k_i + 1 \mid k_i),\ x(k_i + 2 \mid k_i),\ \ldots,\ x(k_i + m \mid k_i),\ \ldots,\ x(k_i + N_p \mid k_i)$$

Controle Preditivo

As variáveis de estado futuras são calculadas sequencialmente usando o conjunto de parâmetros de controle futuros:

$$x(k_i + 1 \mid k_i) = Ax(k_i) + B\Delta u(k_i)$$
$$x(k_i + 2 \mid k_i) = Ax(k_i + 1 \mid k_i) + B\Delta u(k_i + 1)$$

$$\vdots$$

Controle Preditivo

As variáveis de estado futuras são calculadas sequencialmente usando o conjunto de parâmetros de controle futuros:

$$
\begin{aligned}
x(k_i + 1 \mid k_i) &= \boxed{Ax(k_i) + B\Delta u(k_i)} \\
x(k_i + 2 \mid k_i) &= A\boxed{x(k_i + 1 \mid k_i)} + B\Delta u(k_i + 1) \\
&= A^2 x(k_i) + AB\Delta u(k_i) + B\Delta u(k_i + 1)
\end{aligned}
$$

$$\vdots$$

Controle Preditivo

As variáveis de estado futuras são calculadas sequencialmente usando o conjunto de parâmetros de controle futuros:

$$
\begin{aligned}
x(k_i+1 \mid k_i) &= Ax(k_i) + B\Delta u(k_i) \\
x(k_i+2 \mid k_i) &= Ax(k_i+1 \mid k_i) + B\Delta u(k_i+1) \\
&= A^2x(k_i) + AB\Delta u(k_i) + B\Delta u(k_i+1) \\
&\vdots
\end{aligned}
$$

$$
\boxed{
\begin{aligned}
x(k_i+N_p \mid k_i) &= A^{N_p}x(k_i) + A^{N_p-1}B\Delta u(k_i) + A^{N_p-2}B\Delta u(k_i+1) \\
&+ \ldots + A^{N_p-N_c}B\Delta u(k_i+N_c-1).
\end{aligned}
}
$$

Controle Preditivo

Das variáveis de estado previstas, as variáveis de saída futuras são obtidas por substituição,

$$
\begin{aligned}
y(k_i+1 \mid k_i) &= CAx(k_i) + CB\Delta u(k_i) \\
y(k_i+2 \mid k_i) &= CA^2x(k_i) + CAB\Delta u(k_i) + CB\Delta u(k_i+1) \\
y(k_i+3 \mid k_i) &= CA^3x(k_i) + CA^2B\Delta u(k_i) + CAB\Delta u(k_i+1) \;\; + CB\Delta u(k_i+2) \\
&+ CB\Delta u(k_i+2) \\
&\vdots \\
y(k_i+N_p \mid k_i) &= CA^{N_p}x(k_i) + CA^{N_p-1}B\Delta u(k_i) + CA^{N_p-2}B\Delta u(k_i+1) \\
&+ \ldots + CA^{N_p-N_c}B\Delta u(k_i+N_c-1).
\end{aligned}
$$

Controle Preditivo

Definindo os vetores de predição da resposta do sistema Y e ação de controle futuras *ΔU,*

$$Y = \left[\, y(k_i+1 \mid k_i)\; y(k_i+2 \mid k_i)\; y(k_i+3 \mid k_i)\; \ldots\; y(k_i+N_p \mid k_i) \,\right]^T$$

$$\Delta U = \left[\, \Delta u(k_i)\; \Delta u(k_i+1)\; \Delta u(k_i+2)\; \ldots\; \Delta u(k_i+N_c-1) \,\right]^T$$

cujas dimensões de Y e ΔU são N_p e N_c, respectivamente. Em uma forma compacta,

$$\boxed{Y = Fx(k_i) + \Phi \Delta U}$$

onde

$$\boxed{F = \begin{bmatrix} CA \\ CA^2 \\ CA^3 \\ \vdots \\ CA^{N_p} \end{bmatrix}; \Phi = \begin{bmatrix} CB & 0 & 0 & \ldots & 0 \\ CAB & CB & 0 & \ldots & 0 \\ CA^2B & CAB & CB & \ldots & 0 \\ \vdots & & & & \\ CA^{N_p-1}B & CA^{N_p-2}B & CA^{N_p-3}B & \ldots & CA^{N_p-N_c}B \end{bmatrix}}$$

Controle Preditivo

Otimização

Para uma dada referência $r(k_i)$ no tempo de amostragem k_i, dentro de um horizonte de predição, o objetivo do controlador preditivo é minimizar o erro entre a saída prevista e a referência;

Assume-se que o sinal de referência permanece constante na janela de otimização;

O objetivo é alcançado ao encontrar o vetor de parâmetro de controle ΔU que minimiza a função de erro.

Controle Preditivo

Definindo a informação da referência da seguinte forma

$$R_s^T = \overbrace{\begin{bmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \end{bmatrix}}^{N_p} r(k_i)$$

A função-custo J que reflete o objetivo de controle é

$$J = (R_s - Y)^T (R_s - Y) + \Delta U^T \bar{R} \Delta U$$

sendo a matriz diagonal dada por

$$\bar{R} = r_w I_{N_c \times N_c} \ (r_w \geq 0)$$

e r_w é um parâmetro de ajuste para o desempenho do sistema em malha fechada.

Controle Preditivo

$$\bar{R} = r_w I_{N_c \times N_c} \ (r_w \geq 0)$$

Se r_w for nulo, a função-custo é interpretada como a situação em que não há restrições quanto ao tamanho de ΔU, pois o objetivo é apenas tornar o erro o tão pequeno quanto possível;

Se r_w for grande, a função-custo é interpretada como a situação em que o tamanho de ΔU é relevante e o erro é reduzido cautelosamente.

Controle Preditivo

Para encontrar o ΔU ótimo que minimizará J, calcula-se

$$J = (R_s - Fx(k_i))^T(R_s - Fx(k_i)) - 2\Delta U^T \Phi^T (R_s - Fx(k_i)) + \Delta U^T (\Phi^T \Phi + \bar{R}) \Delta U$$

Da primeira derivada da função-custo J, obtém-se

$$\frac{\partial J}{\partial \Delta U} = -2\Phi^T (R_s - Fx(k_i)) + 2(\Phi^T \Phi + \bar{R}) \Delta U$$

Sendo a condição necessária para minimizar J é

$$\frac{\partial J}{\partial \Delta U} = 0$$

Controle Preditivo

Portanto, assumindo que a matriz Hessiana $(\Phi^T\Phi + \bar{R})^{-1}$ existe, então a solução ótima para o sinal de controle é

$$\Delta U = (\Phi^T\Phi + \bar{R})^{-1}\Phi^T(R_s - Fx(k_i))$$

onde

$$R_s = \overbrace{[1\ 1\ 1\ \ldots\ 1]^T}^{N_p} r(k_i) = \bar{R}_s r(k_i)$$

e

$$\bar{R}_s = \overbrace{[1\ 1\ 1\ \ldots\ 1]^T}^{N_p}$$

Controle Preditivo

Exemplo: Considere o sistema SISO

$$x_m(k+1) = ax_m(k) + bu(k)$$
$$y(k) = x_m(k),$$

onde a = 0,8 and b = 0,1.

1) Encontre o modelo de espaço de estados aumentado.

2) Assumindo um horizonte de previsão N_p = 10 e horizonte de controle N_c = 4, calcule os componentes que formam a previsão de *Y*, e as quantidades $\Phi^T\Phi$, $\Phi^T F$ e $\Phi^T \bar{R}_s$.

3) Supondo que em um instante *k* (*k* = 10 para este exemplo), *r(k)* = 1 e o vetor de estado *x*(*k*) = [0.1 0.2]^T, encontre a solução ótima *ΔU* em relação aos casos em que

r_w = 0 e r_w = 10.

Controle Preditivo

1) Modelo de espaço de estados aumentado

$$A = \begin{bmatrix} A_m & o_m^T \\ C_m A_m & 1 \end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} B_m \\ C_m B_m \end{bmatrix} \qquad C = \begin{bmatrix} o_m & 1 \end{bmatrix}$$

Solução: A_m = a, B_m = b, C_m = 1 e o_m = [0]. Portanto,

$$\begin{bmatrix} \Delta x_m(k+1) \\ y(k+1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a & 0 \\ a & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta x_m(k) \\ y(k) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} b \\ b \end{bmatrix} \Delta u(k)$$

$$y(k) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta x_m(k) \\ y(k) \end{bmatrix}.$$

Controle Preditivo

2) Para um horizonte de predição N_p = 10 e um horizonte de controle N_c = 4, têm-se

$$F = \begin{bmatrix} CA \\ CA^2 \\ CA^3 \\ CA^4 \\ CA^5 \\ CA^6 \\ CA^7 \\ CA^8 \\ CA^9 \\ CA^{10} \end{bmatrix} ; \Phi = \begin{bmatrix} CB & 0 & 0 & 0 \\ CAB & CB & 0 & 0 \\ CA^2B & CAB & CB & 0 \\ CA^3B & CA^2B & CAB & CB \\ CA^4B & CA^3B & CA^2B & CAB \\ CA^5B & CA^4B & CA^3B & CA^2B \\ CA^6B & CA^5B & CA^4B & CA^3B \\ CA^7B & CA^6B & CA^5B & CA^4B \\ CA^8B & CA^7B & CA^6B & CA^5B \\ CA^9B & CA^8B & CA^7B & CA^6B \end{bmatrix}$$

Solução:

$$\Phi^T \Phi = \begin{bmatrix} 1.1541 & 1.0407 & 0.9116 & 0.7726 \\ 1.0407 & 0.9549 & 0.8475 & 0.7259 \\ 0.9116 & 0.8475 & 0.7675 & 0.6674 \\ 0.7726 & 0.7259 & 0.6674 & 0.5943 \end{bmatrix}$$

$$\Phi^T F = \begin{bmatrix} 9.2325 & 3.2147 \\ 8.3259 & 2.7684 \\ 7.2927 & 2.3355 \\ 6.1811 & 1.9194 \end{bmatrix} ; \Phi^T \bar{R}_s = \begin{bmatrix} 3.2147 \\ 2.7684 \\ 2.3355 \\ 1.9194 \end{bmatrix}$$

Controle Preditivo

3) No instante k = 10, o vetor de estado $x(k)$ = [0,1 0,2]^T.

<u>Solução</u>:

Quando r_w = 0, o ΔU ótimo é

$$\Delta U = (\Phi^T\Phi)^{-1}(\Phi^T R_s - \Phi^T F x(k_i)) = \begin{bmatrix} 7.2 & -6.4 & 0 & 0 \end{bmatrix}^T$$

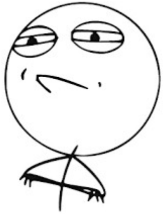
Quando r_w = 10, o ΔU ótimo é

$$\begin{aligned} \Delta U &= (\Phi^T\Phi + 10 \times I)^{-1}(\Phi^T R_s - \Phi^T F x(k_i)) \\ &= \begin{bmatrix} 0.1269 & 0.1034 & 0.0829 & 0.065 \end{bmatrix}^T . \end{aligned}$$

Note que energia de controle é distribuída ao longo de um período mais longo de tempo futuro.

Controle Preditivo

Prática



Controle Preditivo

Implemente um algoritmo que calcule $\Phi^T\Phi$, $\Phi^T F$ e $\Phi^T \bar{R}_s$.

Verifique se o programa está correto inserindo o exemplo anterior Ap = 0.8, Bp = 0.1, Cp = 1, Nc = 4 and Np = 10.

Dica: A matriz Φ é uma matriz Toeplitz, que é criada definindo sua primeira coluna, e a próxima coluna é obtida deslocando a coluna anterior.

Controle Preditivo

```
function [ Phi_Phi, Phi_F, Phi_R, A_e, B_e, C_e ] = mpcgain( Ap, Bp, Cp, Nc, Np);

 % Crie o modelo aumentado para o projeto MPC.

[ m1, n1 ] = size( Cp );
[ n1, n_in ] = size( Bp );
A_e = eye(n1+m1, n1+m1);
A_e( 1:n1, 1:n1 ) = Ap;
A_e( n1+1:n1+m1, 1:n1 ) = Cp*Ap;
(...)

(...)
B_e = zeros( n1+m1, n_in );
B_e( 1:n1, : ) = Bp;
B_e( n1+1:n1+m1, : ) = Cp*Bp;
C_e = zeros( m1, n1+m1 );
C_e( :, n1+1:n1+m1 ) = eye( m1,m1 );
```

Controle Preditivo

```
% Crie F e Phi
n = n1 + m1;
h( 1, : ) = C_e;
F(1,:) = C_e*A_e;
for k=2:Np
    h( k, : ) = h( k-1, : )*A_e;
    F( k, : ) = F( k-1, : )*A_e;
end
v = h*B_e;
Phi = zeros( Np, Nc );
```

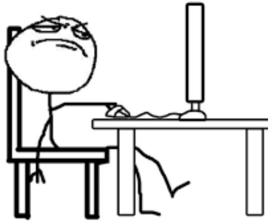
```
% Declara a dimensão de Phi
Phi( :, 1 ) = v;
% Primeira coluna de Phi
for i=2:Nc
    Phi( :, i ) = [ zeros(i-1 , 1); v( 1:Np-i+1, 1 ) ]; %Toeplitz matrix
end
BarRs = ones( Np, 1 );
Phi_Phi = Phi' * Phi;
Phi_F = Phi' * F;
Phi_R = Phi' * BarRs;
```

Controle Preditivo

Insira no workspace Ap = 0.8, Bp = 0.1, Cp = 1, Nc = 4 e Np = 10;

Execute a função mpcgain;

Compare com os resultados obtidos manualmente. Se estiverem iguais, o programa está correto.



Próxima aula:

Recending Horizon Control

(RHC)

Exercícios + Simulações

(aula no laboratório de informática)

Bibliografia Básica

NISE, N. S., **Engenharia de sistemas de controle**, 5ª Edição, LTC, 2009.

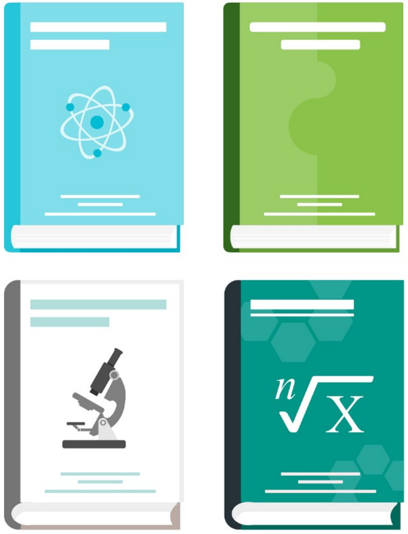
OGATA, K., **Engenharia de controle moderno**, 5ª Edição, Pearson, 2011.

DORF, R. C.; BISHOP, R. H., **Sistemas de controle modernos**, 11ª Edição, LTC, 2009.

SEBORG, D. E.; EDGAR, T. F.; MELLICHAMP, D. A.; DOYLE, F. J., **Process dynamics and control**, 3ª Edition, John Wiley & Sons, 2010.

BAZANELLA, A. S.; GOMES da SILVA Jr., J. M., **Sistemas de controle: princípios e métodos de projeto**, 1ª Edição, Editora UFRGS, 2005.

CHEN, C. T., **Linear system theory and design**, 3ª Edição, Oxford University Press, 1999.



Bibliografia Complementar

CAMACHO E. F. Camacho; BORDONS C. A. Bordons. **Model Predictive Control in the Process Industry**. Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg. 1997.

BORRELLI, F., BEMPORAD, A., MORARI, M. **Predictive Control for Linear and Hybrid Systems**. Cambridge: Cambridge University Press. 2017.