



EXTREMADURA

UNIVERSIDAD DE

FACULTAD DE CIENCIAS

GRADO EN MATEMÁTICAS

TRABAJO FIN DE GRADO

EL PROCESO DE POISSON


PEDRO DURÁN PORRAS
JULIO DE 2024

Miguel González Velasco y Carmen Minuesa Abril, profesores del Departamento de Matemáticas de la Universidad de Extremadura,

INFORMAN:

Que D. Pedro Durán Porras ha realizado bajo su dirección el Trabajo Fin de Grado y consideran que la memoria reúne los requisitos necesarios para su evaluación.

Badajoz, 3 de julio de 2024


Firmado digitalmente por
GONZALEZ VELASCO MIGUEL -
30203240P
Nombre de reconocimiento (DN):
c=ES,
serialNumber=IDCES-30203240P,
givenName=MIGUEL,
sn=GONZALEZ VELASCO,
cn=GONZALEZ VELASCO MIGUEL -
30203240P
Fecha: 2024.07.04 00:27:42 +02'00'

**MINUESA
ABRIL
CARMEN -
08891659C**

Firmado digitalmente por MINUESA
ABRIL CARMEN - 08891659C
Nombre de reconocimiento (DN):
c=ES,
serialNumber=IDCES-08891659C,
givenName=CARMEN, sn=MINUESA
ABRIL, cn=MINUESA ABRIL CARMEN
- 08891659C
Fecha: 2024.07.04 00:43:20 +02'00'

Fdo. Miguel González Velasco y Carmen Minuesa Abril

Dedicado a mis familiares, quienes siempre estuvieron apoyándome, a pesar de todo, para que siempre diera todo de mí y luchara por cumplir mis sueños.

Agradecimientos también a mis amigos, quienes me ayudaron a levantarme cada vez que me tropecé y a mis dos tutores, quienes me guiaron e hicieron que este trabajo fuese posible.

Índice general

Resumen	9
Abstract	11
Objetivos	13
1. Preliminares	15
1.1. Introducción.	15
1.2. Procesos estocásticos de tiempo continuo.	16
1.3. Función generatriz de momentos y función generatriz de probabilidad.	17
1.4. Distribución gamma.	18
1.4.1. Esperanza y varianza de la distribución gamma.	19
1.5. Distribución exponencial.	21
1.5.1. Propiedades de la distribución exponencial	22
1.6. Distribución de Poisson.	24
2. El proceso de Poisson	26
3. Proceso de Poisson no homogéneo. Relación entre el proceso de Poisson homogéneo y no-homogéneo	36
4. Proceso de Poisson compuesto. Descomposición y superposición	44
4.1. Condicionamiento de un proceso de Poisson	44
4.2. Procesos de Poisson compuestos	45
4.3. Descomposición de un proceso de Poisson compuesto.	49
4.4. Superposición de procesos de Poisson	51
5. Proceso de Poisson y la distribución uniforme	53
6. Proceso de Poisson espacial	61
Bibliografía	67

Resumen

La distribución de Poisson es una de las distribuciones más empleadas en Matemáticas debido a sus propiedades a la hora de analizar la probabilidad de que ocurran sucesos "raros". Un proceso estocástico que nos permite contar eventos que ocurren a lo largo del tiempo se denomina proceso de conteo. Dentro de esta clase de procesos, tiene especial relevancia el proceso de Poisson.

En este trabajo, definiremos el proceso de Poisson y determinaremos algunas de sus propiedades, así como caracterizaciones que nos permitan reconocer un proceso de Poisson. Posteriormente, veremos cómo se puede generalizar el proceso de Poisson, dando lugar a los procesos de Poisson no homogéneos y a los procesos de Poisson compuestos, entre otros. Por último, determinaremos cómo podemos generalizar el proceso de Poisson que hemos descrito en intervalos de la recta real a un subespacio de dimensión finita, siendo los casos más interesantes para estudiar el plano \mathbb{R}^2 o una superficie de \mathbb{R}^3 .

Abstract

Poisson distribution is one of the most used distributions in Mathematics, due to its properties to analyse the probability of "rare" events occur. An stochastic process that allows us to count the number of events that occur over time is called a counting process.

Among these process, the Poisson process is of great relevance. In this project, we will define the Poisson process and we determine some properties, as well as some characterizations that allow us recognize a Poisson process. Afterwards, we will show how to generalise a Poisson process, giving place to non homogeneous Poisson process and compound Poisson process, among others. Finally, we will determine how we can generalize the Poisson Process we described previously in some intervals of the real line to a finite dimensional space, been the most interesting cases to study a map \mathbb{R}^2 or a manifold on \mathbb{R}^3 .

Objetivos

Los objetivos que se pretenden conseguir con esta memoria son:

- Definir un proceso de Poisson y probar sus principales propiedades, entre ellas la *caracterización de los procesos de Poisson*, la *ley de los Sucesos Raros*. Definir el proceso de Poisson puntual y probar los *Postulados de un proceso de Poisson*.
- Definir un proceso de Poisson no homogéneo. Demostrar los *postulados de un proceso de Poisson no homogéneo*. Ver la relación que guardan los procesos de Poisson no-homogéneos y los homogéneos.
- Describir el resultado de condicionar el proceso de Poisson y sus principales usos en estadística inferencial.
- Definir el proceso de Poisson compuesto y probar las principales propiedades. Definir la descomposición, la composición y la superposición de un proceso de Poisson compuesto y ver sus principales propiedades.
- Estudiar la relación entre la distribución uniforme y el proceso de Poisson y ver algunas de sus utilidades en la estadística inferencial.
- Definir el proceso de Poisson espacial, extendiendo el concepto de proceso de Poisson a dimensión finita, en particular al plano y al espacio.
- Ilustrar, a través de ejemplos y observaciones en cada una de las secciones, las distintas utilidades de los conceptos abordados en cada capítulo, tanto teóricas como prácticas.

Capítulo 1

Preliminares

1.1. Introducción.

Este trabajo está dedicado al estudio del proceso de Poisson. Para ello, hemos dividido el trabajo en seis capítulos.

El primer capítulo, denominado Preliminares, está dedicado al repaso de algunos conceptos estudiados durante el Grado en Matemáticas, así como la ampliación de los mismos y nuevos fundamentos teóricos. Se verán la definición de proceso estocástico de tiempo continuo y de proceso de conteo, además de estudiar las distribuciones gamma, exponencial y de Poisson. Por último, haremos un repaso de las funciones generatrices de momentos y generatrices de probabilidad. Para este capítulo, se ha utilizado el material [1], [3], y [9].

En los dos capítulos siguientes, veremos como generalizar el proceso de Poisson. En el capítulo tres, veremos como generalizar la intensidad del proceso de Poisson pasando a ser una función dependiente del tiempo, dando lugar a los procesos de Poisson no homogéneos. Posteriormente, veremos una caracterización de los procesos no homogéneos y la relación que guardan los procesos de Poisson homogéneos y no homogéneos. Por otra parte, en el capítulo cuatro, veremos el efecto de condicionar el proceso de Poisson, siendo importante para cuestiones de estadística inferencial. Posteriormente, estudiaremos el proceso de Poisson compuesto y determinaremos algunas propiedades del proceso. Seguidamente, procederemos de forma análoga con la descomposición y superposición de un proceso de Poisson. Estos tipos de proceso de Poisson tienen relevancia sobre todo en campos de estudios como el financiero. Para ello, he empleado la información de [4], [7], y [8].

En el quinto capítulo, estudiaremos la relación que guardan la distribución uniforme y el proceso de Poisson (tanto el homogéneo como el no homogéneo), lo que nos permitirá identificar si un conjunto de observaciones ocurren según un proceso de Poisson. He usado de guía para este capítulo [8].

Finalmente, en el último capítulo, veremos como se puede generalizar el proceso de Poisson,

pasando de la recta real a un subespacio de dimensión finita, siendo relevante el estudio en dimensión dos y tres. El interés de esto reside al tratar de estudiar la distribución de elementos en el espacio, bacterias en el laboratorio, etc. En este capítulo, he utilizado la información de [8].

Cabe destacar que en todos los capítulos podremos encontrar ejemplos y observaciones que ayudarán a la comprensión de los distintos aspectos tratados durante el trabajo.

En este capítulo vamos a proporcionar algunos conceptos y propiedades que van a ser necesarias para el estudio del proceso de Poisson. En general, en todo el trabajo, cuando nos referimos a una variable aleatoria (v.a.), Y , su dominio será $(\mathbb{R}, \mathcal{B})$, siendo \mathcal{B} la σ -álgebra de Borel de \mathbb{R} .

1.2. Procesos estocásticos de tiempo continuo.

Definición 1.1. Sean T un conjunto de índices, (Ω, \mathcal{A}, P) un espacio de probabilidad y $(\Omega_0, \mathcal{A}_0)$ un espacio medible. Un *proceso estocástico (sobre T)* es una familia $\{X(t), t \in T\}$ de v.a. definidas en (Ω, \mathcal{A}, P) y a valores en $(\Omega_0, \mathcal{A}_0)$. Cuando el conjunto de índices T es numerable, diremos que $\{X(t), t \in T\}$ es un *proceso estocástico de tiempo discreto*. Por otra parte, si T es un intervalo de la recta real, lo llamaremos *proceso estocástico de tiempo continuo*.

Definición 1.2. Diremos que un proceso estocástico en tiempo continuo $\{X(t), t \in T\}$ tiene *incrementos independientes* si, para todo $t_0, \dots, t_n \in T$, $t_0 < t_1 < \dots < t_n$, las variables aleatorias

$$X(t_1) - X(t_0), X(t_2) - X(t_1), \dots, X(t_n) - X(t_{n-1})$$

son independientes. Del mismo modo, diremos que un proceso estocástico tiene *incrementos estacionarios* si $X(t + s) - X(t)$ tiene la misma distribución para todo $t \in T$.

Un proceso estocástico que será recurrente en capítulos posteriores es el proceso de conteo.

Definición 1.3. Se dice que un proceso estocástico $\{S(s), s \geq 0\}$ es un *proceso de conteo* si

1. $S(s) \geq 0$.
2. $S(s)$ toma valores enteros.
3. Si $0 < t < s$, entonces $S(t) < S(s)$.
4. Para $0 < t < s$, la v.a. $S(s) - S(t)$ es igual al número de eventos que ocurren en el intervalo $(t, s]$.

Es decir, $S(s)$ representa el número de eventos que han ocurrido hasta el tiempo s , $s \geq 0$.

Para profundizar más sobre la teoría general de procesos estocásticos, consultar [6].

1.3. Función generatriz de momentos y función generatriz de probabilidad.

Definición 1.4. Sea Y una v.a.. Definimos la *función generatriz de momentos de Y* como

$$M_Y(s) = E[e^{sY}], \quad s \in \mathbb{R},$$

siempre que la esperanza exista.

A continuación, vamos a citar (sin demostración) dos teoremas (ver [1]) que nos serán de utilidad:

Teorema 1.1. Si la función generatriz de momentos de una v.a. Y está definida en un entorno de 0, entonces determina unívocamente la distribución de probabilidad de Y .

Teorema 1.2. Sea Y una v.a. tal que su función generatriz de momentos, $M_Y(s)$, existe en el intervalo (s_0, s_1) , con $s_0 < 0 < s_1$. Entonces, para todo $n \in \mathbb{N}$,

1. Existe $E[Y^n]$.
2. $E[Y^n] = \frac{d^n M_Y}{ds^n}(0)$.

Esto es, que dada una v.a. Y cuya función generatriz de momentos exista en un entorno del cero, podemos determinar los momentos de su distribución de probabilidad a partir de la misma.

De forma general, si $\mathbf{Y} = (Y_1, \dots, Y_n)^t$ es un vector aleatorio n -dimensional con valores en $(\mathbb{R}^n, \mathcal{B}^n)$, siendo \mathcal{B}^n la σ -álgebra de Borel de \mathbb{R}^n definimos su función generatriz de momentos como

$$M_{\mathbf{Y}}(s) = E[e^{s^t \mathbf{Y}}], \quad s \in \mathbb{R}^n,$$

siempre que la esperanza exista.

Definición 1.5. Sea Y una v.a.. La *función generatriz de probabilidades de Y* se define como

$$G_Y(s) = E[s^Y]$$

para $s \in \mathbb{R}$ tal que la esperanza exista.

Del mismo modo que la función generatriz de momentos, la función generatriz de probabilidad determina de forma unívoca la función de distribución de una v.a. sobre los enteros no negativos.

Proposición 1.1. Si Y y Z son variables aleatorias independientes con funciones generatrices de probabilidad G_Y y G_Z , respectivamente, se tiene:

$$G_{Y+Z}(s) = G_Y(s)G_Z(s).$$

Demostración.

$$G_{Y+Z}(s) = E[s^{Y+Z}] = E[s^Y]E[s^Z] = G_Y(s)G_Z(s),$$

donde la segunda igualdad se obtiene por la independencia de Y y Z . \square

1.4. Distribución gamma.

Una de las distribuciones de probabilidad más empleadas es la distribución gamma. Para definirla, necesitamos previamente la función gamma

Definición 1.6. Se define la función gamma como

$$\begin{aligned} \Gamma : (0, \infty) &\rightarrow \mathbb{R} \\ \alpha &\rightarrow \Gamma(\alpha) = \int_0^\infty y^{\alpha-1} e^{-y} dy. \end{aligned}$$

Proposición 1.2. Para cualquier $\alpha > 1$ tenemos que:

$$\Gamma(\alpha) = (\alpha - 1)\Gamma(\alpha - 1).$$

Demostración. Basta realizar la integración por partes, de forma que

$$\Gamma(\alpha) = -y^{\alpha-1} e^{-y} \Big|_0^\infty + \int_0^\infty (\alpha - 1) y^{\alpha-2} e^{-y} dy = (\alpha - 1) \int_0^\infty y^{\alpha-2} e^{-y} dy = (\alpha - 1)\Gamma(\alpha - 1).$$

\square

Corolario 1.1. Para cualquier $z \in \mathbb{N}$, se tiene que

$$\Gamma(z) = (z - 1)!$$

Demostración. Aplicando la proposición anterior

$$\Gamma(z) = (z - 1)\Gamma(z - 1) = (z - 1)(z - 2) \dots \Gamma(1).$$

Calculemos el valor de $\Gamma(1)$. Por definición de Γ

$$\Gamma(1) = \int_0^\infty e^{-y} dy = \lim_{N \rightarrow \infty} \int_0^N e^{-y} dy = \lim_{N \rightarrow \infty} -e^{-y} \Big|_0^N = 1.$$

\square

Definición 1.7. Sea Y una v.a.. Diremos que Y sigue una distribución *gamma de parámetros* $\alpha > 0$ y $\beta > 0$ y lo denotaremos como $Y \sim \Gamma(\alpha, \beta)$ cuando su función de densidad es:

$$f_Y(y) = \begin{cases} 0, & \text{si } y \leq 0, \\ \frac{\beta^\alpha}{\Gamma(\alpha)} y^{\alpha-1} e^{-y\beta}, & \text{si } y > 0. \end{cases}$$

A α se le llama *parámetro de forma* y a β se le conoce como *parámetro de escala*.

Proposición 1.3. Sea Y una v.a. tal que $Y \sim \Gamma(\alpha, \beta)$. Entonces $aY \sim \Gamma(\alpha, \frac{\beta}{a})$ para $a \in \mathbb{R}^+$.

Demostración. Sea un número real positivo, a , sea F_Y la función de distribución de Y y sea F_{aY} la función de distribución de aY . Entonces, dado $y \in \mathbb{R}$:

$$F_{aY}(y) = P(aY \leq y) = P\left(Y \leq \frac{y}{a}\right) = F_Y\left(\frac{y}{a}\right).$$

Luego, calculando la función de densidad de aY , f_{aY} , derivando la función de distribución obtenemos que :

$$\begin{aligned} f_{aY}(y) &= \frac{d}{dy} F_{aY}(y) = \frac{d}{dy} F_Y\left(\frac{y}{a}\right) = \frac{1}{a} f_Y\left(\frac{y}{a}\right) = \frac{\beta^\alpha}{a\Gamma(\alpha)} \left(\frac{y}{a}\right)^{\alpha-1} e^{-y\frac{\beta}{a}} \\ &= \left(\frac{\beta}{a}\right)^\alpha \frac{1}{\Gamma(\alpha)} y^{\alpha-1} e^{-y\frac{\beta}{a}}, \end{aligned}$$

que es la función de densidad de $\Gamma(\alpha, \frac{\beta}{a})$. □

Para consultar más propiedades de la función gamma, ver [9].

1.4.1. Esperanza y varianza de la distribución gamma.

Proposición 1.4. Sea Y una v.a. tal que $Y \sim \Gamma(\alpha, \beta)$. Entonces $E(Y) = \frac{\alpha}{\beta}$.

Demostración. Calculemos la media de Y a través de su función de densidad:

$$E(Y) = \int_{-\infty}^{\infty} y f_Y(y) dy = \int_0^{\infty} y \frac{\beta^\alpha}{\Gamma(\alpha)} y^{\alpha-1} e^{-y\beta} dy = \frac{\beta^\alpha}{\Gamma(\alpha)} \int_0^{\infty} y^\alpha e^{-y\beta} dy.$$

Realizando el cambio de variable $v = y\beta$, luego $y = \frac{1}{\beta}v$, $dv = \beta dy$, luego $dy = \frac{1}{\beta}dv$ en la expresión anterior, obtenemos

$$E(Y) = \frac{\beta^\alpha}{\Gamma(\alpha)} \int_0^{\infty} \left(\frac{v}{\beta}\right)^\alpha e^{-v} \frac{1}{\beta} dv = \frac{1}{\beta\Gamma(\alpha)} \int_0^{\infty} v^\alpha e^{-v} dv = \frac{\Gamma(\alpha+1)}{\beta\Gamma(\alpha)} = \frac{\alpha\Gamma(\alpha)}{\beta\Gamma(\alpha)}.$$

□

Proposición 1.5. Sea Y una v.a. tal que $Y \sim \Gamma(\alpha, \beta)$. Entonces $\text{Var}(Y) = \frac{\alpha}{\beta^2}$.

Demostración. Calculemos la varianza de Y de forma similar a la proposición anterior. En primer lugar, calculemos $E[Y^2]$:

$$E(Y^2) = \int_{-\infty}^{\infty} y^2 f_Y(y) dy = \int_0^{\infty} y^2 \frac{\beta^\alpha}{\Gamma(\alpha)} y^{\alpha-1} e^{-y\beta} dy = \frac{\beta^\alpha}{\Gamma(\alpha)} \int_0^{\infty} y^{\alpha+1} e^{-y\beta} dy.$$

Realizando el cambio de variable $v = y\beta$, luego $y = \frac{v}{\beta}$, $dy = \frac{dv}{\beta}$, luego $dv = \beta du$ en la expresión anterior, obtenemos:

$$E(Y^2) = \frac{\beta^\alpha}{\Gamma(\alpha)} \int_0^{\infty} \left(\frac{v}{\beta}\right)^{\alpha+1} e^{-v} \frac{1}{\beta} dv = \frac{1}{\beta^2 \Gamma(\alpha)} \int_0^{\infty} v^{\alpha+1} e^{-v} dv = \frac{\Gamma(\alpha+1)}{\beta^2 \Gamma(\alpha)} = \frac{(\alpha+1)\alpha \Gamma(\alpha)}{\beta^2 \Gamma(\alpha)}.$$

Luego, como $\text{Var}[Y] = E[Y^2] - E[Y]^2$,

$$\text{Var}[Y] = \frac{(\alpha+1)\alpha}{\beta^2} - \left(\frac{\alpha}{\beta}\right)^2 = \frac{\alpha}{\beta^2}.$$

□

Función generatriz de momentos de la distribución gamma.

Sea Y una v.a. tal que $Y \sim \Gamma(\alpha, \beta)$. Calculemos su función generatriz de momentos M_Y . Sea $s \in \mathbb{R}$.

$$M_Y(s) = E[e^{sY}] = \frac{\beta^\alpha}{\Gamma(\alpha)} \int_0^{\infty} e^{sy} y^{\alpha-1} e^{-y\beta} dy = \frac{\beta^\alpha}{\Gamma(\alpha)} \int_0^{\infty} e^{(s-\beta)y} y^{\alpha-1} dy.$$

Si $s \in [\beta, \infty)$, la expresión anterior deja de ser integrable. Luego, veamos el caso anterior cuando $s \in (0, \beta)$. Con el cambio de variable $v = (\beta-s)y$, $y = \frac{1}{\beta-s}v$, $dv = (\beta-s)dy$, $dy = \frac{1}{\beta-s}dv$:

$$\begin{aligned} M_Y(s) &= \frac{\beta^\alpha}{\Gamma(\alpha)} \int_0^{\infty} \frac{v^{\alpha-1}}{(\beta-s)^{\alpha-1}} e^{-v} \left(\frac{1}{\beta-s}\right) dv = \left(\frac{\beta}{\beta-s}\right)^\alpha \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^{\infty} v^{\alpha-1} e^{-v} dv \\ &= \left(\frac{\beta}{\beta-s}\right)^\alpha \frac{\Gamma(\alpha)}{\Gamma(\alpha)}. \end{aligned}$$

Es decir, $M_Y(s) = \left(\frac{\beta}{\beta-s}\right)^\alpha$, para $s \in (0, \beta)$.

Reproductividad de la distribución gamma.

Proposición 1.6. Sean Y_1, \dots, Y_n v.a. independientes tales que $Y_i \sim \Gamma(\alpha_i, \beta)$, $i \in \{1, \dots, n\}$. Se tiene que

$$Y = \sum_{i=1}^n Y_i \sim \Gamma\left(\sum_{i=1}^n \alpha_i, \beta\right).$$

Demostración. Utilizaremos la función generatriz de momentos de Y . Para $s \in (0, \beta)$ se tiene que:

$$M_Y(s) = E[e^{sY}] = E[e^{s(Y_1 + \dots + Y_n)}] = E[e^{sY_1} \dots e^{sY_n}].$$

Por la independencia de las variables aleatorias Y_1, \dots, Y_n :

$$\begin{aligned} M_Y(s) &= E[e^{sY_1}] \dots E[e^{sY_n}] = M_{Y_1}(s) \dots M_{Y_n}(s) = \left(\frac{\beta}{\beta - s}\right)^{\alpha_1} \dots \left(\frac{\beta}{\beta - s}\right)^{\alpha_n} \\ &= \left(\frac{\beta}{\beta - s}\right)^{\sum_{i=1}^n \alpha_i}, \end{aligned}$$

que es la función generatriz de momentos de $\Gamma(\sum_{i=1}^n \alpha_i, \beta)$. Por la unicidad de la función generatriz de momentos, obtenemos el resultado a probar. \square

1.5. Distribución exponencial.

Uno de los ejemplos más importantes de la distribución gamma es la distribución exponencial, que es el resultado de considerar $\alpha = 1$ y $\beta = \mu$.

Definición 1.8. Sea Y una v.a.. Diremos que Y sigue una *distribución exponencial de media μ* , y lo denotaremos como $Y \sim \exp\{\mu\}$ si tiene función de densidad

$$f_Y(y) = \begin{cases} 0, & \text{si } y < 0, \\ \mu e^{-\mu y}, & \text{si } y \geq 0. \end{cases}$$

El parámetro μ suele recibir el nombre de *intensidad*. Esta denominación la utilizaremos en los capítulos posteriores en los procesos de Poisson.

Equivalentemente, podemos describir esta distribución a partir de su función de distribución:

$$F_Y(y) = 1 - P(Y > y) = 1 - e^{-\mu y}, \text{ si } y \geq 0; \text{ } 0 \text{ si } y < 0.$$

Si Y es una v.a. tal que $Y \sim \exp\{\mu\}$, podemos calcular la media y la varianza de Y como resultado de la Proposición 1.4 y 1.5:

$$E[Y] = 1/\mu, \quad \text{Var}[Y] = 1/\mu^2.$$

Nótese que, tanto la media como la varianza, son dependientes del parámetro μ . Una vez descritas ambas expresiones, procedamos a nombrar y probar algunas propiedades de esta distribución.

1.5.1. Propiedades de la distribución exponencial

Proposición 1.7. (Pérdida de memoria): Sea Y una v.a. tal que $Y \sim \exp\{\mu\}$. Sean $y, s > 0$, entonces se cumple:

$$P(Y > y + s \mid Y > y) = P(Y > s).$$

Demostración.

$$P(Y > y + s \mid Y > y) = \frac{P(Y > y + s)}{P(Y > y)} = \frac{e^{-\mu(y+s)}}{e^{-\mu y}} = e^{-\mu s} = P(Y > s).$$

□

Proposición 1.8. Sean Y_1, \dots, Y_n variables aleatorias independientes tales que $Y_i \sim \exp\{\mu_i\}$. Entonces

$$P(\min(Y_1, \dots, Y_n) > s) = \exp\left\{-\sum_{i=1}^n \mu_i\right\} \quad \forall s \in \mathbb{R}.$$

Sea I el índice aleatorio de la menor de las variables aleatorias Y_i anteriores, es decir, $Y_I = \min(Y_1, \dots, Y_n)$. Entonces

$$P(I = i) = \frac{\mu_i}{\mu_1 + \dots + \mu_n}.$$

Demostración. En primer lugar, probémoslo para el caso de dos variables. Sean Y_1, Y_2 v.a. independientes tales que $Y_i \sim \exp\{\mu_i\}$ para $i = 1, 2$. Entonces, para $s > 0$:

$$P(\min(Y_1, Y_2) > s) = P(\{Y_1 > s\} \cap \{Y_2 > s\}) = P(Y_1 > s)P(Y_2 > s) = e^{-(\mu_1 + \mu_2)s}.$$

Es decir, el mínimo de las dos v.a. sigue una distribución exponencial de parámetro $\mu_1 + \mu_2$. Vamos a ver con qué probabilidad una variable exponencial es menor que la otra:

$$\begin{aligned} P(Y_1 = \min(Y_1, Y_2)) &= P(Y_2 > Y_1) = \int_0^\infty P(Y_2 > y) f_{Y_1}(y) dy \\ &= \int_0^\infty \mu_1 e^{-\mu_1 y} e^{-\mu_2 y} dy \\ &= \frac{\mu_1}{\mu_1 + \mu_2} \int_0^\infty (\mu_1 + \mu_2) e^{-(\mu_1 + \mu_2)y} dy \\ &= \frac{\mu_1}{\mu_1 + \mu_2}. \end{aligned}$$

Una vez descrito el caso de dos variables, veamos el caso de n variables aleatorias:

$$\begin{aligned}
P(\min(Y_1, \dots, Y_n) > s) &= P(\{Y_1 > s\} \cap \dots \cap \{Y_n > s\}) \\
&= P(Y_1 > s) \cdots P(Y_n > s) \\
&= \prod_{i=1}^n P(Y_i > s) \\
&= e^{-(\mu_1 + \dots + \mu_n)s}.
\end{aligned}$$

Al igual que en el caso de dos variables, comparemos Y_i e $Y = \min(Y_1, \dots, Y_{i-1}, Y_{i+1}, \dots, Y_n)$. Por el resultado previo del caso de dos variables aleatorias, sabemos que Y sigue una distribución exponencial de parámetro $(\mu_1 + \dots + \mu_n) - \mu_i$:

$$\begin{aligned}
P(Y_i = \min(Y_1, \dots, Y_n)) &= P(Y_i < Y_1, \dots, Y_i < Y_{i-1}, Y_i < Y_{i+1}, \dots, Y_i < Y_n) = P(Y_i < Y) \\
&= \frac{\mu_i}{\mu_i + (\mu_1 + \dots + \mu_n) - \mu_i} \\
&= \frac{\mu_i}{\mu_1 + \dots + \mu_n}.
\end{aligned}$$

□

Acabamos de probar cómo se distribuye el mínimo de variables aleatorias que siguen una distribución exponencial; veamos cómo se distribuye la suma.

Proposición 1.9. La suma de variables aleatorias Y_1, \dots, Y_n independientes e idénticamente distribuidas tales que $Y_i \sim \exp\{\mu\}$ sigue una distribución $\Gamma(n, \mu)$, $n \in \mathbb{N}$, $\mu > 0$. Es decir, si $\Phi_n = \sum_{i=1}^n Y_i$, entonces su función de densidad es:

$$f_{\Phi_n}(s) = \begin{cases} 0, & \text{si } s < 0, \\ \mu e^{-\mu s} \frac{(\mu s)^{n-1}}{(n-1)!}, & \text{si } s \geq 0. \end{cases}$$

Demostración. Se obtiene como consecuencia de la reproductividad de la distribución gamma. □

Observación 1.1. La distribución gamma cuyo primer parámetro sea un número natural se conoce como distribución Erlang y se denota como $Erlang(n, \lambda)$, $n \in \mathbb{N}$, $\lambda > 0$. Sea Y v.a. tal que $Y \sim Erlang(n, \lambda)$, entonces su función de distribución es

$$F_Y(s) = \begin{cases} 0, & \text{si } s < 0, \\ \sum_{k=n}^{\infty} \frac{(\lambda s)^k e^{-\lambda s}}{k!}, & \text{si } s \geq 0, \end{cases}$$

poniendo en manifiesto su relación con la distribución de Poisson.

Observación 1.2. Otro importante caso particular de la distribución gamma es la distribución chi-cuadrado. Si X es una v.a. tal que $X \sim \Gamma\left(\frac{n}{2}, \frac{1}{2}\right)$, $n \in \mathbb{N}$, entonces $X \sim \chi_n^2$. Esto nos será útil en posteriores capítulos para elaborar intervalos de confianza.

Corolario 1.2. Con las notaciones anteriores, se tiene que si $Y = Y_1 + \cdots + Y_n$, con Y_1, \dots, Y_n v.a. independientes e idénticamente distribuidas (v.a.i.i.d) según $\exp\{\mu\}$,

$$E[Y] = \frac{n}{\mu}, \text{Var}[Y] = \frac{n}{\mu^2}.$$

Demostración. La demostración es consecuencia de las Proposiciones 1.4, 1.5 y 1.9. \square

1.6. Distribución de Poisson.

Una vez vistas las propiedades de la distribución exponencial, vamos a estudiar la distribución de Poisson.

Definición 1.9. Diremos que una v.a. Y sigue una *distribución de Poisson de parámetro* $\mu > 0$ y lo denotaremos como $Y \sim \mathcal{P}(\mu)$ si toma valores en el conjunto $\mathbb{N} \cup \{0\}$ con probabilidad

$$P(Y = n) = e^{-\mu} \frac{\mu^n}{n!}, \quad n \in \mathbb{N} \cup \{0\}.$$

La función generatriz de momentos de una v.a. Y que sigue esta distribución es:

$$M_Y(s) = E[e^{sY}] = \sum_{k=0}^{\infty} e^{sk} e^{-\mu} \frac{\mu^k}{k!} = e^{-\mu} e^{\mu e^s} = e^{\mu(e^s - 1)}, \quad s \in \mathbb{R}.$$

Por otra parte, la función generatriz de probabilidad de Y es

$$G_Y(s) = E[s^Y] = \sum_{k=0}^{\infty} s^k e^{-\mu} \frac{\mu^k}{k!} = e^{-\mu} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(s\mu)^k}{k!} = e^{\mu(s-1)}, \quad s \in \mathbb{R}.$$

Proposición 1.10. Sea Y una v.a. tal que $Y \sim \mathcal{P}(\mu)$, $\mu > 0$. Se tiene que

$$E[Y] = \mu, \quad \text{Var}[Y] = \mu.$$

Demostración. Podemos obtener los momentos de la distribución de Poisson, la media y la varianza, a partir de la función generatriz de probabilidad:

$$E[Y] = \frac{dG_Y(s)}{ds} \Big|_{s=1} = \mu e^{\mu(s-1)} \Big|_{s=1} = \mu.$$

$$E[Y(Y-1)] = \frac{d^2 G_Y(s)}{ds^2} \Big|_{s=1} = \mu^2 e^{\mu(s-1)} \Big|_{s=1} = \mu^2.$$

$$E[Y^2] = E[Y(Y-1)] + E[Y] = \mu^2 + \mu.$$

$$\text{Var}[Y] = E[Y^2] - E[Y]^2 = \mu^2 + \mu - \mu^2 = \mu.$$

Proposición 1.11. Si Y, Z son dos v.a. independientes que tienen distribución $\mathcal{P}(\mu)$ y $\mathcal{P}(\delta)$, respectivamente, $Y + Z$ tiene distribución $\mathcal{P}(\mu + \delta)$.

Demostración. Utilizando la función generatriz de probabilidad, se tiene que

$$G_{Y+Z}(s) = G_Y(s)G_Z(s) = e^{\mu(s-1)}e^{\delta(s-1)} = e^{(\mu+\delta)(s-1)},$$

donde se usa la hipótesis de independencia en la primera igualdad. \square

Proposición 1.12. Sea N una v.a. tal que $N \sim \mathcal{P}(\mu)$ y sea M una v.a. tal que, condicionada a N , tiene una distribución binomial de parámetros N y p . Entonces, la distribución incondicional de M es de Poisson de parámetro μp .

Demostración. Consideremos M como la suma de N v.a. con distribución de Bernoulli con probabilidad de éxito p :

$$M = Y_1 + \cdots + Y_N,$$

i.e. cada Y_i , $i \geq 1$ sigue una distribución de Bernoulli con probabilidad de éxito p . La función generatriz de probabilidad de una variable de Bernoulli es

$$G_{Y_i}(s) = E[s^{Y_i}] = (1 - p) + sp.$$

Por otra parte, ya hemos visto anteriormente que la función generatriz de probabilidad de N es $G_N(s) = e^{\mu(s-1)}$. Luego la función generatriz de probabilidad de M es

$$\begin{aligned} G_M(s) &= E[s^M] = \sum_{k=0}^{\infty} E[s^{Y_1+\cdots+Y_n}] P(N = k) \\ &= G_N(G_{Y_i}(s)) = e^{\mu((1-p)+sp-1)} = e^{\mu(sp-p)} \\ &= e^{\mu p(s-1)}, \end{aligned}$$

que es la función generatriz de probabilidad de una v.a. de Poisson con parámetro μp . \square

Capítulo 2

El proceso de Poisson

Consideremos $s \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ y una serie de eventos que han ocurrido en instantes de tiempo determinados. Denotemos por Y_n al tiempo transcurrido entre los eventos $n-1$ y n -ésimo y sea Φ_n el tiempo transcurrido entre el instante inicial hasta la ocurrencia del evento n -ésimo; esto es $\Phi_n = Y_1 + \dots + Y_n$, $n = 1, 2, \dots$

Definición 2.1. Sean Y_1, \dots, Y_n v.a.i.i.d. con distribución exponencial de parámetro $\mu > 0$. Definimos un *proceso de Poisson* $\{S(s); s \geq 0\}$ de *parámetro* μ de la siguiente forma:

$$S(s) := \max\{n : \Phi_n \leq s\}; s \geq 0.$$

Al parámetro μ se le llama *intensidad* o *tasa*. Notemos que $S(s) = k$ cuando el evento k -ésimo ha ocurrido, pero no el evento $(k+1)$ -ésimo, para $0 \leq k < n$.

Podemos ver la ilustración de una trayectoria de un proceso de Poisson en la Figura 2.1. Veamos ahora tres lemas que caracterizan los procesos de Poisson:

Lema 2.1. Para todo $s > 0$, $S(s)$ es una variable aleatoria que tiene distribución de Poisson de parámetro μs .

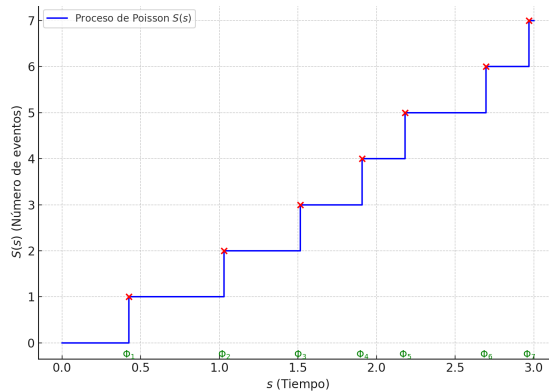


Figura 2.1: Proceso de Poisson con intensidad $\mu = 2$.

Demostración. Si $S(s) = n$, entonces el n -ésimo evento ya ha ocurrido antes del instante s y el $(n+1)$ -ésimo evento ocurrirá posterior a s . Utilizando la ley de la probabilidad total, se obtiene:

$$P(S(s) = n) = \int_0^s P(\Phi_{n+1} > s \mid \Phi_n = t) f_{\Phi_n}(t) dt = \int_0^s P(Y_{n+1} > s - t) f_{\Phi_n}(t) dt.$$

Hemos probado en los Preliminares en la Proposición 1.9 que la función de densidad de Φ_n es $f_{\Phi_n}(s) = \mu e^{-\mu s} \frac{(\mu s)^{n-1}}{(n-1)!}$, con $t > 0$. Luego

$$\begin{aligned} P(S(s) = n) &= \int_0^s \frac{(\mu t)^{n-1}}{(n-1)!} e^{-\mu(s-t)} \mu e^{-\mu t} dt = \frac{\mu^n}{(n-1)!} e^{-\mu s} \int_0^s t^{n-1} dt \\ &= \frac{\mu^n}{n(n-1)!} e^{-\mu s} s^n = \frac{(\mu s)^n}{n!} e^{-\mu s}. \end{aligned}$$

□

Lema 2.2. Fijado $s \geq 0$, $\{S(t+s) - S(s), t \geq 0\}$ es un proceso de Poisson de intensidad $\mu > 0$ y es independiente de $\{S(k), 0 \leq k \leq s\}$.

Demostración. Podemos suponer que $S(s) = n$ y que el evento n -ésimo ocurrió en el instante de tiempo $\Phi_n = \phi_n$. Sabemos, por lo anterior, que debe cumplirse que $\phi_n + Y_{n+1} > s$, pero, por la propiedad de la falta de memoria de la distribución exponencial,

$$P(Y_{n+1} > s - \phi_n + t \mid Y_{n+1} > s - \phi_n) = P(Y_{n+1} > t) = e^{-\mu t}.$$

Esto prueba que el tiempo de espera hasta el primer evento posterior a s sigue una distribución exponencial de parámetro μ y que es independiente de Y_i para $i \in \{1, \dots, n\}$. Por otra parte, $Y_j, j > n$, son independientes de $Y_i, i \in \{1, \dots, n\}$, por lo tanto también de $\Phi_k, k \in \{1, \dots, n\}$. Luego los intervalos entre eventos que ocurren después de s son variables independientes idénticamente distribuidas con distribución exponencial de parámetro μ . Luego $\{S(t+s) - S(s), t > 0\}$ es un proceso de Poisson de intensidad μ . □

Lema 2.3. $\{S(s), s > 0\}$ tiene incrementos independientes; es decir, si $0 < s_0 < s_1 < \dots < s_n$, entonces

$$S(s_1) - S(s_0), \dots, S(s_n) - S(s_{n-1}) \text{ son variables aleatorias independientes.}$$

Demostración. El lema anterior prueba que $S(s_n) - S(s_{n-1})$ es independiente de $S(s)$ para $s \leq s_{n-1}$ y, por lo tanto, también de $S(s_{n-1}) - S(s_{n-2}), \dots, S(s_1) - S(s_0)$.

Supongamos que lo anterior se cumple para $k = n$ y veamos que se cumple para $k+1 = n+1$. Es decir, tenemos que probar que, para $0 < s_0 < s_1 < \dots < s_k < s_{k+1}$, $S(s_i) - S(s_{i-1})$ son independientes, $i = 1, \dots, k+1$. Por hipótesis de inducción, se tiene que $S(s_j) - S(s_{j-1})$ son independientes, $j = 1, \dots, k$. El lema previo garantiza que, $\{S(t+s_k) - S(s_k), t \geq 0\}$

es un proceso de Poisson de intensidad $\mu > 0$ y es independiente de $\{S(s), 0 \leq s \leq s_k\}$. En particular, $S(s_{k+1}) - S(s_k)$ es independiente de $\{S(s), 0 \leq s \leq s_k\}$, por lo que también es independiente de $S(s_j) - S(s_{j-1})$, $j = 1, \dots, k$. Luego, $S(s_1) - S(s_0), \dots, S(s_{k+1}) - S(s_k)$ son variables aleatorias independientes. \square

Una vez probados los lemas anteriores, veamos un teorema que caracteriza al proceso de Poisson.

Teorema 2.1. (Caracterización de los Procesos de Poisson). Un proceso de conteo $\{S(s), s \geq 0\}$ es un proceso de Poisson de intensidad $\mu > 0$ si y solo si se cumplen

- a) $S(0) = 0$.
- b) Tiene incrementos independientes.
- c) $S(t + s) - S(s)$ sigue una distribución de Poisson de intensidad μt .

Demostración. La condición suficiente la hemos probado en los dos primeros lemas. Probemos la condición necesaria. Supongamos que se cumplen simultaneamente a), b) y c). Sea un proceso de conteo $\{S(s), s \geq 0\}$ y sea $\mu > 0$. Definamos $\Phi_n := \inf\{s > 0 : S(s) = n\}$, $n \in \mathbb{N}$, que es el instante en el que ocurre el n -ésimo evento. Si $n = 0$, $\Phi_0 = 0$. Definamos las variables aleatorias Y_1, Y_2, \dots, Y_n , $n \in \mathbb{N}$ como $Y_n = \Phi_n - \Phi_{n-1}$. Probemos en primer lugar que $\Phi_n \sim \Gamma(n, \mu)$. La relación fundamental reside en que, para cada n , y $s \geq 0$,

$$\{\Phi_n \leq s\} = \{S(s) \geq n\}.$$

Luego, Φ_n , $n \in \mathbb{N}$ es una variable aleatoria. Además, utilizando la propiedad c), se tiene

$$P(\Phi_n \leq s) = P(S(s) \geq n) = \sum_{k=n}^{\infty} \frac{(\mu s)^k e^{-\mu s}}{k!},$$

de donde podemos obtener la función de densidad de Φ_n :

$$\begin{aligned} f_{\Phi_n}(s) &= \frac{d}{ds} P(\Phi_n \leq s) = \frac{d}{ds} \left(\sum_{k=n}^{\infty} \frac{(\mu s)^k e^{-\mu s}}{k!} \right) = \sum_{k=n}^{\infty} \frac{\mu k (\mu s)^{k-1} e^{-\mu s} - \mu (\mu s)^k e^{-\mu s}}{k!} \\ &= \sum_{k=n}^{\infty} e^{-\mu s} \left[\frac{\mu k (\mu s)^{k-1} - \mu (\mu s)^k}{k!} \right] = \mu e^{-\mu s} \left[\sum_{k=n}^{\infty} \frac{(\mu s)^{k-1}}{(k-1)!} - \sum_{k=n}^{\infty} \frac{(\mu s)^k}{k!} \right] \\ &= \mu e^{-\mu s} \frac{(\mu s)^{n-1}}{(n-1)!}, \end{aligned}$$

por lo que $\Phi_n \sim \Gamma(n, \mu)$.

Veamos ahora que Y_1, \dots, Y_n son variables aleatorias que siguen una distribución exponencial $\mu > 0$. Para ello, veamos en primer lugar que (Φ_1, \dots, Φ_n) tienen densidad conjunta, para $s_1 < \dots < s_n$,

$$\hat{f}_{(\Phi_1, \dots, \Phi_n)}(s_1, \dots, s_n) = \mu^n e^{-\mu s_n}, \text{ para } s_1 < \dots < s_n. \quad (2.1)$$

Supongamos que $s_1 < \dots < s_n$ y sean $h_1, \dots, h_n > 0$ tal que los intervalos $(s_k, s_k + h_k]$, $i = 1, \dots, n$ son disjuntos. Entonces

$$\begin{aligned} & P(\Phi_1 \in (s_1, s_1 + h_1] \cap \dots \cap \{\Phi_n \in (s_n, s_n + h_n]\}) \\ &= P(S(s_1) = 0, S(s_1 + h_1) - S(s_1) = 1, S(s_2) - S(s_1 + h_1) = 0, \dots, \\ & S(s_n) - S(s_{n-1} + h_{n-1}) = 0, S(s_n + h_n) - S(s_n) = 1) \\ &= P(S(s_1) = 0) \cdot P(S(s_1 + h_1) - S(s_1) = 1) \cdot P(S(s_2) - S(s_1 + h_1) = 0) \dots \\ & P(S(s_n) - S(s_{n-1} + h_{n-1}) = 0) \cdot P(S(s_n + h_n) - S(s_n) = 1) \\ &= P(S(s_1) = 0) \cdot P(S(h_1) = 1) \cdot P(S(s_2 - s_1 - h_1) = 0) \dots \cdot P(S(h_n) = 1) \\ &= e^{-\mu s_1} \mu e^{-\mu h_1} h_1 e^{-\mu(s_2 - (s_1 + h_1))} \dots e^{-\mu(s_n - (s_{n-1} + h_{n-1}))} \mu e^{-\mu s_n} h_n \\ &= \mu^n e^{-\mu(s_n + h_n)} \prod_{i=1}^n h_i. \end{aligned}$$

Luego dividiendo entre $\prod_{i=1}^n h_i$ en ambos miembros de la expresión y tomando límites $\max_{i \in \{1, \dots, n\}} h_i \rightarrow 0$, se obtiene (2.1). Vamos a aplicar el teorema de cambio de variables. Para ello, vamos a definir la función

$$g: \mathbb{R}_+^n \rightarrow \mathbb{R}_+^n \quad g(s_1, \dots, s_n) = (s_1, s_2 - s_1, \dots, s_n - s_{n-1}),$$

de tal forma que $(Y_1, \dots, Y_n) = g(\Phi_1, \dots, \Phi_n)$. Entonces, g es invertible con inversa

$$h(y_1, \dots, y_n) = (y_1, y_1 + y_2, \dots, y_1 + \dots + y_n),$$

y el determinante del Jacobiano en un punto cualquiera (y_1, \dots, y_n) de h es:

$$|J_h(y_1, \dots, y_n)| = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 1 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 1 & 1 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \end{vmatrix} = 1.$$

Luego, considerando que $\hat{f}_{(\Phi_1, \dots, \Phi_n)}(s_1, \dots, s_n) = \mu^n e^{-\mu s_n}$, la densidad conjunta de (Y_1, \dots, Y_n) es

$$\begin{aligned} f_{(Y_1, \dots, Y_n)}(y_1, \dots, y_n) &= \hat{f}_{(\Phi_1, \dots, \Phi_n)}(y_1, y_1 + y_2 + \dots, y_1 + \dots + y_n) = \mu^n e^{-\mu(y_1 + \dots + y_n)} \\ &= \prod_{i=1}^n \mu e^{-\mu y_i}, \end{aligned}$$

probándose así también la independencia de las variables aleatorias Y_1, \dots, Y_n y que la distribución es exponencial de parámetro $\lambda > 0$. Luego, $\{S(s), s \geq 0\}$ es un proceso de Poisson de intensidad μ . \square

Una vez vista la caracterización de los procesos de Poisson, veamos un ejemplo de este tipo de procesos.

Ejemplo 2.1. Los clientes llegan a una tienda de acuerdo con un proceso de Poisson de tasa $\mu = 4$ por hora. Si la tienda abre a las 9 a.m. ¿Cuál es la probabilidad de que exactamente un cliente haya entrado antes de las 9:30 a.m. y que un total de cinco hayan entrado antes de las 11:30 a.m.?

Medimos el tiempo s en horas a partir de las 9 a.m. Queremos hallar $P(S(1/2) = 1, S(5/2) = 5)$, y para esto usaremos la independencia de los incrementos y su estacionariedad:

$$\begin{aligned} P(S(1/2) = 1, S(5/2) = 5) &= P(S(1/2) = 1, S(5/2) - S(1/2) = 4) \\ &= \frac{e^{-4(1/2)} 4(1/2)}{1!} \frac{e^{-4(2)} [4(2)]^4}{4!} \\ &= 0.0155. \end{aligned}$$

■

Teorema 2.2. (Ley de los sucesos raros). Sean Y_{n1}, \dots, Y_{nn} variables aleatorias independientes e idénticamente distribuidas, con distribución común de Bernoulli de parámetro p_n , $0 < p_n < 1$, $n = 1, 2, \dots$. Sea $S_n = \sum_{i=1}^n Y_{ni}$, $n = 1, 2, \dots$. Entonces, si $np_n \rightarrow \mu \in (0, +\infty)$ cuando $n \rightarrow +\infty$, se verifica que

$$S_n \xrightarrow{d} Y, \quad Y \sim \mathcal{P}(\mu).$$

Demostración. Sean Y_{n1}, \dots, Y_{nn} variables aleatorias independientes e idénticamente distribuidas, con distribución común de Bernoulli de parámetro p_n , $0 < p_n < 1$, $n = 1, 2, \dots$. Sea $S_n = \sum_{i=1}^n Y_{ni}$, $n = 1, 2, \dots$. La función generatriz de momentos de una variable Bernoulli con parámetro p_n es:

$$M_{Y_{ni}}(t) = E[e^{tY_{ni}}] = (1 - p_n) + p_n e^t.$$

Debido a la independencia de las Y_{ni} , la función generatriz de momentos de S_n es:

$$M_{S_n}(t) = [M_{Y_{ni}}(t)]^n = [(1 - p_n) + p_n e^t]^n.$$

Puesto que, por hipótesis, $np_n \rightarrow \mu \in (0, +\infty)$, se tiene que

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \left((1 - p_n) + p_n e^t \right)^n &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\left(1 - \frac{\mu}{n} \right) + \frac{\mu}{n} e^t \right)^n = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{\mu(e^t - 1)}{n} \right)^n \\ &= \exp\{\mu(e^t - 1)\}. \end{aligned}$$

La función generatriz de momentos obtenida se corresponde a la de una variable aleatoria Y que sigue una distribución de Poisson con intensidad $\mu > 0$, luego la suma de las variables Y_{n1}, \dots, Y_{nn} , S_n , converge en distribución a Y .

□

Observación 2.1. En términos heurísticos, la demostración anterior se puede demostrar de la siguiente forma:

Sea Y una v.a. que sigue una distribución Binomial de parámetros n y $\frac{\mu}{n}$. Entonces, dado $k \in \{0, \dots, n\}$,

$$\begin{aligned} P(Y = k) &= \binom{n}{k} \left(\frac{\mu}{n}\right)^k \left(1 - \frac{\mu}{n}\right)^{n-k} \\ &= \frac{n!}{(n-k)!k!} \frac{\mu^k}{n^k} \left(1 - \frac{\mu}{n}\right)^n \left(1 - \frac{\mu}{n}\right)^{-k} \\ &= \frac{\mu^k}{k!} \frac{n(n-1) \cdots (n-k+1)}{n^k} \left(1 - \frac{\mu}{n}\right)^n \left(1 - \frac{\mu}{n}\right)^{-k}. \end{aligned}$$

Vamos a estudiar el límite cuando $n \rightarrow \infty$:

- a) $\frac{\mu^k}{k!}$ no depende de n .
- b) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n(n-1) \cdots (n-k+1)}{n^k} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{n} \frac{n-1}{n} \cdots \frac{n-k+1}{n} = 1$.
- c) $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{\mu}{n}\right)^{-k} = 1$.
- d) $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{\mu}{n}\right)^n = e^{-\mu}$.

Luego al reagrupar los resultados, tenemos que, cuando $n \rightarrow \infty$,

$$P(Y = k) \rightarrow \frac{\mu^k}{k!} e^{-\mu},$$

que es la probabilidad de tomar el valor k de una distribución de Poisson de intensidad μ .

Observación 2.2. El teorema anterior se puede entender, de manera menos rigurosa, de la siguiente manera: sea Y una v.a. tal que Y tiene distribución Binomial de parámetros n y $\frac{\mu}{n}$. Entonces, para cierto $n \in \mathbb{N}$ lo suficientemente grande, $Y \sim \mathcal{P}(\mu)$.

Observación 2.3. Podemos obtener el mismo resultado si en vez de $np_n = \mu$, tenemos que $p_n \rightarrow 0$ cuando $n \rightarrow \infty$, de modo que $np_n \rightarrow \mu$.

Existen en el modelo expuesto dos hipótesis muy fuertes: en primer lugar, asumimos que todos los sucesos tienen la misma probabilidad de éxito; en segundo lugar, que el tiempo transcurrido entre el instante inicial hasta el evento n -ésimo, Φ_n , es una constante múltiplo del intervalo de tiempo en el que ocurren los eventos (a los procesos de Poisson que cumplen la segunda hipótesis se les llama procesos de Poisson homogéneos). Veremos más adelante en otras secciones que podemos rebajar alguna de estas hipótesis.

Vamos a enunciar un teorema que nos aporta una cota para la diferencia entre la distribución de Poisson de parámetro μ_n y la distribución de S_n , para $n \in \mathbb{N}$.

Teorema 2.3. Para cada $n \in \mathbb{N}$, sean $Y_{n,m}, 1 \leq m \leq n, n \geq 1$, variables aleatorias independientes que cumplen

$$P(Y_{n,m} = 1) = p_{n,m}; \quad P(Y_{n,m} = 0) = 1 - p_{n,m}.$$

Sean

$$S_n = Y_{n,1} + \cdots + Y_{n,n} \quad \text{y} \quad \mu_n = E[S_n] = p_{n,1} + \cdots + p_{n,n}.$$

Sea $Z_n \sim \mathcal{P}(\mu_n)$. Entonces, se cumple que, para cualquier conjunto $B \subseteq \mathbb{N} \cup \{0\}$

$$|P(S_n \in B) - P(Z_n \in B)| \leq \sum_{m=1}^n p_{n,m}^2.$$

Demostración. La demostración de este resultado puede encontrarse en [2] en la página 85.

A partir de este resultado, podemos obtener el siguiente corolario:

Corolario 2.1. Supongamos que, con las notaciones anteriores del teorema, $\mu_n \rightarrow \mu < \infty$ y que $\max_{k \in \{1, \dots, n\}} p_{n,k} \rightarrow 0$ cuando $n \rightarrow \infty$, entonces

$$\max_{B \subseteq \mathbb{N} \cup \{0\}} |P(S_n \in B) - P(Z_n \in B)| \rightarrow 0.$$

Demostración. Como $p_{n,m}^2 \leq p_{n,m} \max_{k \in \{1, \dots, n\}} p_{n,k}$, sumando sobre m obtenemos

$$\sum_{m=1}^n p_{n,m}^2 \leq \max_{k \in \{1, \dots, n\}} p_{n,k} \sum_{m=1}^n p_{n,m}.$$

El primer factor de la derecha tiende a cero por hipótesis. El segundo converge a $\mu < \infty$ y, en consecuencia, el producto de los dos, por el álgebra de límites, converge a cero. \square

Ya establecida la cota que buscábamos, vamos a proponer una caracterización de los procesos de Poisson en forma de postulados, equivalente a la descrita en el Teorema 2.1 (caracterización de los procesos de Poisson), debido a que en la práctica es difícil probar que se satisface la condición c).

Consideremos una sucesión de eventos que ocurren en $[0, \infty)$, como por ejemplo los desperfectos a lo largo de una cuerda, el número de autobuses que pasan por una parada o el número de clientes que entran en un establecimiento. Sea $\tilde{S}((a, b])$ el número de eventos que ocurren en el intervalo de tiempo $(a, b]$, es decir, si representamos como $\Phi_1, \Phi_2, \Phi_3, \dots$ tales que $\Phi_i < \Phi_j, i < j$, a los instantes de tiempo en el que ocurren eventos sucesivos. Luego $\tilde{S}((a, b])$ es el número de estos instantes Φ_i que satisfacen $a < \Phi_i \leq b$.

Definición 2.2. Al proceso $\{\tilde{S}((a, b]), b > a > 0\}$ anterior se le llama *proceso puntual de Poisson*.

Los valores que toma se pueden calcular a partir de los del proceso $S(s)$ de la siguiente manera:

$$\tilde{S}((p, q]) = S(q) - S(p).$$

De la misma forma $S(s) = \tilde{S}((0, s])$, de modo que ambos procesos son equivalentes, siendo la única diferencia en el enfoque, más útil o no al considerarlo de una forma u otra dependiendo del caso.

Antes de proponer los postulados del proceso de Poisson, veamos la siguiente definición.

Definición 2.3. Diremos que una función f es de orden h y lo denotaremos como $o(h)$ si $\frac{f(h)}{h} \rightarrow 0$ cuando $h \rightarrow 0$.

Teorema 2.4. (Postulados de un proceso de Poisson). Un proceso de conteo $\{S(s), s \geq 0\}$ es un proceso de Poisson si y solo si se cumplen simultáneamente

- a) El número de eventos que ocurren en intervalos disjuntos son variables aleatorias independientes. Es decir, para un natural $m > 1$, y cualquier instante de tiempo $s_0 = 0 < s_1 < \dots < s_m$ las variables aleatorias

$$S((s_0, s_1]), S((s_1, s_2]), \dots, S((s_{m-1}, s_m])$$

son independientes.

- b) Para cualquier instante de tiempo s y cualquier $h > 0$, la distribución de probabilidad de $S((s, s + h])$ depende solamente de la longitud del intervalo $(s, s + h]$ y no de s .
- c) Existe una constante positiva μ para la que la probabilidad de que ocurra (al menos) un evento en un intervalo de longitud h es

$$P(S((s, s + h]) \geq 1) = \mu h + o(h), \quad h \rightarrow 0.$$

- d) La probabilidad de que haya dos o más eventos en un intervalo de longitud h es $o(h)$:

$$P(S((s, s + h]) \geq 2) = o(h), \quad h \rightarrow 0.$$

Demostración. Veamos en primer lugar que estos postulados dan lugar a un proceso de Poisson. Sea $\{S(s), s \geq 0\}$ un proceso de conteo que cumpla los cuatro postulados. Podemos asumir que para describir la ley de probabilidad del sistema basta con determinar la distribución de probabilidad de $S((0, s]) = S(s)$, ya que, por una parte, el número de eventos que ocurren en intervalos disjuntos son independientes por a); por otro lado, por b), la distribución de probabilidad de $S((s, s + h])$ es la misma que la de $S((0, h])$. Veamos que

$$P(S(s) = k) = \frac{(\mu s)^k e^{-\mu s}}{k!}.$$

Para demostrar lo anterior, dividamos el intervalo $(0, s]$ en n subintervalos de longitud $h = \frac{s}{n}$ y definimos las siguientes variables de Bernoulli: $\theta_{n,i} = 1$ si ocurre algún evento en el

intervalo $((i-1)h, ih]$, para $1 \leq i \leq n$. La variable aleatoria $T_n = \theta_{n,1} + \dots + \theta_{n,n}$ representa el número de subintervalos que contienen al menos un evento y, según el postulado *c*), se obtiene:

$$p_{n,i} = P(\theta_{n,i} = 1) = \frac{\mu s}{n} + o\left(\frac{s}{n}\right).$$

Denotando como

$$\lambda_n = \sum_{i=1}^n p_{i,n} = \mu s + no\left(\frac{s}{n}\right),$$

y utilizando el Teorema 2.3, se obtiene:

$$\left| P(T_n = k) - \frac{\lambda_n^k e^{-\lambda_n}}{k!} \right| \leq n \left[\frac{\mu s}{n} + o\left(\frac{s}{n}\right) \right]^2 = \frac{(\mu s)^2}{n} + 2\mu s o\left(\frac{s}{n}\right) + no\left(\frac{s}{n}\right)^2.$$

Como $o(h) = o\left(\frac{s}{n}\right)$ es un término de orden $h = s/n$ cuando $n \rightarrow \infty$, se tiene que:

$$no(s/n) = s \frac{o(s/n)}{s/n} = s \frac{o(h)}{h} \rightarrow 0.$$

Tomando límite cuando $n \rightarrow \infty$, con $\lambda_n \rightarrow \lambda = \mu s$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P(T_n = k) = \frac{\lambda^k e^{-\lambda}}{k!}.$$

Para completar la demostración, solo falta probar que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P(T_n = k) = P(S((0, s]) = k).$$

Sabemos que T_n y $S((0, s])$ son diferentes si al menos alguno de los subintervalos contiene dos o más eventos, pero el postulado *d*) lo impide pues

$$\begin{aligned} |P(S(s) = k) - P(T_n = k)| &\leq P(S(s) \neq T_n) \\ &\leq \sum_{i=1}^n P\left(S\left(\left(\frac{(i-1)s}{n}, \frac{is}{n}\right]\right) \geq 2\right) \\ &\leq no\left(\frac{s}{n}\right) \rightarrow 0 \quad \text{cuando } n \rightarrow \infty. \end{aligned}$$

Entonces

$$P(S((0, s]) = k) = \frac{(\mu s)^k e^{-\mu s}}{k!}, \text{ para } k \geq 0.$$

Para ver la otra implicación, si $\{S(s), s \geq 0\}$ es un proceso de Poisson, se tiene trivialmente *a*) y *b*) de los Lemas 2.1, 2.2 y 2, 3, por lo que nos queda por probar es *c*) y *d*). Por ser $\{S(s), s \geq 0\}$ un proceso de Poisson, se tiene que

$$P(S(s) = k) = \frac{(\mu s)^k e^{-\mu s}}{k!}; \mu > 0.$$

Por una parte, se tiene que, para $h > 0$,

$$P(S((s, s + h]) = 0) = e^{-\mu h}.$$

Por otra parte, se tiene que:

$$\begin{aligned} P(S((s, s + h]) \geq 1) &= 1 - P(S((s, s + h]) = 0) = 1 - e^{-\mu h} \\ &= 1 - \left(1 - \mu h + \sum_{n=2}^{\infty} (-1)^n \frac{(\mu h)^n}{n!} \right) \\ &= \mu h + o(h), \end{aligned}$$

obteniéndose así el tercer postulado. Para el último postulado, veamos que

$$\begin{aligned} P(S((s, s + h]) = 2) &= \frac{(\mu h)^2 e^{-\mu h}}{2!} \\ &= \frac{(\mu h)^2 (1 - \mu h + o(h))}{2!} \\ &= o(h), \end{aligned}$$

probándose de esta forma el cuarto y último postulado. □

Capítulo 3

Proceso de Poisson no homogéneo. Relación entre el proceso de Poisson homogéneo y no-homogéneo

En capítulo dos, mencionamos que en un proceso de Poisson homogéneo suponíamos que el número medio de eventos que se producen por unidad de tiempo es constante. En esta sección, estudiaremos cómo rebajar esta última condición.

Definición 3.1. Diremos que un proceso de conteo $\{S(s), s \geq 0\}$ es un *proceso de Poisson no homogéneo con función de intensidad* $\mu(s), s \geq 0$ si

- a) $S(0) = 0$.
- b) $S(s)$ tiene incrementos independientes.
- c) $S(t+s) - S(s)$ es una v.a. que sigue una distribución de Poisson de media $\int_s^{t+s} \mu(r) dr$.

En esta nueva definición, podemos apreciar que la intensidad del proceso de Poisson ya no tiene por qué ser constante. Por ello los intervalos de tiempo entre eventos sucesivos, $Y_n, n \geq 1$ dejan de ser independientes y de seguir una distribución exponencial, motivo por el que la definición original de proceso de Poisson deja de ser válida. Supongamos $\lambda(s) := \int_0^s \mu(r) dr$. Luego $S(s) \sim \mathcal{P}(\lambda(s))$ y

$$P(Y_1 > s) = P(S(s) = 0) = e^{-\lambda(s)}.$$

Derivando obtenemos la densidad

$$f_{Y_1}(s) = \frac{d}{ds}(1 - P(Y_1 > s)) = \mu(s)e^{-\lambda(s)},$$

para $s \geq 0$. Para la densidad conjunta tenemos

$$f_{Y_2|Y_1}(t|s) = -\frac{d}{dt}P(Y_2 > t | Y_1 = s) = \mu(s+t)e^{-\int_s^{s+t} \mu(r) dr} = \mu(s+t)e^{-\lambda(s+t)+\lambda(s)},$$

la densidad conjunta de Y_1 y Y_2 es

$$f_{Y_1, Y_2}(s, t) = f_{Y_1}(s) \cdot f_{Y_2|Y_1}(t|s) = \mu(s)e^{-\lambda(s)}\mu(s+t)e^{-(\lambda(s+t)-\lambda(s))} = \mu(s)\mu(s+t)e^{-\lambda(s+t)},$$

de modo que Y_1 y Y_2 no son independientes si $\mu(s)$ no es contante. Realizando un cambio de variables, obtenemos la densidad conjunta de $\Phi_1 = Y_1$ y $\Phi_2 = Y_1 + Y_2$

$$f_{(\Phi_1, \Phi_2)}(u, v) = \mu(u)e^{-\lambda(u)} \cdot \mu(v)e^{-\lambda(v-u)+\lambda(u)} = \mu(u)\mu(v)e^{-\lambda(v)}.$$

Las relaciones anteriores se pueden generalizar de la siguiente manera

$$\begin{aligned} f_{\Phi_1, \dots, \Phi_n}(v_1, \dots, v_n) &= \mu(v_1) \dots \mu(v_n)e^{-\lambda(v_n)}, \\ f_{Y_1, \dots, Y_n}(s_1, \dots, s_n) &= \mu(s_1) \dots \mu(s_1 + \dots + s_n)e^{-\lambda(s_1 + \dots + s_n)}. \end{aligned}$$

Veamos el siguiente ejemplo de un proceso de Poisson no homogéneo:

Ejemplo 3.1. Los clientes llegan a una tienda de acuerdo a un proceso de Poisson no homogéneo con intensidad

$$\mu(s) = \begin{cases} 2s, & \text{si } 0 \leq s \leq 1, \\ 2, & \text{si } 1 \leq s \leq 2, \\ 4-s, & \text{si } 2 \leq s \leq 4, \end{cases}$$

donde s se mide en horas a partir de la apertura. ¿Cuál es la probabilidad de que dos clientes lleguen durante las primeras dos horas y dos durante las dos horas siguientes? Como las llegadas durante intervalos disjuntos son independientes, podemos responder las dos preguntas por separado. La tasa media para las primeras dos horas es $\lambda(2) = \int_0^1 2s ds + \int_1^2 2 ds = 3$ y, por tanto,

$$P(S(2) = 2) = \frac{e^3 \cdot 3^2}{2!} = 0.2240.$$

Para las siguientes dos horas, la tasa media es $\int_2^4 (4-s) ds = 2$ y

$$P(S(4) - S(2) = 2) = \frac{e^2 \cdot 2^2}{2!} = 0.2707.$$

■

Del mismo modo que hicimos en el caso homogéneo, vamos a enunciar una caracterización de los procesos de Poisson no homogéneos en forma de postulados.

Teorema 3.1. (Postulados de un proceso de Poisson no homogéneo). Un proceso de conteo $\{S(s), s \geq 0\}$ es un proceso de Poisson no homogéneo de intensidad $\mu(s)$ si se cumplen los siguientes postulados:

- a) $S(0) = 0$.
- b) $\{S(s), s \geq 0\}$ tiene incrementos independientes.
- c) $P(S(s+h) - S(s) = 1) = \mu(s)h + o(h)$, $h \rightarrow 0$.
- d) $P(S(s+h) - S(s) \geq 2) = o(h)$, $h \rightarrow 0$.

Demostración. Para probar el teorema, basta con ver que b), c) y d) implican que, para $s, t \geq 0$, $S(s+t) - S(s)$ sigue una distribución de Poisson de función de intensidad $\lambda(s+t) - \lambda(s) = \int_s^{s+t} \mu(r)dr$; es decir, que $P(S(s+t) - S(s) = n) = \frac{e^{\lambda(s+t) - \lambda(s)} [\lambda(s+t) - \lambda(s)]^n}{n!}$, $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$. Fijemos $t \geq 0$ y definamos

$$P_n(s) = P(S(s+t) - S(t) = n).$$

Haremos la demostración por inducción en n . Entonces, para $h \geq 0$,

$$\begin{aligned} P_0(s+h) &= P(S(t+s+h) - S(t) = 0) \\ &= P(\{0 \text{ eventos han ocurrido en } (t, t+s]\} \cap \\ &\quad \{0 \text{ eventos han ocurrido en } (t+s, t+s+h]\}) \\ &= P(\{0 \text{ eventos han ocurrido en } (t, t+s]\}) \cdot \\ &\quad P(0 \text{ eventos han ocurrido en } (t+s, t+s+h]) \\ &= P_0(s)[1 - \mu(t+s)h + o(h)], \end{aligned}$$

donde la tercera igualdad se obtiene por los incrementos independientes del proceso de Poisson y la última igualdad es consecuencia de los postulados c) y d). Por lo tanto, de la anterior expresión se deduce que

$$\frac{P_0(s+h) - P_0(s)}{h} = -\mu(t+s)P_0(s) + \frac{o(h)}{h}, \quad h \rightarrow 0.$$

De esta forma, cuando $h \rightarrow 0$, se obtiene

$$P'_0(s) = -\mu(t+s)P_0(s);$$

o equivalentemente

$$\log(P_0(s)) = -\int_0^s \mu(t+u)du;$$

es decir,

$$P_0(s) = \exp\left\{-\int_0^s \mu(t+u)du\right\} = \exp\{-(\lambda(t+s) - \lambda(t))\}.$$

Supongamos que se cumple para el caso $n-1$. Probemos el caso general para $n > 0$.

$$\begin{aligned}
P_n(s, s+t+h) &= P(S(s+t+h) - S(s) = n) \\
&= \sum_{i=0}^n P(S(s+t+h) - S(s+t) = n-i) P(S(s+t) - S(s) = i) \\
&= \sum_{i=0}^n P_i(s, s+t) P_{n-i}(s+t, s+t+h) \\
&= P_n(s, s+t) (1 - \mu(t+s)h + o(h)) + P_{n-1}(s, s+t)(\mu(t+s)h + o(h)) \\
&\quad + o(h).
\end{aligned}$$

De donde se deduce de forma análoga al caso $n = 0$ que

$$\frac{P'_n(s, s+t)}{P_n(s, s+t)} = \mu(s+t) \left(\frac{P_{n-1}(s, s+t)}{P_n(s, s+t)} - 1 \right),$$

y siguiendo los mismos pasos anteriores se obtiene la expresión

$$e^{\lambda(s+t)} [P'_n(s, s+t) + \mu(s+t)P_n(s, s+t)] = \mu(s+t)e^{\lambda(s+t)} P_{n-1}(s, s+t).$$

Sabemos que:

$$\frac{d}{dt} e^{\lambda(s+t)} = \lambda'(s+t)e^{\lambda(s+t)} = \mu(s+t)e^{\lambda(s+t)}.$$

Por lo tanto:

$$\frac{d}{dt} \left(e^{\lambda(s+t)} P_n(s, s+t) \right) = e^{\lambda(s+t)} P'_n(s, s+t) + P_n(s, s+t) \mu(s+t) e^{\lambda(s+t)}.$$

Sustituyendo $P'_n(s, s+t)$ de la ecuación anterior, obtenemos:

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt} \left(e^{\lambda(s+t)} P_n(s, s+t) \right) &= e^{\lambda(s+t)} [\mu(s+t)(P_{n-1}(s, s+t) - P_n(s, s+t))] \\
&\quad + P_n(s, s+t) \mu(s+t) e^{\lambda(s+t)} \\
&= \mu(s+t) e^{\lambda(s+t)} P_{n-1}(s, s+t).
\end{aligned}$$

Aplicando la hipótesis de inducción,

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt} \left(e^{\lambda(s+t)} P_n(s, s+t) \right) &= \mu(s+t) e^{\lambda(s+t)} e^{-(\lambda(s+t) - \lambda(s))} \frac{[\lambda(s+t) - \lambda(s)]^{n-1}}{(n-1)!} \\
&= \mu(s+t) e^{\lambda(s)} \frac{[\lambda(s+t) - \lambda(s)]^{n-1}}{(n-1)!}.
\end{aligned}$$

Por lo que

$$e^{\lambda(s+t)} P_n(s, s+t) = e^{\lambda(s)} \frac{[\lambda(s+t) - \lambda(s)]^n}{n!} + C,$$

de donde obtenemos con la condición $t = 0$ que $C = 0$ y

$$P_n(s, s+t) = e^{-(\lambda(s+t)-\lambda(s))} \frac{[\lambda(s+t) - \lambda(s)]^n}{n!},$$

que es el resultado que queríamos probar. □

Muestrear en el tiempo un proceso de Poisson homogéneo produce un proceso de Poisson no homogéneo. Esto es similar a lo que veremos en el capítulo posterior en la descomposición de un proceso de Poisson compuesto, solo que ahora la probabilidad de observar un evento del proceso original no es una constante p como ocurría antes, sino que depende del tiempo: $p(s)$.

Sea $\{H(s), s \geq 0\}$ un proceso de Poisson homogéneo con intensidad constante $\mu > 0$ y supongamos que en el instante s ha ocurrido un evento, independientemente de lo que haya ocurrido antes, con probabilidad $p(s)$. Denominemos $K(s)$ al proceso de los eventos que hemos contado hasta el instante s , luego $\{K(s), s \geq 0\}$ es un proceso no homogéneo con función de intensidad $\mu(s) = \mu p(s)$. Veamos que se verifican los cuatro postulados anteriores:

- a) $K(0) = 0$.
- b) Veamos que K tiene incrementos independientes. El número de eventos que contamos en el intervalo $(s, s+h]$ depende únicamente de los eventos del proceso de Poisson H que ocurren en $(s, s+h]$, que es independiente de lo que haya ocurrido antes de s . En consecuencia, el número de eventos observados en $(s, s+h]$ es independiente del proceso de eventos observados hasta el tiempo s . Luego K tiene incrementos independientes.
- c) Tomando probabilidades condicionadas:

$$\begin{aligned} P(K((s, s+h]) = 1) &= P(K((s, s+h]) = 1 | H((s, s+h]) = 1) P(H(s, s+h] = 1) \\ &\quad + P(K(s, s+h] = 1 | H((s, s+h]) \geq 2) P(H((s, s+h]) \geq 2) \\ &= P(K(s, s+h] = 1 | H((s, s+h]) = 1) \mu h + o(h) \\ &= p(s) \mu h + o(h). \end{aligned}$$

- d) $P(K((s, s+h]) \geq 2) \leq P(H((s, s+h]) \geq 2) = o(h)$.

Hay un recíproco (parcial) para este resultado:

"Todo proceso no-homogéneo de Poisson con función de intensidad acotada se puede obtener a partir de un proceso homogéneo muestreado en el tiempo."

Para ver esto, necesitamos la siguiente proposición:

Proposición 3.1. Sean $\{S(s), s \geq 0\}$ y $\{R(s), s \geq 0\}$ procesos de Poisson independientes no homogéneos, con funciones de intensidad respectivas $\mu(s)$ y $\lambda(s)$ y sea $N(s) = S(s) + R(s)$. Entonces

- a) $\{N(s), s \geq 0\}$ es un proceso de Poisson no homogéneo con función de intensidad $\mu(s) + \lambda(s)$.
- b) Dado que un evento del proceso $N(s)$ ocurre en el instante s entonces, independientemente de lo que haya ocurrido antes de s , un evento en s viene del proceso $S(s)$ con probabilidad $\frac{\mu(s)}{\mu(s) + \lambda(s)}$.

Demostración. Para verificar que $\{N(s), s \geq 0\}$ es un proceso de Poisson no homogéneo, veamos que se cumplen los postulados:

- a) $N(0) = S(0) + R(0) = 0$.
- b) Para verificar el segundo postulado, sean I_1, \dots, I_n intervalos que no se solapan, $n \in \mathbb{N}$. Denotaremos como $S(I_i)$ y $R(I_i)$ al número de eventos que ocurren en el proceso $\{S(s), s \geq 0\}$ y $\{R(s), s \geq 0\}$, respectivamente, en el intervalo I_i , $1 \leq i \leq n$. Debido a que cada proceso de conteo tiene incrementos independientes y los procesos son independientes entre sí, se obtiene que $S(I_1), \dots, S(I_n), R(I_1), \dots, R(I_n)$ son independientes y por lo tanto $S(I_1) + R(I_1), \dots, S(I_n) + R(I_n)$ son independientes, lo que demuestra que $\{N(s), s \geq 0\}$ tiene incrementos independientes.
- c) Para que haya ocurrido exactamente un evento del proceso $\{N(s), s \geq 0\}$ entre s y $s + h$, $s, h \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, debe de haber ocurrido un evento en $\{S(s), s \geq 0\}$ y ninguno en $\{R(s), s \geq 0\}$ o viceversa. Consideremos el primer caso.

$$\begin{aligned} P(\{S(s, s+h) = 1\} \cap \{R(s, s+h) = 0\}) &= P(S(s, s+h) = 1)P(R(s, s+h) = 0) \\ &= (\mu(s)h + o(h))(1 - \lambda(s)h + o(h)) \\ &= \mu(s)h + o(h), \quad h \rightarrow 0. \end{aligned}$$

De forma análoga, para el segundo caso se obtiene

$$P(\{S(s, s+h) = 0\} \cap \{R(s, s+h) = 1\}) = \lambda(s)h + o(h), \quad h \rightarrow 0.$$

De donde se deduce que

$$P(N(s+h) - N(s) = 1) = (\mu(s) + \lambda(s))h + o(h), \quad h \rightarrow 0.$$

- d) Para que ocurran al menos dos eventos del proceso $\{N(s), s \geq 0\}$ entre los instantes de tiempo s y $s + h$, $s, h \geq 0$, debe de ocurrir una de las siguientes posibilidades: que ocurran al menos dos eventos en el proceso $\{S(s), s \geq 0\}$ entre s y $s + h$; que ocurran al menos dos eventos en el proceso $\{R(s), s \geq 0\}$ entre s y $s + h$; o que ocurra exactamente un evento en $\{S(s), s \geq 0\}$ y en $\{R(s), s \geq 0\}$. Las dos primeras posibilidades ocurren con probabilidad $o(h)$, mientras que la tercera ocurre con probabilidad $(\mu(s)h + o(h))(\lambda(s)h + o(h)) = o(h)$. Entonces

$$P(N(s+h) - N(s) \geq 2) = o(h), \quad h \rightarrow 0.$$

Luego $\{N(s), s \geq 0\}$ es un proceso de Poisson no homogéneo con función de intensidad $\mu(s) + \lambda(s)$.

Para probar la parte b), notemos en primer lugar que el proceso que causó el evento en el instante de tiempo $s > 0$ es independiente de lo que haya ocurrido previo a s , consecuencia de la independendencia de los incrementos. Para calcular la probabilidad condicionada de que el evento en el instante s sea del proceso $\{S(s), s \geq 0\}$, usaremos que, para $h \geq 0$,

$$\begin{aligned} P(S(s, s+h) = 1 \mid N(s, s+h) = 1) &= \frac{P(\{S(s, s+h) = 1\} \cap \{R(s, s+h) = 0\})}{P(N(s, s+h) = 1)} \\ &= \frac{\mu(s)h + o(h)}{(\mu(s) + \lambda(s))h + o(h)} \\ &= \frac{\mu(s) + o(h)/h}{(\mu(s) + \lambda(s)) + o(h)/h}. \end{aligned}$$

Tomando $h \rightarrow 0$, se obtiene b), finalizando la demostración. \square

Observación 3.1. Supongamos ahora que $\{S(s), s \geq 0\}$ es un proceso de Poisson no homogéneo cuya función de intensidad $\mu(s)$ está acotada tal que $\mu(s) \leq \mu_{max}$, para todo $s \geq 0$. Sea $\{Y(s), s \geq 0\}$ otro proceso de Poisson no homogéneo de parámetro $\lambda(s) = \mu_{max} - \mu(s)$ y que además es independiente de $S(s)$. Por la proposición previa, podemos considerar $\{S(s), s \geq 0\}$ como el proceso obtenido al considerar el proceso homogéneo $\{S(s) + Y(s), s \geq 0\}$, donde un evento que ocurra en el instante s se observa con probabilidad $p(s) = \mu(s)/\mu_{max}$.

Observación 3.2. Podemos establecer la siguiente relación entre procesos homogéneos y no-homogéneos: sea $S(s)$ un proceso de Poisson de intensidad $\mu(s) > 0$ y sea $\lambda(s) = \int_0^s \mu(v)dv$. Vamos a hacer un cambio determinístico en la escala de tiempo y definamos un nuevo proceso: $Y(t) = S(s)$, donde $t = \lambda(s)$. $Y(t)$ es un proceso de Poisson homogéneo de parámetro 1:

En primer lugar, si $t = \lambda(s) = \int_0^s \mu(v)dv$, dado que $\mu(s)$ es estrictamente positiva y acotada, $\lambda(s)$ es estrictamente creciente y continua y por lo tanto, tiene función inversa. Entonces $s = \lambda^{-1}(t)$. Dado que $S(s)$ tiene incrementos independientes, el proceso $Y(t) = S(\lambda^{-1}(t))$ también tendrá incrementos independientes bajo la nueva escala de tiempo, porque la transformación de tiempo es determinística y preserva esta propiedad.

Veamos ahora cómo se distribuyen los incrementos de tiempo de $Y(t)$. Sean $0 < t_0 \leq t_1$. Para el intervalo $[t_1, t_2]$, el incremento $Y(t_2) - Y(t_1)$ es igual al incremento $S(\lambda^{-1}(t_2)) - S(\lambda^{-1}(t_1))$. La cantidad de eventos en $\{s(s), s \geq 0\}$ en el intervalo $[\lambda^{-1}(t_1), \lambda^{-1}(t_2)]$ sigue una distribución de Poisson con parámetro $\int_{\lambda^{-1}(t_1)}^{\lambda^{-1}(t_2)} \mu(v)dv$.

Dado que $\lambda(t) = \int_0^t \mu(v)dv$, podemos ver que:

$$\int_{\lambda^{-1}(t_1)}^{\lambda^{-1}(t_2)} \mu(v)dv = \lambda(\lambda^{-1}(t_2)) - \lambda(\lambda^{-1}(t_1)) = t_2 - t_1.$$

Luego, $Y(t_2) - Y(t_1)$ sigue una distribución de Poisson con parámetro $t_2 - t_1$. Es decir, que la función de intensidad $\mu(t) = 1$.

Al usar la anterior transformación, se puede estudiar los procesos no homogéneos mediante procesos homogéneos. Denotemos por Φ_n el instante en que ocurre el n -ésimo evento de un proceso no homogéneo $\{S(s), s \geq 0\}$. Entonces

$$P(s < \Phi_n < s + h) = P(\{S(s) = n - 1\} \cap \{\text{un evento ocurre en } (s, s + h)\}) + o(k).$$

Por independencia,

$$\begin{aligned} P(s < \Phi_n < s + h) &= P(S(s) = n - 1) P(\text{un evento ocurre en } (s, s + h)) + o(k) \\ &= e^{-\lambda(s)} \frac{\lambda(s)^{n-1}}{(n-1)!} (\mu(s)h + o(k)) + o(k) \\ &= \mu(s)h e^{-\lambda(s)} \frac{\lambda(s)^{n-1}}{(n-1)!} + o(k). \end{aligned}$$

Dividiendo entre h y haciendo $h \rightarrow 0$ obtenemos que la función de densidad de Φ_n

$$f_{\Phi_n}(s) = \mu(s) e^{-\lambda(s)} \frac{\lambda(s)^{n-1}}{(n-1)!}.$$

A continuación, veamos un ejemplo de proceso de Poisson no homogéneo cuya función de intensidad es un proceso estocástico.

Ejemplo 3.2. Un proceso de Cox es un proceso de Poisson $\{S(s), s \geq 0\}$ no homogéneo en el que la intensidad $\{\mu(s), s \geq 0\}$ es, a su vez, un proceso estocástico. En general, los incrementos sobre intervalos disjuntos para un proceso de Cox no son independientes. Un ejemplo de esto, a modo de curiosidad, es el proceso de Ornstein-Uhlenbeck, que se utiliza para modelizar, por ejemplo, el movimiento de una partícula a través de un gas o en determinados estudios financieros. Para estudiar más sobre este proceso, ver [4].

Sea $\{S(s), s \geq 0\}$ un proceso de Poisson con intensidad constante 1. El proceso de Cox más sencillo se obtiene al seleccionar el valor de una v.a. α y luego observar el proceso $Y(s) = S(\alpha s)$, como hemos visto en la observación anterior. Dado el valor de α , $Y(s)$ es, condicionalmente, un proceso de Poisson con intensidad constante $\mu = \alpha$. Cabe destacar que α es una variable aleatoria y, usualmente, no es observable. Si α tiene distribución continua con densidad $f(\alpha)$, entonces, por la Ley de la Probabilidad Total obtenemos la distribución marginal

$$P(Y(s) = h) = E[P(S(\alpha s) = h \mid \alpha)] = \int_0^\infty \frac{(\alpha s)^h e^{-\alpha s}}{h!} f(\alpha) d\alpha.$$

■

Capítulo 4

Proceso de Poisson compuesto. Descomposición y superposición

4.1. Condicionamiento de un proceso de Poisson

En esta sección, veremos el efecto de condicionar el proceso de Poisson y haremos algunas observaciones de estadística inferencial.

Teorema 4.1. Sea $\{S(s), s \geq 0\}$ un proceso de Poisson de parámetro $\mu > 0$. Para $0 < r < s; n \in \mathbb{N}; 0 \leq j \leq n$,

$$P(S(r) = j \mid S(s) = n) = \binom{n}{j} \left(\frac{r}{s}\right)^j \left(1 - \frac{r}{s}\right)^{n-j}.$$

Es decir, condicionado a que han ocurrido n eventos hasta el instante s , la distribución del número de eventos que han ocurrido hasta el instante r es binomial con parámetros n y $\frac{r}{s}$.

Demostración. Consideremos $n \in \mathbb{N}, 0 < r < s$ y $0 \leq j \leq n$

$$\begin{aligned} P(S(r) = j \mid S(s) = n) &= \frac{P(\{S(r) = j\} \cap \{S(s) = n\})}{P(S(s) = n)} \\ &= \frac{P(S(r) = j) \cdot P(S(s) - S(r) = n - j)}{P(S(s) = n)} \\ &= \frac{[e^{-\mu r}(\mu r)^j / j!][e^{-\mu(s-r)}(\mu(s-r))^{n-j} / (n-j)!]}{e^{-\mu s}(\mu s)^n / n!} \\ &= \frac{n!}{j!(n-j)!} \frac{r^j (s-r)^{n-j}}{s^n} \\ &= \binom{n}{j} \left(\frac{r}{s}\right)^j \left(1 - \frac{r}{s}\right)^{n-j}. \end{aligned}$$

□

Observación 4.1. (Intervalos de confianza para μ). Hemos visto que los intervalos de tiempo entre eventos sucesivos, Y_n , $n \geq 0$, son v.a.i.d. con distribución exponencial de parámetro μ . Los instantes Φ_n en los cuales ocurren los eventos, son sumas de las variables Y_n , y hemos probado anteriormente que la suma de las variables Y_n sigue una distribución $Erlang(n, \mu)$. Teniendo en cuenta lo anterior, veamos cómo podemos construir un intervalo de confianza para μ , en base a las observación de la variable Φ_k para algún $k > 0$. Sea $\{S(s), s \geq 0\}$ un proceso de Poisson del que desconocemos su intensidad μ . Supongamos que hemos observado y registrado un número k de eventos. Puesto que Φ_k sigue una distribución $\Gamma(k, \mu)$, entonces $2\mu\Phi_k$ tiene distribución χ^2 con $2k$ grados de libertad. Sean $\chi_{\alpha/2}^2(2k)$ y $\chi_{1-\alpha/2}^2(2k)$ son los cuantiles de orden $\alpha/2$ y $1 - \alpha/2$ de una distribución $\chi^2(2k)$; es decir, si $X \sim \chi^2(2k)$, entonces, $P(X > \chi_{1-\alpha/2}^2(2k)) = P(X < \chi_{\alpha/2}^2(2k)) = \frac{\alpha}{2}$. Se tiene entonces que:

$$P(\chi_{\alpha/2}^2(2k) \leq 2\mu\Phi_k \leq \chi_{1-\alpha/2}^2(2k)) = P\left(\frac{\chi_{\alpha/2}^2(2k)}{2\Phi_k} \leq \mu \leq \frac{\chi_{1-\alpha/2}^2(2k)}{2\Phi_k}\right) = 1 - \alpha$$

Por lo tanto, $\left(\frac{\chi_{\alpha/2}^2(2k)}{2\Phi_k}, \frac{\chi_{1-\alpha/2}^2(2k)}{2\Phi_k}\right)$ es un intervalo de confianza al nivel $1 - \alpha$ para μ .

Observación 4.2. Sean I y J dos procesos de Poisson independientes con intensidad α y β . Sean n y m enteros, Φ_n el tiempo de espera hasta el n -ésimo evento en el proceso I y η_m el tiempo de espera hasta el m -ésimo evento en el proceso J . Las variables $2\alpha\Phi_n$ y $2\beta\eta_m$ son independientes y tienen distribuciones χ^2 con $2n$ y $2m$ grados de libertad, respectivamente. Luego, bajo la hipótesis de que $\alpha = \beta$, la variable $\frac{\Phi_n}{\eta_m} = \frac{m\Phi_n}{n\eta_m}$ tiene distribución F de Snedecor con $2n$ y $2m$ grados de libertad, y podemos desarrollar una prueba de hipótesis para $\alpha = \beta$.

4.2. Procesos de Poisson compuestos

Uno de las generalizaciones del proceso de Poisson es el proceso de Poisson compuesto. Supongamos que en un banco que abre desde las 9.00 hasta las 14:00 se sabe que, en intervalos de una hora, el capital ingresado en el banco sigue una distribución de Poisson de parámetro $\mu > 0$. Al final del día, nos interesa saber cual es la cantidad total que se ha ingresado.

Definición 4.1. Sea $\{S(s), s \geq 0\}$ un proceso de Poisson con intensidad $\mu > 0$. Sean Z_i , con $i \geq 1$ variables aleatorias son independientes e idénticamente distribuidas e independientes del proceso. Definimos las variables aleatorias $R(s)$ de la siguiente forma:

$$R(s) = \sum_{i=1}^{S(s)} Z_i,$$

donde $R(s) = 0$ si $S(s) = 0$. A $\{R(s), s \geq 0\}$ se le llama *proceso de Poisson compuesto*.

Veamos a continuación algunas propiedades del proceso de Poisson compuesto.

Lema 4.1. $R(s)$ tiene incrementos independientes; es decir, si $0 < s_1 < \dots < s_n$, entonces

$$R(s_2) - R(s_1), \dots, R(s_n) - R(s_{n-1}) \text{ son variables aleatorias independientes.}$$

Demostración. Procedamos a demostrarlo por inducción. Sean $0 \leq s_1 < \dots < s_4$ y demostremos que $R(s_2) - R(s_1)$ es independiente de $R(s_4) - R(s_3)$. Dado que $S(s)$ es un proceso de Poisson, los incrementos $N_1 = (S(s_2) - S(s_1))$ y $N_2 = (S(s_4) - S(s_3))$ son independientes. Se tiene que

$$R(s_2) - R(s_1) = \sum_{i=S(s_1)+1}^{S(s_2)} Z_i,$$

$$R(s_4) - R(s_3) = \sum_{i=S(s_3)+1}^{S(s_4)} Z_i.$$

Dado que los Z_i son independientes e idénticamente distribuidas y son independientes del proceso $S(s)$, la suma de N_1 variables Z_i es independiente de la suma de N_2 variables Z_i , tenemos que $R(s_2) - R(s_1)$ es independiente de $R(s_4) - R(s_3)$.

Sean $0 \leq s_1 < \dots < s_{k+1}$ y supongamos ahora que los incrementos $R(s_2) - R(s_1), \dots, R(s_k) - R(s_{k-1})$ son variables aleatorias independientes. Denotando de manera similar, $N_k = S(s_{k+1}) - S(s_k)$ y se obtiene

$$R(s_{k+1}) - R(s_k) = \sum_{i=S(s_k)+1}^{S(s_{k+1})} Z_i.$$

Dado que las Z_i son independientes e idénticamente distribuidas y son independientes del proceso $S(s)$, la suma de N_k variables Z_i es independiente de la suma de N_{k-1} variables Z_i , y que, aplicando la hipótesis de inducción, es independiente de N_j variables Z_i , $j = 1, \dots, k-1$, queda probado el lema. □

Lema 4.2. $\{R(s), s \geq 0\}$ tiene incrementos estacionarios. Es decir, si $0 \leq t < u$, la distribución de $R(u) - R(t)$ depende únicamente de $u - t$.

Demostración. Sea $0 \leq t < u$. Necesitamos demostrar que la distribución de $R(u) - R(t)$ depende únicamente de $u - t$. Como $S(s)$ es un proceso de Poisson con función de intensidad $\mu > 0$, los incrementos $S(u) - S(t)$ son independientes de t y su distribución depende únicamente de $u - t$. Supongamos que $S(u) - S(t) = n$. Entonces:

$$R(u) - R(t) = \sum_{i=1}^{S(u)} Z_i - \sum_{l=1}^{S(t)} Z_l = \sum_{i=1}^n Z_i.$$

Dado que las Z_i son v.a.i.d., la suma de n variables Z_i sigue una distribución que depende solo de n , y como n depende solo de $u - t$, la distribución de $R(u) - R(t)$ depende solo de $u - t$. □

Ya hemos visto que, para sumas aleatorias, la media y la varianza viene dada por

$$\begin{aligned} E[R(s)] &= E[S(s)]E[Z_1], \\ Var(R(s)) &= E[S(s)]Var(Z_1) + Var(S(s))(E[Z_1])^2. \end{aligned}$$

Como $S(s) \sim \mathcal{P}(\mu s)$, $E[S(s)] = Var[S(s)] = \mu s$, de tal forma que

$$\begin{aligned} E[R(s)] &= \mu s E[Z_1], \\ Var(R(s)) &= \mu s (Var[Z_1] + (E[Z_1])^2) = \mu s E[Z_1^2]. \end{aligned}$$

Observación 4.3. También podemos calcular el valor de la esperanza y de la varianza de las variables R utilizando la función generatriz de momentos. En efecto, fijado $s > 0$:

$$\begin{aligned} M_{R(s)}(t) &= E[e^{tR(s)}] \\ &= \sum_{m=0}^{\infty} E[e^{tR(s)} | S(s) = m] P(S(s) = m) \\ &= \sum_{m=0}^{\infty} E[e^{tR(s)} | S(s) = m] e^{-\mu s} (\mu s)^m / m! \end{aligned}$$

Por la independencia entre las $\{Z_1, Z_2, \dots\}$ y $S(t)$ se obtiene que

$$M_{R(s)}(t) = \sum_{m=0}^{\infty} E[e^{t(Z_1 + \dots + Z_m)}] e^{-\mu s} (\mu s)^m / m!.$$

Por la independencia entre las Z_i y denotando $M_Z(s) = E[e^{sZ_1}]$, se sigue que

$$M_{R(s)}(t) = \sum_{m=0}^{\infty} E[e^{tZ_1}]^m e^{-\mu s} (\mu s)^m / m! = e^{\mu s(M_Z(t)-1)}.$$

Diferenciando la función generatriz de momentos y evaluando en 0, podemos obtener el valor de la media y de la varianza de $R(s)$.

Ejemplo 4.1. El número de clientes de una tienda durante el día tiene distribución de Poisson de media 30 y cada cliente gasta un promedio de 150€ con desviación típica de 50€. Por los cálculos anteriores sabemos que el ingreso medio por día es $30 \cdot 150 = 4.500$ €. La varianza del ingreso total diario es

$$30 \cdot (50^2 + 150^2) = 750.000.$$

Calculando la raíz cuadrada obtenemos una desviación típica de 866,02€. ■

Observación 4.4. La función de distribución para el proceso de Poisson compuesto $\{R(s), s \geq 0\}$ puede representarse de forma explícita si condicionamos por los valores de $\{S(s), s \geq 0\}$. Recordemos que la distribución de una suma de variables independientes es la convolución de las distribuciones, es decir, si Z_1, \dots, Z_n son v.a.i.i.d. con función de distribución F , entonces $\sum_{i=1}^n Z_i$ tiene como función de distribución:

$$F_n(z) = P(Z_1 + \dots + Z_n \leq z) = \int_{-\infty}^{\infty} F_{(n-1)}(z-t) dF(t),$$

con

$$F_{(0)}(z) = \begin{cases} 0, & \text{si } z < 0, \\ 1, & \text{si } z \geq 0. \end{cases}$$

Luego

$$\begin{aligned} P(R(s) \leq t) &= P\left(\sum_{i=1}^{S(s)} Z_i \leq t\right) \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} P\left(\sum_{i=1}^{S(s)} Z_i \leq t \mid S(s) = n\right) \frac{(\mu s)^n e^{-\mu s}}{n!} \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\mu s)^n e^{-\mu s}}{n!} F_n(t). \end{aligned}$$

Ejemplo 4.2. Sea $S(s)$ el número de impactos que recibe un sistema mecánico hasta el instante s y sea Z_k el daño o desgaste que produce el k -ésimo impacto. Suponemos que los daños son positivos: $P(Z_k \geq 0) = 1$, y que se acumulan aditivamente, de modo que $R(s) = \sum_{k=1}^{S(s)} Z_k$ representa el daño total hasta el instante s . Supongamos que el sistema continua funcionando mientras el daño total sea menor que un valor crítico c y en caso contrario falla. Sea T el tiempo transcurrido hasta que el sistema falla, entonces

$$\{T > s\} \text{ si y solo si } \{R(s) < c\}.$$

Apreciando esta relación y la anteriormente vista en este apartado, se obtiene

$$P(T > s) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\mu s)^n e^{-\mu s}}{n!} F_n(c).$$

Para obtener el tiempo promedio hasta que el sistema falle podemos integrar esta probabilidad:

$$\begin{aligned}
E[T] &= \int_0^\infty P(T > s) ds \\
&= \int_0^\infty \sum_{n=0}^\infty \frac{(\mu s)^n e^{-\mu s}}{n!} F_n(c) ds \\
&= \sum_{n=0}^\infty \left(\int_0^\infty \frac{(\mu s)^n e^{-\mu s}}{n!} ds \right) F_n(c) \\
&= \frac{1}{\mu} \sum_{n=0}^\infty F_n(c),
\end{aligned}$$

donde hemos intercambiado series e integrales porque todos los términos son positivos. Esta expresión se simplifica en el caso particular en el cual los daños Z_i tienen distribución exponencial de parámetro λ . Entonces la suma $Z_1 + \dots + Z_n$ tiene distribución $Erlang(n, \lambda)$ y

$$\begin{aligned}
\sum_{n=0}^\infty F_n(c) &= \sum_{n=0}^\infty \sum_{k=n}^\infty \frac{(\lambda c)^k e^{-\lambda c}}{k!} \\
&= \sum_{k=0}^\infty (k+1) \frac{(\lambda c)^k e^{-\lambda c}}{k!} \\
&= e^{-\lambda c} \left(\sum_{k=0}^\infty \frac{(\lambda c)^k}{k!} + \sum_{k=1}^\infty \frac{(\lambda c)^k}{(k-1)!} \right) \\
&= 1 + \lambda c.
\end{aligned}$$

Por lo tanto, cuando $Z_i, i \geq 1$, tienen distribución exponencial de parámetro λ ,

$$E[T] = \frac{1 + \lambda c}{\mu}.$$

■

4.3. Descomposición de un proceso de Poisson compuesto.

En la sección anterior asociamos a cada evento de un proceso de Poisson una variable aleatoria Z_j . Utilizaremos estas variables para descomponer el proceso. Sea $\{S(s); s \geq 0\}$ un proceso de Poisson y sea $S_j(s)$ el número de eventos del proceso que han ocurrido antes de s con $Z_i = j$. Si, por ejemplo, Z_j representa el número de clientes en un coche que llega a un establecimiento, $S_j(s)$ representa el número de coches que han llegado antes del instante s con exactamente j personas dentro.

En primer lugar, veamos el caso más sencillo, cuando Z_j son variables aleatorias que siguen una distribución de Bernoulli:

$$P(Z_k = 1) = p, \quad P(Z_k = 0) = 1 - p,$$

para $0 < p < 1$ fijo y $k \geq 1$. Definimos ahora dos procesos, según el valor de las variables Z_k sea 0 o tome el valor 1:

$$S_1(s) = \sum_{k=1}^{S(s)} Z_k \quad y \quad S_0(s) = S(s) - S_1(s).$$

Los valores de $S_1(s)$ sobre intervalos de tiempo disjuntos son variables aleatorias independientes, $S_1(0) = 0$ y por otra parte, utilizando la Proposición 1.12, $S_1(s)$ tiene distribución de Poisson con media μps . Argumentando de forma análoga, podemos ver que $S_0(s)$ es un proceso de Poisson con intensidad $\mu(1-p)s$. Además, podemos ver que $\{S_0(s), s \geq 0\}$ y $\{S_1(s), s \geq 0\}$ son procesos independientes. Para ver esto calculemos

$$\begin{aligned} P(\{S_0(s) = i\} \cap \{S_1(s) = h\}) &= P(\{S(s) = i+h\} \cap \{S_1(s) = h\}) \\ &= P(S_1(s) = h \mid S(s) = i+h) P(S(s) = i+h) \\ &= \frac{(i+h)!}{i!h!} p^h (1-p)^i \frac{(\mu s)^{i+h} e^{-\mu s}}{(i+h)!} \\ &= \frac{e^{-\mu ps} (\mu ps)^h}{h!} \cdot \frac{e^{-\mu(1-p)s} (\mu(1-p)s)^i}{i!} \\ &= P(S_1(s) = h) P(S_0(s) = i), \quad \text{para } i, h \in \mathbb{N} \cup \{0\}. \end{aligned}$$

Veamos a continuación un ejemplo del uso de la descomposición de un proceso de Poisson.

Ejemplo 4.3. Los clientes entran a una tienda de acuerdo a un proceso de Poisson con intensidad de 10 por hora. De manera independiente, cada cliente compra algo con probabilidad $p = 0.3$ o sale de la tienda sin comprar nada con probabilidad $q = 1 - p = 0.7$. ¿Cuál es la probabilidad de que durante la primera hora 9 personas entren a la tienda y que tres de estas personas compren algo y las otras 6 no?

Sea $S_1(1)$ el número de clientes que hacen una compra durante la primera hora y $S_0(1)$ el número de clientes que entran pero no compran nada. Entonces $S_0(1)$ y $S_1(1)$ son v.a. independientes de Poisson con parámetros respectivos $0.7 \cdot 10 = 7$ y $0.3 \cdot 10 = 3$. Por lo tanto

$$\begin{aligned} P(S_0(1) = 6) &= \frac{7^6 e^{-7}}{6!} = 0.149, \quad P(S_1(1) = 3) = \frac{3^3 e^{-3}}{3!} = 0.224, \quad y \\ P(S_0(1) = 6, S_1(1) = 3) &= P(S_0(1) = 6) P(S_1(1) = 3) = 0.149 \cdot 0.224 = 0.0334. \end{aligned}$$

■

En el caso general, las variables Z_k toman valores sobre un conjunto numerable, por ejemplo sobre \mathbb{N} , y el resultado correspondiente es el siguiente teorema:

Teorema 4.2. $\{S_j(s), s \geq 0\}$ son procesos de Poisson independientes con parámetro $\mu P(Z_1 = j)$.

Demostración. En primer lugar, supongamos que $P(Z_i = 1) = p$ y $P(Z_i = 2) = 1 - p$, por lo que solo hay dos casos a considerar: $S_1(s)$ y $S_2(s)$. Probaremos que satisfacen el teorema caracterización de los procesos de Poisson. En primer lugar, la propiedad de los incrementos de tiempo independientes implica que los pares de incrementos

$$(S_1(s_i) - S_1(s_{i-1}), S_2(s_i) - S_2(s_{i-1})), \quad 1 \leq i \leq n, \quad s_i \geq 0,$$

son independientes entre sí. Por definición, $S_1(0) = S_2(0) = 0$, luego lo único que queda por probar es que, para $0 < s \leq t$, $X_i = S_i(s+t) - S_i(s)$, $i = 1, 2$, son independientes y tienen la distribución de Poisson correspondiente. Para ello, notemos que si $X_1 = j$ y $X_2 = k$, entonces deben haber ocurrido $j + k$ eventos entre s y $s + t$, j eventos a los que hemos asignado el valor "1" y k eventos a los que le hemos asignado el valor "2". Por lo tanto,

$$\begin{aligned} P(\{X_1 = j\} \cap \{X_2 = k\}) &= e^{-\mu s} \frac{(\mu s)^{j+k}}{(j+k)!} \cdot \frac{(j+k)!}{j!k!} p^j (1-p)^k \\ &= e^{-\mu p s} \frac{(\mu p s)^j}{j!} e^{-\mu(1-p)s} \frac{(\mu(1-p)s)^k}{k!}, \end{aligned}$$

por lo que $X_1 \sim \mathcal{P}(\mu p s)$ y $X_2 \sim \mathcal{P}(\mu(1-p)s)$.

Para el caso general, $m \geq 0$, utilizaremos distribución multinomial para concluir que si $p_j = P(Z_i = j)$ para $1 \leq j \leq m$, entonces

$$\begin{aligned} P(X_1 = k_1, \dots, X_m = k_m) &= e^{-\mu s} \frac{(\mu s)^{k_1 + \dots + k_m}}{(k_1 + \dots + k_m)!} \cdot \frac{(k_1 + \dots + k_m)!}{k_1! + \dots + k_m!} p_1^{k_1} \dots p_m^{k_m} \\ &= \prod_{j=1}^m e^{-\mu p_j s} \frac{(\mu p_j s)^{k_j}}{k_j!}. \end{aligned}$$

□

4.4. Superposición de procesos de Poisson

La situación inversa a la descomposición de un proceso de Poisson es la superposición de procesos. Ya que un proceso de Poisson puede descomponerse en procesos de Poisson independientes, es razonable esperar que el proceso inverso, la superposición de procesos de Poisson independientes, produzca un proceso de Poisson cuya intensidad sea la suma de las intensidades.

Teorema 4.3. Sean $\{S_1(s), s \geq 0\}, \dots, \{S_k(s), s \geq 0\}$ procesos de Poisson independientes con respectivas intensidades μ_1, \dots, μ_k , entonces $S(s) = S_1(s) + \dots + S_k(s)$ es un proceso de Poisson con intensidad $\mu_1 + \dots + \mu_k$.

Demostración. Haremos la demostración para el caso $k = 2$, el caso general se obtiene luego por inducción. Es inmediato que la suma tiene incrementos independientes y que $S_1(0) + S_2(0) = 0$. Para verificar que los incrementos tienen distribución de Poisson con

intensidad igual a la suma de los parámetros, observamos que si $Z = S_1(t+s) - S_1(s) \sim \mathcal{P}(\mu_1 t)$ y $X = S_2(t+s) - S_2(s) \sim \mathcal{P}(\mu_2 t)$, entonces

$$S(t+s) - S(s) = [S_1(t+s) - S_1(s)] + [S_2(t+s) - S_2(s)] = Z + X \sim \mathcal{P}((\mu_1 + \mu_2)t).$$

Supongamos que se cumple lo anterior para $k = n$, consideremos los procesos de Poisson $\{S_1(s), s \geq 0\}, \dots, \{S_k(s), s \geq 0\}, \{S_{k+1}(s), s \geq 0\}$ independientes entre sí con intensidades $\mu_1, \dots, \mu_k, \mu_{k+1} > 0$, respectivamente. Por hipótesis de inducción, sabemos que el proceso $S'(s) = S_1(s) + \dots + S_k(s)$ es un proceso de Poisson con intensidad $\mu_1 + \dots + \mu_k$. Denotemos como $S(s) = S'(s) + S_{n+1}(s)$ y veamos que $S(s) = S_1(s) + \dots + S_{k+1}(s)$ es un proceso de Poisson con función de intensidad $\mu_1 + \dots + \mu_{k+1}$. Observemos que

$$S(t+s) - S(s) = [S_1(t+s) - S_1(s)] + \dots + [S_n(t+s) - S_n(s)] + [S_{n+1}(t+s) - S_{n+1}(s)].$$

Por hipótesis de inducción, $S_i(t+s) - S_i(s) \sim \mathcal{P}(\mu_i t)$, para $i = 1, \dots, k$ y, por ser los incrementos independientes, $S_{n+1}(t+s) - S_{n+1}(s) \sim \mathcal{P}(\mu_{n+1} t)$. Por ser la suma de variables aleatorias independientes con distribución de Poisson una variable aleatoria con distribución de Poisson, se tiene que

$$S(t+s) - S(s) \sim \mathcal{P}((\mu_1 + \dots + \mu_k + \mu_{k+1})t).$$

Luego $S(s)$ es un proceso de Poisson con función de intensidad $\mu_1 + \dots + \mu_{k+1}$. □

Vamos a mostrar un ejemplo de superposición de proceso de Poisson:

Ejemplo 4.4. Consideremos dos procesos de Poisson, uno con parámetro μ , que representa las llegadas a la meta del equipo rojo, y otro, independiente del anterior y con parámetro λ , que representa las llegadas del equipo verde. ¿Cuál es la probabilidad de que haya 6 llegadas rojas antes que 4 verdes?

Observamos que el evento en cuestión equivale a tener al menos 6 rojos en los primeros 9. Si esto ocurre, tenemos a lo sumo tres verdes antes de la llegada del sexto rojo. Por otro lado, si hay 5 o menos rojos en los primeros 9, entonces tendremos al menos 4 verdes y a lo sumo 5 rojos.

Podemos ahora ver el problema en el marco de un proceso de Poisson general que incluye rojos y verdes, y tiene parámetro $\mu + \lambda$. Para cada llegada escogemos al azar el color lanzando una moneda con probabilidad $p = \mu/(\mu + \lambda)$ para rojo. La probabilidad que nos interesa es

$$\sum_{k=6}^9 \binom{9}{k} p^k (1-p)^{9-k}.$$

En el caso particular en el cual ambos procesos iniciales tienen la misma intensidad $\mu = \lambda$, $p = 1/2$ y la expresión anterior es

$$\frac{1}{512} \sum_{k=6}^9 \binom{9}{k} = \frac{140}{512} = 0.273.$$

■

Capítulo 5

Proceso de Poisson y la distribución uniforme

En esta sección, vamos a considerar un segmento de longitud l y vamos a escoger k puntos al azar, de modo independiente y con distribución uniforme (es decir, una muestra aleatoria simple de tamaño k de la distribución uniforme sobre $[0, l]$). Llamemos U_1, \dots, U_k a estas variables. Denotando como I_A a la función indicadora de un conjunto A , la densidad de probabilidad de cada una de ellas es:

$$f_U(u) = \frac{1}{l} I_{[0, l]}(u), \text{ para } 0 \leq u \leq l.$$

Consideremos esta misma muestra, pero ordenada. Llamemos $U_{(i)}$ con $1 \leq i \leq k$ a sus valores, por lo que

$$U_{(1)} \leq \dots \leq U_{(k)}.$$

Para obtener la función de densidad conjunta de $(U_{(1)}, \dots, U_{(k)})$, veremos un resultado general. Consideremos una colección de k variables aleatorias independientes e idénticamente distribuidas, Y_1, \dots, Y_k , y sus estadísticos de orden asociados, $Y_{(1)}, \dots, Y_{(k)}$. En el siguiente teorema veremos como se obtiene la distribución de probabilidad conjunta de $(Y_{(1)}, \dots, Y_{(k)})$.

Teorema 5.1. Sea $Y_{(1)} \leq \dots \leq Y_{(k)}$ los estadísticos de orden para una muestra aleatoria simple de variables aleatorias continuas con función de densidad f . Su función de densidad conjunta es

$$g_k(y_{(1)}, \dots, y_{(k)}) = \begin{cases} k! \prod_{j=1}^k f(y_{(j)}), & \text{si } y_{(1)} < \dots < y_{(k)}, \\ 0, & \text{en caso contrario.} \end{cases}$$

Demostración. Haremos la prueba en el caso general y será mas detallada en el caso $k = 2$. Vamos a definir los siguientes conjuntos:

$$\begin{aligned} A &= \{(y_1, \dots, y_k) : y_j \in \mathbb{R}, y_i \neq y_j \text{ para } i \neq j\}, \\ B &= \{(y_{(1)}, \dots, y_{(k)}) : -\infty < y_{(1)} < \dots < y_{(k)} < \infty\}. \end{aligned}$$

La transformación que define los estadísticos de orden es una función de A a B , pero no es unívoca, ya que cualquiera de las $k!$ permutaciones de los valores observados produce los mismos estadísticos de orden.

Si dividimos A en $k!$ subconjuntos de modo que a cada uno le corresponda un orden particular de la muestra observada, podemos ver que la transformación que define los estadísticos de orden define una biyección de cada uno de estos conjuntos al conjunto B . Veámoslo en el caso $n = 2$. Dividamos el conjunto A en $A_1 = \{-\infty < y_1 < y_2 < \infty\}$ y $A_2 = \{-\infty < y_2 < y_1 < \infty\}$. En el primero de estos conjuntos la transformación es $y_1 = y_{(1)}$ y $y_2 = y_{(2)}$. Por lo tanto, el valor absoluto del Jacobiano de la transformación es

$$|J_1| = \left| \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} \right| = 1,$$

mientras que para A_2 la transformación es $y_1 = y_{(2)}$ y $y_2 = y_{(1)}$ y el valor absoluto del Jacobiano es

$$|J_2| = \left| \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} \right| = 1.$$

En el caso general, se ve similarmente que el Jacobiano de cada una de las biyecciones de una de las $k!$ regiones en que dividimos a A sobre B , tiene valor absoluto del Jacobiano igual a 1. La densidad conjunta de los estadísticos de orden es, en consecuencia, la suma de las contribuciones de cada conjunto de la partición. En el caso particular $n = 2$ tenemos para $-\infty < y_{(1)} < y_{(2)} < \infty$,

$$g(y_{(1)}, y_{(2)}) = |J_1|f(y_{(1)})f(y_{(2)}) + |J_2|f(y_{(2)})f(y_{(1)}) = 2f(y_{(1)})f(y_{(2)}).$$

Para k cualquiera, la densidad conjunta se obtiene tomando en cuenta que la contribución de cada una de las $k!$ particiones es $\prod_{j=1}^k f(y_{(j)}) = \prod_{j=1}^k f(y_i)$.

□

En el caso particular de la distribución uniforme en $[0, l]$ obtenemos

$$f_{U_{(1)}, \dots, U_{(k)}}(u_1, \dots, u_k) = \begin{cases} \frac{k!}{l^k}, & \text{si } 0 < u_1 < \dots < u_k \leq l, \\ 0, & \text{en caso contrario.} \end{cases}$$

que es la densidad de los estadísticos de orden.

Teorema 5.2. Sean $\Phi_1, \Phi_2, \dots, \Phi_k$ los instantes en los cuales ocurren los sucesivos eventos de un proceso de Poisson $\{S(s), s \geq 0\}$ de intensidad $\lambda > 0$. Dado $S(l) = k$, las variables $\Phi_1, \Phi_2, \dots, \Phi_k$ tienen la misma distribución conjunta que los estadísticos de orden de k v.a. independientes con distribución uniforme en $[0, s]$.

Demostración. Consideremos un proceso de Poisson $\{S(s), s \geq 0\}$ de intensidad $\lambda > 0$ y supongamos que en el intervalo $[0, l]$ han ocurrido k eventos. Sea $(l_i, l_i + h_i]$, $1 \leq i \leq n$; $l_i < l_i + h_i < l_{i+1}$, $i = 1, \dots, n-1$, $l_n < l_n + h_n < l$; una sucesión de intervalos disjuntos en

$[0, l]$. Dado que han ocurrido k eventos hasta l , la probabilidad de que ocurra exactamente un evento en cada uno de los intervalos que hemos descrito, y ningún evento fuera de ellos es

$$\begin{aligned}
& P(l_1 < \Phi_1 < l_1 + h_1, \dots, l_k < \Phi_k < l_k + h_k \mid S(l) = k) \\
&= \frac{P(l_1 < \Phi_1 < l_1 + h_1, \dots, l_k < \Phi_k < l_k + h_k, S(l) = k)}{P(S(l) = k)} \\
&= \frac{\prod_{j=1}^k P(l_j < \Phi_j < l_j + h_j) P(S(l) = k \mid l_1 < \Phi_1 < l_1 + h_1, \dots, l_k < \Phi_k < l_k + h_k)}{P(S(l) = k)} \\
&= \frac{\mu h_1 e^{-\mu h_1} \dots \mu h_k e^{-\mu h_k} e^{-\mu(l-h_1-\dots-h_k)}}{e^{-\mu l} (\mu l)^k / k!} \\
&= \frac{k!}{l^k} h_1 \dots h_k.
\end{aligned}$$

Entonces, se tiene

$$\begin{aligned}
f_{\Phi_1, \dots, \Phi_n \mid S(l)=k}(l_1, \dots, l_k) &= \lim_{\substack{h_i \rightarrow 0 \\ i=1, \dots, n}} \frac{P(l_1 < \Phi_1 < l_1 + h_1, \dots, l_k < \Phi_k < l_k + h_k \mid S(l) = k)}{h_1 \dots h_k} \\
&= \frac{k!}{l^k}.
\end{aligned}$$

□

Observación 5.1. El teorema anterior nos da una forma de probar si un conjunto de observaciones ocurren según un proceso de Poisson. Supongamos que hemos observado el proceso por un período de tiempo l durante el cual han ocurrido k eventos. Sea Φ_1, \dots, Φ_k los instantes en los cuales han ocurrido los eventos y sea $\sigma_1, \dots, \sigma_k$ una permutación de los instantes escogida al azar. Si los eventos ocurrieron de acuerdo a un proceso de Poisson, las variables σ_k son independientes y tienen distribución uniforme sobre el intervalo $[0, l]$. Por lo tanto podemos hacer un test sobre estas variables para ver si cumplen esta hipótesis, para lo cual podemos hacer una prueba de Kolmogorov-Smirnov (para más información del test de Kolmogorov-Smirnov, consultar la página 225 de [3]). También es posible usar el Teorema Central del Límite, ya que, para valores moderados de k , la suma $S_k = \sum_{j=1}^k U_j$ es aproximadamente normal con media $E(S_k) = kE(U_1) = kl/2$ y varianza $Var(S_k) = kVar(U_1) = kl^2/12$.

Por ejemplo, si en $l = 10$ minutos de observación, $k = 12$ eventos ocurren, entonces la suma S_{12} de los instantes en los cuales ocurren los eventos es aproximadamente normal con media 60 y desviación estándar 10. En consecuencia, si S_{12} satisface las desigualdades

$$60 - 1.96 \cdot 10 \leq S_{12} \leq 60 + 1.96 \cdot 10,$$

aceptaríamos la hipótesis de que los eventos provienen de un proceso de Poisson con un nivel de significación de 5 %, donde recordemos que 1.96 es el cuantil de orden 97.5 % de una distribución normal estándar.

Veamos a continuación dos ejemplos que nos permitan ilustrar esta sección:

Ejemplo 5.1. Consideremos una masa de material radioactivo que emite partículas alfa de acuerdo a un proceso de Poisson de intensidad μ . Cada partícula existe por un período aleatorio de tiempo y luego desaparece. Supongamos que los tiempos de vida sucesivos X_1, X_2, \dots de las diferentes partículas son v.a. independientes con distribución común $G(x) = P(X_k \leq x)$. Sea $N(l)$ el número de partículas que existen en el instante l . Queremos hallar la distribución de probabilidad de $N(t)$ bajo la condición de que $N(0) = 0$.

Sea $S(l)$ el número de partículas creadas hasta el tiempo l . Observamos que $S(l) \geq N(l)$. Dado que $S(l) = k$ sean $\Phi_1, \dots, \Phi_k \leq l$ los instantes en los cuales se crean las partículas. La partícula n existe en el instante l si y solo si $\Phi_n + X_n \geq l$. Por lo tanto,

$$P(N(l) = n \mid S(l) = k) = P\left(\sum_{i=1}^k I_{\{\Phi_i + X_i \geq l\}} = n \mid S(l) = k\right).$$

Usando el Teorema 5.2 y la simetría entre las partículas, se tiene

$$P\left(\sum_{i=1}^k I_{\{\Phi_i + X_i \geq l\}} = n \mid S(l) = k\right) = P\left(\sum_{i=1}^k I_{\{U_i + X_i \geq l\}} = n\right),$$

donde U_1, U_2, \dots, U_k son v.a. independientes con distribución uniforme en $[0, l]$. La variable aleatoria del lado derecho de la igualdad anterior sigue una distribución binomial con probabilidad de éxito

$$p = P(U_n + X_n \geq l) = \frac{1}{l} \int_0^l P(X_n \geq l - v) dv = \frac{1}{l} \int_0^l [1 - G(l - v)] dv = \frac{1}{l} \int_0^l [1 - G(x)] dx.$$

Escribiendo explícitamente la distribución binomial tenemos

$$P(N(l) = n \mid S(l) = k) = \binom{k}{n} p^n (1 - p)^{k-n},$$

con p dado por la ecuación previa. Para concluir

$$\begin{aligned} P(N(l) = n) &= \sum_{k=n}^{\infty} P(N(l) = n \mid S(l) = k) P(S(l) = k) \\ &= \sum_{k=n}^{\infty} \frac{k!}{n!(k-n)!} p^n (1-p)^{k-n} \frac{(\mu l)^k e^{-\mu l}}{k!} \\ &= e^{-\mu l} \frac{(\mu p l)^n}{n!} \sum_{k=n}^{\infty} \frac{(1-p)^{k-n} (\mu l)^{k-n}}{(k-n)!}. \end{aligned}$$

La suma es una serie exponencial que se reduce a

$$\sum_{i=0}^{\infty} \frac{[\mu l(1-p)]^i}{i!} = e^{\mu l(1-p)},$$

y usando esto la expresión previa se reduce a

$$P(N(l) = n) = \frac{e^{-\mu pl} (\mu pl)^n}{n!}, \quad n \geq 0,$$

es decir, el número de partículas que existen en el instante l tiene distribución de Poisson de intensidad

$$\mu pl = \mu \int_0^l (1 - G(x)) dx.$$

Veamos que ocurre cuando $l \rightarrow \infty$. Sea $\lambda = E[X_n] = \int_0^\infty (1 - G(x)) dx$ la vida media de una partícula alfa. Vemos a partir de la expresión previa que, cuando $l \rightarrow \infty$, la distribución de $N(l)$ converge a una distribución de Poisson con parámetro $\mu\lambda$. Por lo tanto, asintóticamente, la distribución de probabilidad para el número de partículas que existen depende únicamente de la vida media μ . ■

Ejemplo 5.2. Un procedimiento común en estadística es observar un número fijo k de v.a.i.i.d. Y_1, \dots, Y_k y usar su media muestral

$$\bar{Y}_k = \frac{Y_1 + \dots + Y_k}{k}$$

como estimador de la media poblacional $E[Y_1]$. Consideremos en cambio la siguiente situación: una compañía nos pide estimar el tiempo medio de vida en servicio de cierto componente de una máquina. La máquina ha estado funcionando por dos años y se observó que el componente original duró 7 meses, el siguiente duró 5 meses y el tercero 9. No se observaron fallos en los tres meses restantes del período de observación. La pregunta es si es correcto estimar la vida media en servicio por el promedio observado $(7 + 9 + 5)/3 = 7$ meses.

Este ejemplo presenta una situación en la cual el tamaño de la muestra no está fijo de antemano, sino que se determina a través de una 'cuota' prefijada $l > 0$: Observamos una sucesión de v.a.i.i.d. Y_1, Y_2, \dots y continuamos el muestreo mientras la suma de observaciones sea menor que la cuota l . Llamemos $N(l)$ al tamaño de la muestra,

$$N(l) = \max\{n \geq 0 : Y_1 + \dots + Y_n < l\}.$$

La media muestral es

$$\bar{Y}_{N(l)} = \frac{Y_1 + \dots + Y_{N(l)}}{N(l)}.$$

Puede suceder que $Y_1 \geq l$, en este caso $N(l) = 0$ y no podemos definir la media muestral. Por lo tanto tenemos que suponer que $N(l) \geq 1$. Una pregunta importante en estadística matemática es si este estimador es insesgado. Es decir, ¿cómo se relaciona el valor esperado de este estimador con el valor esperado de $E[Y_1]$?

En general, determinar el valor esperado de la media muestral en esta situación es muy difícil. Es posible hacerlo, sin embargo, en el caso en el cual los sumandos tienen distribución exponencial de parámetro común μ , de modo que $\{N(l), l \geq 0\}$ es un proceso de Poisson. Usando el Teorema 5.2 para evaluar la esperanza condicional

$$E[\Phi_{N(l)} | N(l) = k] = E[\text{máx}(U_1, \dots, U_k)] = \frac{k l}{k+1},$$

donde U_1, \dots, U_k son v.a. independientes y tienen distribución uniforme sobre el intervalo $[0, l]$. Probemos esta última igualdad: sea $M = \text{máx}(U_1, \dots, U_k)$. La función de distribución acumulada $F_M(x)$ de M es

$$F_M(x) = P(M \leq x) = \left(\frac{x}{l}\right)^k \text{ para } 0 \leq x \leq l.$$

Denotando como $f_M(x)$ a la función de densidad de M , se tiene que

$$f_M(x) = \frac{d}{dx} \left(\left(\frac{x}{l}\right)^k \right) = \frac{k}{l^k} x^{k-1}, \text{ para } 0 \leq x \leq l.$$

Luego

$$\begin{aligned} E[\text{máx}(U_1, \dots, U_k)] &= \int_0^l x f_M(x) dx = \int_0^l x \frac{k}{l^k} x^{k-1} dx \\ &= \frac{k}{l^k} \int_0^l x^k dx = \frac{k}{l^k} \left| \frac{x^{k+1}}{k+1} \right|_0^l \\ &= \frac{k l}{k+1}. \end{aligned}$$

Observamos además que, dado $k \geq 1$

$$P(N(l) = k | N(l) > 0) = \frac{(\mu l)^k e^{-\mu l}}{k!(1 - e^{-\mu l})}.$$

Por lo que

$$\begin{aligned} E \left[\frac{\Phi_{N(l)}}{N(l)} | N(l) > 0 \right] &= \sum_{k=1}^{\infty} E \left[\frac{\Phi_{N(l)}}{k} | N(l) = k \right] P(N(l) = k | N(l) > 0) \\ &= \sum_{k=1}^{\infty} l \frac{k}{k+1} \frac{1}{k} \frac{(\mu l)^k e^{-\mu l}}{k!(1 - e^{-\mu l})} \\ &= \frac{1}{\mu} \frac{1}{e^{\mu l} - 1} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(\mu l)^{k+1}}{(k+1)!} \\ &= \frac{1}{\mu} \frac{1}{e^{\mu l} - 1} (e^{\mu l} - 1 - \mu l) \\ &= \frac{1}{\mu} \left(1 - \frac{\mu l}{e^{\mu l} - 1} \right). \end{aligned}$$

Podemos ver el efecto de este tipo de muestreo si expresamos el resultado anterior en términos del cociente del sesgo entre el verdadero valor de la esperanza $E[Y_1] = 1/\mu$. Tenemos

$$\frac{E[Y_1] - E[\bar{Y}_{N(l)}]}{E[Y_1]} = \frac{\mu l}{e^{\mu l} - 1} = \frac{E[N(l)]}{e^{E[N(l)]} - 1}.$$

El lado izquierdo representa la fracción del sesgo y el lado derecho expresa esta fracción como función del tamaño esperado de la muestra para este tipo de muestreo. En la siguiente tabla presenta algunos valores:

$E(N(l))$	Fracción
1	0.58
2	0.31
3	0.16
4	0.07
5	0.03
6	0.015
10	0.0005

En el ejemplo inicial, observamos $N(l) = 3$ fallos en un periodo de un año y en la tabla anterior, observamos que la fracción del sesgo es del orden de 16 %. Como observamos $\bar{Y}_{N(l)} = 7$, una estimación más adecuada podría ser $7/0.84 = 8.33$, que intenta corregir, en promedio, el sesgo debido al método de muestreo. ■

Los resultados anteriores se pueden generalizar al caso de procesos no homogéneos con intensidad $\mu(r)$. Recordemos que $\lambda(l) = \int_0^l \mu(r) dr$ y sea $g(r) = \mu(r)/\lambda(l)$ para $0 < r < l$.

Teorema 5.3. Sean U_1, U_2, \dots, U_k v.a.i.i.d. con densidad g . Dado $S(l) = k$, los tiempos de llegadas Φ_1, \dots, Φ_k tienen la misma distribución que los estadísticos de orden correspondientes a las variables U_1, U_2, \dots, U_k .

Demostración. Supongamos que U_1, U_2, \dots, U_k son v.a.i.i.d. con densidad g y puesto que $S(l) = k$, necesitamos mostrar que $\Phi_1, \Phi_2, \dots, \Phi_k$ tienen la misma distribución que los estadísticos de orden correspondientes a U_1, U_2, \dots, U_k . Para ello, consideremos los intervalos disjuntos $(l_i, l_i + h_i]$ con $1 \leq i \leq k$ en $[0, s]$. La probabilidad de que ocurra exactamente un evento en cada uno de estos intervalos, dado que $S(l) = k$, está dada por:

$$P(l_1 < \Phi_1 < l_1 + h_1, \dots, l_k < \Phi_k < l_k + h_k \mid S(l) = k).$$

con un razonamiento análogo al del Teorema 5.2 se prueba que esta probabilidad es proporcional a:

$$\prod_{i=1}^k g(l_i) h_i,$$

donde $g(l_i) = \mu(l_i)/\lambda(l)$ es la densidad de U_i en l_i , y h_i son las longitudes de los intervalos. Esta proporcionalidad se debe a la propiedad del proceso de Poisson que, dado un

número total fijo de eventos, la ubicación de estos eventos dentro del intervalo sigue una distribución de probabilidad dominada por la densidad g . Dado que estamos considerando k eventos en el intervalo $[0, s]$, la densidad conjunta de Φ_1, \dots, Φ_k condicionada a que $S(s) = k$ se puede escribir en términos de las densidades g como:

$$f_{\Phi_1, \dots, \Phi_k | S(l)=k}(l_1, \dots, l_k) = k! \cdot g(l_1) \cdots g(l_k),$$

donde el factor $k!$ aparece debido a que estamos considerando que los eventos ocurren en un orden específico.

Por otra parte, consideremos los estadísticos de orden $U_{(1)}, U_{(2)}, \dots, U_{(k)}$. La densidad conjunta de estos estadísticos de orden es conocida y está dada por:

$$f_{U_{(1)}, \dots, U_{(k)}}(l_1, \dots, l_k) = k! \cdot g(l_1)g(l_2) \cdots g(l_k).$$

Entonces,

$$f_{\Phi_1, \dots, \Phi_k | S(l)=k}(l_1, \dots, l_k) = f_{U_{(1)}, \dots, U_{(k)}}(l_1, \dots, l_k)$$

Y, por lo tanto, concluimos que los tiempos de llegada $\Phi_1, \Phi_2, \dots, \Phi_k$ tienen la misma distribución que los estadísticos de orden correspondientes a las variables U_1, U_2, \dots, U_k con densidad g .

□

Capítulo 6

Proceso de Poisson espacial

Hasta este capítulo, hemos estudiado el proceso de Poisson en intervalos de la recta real. Veremos cómo podemos extender el Proceso de Poisson a un subespacio de dimensión finita, centrándonos cuando la dimensión del espacio es menor o igual a tres.

Definición 6.1. Sea A un conjunto en un espacio de dimensión n y sea \mathcal{R} una familia de subconjuntos de A . Se define un *proceso puntual en A* como un proceso estocástico $\{S(R) : R \subseteq \mathcal{R}\}$ indexado por los subconjuntos R en \mathcal{R} que tiene como valores posibles los elementos del conjunto $\{0, 1, 2, \dots\}$.

La idea es que los puntos se encuentran dispersos en A de manera aleatoria y $S(R)$ cuenta los puntos en el conjunto R . Como $S(R)$ es una función que cuenta, hay varias condiciones que debe cumplir, como, por ejemplo, si O y P son conjuntos disjuntos contenidos en \mathcal{R} cuya unión está contenida en \mathcal{R} , entonces debe cumplirse que $S(O \cup P) = S(O) + S(P)$.

El caso unidimensional, en el cual A es la semirecta positiva y \mathcal{R} es la colección de los intervalos de la forma $I = (a, b]$ para $0 \leq a < b$, lo hemos estudiado con el proceso de Poisson puntual. La generalización al plano o al espacio tridimensional tiene interés cuando consideramos la distribución espacial de estrellas o galaxias en Astronomía, de plantas o animales en Ecología, de bacterias sobre una placa de laboratorio en Biología o de defectos sobre una superficie en Ingeniería.

Definición 6.2. Sea A un subconjunto de \mathbb{R}^k con $k \in \{1, 2, 3\}$. Sea \mathcal{R} una familia de subconjuntos de A y para cualquier $R \in \mathcal{R}$ sea $|R|$ el tamaño (longitud, área o volumen) de R . Entonces $\{S(R) : R \subseteq \mathcal{R}\}$ es un *proceso puntual homogéneo de Poisson de intensidad $\mu > 0$* si:

- a) Para todo $R \in \mathcal{R}$, $S(R)$ tiene distribución de Poisson de intensidad $\mu|R|$.
- b) Para toda colección finita R_1, \dots, R_n de conjuntos disjuntos de \mathcal{R} , las variables $S(R_1), \dots, S(R_n)$ son independientes.

Muchas de las propiedades que hemos estudiado para el caso unidimensional tienen una extensión natural para el caso de dimensiones mayores. Veamos, como ejemplo, la propie-

dad de uniformidad de la distribución de la ubicación de los puntos en una región dada en la que conocemos el número de puntos.

Ejemplo 6.1. Consideremos inicialmente una región O de tamaño positivo, $|O| > 0$, y supongamos que sabemos que O contiene exactamente un punto: $S(O) = 1$. Sea $Q_1 \subset O$ y pongamos que $O = Q_1 \cup Q_2$, donde $Q_2 = O \setminus Q_1$. Por lo tanto, $S(Q_1)$ y $S(Q_2)$ son variables aleatorias independientes que siguen una distribución de Poisson de intensidad $\mu|Q_1|$ y $\mu|Q_2|$, respectivamente. Por lo tanto

$$P(S(Q_1) = 1 \mid S(O) = 1) = \frac{P(\{S(Q_1) = 1\} \cap \{S(Q_2) = 0\})}{P(S(O) = 1)} = \frac{\mu|Q_1|e^{-\mu|Q_1|}e^{-\mu|Q_2|}}{\mu|O|e^{-\mu|O|}} = \frac{|Q_1|}{|O|},$$

donde la segunda igualdad se obtiene por la independencia de las variables y la tercera igualdad de la propiedad $|O| = |Q_1| + |Q_2|$. ■

Podemos generalizar este resultado considerando una región O de tamaño positivo $|O| > 0$ que contiene $S(O) = n \geq 1$ puntos. Consideremos que estos puntos son independientes y están distribuidos uniformemente en O en el sentido de que, para cualquier partición disjunta O_1, \dots, O_m de O , donde $O = O_1 \cup \dots \cup O_m$ y para cualesquiera enteros positivos h_1, \dots, h_m con $h_1 + \dots + h_m = n$, tenemos que

$$P(S(O_1) = h_1, \dots, S(O_m) = h_m \mid S(O) = n) = \frac{n!}{h_1! \dots h_m!} \left(\frac{|O_1|}{|O|}\right)^{h_1} \dots \left(\frac{|O_m|}{|O|}\right)^{h_m}.$$

Luego, tenemos que, dado que $S(O) = n$, la distribución conjunta de $S(O_1), \dots, S(O_m)$ es multinomial. ■

Ejemplo 6.2. Consideremos un proceso de Poisson compuesto sobre la recta y supongamos que las variables asociadas U_1, U_2, \dots tienen distribución uniforme $[0, 1]$, es decir, sea $\{N(t), t \geq 0\}$ un proceso de Poisson de intensidad $\mu > 0$ y sean U_i , $n = 1, 2, \dots$ v.a.i.i.d. con distribución uniforme en $[0, 1]$ independientes de $\{N(t), t \geq 0\}$. Esto nos da una sucesión de puntos sobre la banda

$$B = \{(u, v) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq u < \infty, 0 < v < 1\}.$$

En este caso, como las U_i tienen distribución continua, el número de puntos sobre una recta fija $L = \{(u, v) \in \mathbb{R}^2 : v = x\}$ es 0 con probabilidad uno (ver la Figura 6.1).

Si en lugar de rectas consideramos las bandas $B_m = \{(u, v) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq u < \infty, b_{m-1} < v < b_m\}$, con $0 \leq b_0 < b_1 < \dots < b_m \leq 1$, entonces los puntos en las bandas B_m son independientes. Usando esta propiedad y la propiedad de incrementos independientes de los procesos de Poisson unidimensionales obtenemos el siguiente resultado:

Sean $R_m := \{(u, v) : a_m < u \leq b_m, c_m < v \leq d_m\}$ con $a_m \geq 0$ y $0 \leq c_m < d_m \leq 1$, $m = 1, 2, \dots$ rectángulos y sea $S(R_m)$ el número de puntos de ocurrencia (Φ_i, U_i) del

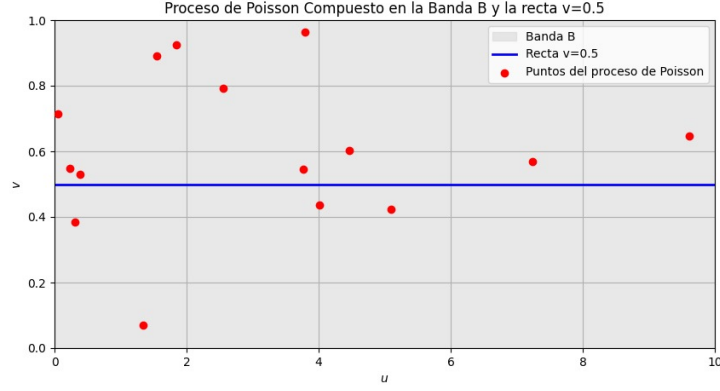


Figura 6.1: Simulación de los puntos (Φ_i, U_i) asociados a un proceso de Poisson compuesto con tasa $\mu = 0.5$. Recta L dada por $v = 0.5$.

proceso de Poisson compuesto que están en el rectángulo R_m . Si los rectángulos R_m son disjuntos entonces las variables $S(R_m)$ son independientes y tienen distribución de Poisson con intensidad

$$\mu_m = \mu(b_m - a_m)(d_m - c_m) = \mu|R_m|.$$

(Ver la Figura 6.2). Probemos que $\{S(R) : R \in \mathcal{R}\}$ es un proceso puntual homogéneo de Poisson de intensidad $\mu > 0$. En primer lugar veamos que $S(R_m)$ tiene distribución de Poisson de intensidad $\mu|R_m|$. El área de un rectángulo $R_m = \{(u, v) : a_m < u \leq b_m, c_m < v \leq d_m\}$ es $|R_m| = (b_m - a_m)(d_m - c_m)$.

Veamos que para cualquier $k \geq 0$,

$$P(S(R_m) = k) = \frac{e^{-\mu|R_m|}(\mu|R_m|)^k}{k!}.$$

En efecto: por la definición del proceso de Poisson compuesto, dado $k \geq 0$,

$$\begin{aligned} P(S(R_m) = k) &= \sum_{n=k}^{\infty} P(N(b_m) - N(a_m) = n) \binom{n}{k} (d_m - c_m)^k (1 - (d_m - c_m))^{n-k} \\ &= \sum_{n=k}^{\infty} e^{-(b_m - a_m)\mu} \frac{(\mu(b_m - a_m))^n}{n!} \frac{n!}{(n-k)!k!} (d_m - c_m)^k (1 - (d_m - c_m))^{n-k} \\ &= \frac{1}{k!} (\mu|R_m|)^k e^{-\mu(b_m - a_m)} \sum_{n=k}^{\infty} \frac{(\mu(b_m - a_m)(1 - (d_m - c_m)))^{n-k}}{(n-k)!} \\ &= \frac{1}{k!} (\mu|R_m|)^k e^{-\mu(b_m - a_m)} e^{\mu(b_m - a_m)(1 - (d_m - c_m))} \\ &= e^{-\mu|R_m|} \frac{(\mu|R_m|)^k}{k!}. \end{aligned}$$

Por lo tanto, por la definición del proceso de Poisson,

$$S(R_m) \sim \mathcal{P}(\mu|R_m|) = \mathcal{P}(\mu(b_m - a_m)(d_m - c_m)).$$

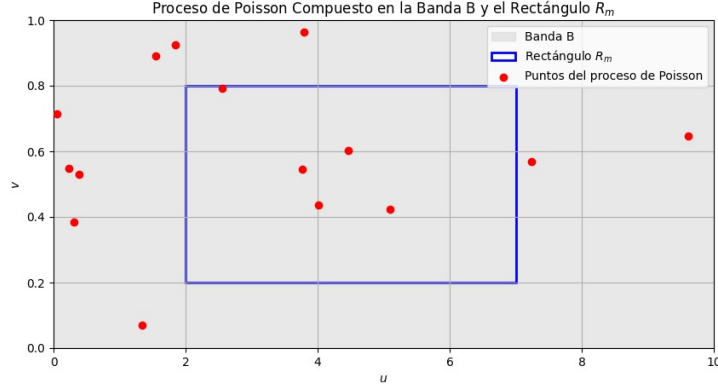


Figura 6.2: Simulación de los puntos (Φ_i, U_i) asociados a un proceso de Poisson compuesto con tasa $\mu = 0.5$. Representación de R_m .

Para ver la segunda propiedad, sea una colección finita de rectángulos disjuntos R_1, \dots, R_n , y veamos que variables $S(R_1), \dots, S(R_n)$ son independientes. Dado que cada punto (Φ_i, U_i) es un proceso de Poisson, el número de puntos en conjuntos disjuntos es independiente pues los rectángulos R_1, \dots, R_n son disjuntos. Entonces

$$\{S(R_1), S(R_2), \dots, S(R_n)\}$$

son recuentos del número de puntos en conjuntos disjuntos. Por la propiedad de independencia del proceso de Poisson, las variables $S(R_i)$, $i = 1, \dots, n$, son independientes. ■

Observación 6.1. Los procesos de Poisson puntuales también se pueden considerar no homogéneos. Por ejemplo, veamos el proceso de Poisson no homogéneo en el plano: Sea $R_m := \{(u, v) \in \mathbb{R}^2 : a_m < u \leq b_m, c_m < v \leq d_m\}$ con $a_m \geq 0$ y $0 \leq c_m < d_m \leq 1$, $m = 1, 2, \dots$ un rectángulo y sea $S(R_m)$ el número de puntos (Φ_i, U_i) contenidos en el rectángulo R_m .

Decimos que S es un proceso no homogéneo de Poisson de función de intensidad $\mu(x, y)$ si, cuando los rectángulos R_m , $1 \leq m \leq n$, son conjuntos disjuntos, las variables $S(R_m)$ son independientes con distribución de Poisson de intensidad

$$\lambda(R_m) = \int_{(x,y) \in R_m} \mu(x, y) dy dx.$$

Si el valor de la integral es ∞ , esto quiere decir que el número de puntos es infinito.

Ejemplo 6.3. Sean Φ_1, Φ_2, \dots los instantes en los que ocurren eventos de un proceso de Poisson con intensidad μ . Supongamos que si un evento ocurre en el instante t , lo registramos con probabilidad $p(t)$. El proceso de eventos registrados es un proceso de

Poisson no homogéneo de intensidad $\mu p(t)$. Para ver esto, asociamos a cada Φ_i una v.a. independiente con distribución uniforme sobre $(0, 1)$, y aceptamos el punto si $U_i < p(\Phi_i)$. El número de puntos Φ_i aceptados en un intervalo (a, b) es igual al número de puntos (Φ_i, U_i) que caen en la región

$$R = \{(u, v) \in \mathbb{R}^2 : a < u < b, 0 < v < p(u)\}.$$

En consecuencia, este número sigue distribución de Poisson con intensidad

$$\mu \int_a^b p(t) dt,$$

que no es más que el producto de μ por el área del rectángulo. Podemos observar que el número de eventos en intervalos disjuntos son independientes, luego tenemos un proceso de Poisson no homogéneo. Este resultado nos da una manera de construir un proceso de Poisson no homogéneo de intensidad dada.

Bibliografía

- [1] CDYPE. *Propiedades de la función generatriz de momentos*. Universidad de Granada, Granada, España, 2021.
- [2] Rick Durrett. *Essentials of Stochastic Processes*. Springer, 2011.
- [3] Agustín García Nogales. *Estadística Matemática*. Universidad de Extremadura, 1998.
- [4] Peter W. Jones and Peter Smith. *Stochastic Processes: An Introduction*. CRC Press, 2017.
- [5] Alan F. Karr. *Probability*. Springer, 1993.
- [6] Sheldon M. Ross. *Stochastic Processes*. John Wiley & Sons, INC, 1996.
- [7] Sheldon M. Ross. *Introduction to Probability Models, 10th. Ed.* Academic Press, 2011.
- [8] Howard M. Taylor and Samuel Karlin. *An Introduction To Stochastic Modeling*. Academic Press, 1998.
- [9] Rita Troncoso de la Cuesta. *La distribución Gamma*. Universidad de Santiago de Compostela, 2021.

