

# Lógica Fuzzy

## Trabalho 2 - Inteligência Artificial

Miguel Beck Berno<sup>1</sup>, Pedro Henrique Diehl<sup>1</sup>, Rafael Trommer  
Stolaruck<sup>1</sup>

<sup>1</sup>Universidade Federal de Pelotas  
Engenharia de Controle e Automação  
Professor: Elmer Alexis Gamboa Peñaloza

Maio 2023

# Conjuntos Fuzzy

Tradicionalmente em uma proposição lógica de conjuntos, o conceito de pertinência de um elemento a um conjunto possui dois extremos: verdadeiro ou falso.

$$\chi_A(x) = \begin{cases} 1, & \text{se } x \in A, \\ 0, & \text{se } x \notin A \end{cases} \quad (1)$$

$\chi_A(x)$  indica uma associação dos elementos  $x$  ao conjunto  $A$ , denotando se o elemento  $x$  pertence ou não pertence ao conjunto  $A$ .

Entretanto, muitos conjuntos não são definidos por uma fronteira clara. Zadeh propôs a extensão da lógica para o domínio contínuo, o intervalo  $[0, 1]$  [1].

Levando a uma transição gradual do falso para o verdadeiro [2].

# Sistema de inferência Fuzzy

Procura imitar as ações do operador, incorporando a forma humana de pensar em um sistema de controle.

Pode ser projetado para se comportar conforme o raciocínio dedutivo, utilizando conclusões baseadas em informações conhecidas [3]. Em vários casos o modelo matemático não existe, não é conhecido ou é muito complexo para ser implementado em máquinas computacionais. Em tais situações um sistema baseado em regras empíricas pode ser mais eficaz

## Propriedade - União (T-norma)

A união é implementada por uma família de operações chamadas de T-normas. A união desses dois conjuntos Fuzzy ( $A \cup B$ ) é:

$$\mu_{A \cup B} = \mu_A(x) \vee \mu_B(x) = \max(\mu_A(x), \mu_B(x)) \quad \forall x \in X \quad (2)$$

No modelo probabilístico:

$$\mu_{A \cup B} = \mu_A(x) \mu_B(x) \quad \forall x \in X \quad (3)$$

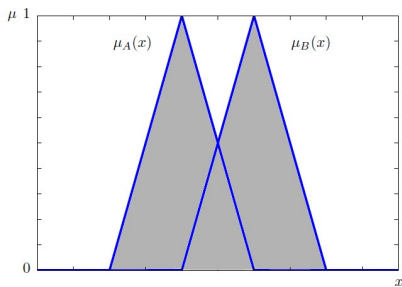


Figure: União de dois Conjuntos Fuzzy.

## Propriedade - Intersecção (T-conormas)

A intersecção é implementada por uma família de operações conhecidas como T-conormas. A intersecção desses dois conjuntos Fuzzy ( $A \cap B$ ) é:

$$\mu_{A \cap B} = \mu_A(x) \wedge \mu_B(x) = \min(\mu_A(x), \mu_B(x)) \quad \forall x \in X \quad (4)$$

No modelo probabilístico:

$$\mu_{A \cap B} = \mu_A(x) + \mu_B(x) - \mu_A(x)\mu_B(x) \quad \forall x \in X \quad (5)$$

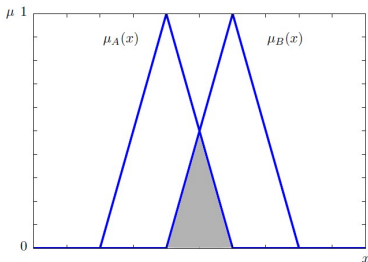


Figure: Intersecção de dois Conjuntos Fuzzy.

# Função de Pertinência - Introdução

Os conjuntos Fuzzy podem ser definidos em universos contínuos ou discretos. A função de pertinência ( $\mu$ ) em cada caso é

- ▶ Discreto: Pontos em uma lista.
- ▶ Contínuo: Função matemática.

Cada ponto no espaço de entrada do universo de discurso é mapeado para um valor na função de pertinência, determinando o grau de nebulosidade [2].

O grau de nebulosidade faz com que a transição entre a pertinência e a não pertinência seja gradual e não abrupta [1].

As funções de pertinência podem ter diferentes formas, dependendo da aplicação.

# Função de Pertinência - Triangular

$$\mu(x; a, b, c) = \begin{cases} 0, & x \leq a \\ \frac{x-a}{b-a}, & a < x \leq b \\ \frac{c-x}{c-b}, & b < x \leq c \\ 0, & c < x \end{cases} \quad (6)$$

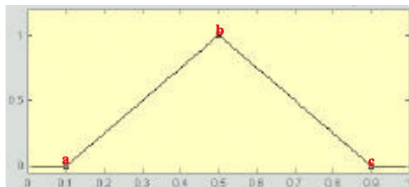


Figure: Função de pertinência triangular.

## Função de Pertinência - Trapezoidal

$$\mu(x; a, b, c, d) = \begin{cases} 0, & x \leq a \\ \frac{x - a}{b - a}, & a < x \leq b \\ 1, & b < x \leq c \\ \frac{d - x}{d - c}, & c < x \leq d \\ 0, & d < x \end{cases} \quad (7)$$

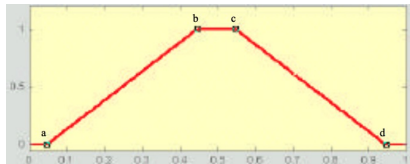


Figure: Função de pertinência trapezoidal.



# Variáveis Linguísticas

Constituem o “vocabulário” da lógica Fuzzy.

A ideia relacionada à incerteza estocástica contida em uma determinada variável, corresponde exatamente ao grau de probabilidade de que a informação nela contida seja realmente verdadeira ou não. Esta é a maneira como os modelos probabilísticos relacionam suas variáveis para determinar resultados.

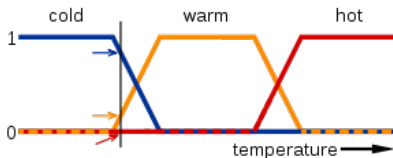


Figure: Variáveis linugísticas para representar valores.



# Fuzzificação

Partindo da frase:  $x$  é  $T_i$ . Que é uma proposição Fuzzy

- ▶  $x$  é uma variável.
- ▶  $T_i$  é um subconjunto Fuzzy definido no universo de discurso  $U$ .

Essas proposições podem ser combinadas e escritas utilizando os operadores  $E$  e  $OU$ .

As proposições resultantes podem ser expostas como relações Fuzzy. A conversão de um valor físico (numérico) de  $x$  no seu correspondente termo linguístico com a associação de um grau de pertinência  $x \rightarrow \mu_{T_i(x)}$  [5].

# Regras Fuzzy

É um componente central do controlador Fuzzy, que representa a "inteligência" de qualquer algoritmo de controle Fuzzy.

Lugar no qual o conhecimento e a experiência do projetista são corretamente interpretados e devem ser organizados em um conjunto apropriado de regras [5].

Geralmente é difícil associar corretamente entradas e saídas de alguns sistemas, dessa forma, as regras Fuzzy são capazes de modelar esses comportamentos [6].

# Inferência

Avalia-se os graus de compatibilidade das variáveis premissas com seus respectivos antecedentes nas regras ("SE ... ENTÃO") e atribui-se uma pertinência da variável ao conjunto.

Também é necessário determinar a força ou o grau de ativação de uma regra (implicação Fuzzy).

Com base no grau de ativação determina-se o consequente produzido por uma determinada regra. Cada regra produz um consequente e o resultado da etapa inferência dependerá da combinação desses consequentes (agregação) resultando em um conjunto Fuzzy.

# Inferência Mamdani

Possui as seguintes etapas:

- ▶ Fuzzificação das entradas.
- ▶ Aplicação dos operadores Fuzzy.
- ▶ Implicação.
- ▶ Agregação.
- ▶ Defuzzificação.

Uma característica desse método é a utilização de funções de pertinência na saída [7]. Após o processo de agregação, há um conjunto Fuzzy para cada variável de saída sendo necessária a defuzzificação.

# Inferência - Operadores de Implicação

São utilizados para modelar regras de inferência do tipo "SE... ENTÃO". O resultado da operação é o dado de saída da relação de implicação. A implicação Mamdani calcula o valor mínimo entre o valor resultante da T-norma utilizada para implementar o conectivo E no antecedente e a função de pertinência do conjunto Fuzzy, consequente de:

$$\Phi[\mu_A(x), \mu_B(y)] \equiv \mu_A(x) \wedge \mu_B(y) \quad (8)$$

A e B são conjuntos nebulosos.

Etapa para verificar quanto um valor do sistema implica em um conjunto.

# Inferência - Agregação

Combina os conjuntos Fuzzy que representam as saídas de cada regra em um único conjunto Fuzzy.

É comum fazer a agregação pelo máximo, ou seja, entre os diversos consequentes de um mesmo conjunto gerados na implicação, seleciona-se o de maior grau de pertinência.

$$\mu_U(x_k, y_k, u) = \mu_U^r FR^i(x_k, y_k, u) = \max \left\{ \min_{i=1}^r [\mu_{R_{pq}}, \mu_{pm}] \right\} \quad (9)$$



# Defuzzificação

A saída de cada regra é nebulosa, a partir disso, é necessário convertê-las em um escalar, de modo que a natureza da ação possa ser determinada pelo sistema.

Processo de conversão de um número Fuzzy em um número real. Para um modelo de tipo Mamdani, a defuzzificação de um conjunto nebuloso de saída para um único valor de saída pode ser realizado por alguns métodos como: o método da centroide, bissetor, média dos máximos, primeiro dos máximos e o método último dos máximos [8].

# Aplicação - Introdução

A aplicação realizada foi o diagnóstico de câncer de mama.

## Dataset - I

O dataset utilizado consiste de 569 entradas divididas em 32 colunas contendo diferentes características sobre câncer de mama. As características são calculadas a partir de uma imagem digitalizada de um aspirado com agulha fina (PAAF) de uma massa mamária (7). Eles descrevem características dos núcleos celulares presentes na imagem.

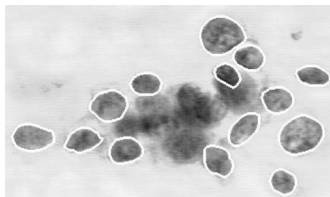


Figure: Câncer de mama maligno - Imagem digitalizada.

<https://archive.ics.uci.edu/ml/datasets/Breast+Cancer+Wisconsin+%28Diagnostic%29>

## Dataset - II

- ▶ O.L. Mangasarian, W.N. Street and W.H. Wolberg. Breast cancer diagnosis and prognosis via linear programming. Operations Research, 43(4), pages 570-577, July-August 1995.
- ▶ W.H. Wolberg, W.N. Street, and O.L. Mangasarian. Machine learning techniques to diagnose breast cancer from fine-needle aspirates. Cancer Letters 77 (1994) 163-171.
- ▶ W.H. Wolberg, W.N. Street, and O.L. Mangasarian. Image analysis and machine learning applied to breast cancer diagnosis and prognosis. Analytical and Quantitative Cytology and Histology, Vol. 17 No. 2, pages 77-87, April 1995.

# Aplicação - Entradas I

- ▶ Área: O tamanho de um tumor de câncer pode ser um fator importante no seu diagnóstico. Geralmente, à medida que um tumor cresce, ele se torna mais provável de ser detectado por exames de imagem médica ou exame físico. No entanto, o tamanho de um tumor por si só nem sempre é um indicador confiável de se é canceroso ou não [9].
- ▶ Perímetro: O tamanho do perímetro do tumor em pacientes com câncer de mama inicial pode ser um indicador útil da agressividade do tumor e da sua capacidade de se espalhar para outras partes do corpo [10].




# Aplicação - Entradas II

- ▶ Uniformidade: Um estudo publicado em 1969, analisou a uniformidade da forma e tamanho dos núcleos de células de lesões benignas e malignas da mama. Os resultados indicaram que tumores malignos apresentaram maior heterogeneidade na forma e tamanho dos núcleos do que tumores benignos [11].
- ▶ Homogeneidade: O estudo que utilizou imagens de ressonância magnética com contraste dinâmico para avaliar a homogeneidade de tumores ovarianos, sugeriu que a homogeneidade pode ser um indicador útil da malignidade dos tumores de câncer [12].

# Referências I



-  L. A. Zadeh, “Fuzzy sets,” *Information and control*, vol. 8, no. 3, 1965.
-  E. Camponogara, *Lógica Fuzzy*. UFSC, 2009.
-  I. S. Shaw and M. G. Simões, *Controle e modelagem Fuzzy*. Edgar Blücher, 1999.
-  J. Jantzen, *Foundations of fuzzy control*. John Wiley & Sons, Inc., 2007.
-  Z. Kovacic and S. Bogdan, *Fuzzy controller design: theory and applications*. CRC press, 2010.
-  C. V. Altrock, *Fuzzy Logic and Neurofuzzy Applications in Business and Finance*. Prentice-Hall, 1997.
-  E. H. Mamdani and S. Assilian, “An experiment in linguistic synthesis with a fuzzy logic controller,” *International journal of man-machine studies*, vol. 7, no. 1, 1975.

## Referências II

-  S. d. Lima *et al.*, “Implementação de estratégias de controle utilizando lógica fuzzy e técnicas de controle vetorial em um software de elementos finitos,” -, 2016.
-  X. Yu, Y. Wen, Y. Lin, L. Wang, T. Chen, X. Yang, H. Yang, B. Li, and X. Wang, “Impact of tumor size on survival in patients with non-small cell lung cancer (nsclc): a large population-based analysis,” *Journal of thoracic disease*, vol. 7, no. 10, pp. 1867–1876, 2015.
-  J. Lee, H. J. Kim, B. J. Chae, E. H. Lee, S. G. Ahn, Y.-H. Im, Y. Jung, S. J. Nam, and S. W. Kim, “Tumor circumference as a predictive factor of lymphovascular invasion in patients with early breast cancer,” *Clinical Breast Cancer*, vol. 16, no. 6, pp. e163–e168, 2016.



# Referências III

-  P. Russell, D. J. Ferguson, R. Wilkinson, and A. K. Sharma, “Uniformity in the size and shape of nuclei in benign and malignant breast lesions,” *Journal of Pathology and Bacteriology*, vol. 97, no. 2, pp. 569–577, 1969.
-  M. Lima, D. Le Bihan, R. Okumura, S. Kanao, K. Ito, and K. Togashi, “Homogeneity of ovarian tumors assessed with volumetric histogram analysis of dynamic contrast-enhanced mri,” *European Radiology*, vol. 23, no. 12, pp. 3298–3305, 2013.