Lógica Fuzzy

Trabalho 2 - Inteligência Artificial

Miguel Beck Berno[1], Pedro Henrique Diehl[1], Rafael Trommer Stolaruck[1]

[1]Universidade Federal de Pelotas
Engenharia de Controle e Automação
Professor: Elmer Alexis Gamboa Peñaloza

Maio 2023

Conjuntos Fuzzy

Tradicionalmente em uma proposição lógica de conjuntos, o conceito de pertinência de um elemento a um conjunto possui dois extremos: verdadeiro ou falso.

$$\chi_A(x) = \begin{cases} 1, & se x \in A, \\ 0, & se x \notin A \end{cases} \tag{1}$$

$\chi_A(x)$ indica uma associação dos elementos x ao conjunto A, denotando se o elemento x pertence ou não pertence ao conjunto A.
Entretanto, muitos conjuntos não são definidos por uma fronteira clara. Zadeh propôs a extensão da lógica para o domínio contínuo, o intervalo $[0, 1]$ [1].
Levando a uma transição gradual do falso para o verdadeiro [2].

Controlador Fuzzy

Procura imitar as ações do operador, incorporando a forma humana de pensar em um sistema de controle.

Pode ser projetado para se comportar conforme o raciocínio dedutivo, utilizando conclusões baseadas em informações conhecidas [3].

Em vários casos o modelo matemático não existe, não é conhecido ou é muito complexo para ser implementado em máquinas computacionais. Em tais situações um sistema baseado em regras empíricas pode ser mais eficaz

Propriedade - União (T-norma)

A união é implementada por uma família de operações chamadas de T-normas. A união desses dois conjuntos Fuzzy ($A \cup B$) é:

$$\mu_{A \cup B} = \mu_A(x) \vee \mu_B(x) = \max(\mu_A(x), \mu_B(x)) \quad \forall x \in X \tag{2}$$

No modelo probabilístico:

$$\mu_{A \cup B} = \mu_A(x)\mu_B(x) \quad \forall x \in X \tag{3}$$

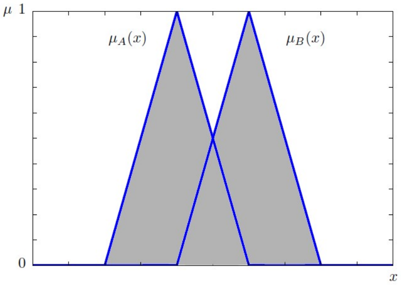

Figure: União de dois Conjuntos Fuzzy.

Propriedade - Intersecção (T-conormas)

A interseção é implementada por uma família de operações conhecidas como T-conormas. A interseção desses dois conjuntos Fuzzy $(A \cap B)$ é:

$$\mu_{A \cap B} = \mu_A(x) \wedge \mu_B(x) = \min\left(\mu_A(x), \mu_B(x)\right) \quad \forall x \in X \tag{4}$$

No modelo probabilístico:

$$\mu_{A \cap B} = \mu_A(x) + \mu_B(x) - \mu_A(x)\mu_B(x) \quad \forall x \in X \tag{5}$$

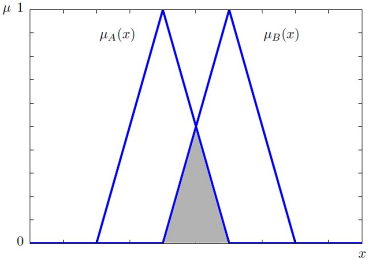

Figure: Intersecção de dois Conjuntos Fuzzy.

Função de Pertinência - Introdução

Os conjuntos Fuzzy podem ser definidos em universos contínuos ou discretos. A função de pertinênica (μ) em cada caso é

- Discreto: Pontos em uma lista.
- Contínuo: Função matemática.

Cada ponto no espaço de entrada do universo de discurso é mapeado para um valor na função de pertinência, determinando o grau de nebulosidade [2].

O grau de nebulosidade faz com que a transição entre a pertinência e a não pertinência seja gradual e não abrupta [1].

As funções de pertinência podem ter diferentes formas, dependendo da aplicação.

Função de Pertinência - Triangular

$$\mu(x; a, b, c) = \begin{cases} 0, & x \leq a \\ \dfrac{x-a}{b-a}, & a < x \leq b \\ \dfrac{c-x}{c-b}, & b < x \leq c \\ 0, & c < x \end{cases} \tag{6}$$

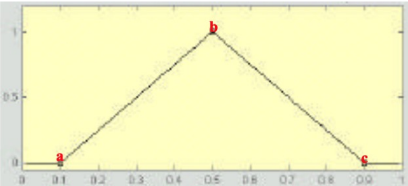

Figure: Função de pertinência triangular.

Função de Pertinência - Trapezoidal

$$\mu(x;a,b,c,d) = \begin{cases} 0, & x \leq a \\ \dfrac{x-a}{b-a}, & a < x \leq b \\ 1, & b < x \leq c \\ \dfrac{d-x}{d-c}, & c < x \leq d \\ 0, & d < x \end{cases} \quad (7)$$

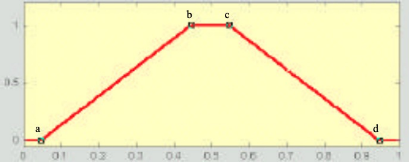

Figure: Função de pertinência trapezoidal.

Variáveis Linguísticas

Constituem o "vocabulário" da lógica Fuzzy.
A ideia relacionada à incerteza estocástica contida em uma determinada variável, corresponde exatamente ao grau de probabilidade de que a informação nela contida seja realmente verdadeira ou não. Esta é a maneira como os modelos probabilísticos relacionam suas variáveis para determinar resultados.

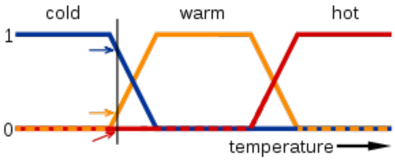

Figure: Variáveis linugísticas para representar valores.

Estrutura do Controlador Fuzzy

O controlador Fuzzy pode acomodar várias entradas e saídas. Suas regras podem ser executadas em paralelo, implicando uma ação recomendada para cada regra [4].
Este controlador consiste em um estágio de entrada, processamento e saída.

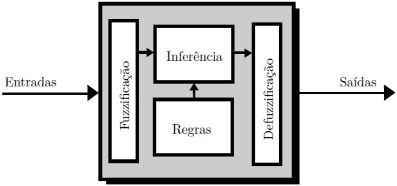

Figure: Arquitetura do Controlador Fuzzy [2].

Fuzzificação

Partindo da frase: x é T_i. Que é uma proposição Fuzzy

- x é o nome de uma variável linguística.
- T_i é um subconjunto Fuzzy definido no universo de discurso U de x.

Essas proposições podem ser combinadas e escritas utilizando os operadores E e OU.
As proposições resultantes podem ser expostas como relações Fuzzy.
A conversão de um valor físico (numérico) de x no seu correspondente termo linguístico com a associação de um grau de pertinência $x \rightarrow \mu_{T_i(x)}$.
A função de pertinência $\mu_A(x)$ representa o equivalente Fuzzy do valor x [5].

Regras Fuzzy

É um componente central do controlador Fuzzy, que representa a "inteligência" de qualquer algoritmo de controle Fuzzy.

Lugar no qual o conhecimento e a experiência do projetista são corretamente interpretados e devem ser organizados em um conjunto apropriado de regras [5].

Geralmente é difícil associar corretamente entradas e saídas de alguns sistemas, dessa forma, as regras Fuzzy são capazes de modelar esses comportamentos [6].

Inferência

Avalia-se os graus de compatibilidade das variáveis premissas com seus respectivos antecedentes nas regras ("SE ... ENTÃO") e atribui-se uma pertinência da variável ao conjunto.
Também é necessário determinar a força ou o grau de ativação de uma regra (implicação Fuzzy).
Com base no grau de ativação determina-se o consequente produzido por uma determinada regra. Cada regra produz um consequente e o resultado da etapa inferência dependerá da combinação desses consequentes (agregação) resultando em um conjunto Fuzzy.

Inferência Mamdani

Possui as seguintes etapas:

- Fuzzificação das entradas.
- Aplicação dos operadores Fuzzy.
- Implicação.
- Agregação.
- Defuzzificação.

Uma característica desse método é a utilização de funções de pertinência na saída [7]. Após o processo de agregação, há um conjunto Fuzzy para cada variável de saída sendo necessária a defuzzificação.

Inferência - Operadores de Implicação

São utilizados para modelar regras de inferência do tipo "SE... ENTÃO".
O resultado da operação é o dado de saída da relação de implicação.
A implicação Mamdani calcula o valor mínimo entre o valor resultante da T-norma utilizada para implementar o conectivo E no antecedente e a função de pertinência do conjunto Fuzzy, consequente de:

$$\Phi[\mu_A(x), \mu_B(y)] \equiv \mu_A(x) \wedge \mu_B(y) \tag{8}$$

A e B são conjuntos nebulosos.
Etapa para verificar quanto um valor do sistema implica em um conjunto.

Inferência - Agregação

Combina os conjuntos Fuzzy que representam as saídas de cada regra em um único conjunto Fuzzy.
É comum fazer a agregação pelo máximo, ou seja, entre os diversos consequentes de um mesmo conjunto gerados na implicação, seleciona-se o de maior grau de pertinência.

$$\mu_U(x_k, y_k, u) = \mu_U^r FR^i(x_k, y_k, u) = \max\{\min_{i=1}^{r}[\mu_{R_{pq}}, \mu_{pm}]\} \quad (9)$$

Defuzzificação

A saída de cada regra é nebulosa, a partir disso, é necessário convertê-las em um escalar, de modo que a natureza da ação possa ser determinada pelo sistema.

Processo de conversão de um número Fuzzy em um número real.

Para um modelo de tipo Mamdani, a defuzzificação de um conjunto nebuloso de saída para um único valor de saída pode ser realizado por alguns métodos como: o método da centroide, bissetor, média dos máximos, primeiro dos máximos e o método último dos máximos.

LAST

123

Referências

- L. A. Zadeh, "Fuzzy sets," *Information and control*, vol. 8, no. 3, 1965.
- E. Camponogara, *Lógica Fuzzy*. UFSC, 2009.
- I. S. Shaw and M. G. Simões, *Controle e modelagem Fuzzy*. Edgar Blücher, 1999.
- J. Jantzen, *Foundations of fuzzy control*. John Wiley & Sons, Inc., 2007.
- Z. Kovacic and S. Bogdan, *Fuzzy controller design: theory and applications*. CRC press, 2010.
- C. V. Altrock, *Fuzzy Logic and Neurofuzzy Applications in Business and Finance*. Prentice-Hall, 1997.
- E. H. Mamdani and S. Assilian, "An experiment in linguistic synthesis with a fuzzy logic controller," *International journal of man-machine studies*, vol. 7, no. 1, 1975.