Cálculo de Programas
Trabalho Prático
MiEI+LCC — 2018/19

Departamento de Informática
Universidade do Minho

Junho de 2019

Grupo nr.	99 (preencher)
a11111	Nome1 (preencher)
a22222	Nome2 (preencher)
a33333	Nome3 (preencher)

1 Preâmbulo

A disciplina de Cálculo de Programas tem como objectivo principal ensinar a programação de computadores como uma disciplina científica. Para isso parte-se de um repertório de *combinadores* que formam uma álgebra da programação (conjunto de leis universais e seus corolários) e usam-se esses combinadores para construir programas *composicionalmente*, isto é, agregando programas já existentes.

Na sequência pedagógica dos planos de estudo dos dois cursos que têm esta disciplina, restringe-se a aplicação deste método à programação funcional em Haskell. Assim, o presente trabalho prático coloca os alunos perante problemas concretos que deverão ser implementados em Haskell. Há ainda um outro objectivo: o de ensinar a documentar programas, validá-los, e a produzir textos técnico-científicos de qualidade.

2 Documentação

Para cumprir de forma integrada os objectivos enunciados acima vamos recorrer a uma técnica de programação dita "literária" [**?**], cujo princípio base é o seguinte:

> *Um programa e a sua documentação devem coincidir.*

Por outras palavras, o código fonte e a documentação de um programa deverão estar no mesmo ficheiro.

O ficheiro `cp1819t.pdf` que está a ler é já um exemplo de programação literária: foi gerado a partir do texto fonte `cp1819t.lhs`[1] que encontrará no material pedagógico desta disciplina descompactando o ficheiro `cp1819t.zip` e executando

```
$ lhs2TeX cp1819t.lhs > cp1819t.tex
$ pdflatex cp1819t
```

em que `lhs2tex` é um pre-processador que faz "pretty printing" de código Haskell em LaTeX e que deve desde já instalar executando

```
$ cabal install lhs2tex
```

Por outro lado, o mesmo ficheiro `cp1819t.lhs` é executável e contém o "kit" básico, escrito em Haskell, para realizar o trabalho. Basta executar

```
$ ghci cp1819t.lhs
```

[1] O suffixo 'lhs' quer dizer *literate Haskell*.

Abra o ficheiro `cp1819t.lhs` no seu editor de texto preferido e verifique que assim é: todo o texto que se encontra dentro do ambiente

```
\begin{code}
...
\end{code}
```

vai ser seleccionado pelo GHCi para ser executado.

3 Como realizar o trabalho

Este trabalho teórico-prático deve ser realizado por grupos de três alunos. Os detalhes da avaliação (datas para submissão do relatório e sua defesa oral) são os que forem publicados na página da disciplina na *internet*.

Recomenda-se uma abordagem participativa dos membros do grupo de trabalho por forma a poderem responder às questões que serão colocadas na *defesa oral* do relatório.

Em que consiste, então, o *relatório* a que se refere o parágrafo anterior? É a edição do texto que está a ser lido, preenchendo o anexo D com as respostas. O relatório deverá conter ainda a identificação dos membros do grupo de trabalho, no local respectivo da folha de rosto.

Para gerar o PDF integral do relatório deve-se ainda correr os comando seguintes, que actualizam a bibliografia (com BibTEX) e o índice remissivo (com `makeindex`),

```
$ bibtex cp1819t.aux
$ makeindex cp1819t.idx
```

e recompilar o texto como acima se indicou. Dever-se-á ainda instalar o utilitário QuickCheck, que ajuda a validar programas em Haskell e a biblioteca Gloss para geração de gráficos 2D:

```
$ cabal install QuickCheck gloss
```

Para testar uma propriedade QuickCheck *prop*, basta invocá-la com o comando:

```
> quickCheck prop
+++ OK, passed 100 tests.
```

Qualquer programador tem, na vida real, de ler e analisar (muito!) código escrito por outros. No anexo C disponibiliza-se algum código Haskell relativo aos problemas que se seguem. Esse anexo deverá ser consultado e analisado à medida que isso for necessário.

Problema 1

Um compilador é um programa que traduz uma linguagem dita de *alto nível* numa linguagem (dita de *baixo nível*) que seja executável por uma máquina. Por exemplo, o GCC compila C/C++ em código objecto que corre numa variedade de arquitecturas.

Compiladores são normalmente programas complexos. Constam essencialmente de duas partes: o *analisador sintático* que lê o texto de entrada (o programa *fonte* a compilar) e cria uma sua representação interna, estruturada em árvore; e o *gerador de código* que converte essa representação interna em código executável. Note-se que tal representação intermédia pode ser usada para outros fins, por exemplo, para gerar uma listagem de qualidade (*pretty print*) do programa fonte.

O projecto de compiladores é um assunto complexo que será assunto de outras disciplinas. Neste trabalho pretende-se apenas fazer uma introdução ao assunto, mostrando como tais programas se podem construir funcionalmente à custa de cata/ana/hilo-morfismos da linguagem em causa.

Para cumprirmos o nosso objectivo, a linguagem desta questão terá que ser, naturalmente, muito simples: escolheu-se a das expressões aritméticas com inteiros, *eg.* $1+2$, $3*(4+5)$ etc. Como representação interna adopta-se o seguinte tipo polinomial, igualmente simples:

$$\mathbf{data}\ Expr = Num\ Int \mid Bop\ Expr\ Op\ Expr$$
$$\mathbf{data}\ Op = Op\ String$$

1. Escreva as definições dos {cata, ana e hilo}-morfismos deste tipo de dados segundo o método ensinado nesta disciplina (recorde módulos como *eg.* BTree etc).

2. Como aplicação do módulo desenvolvido no ponto 1, defina como {cata, ana ou hilo}-morfismo a função seguinte:

   - $calcula :: Expr \to Int$ que calcula o valor de uma expressão;

     Propriedade QuickCheck 1 *O valor zero é um elemento neutro da adição.*

     $$\begin{aligned}&prop\_neutro1 :: Expr \to Bool\\&prop\_neutro1 = calcula \cdot addZero \equiv calcula \textbf{ where}\\&\quad addZero\ e = Bop\ (Num\ 0)\ (Op\ \texttt{"+"})\ e\\&prop\_neutro2 :: Expr \to Bool\\&prop\_neutro2 = calcula \cdot addZero \equiv calcula \textbf{ where}\\&\quad addZero\ e = Bop\ e\ (Op\ \texttt{"+"})\ (Num\ 0)\end{aligned}$$

     Propriedade QuickCheck 2 *As operações de soma e multiplicação são comutativas.*

     $$\begin{aligned}&prop\_comuta = calcula \cdot mirror \equiv calcula \textbf{ where}\\&\quad mirror = cataExpr\ [Num, g2]\\&\quad g2 = \widehat{\widehat{Bop}} \cdot (swap \times id) \cdot assocl \cdot (id \times swap)\end{aligned}$$

3. Defina como {cata, ana ou hilo}-morfismos as funções

   - $compile :: String \to Codigo$ - trata-se do compilador propriamente dito. Deverá ser gerado código posfixo para uma máquina elementar de stack. O tipo $Codigo$ pode ser definido à escolha. Dão-se a seguir exemplos de comportamentos aceitáveis para esta função:

     ```
     Tp4> compile "2+4"
     ["PUSH 2", "PUSH 4", "ADD"]
     Tp4> compile "3*(2+4)"
     ["PUSH 3", "PUSH 2", "PUSH 4", "ADD", "MUL"]
     Tp4> compile "(3*2)+4"
     ["PUSH 3", "PUSH 2", "MUL", "PUSH 4", "ADD"]
     Tp4>
     ```

   - $show' :: Expr \to String$ - gera a representação textual de uma $Expr$ pode encarar-se como o *pretty printer* associado ao nosso compilador

     Propriedade QuickCheck 3 *Em anexo, é fornecido o código da função $readExp$, que é "inversa" da função $show'$, tal como a propriedade seguinte descreve:*

     $$\begin{aligned}&prop\_inv :: Expr \to Bool\\&prop\_inv = \pi_1 \cdot head \cdot readExp \cdot show' \equiv id\end{aligned}$$

Valorização Em anexo é apresentado código Haskell que permite declarar $Expr$ como instância da classe $Read$. Neste contexto, $read$ pode ser vista como o analisador sintático do nosso minúsculo compilador de expressões aritméticas.

Analise o código apresentado, corra-o e escreva no seu relatório uma explicação **breve** do seu funcionamento, que deverá saber defender aquando da apresentação oral do relatório.

Exprima ainda o analisador sintático $readExp$ como um anamorfismo.

Problema 2

Pretende-se neste problema definir uma linguagem gráfica "brinquedo" a duas dimensões (2D) capaz de especificar e desenhar agregações de caixas que contêm informação textual. Vamos designar essa linguagem por $L2D$ e vamos defini-la como um tipo em Haskell:

$$\textbf{type } L2D = X\ Caixa\ Tipo$$

onde X é a estrutura de dados

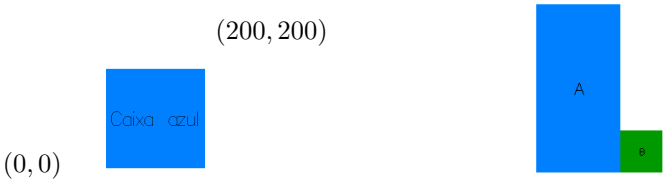


Figure 1: Caixa simples e caixa composta.

$$\textbf{data}\ X\ a\ b = Unid\ a \mid Comp\ b\ (X\ a\ b)\ (X\ a\ b)\ \textbf{deriving}\ Show$$

e onde:

$$\textbf{type}\ Caixa = ((Int, Int), (Texto, G.Color))$$
$$\textbf{type}\ Texto = String$$

Assim, cada caixa de texto é especificada pela sua largura, altura, o seu texto e a sua côr.[2] Por exemplo,

$$((200, 200), (\texttt{"Caixa azul"}, col\_blue))$$

designa a caixa da esquerda da figura 1.

O que a linguagem $L2D$ faz é agregar tais caixas tipográficas umas com as outras segundo padrões especificados por vários "tipos", a saber,

$$\textbf{data}\ Tipo = V \mid Vd \mid Ve \mid H \mid Ht \mid Hb$$

com o seguinte significado:

V - agregação vertical alinhada ao centro

Vd - agregação vertical justificada à direita

Ve - agregação vertical justificada à esquerda

H - agregação horizontal alinhada ao centro

Hb - agregação horizontal alinhada pela base

Ht - agregação horizontal alinhada pelo topo

Como $L2D$ instancia o parâmetro b de X com $Tipo$, é fácil de ver que cada "frase" da linguagem $L2D$ é representada por uma árvore binária em que cada nó indica qual o tipo de agregação a aplicar às suas duas sub-árvores. Por exemplo, a frase

$$ex2 = Comp\ Hb\ (Unid\ ((100, 200), (\texttt{"A"}, col\_blue)))\ (Unid\ ((50, 50), (\texttt{"B"}, col\_green)))$$

deverá corresponder à imagem da direita da figura 1. E poder-se-á ir tão longe quando a linguagem o permita. Por exemplo, pense na estrutura da frase que representa o *layout* da figura 2.

É importante notar que cada "caixa" não dispõe informação relativa ao seu posicionamento final na figura. De facto, é a posição relativa que deve ocupar face às restantes caixas que irá determinar a sua posição final. Este é um dos objectivos deste trabalho: *calcular o posicionamento absoluto de cada uma das caixas por forma a respeitar as restrições impostas pelas diversas agregações*. Para isso vamos considerar um tipo de dados que comporta a informação de todas as caixas devidamente posicionadas (i.e. com a informação adicional da origem onde a caixa deve ser colocada).

[2] Pode relacionar $Caixa$ com as caixas de texto usadas nos jornais ou com *frames* da linguagem HTML usada na Internet.

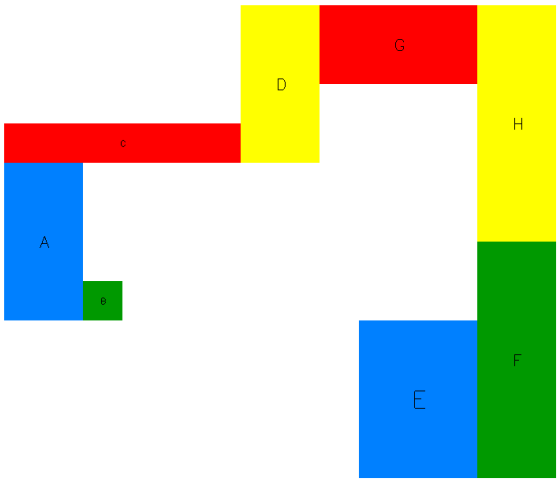


Figure 2: *Layout* feito de várias caixas coloridas.

type $Fig = [(Origem, Caixa)]$
type $Origem = (Float, Float)$

A informação mais relevante deste tipo é a referente à lista de "caixas posicionadas" (tipo $(Origem, Caixa)$). Regista-se aí a origem da caixa que, com a informação da sua altura e comprimento, permite definir todos os seus pontos (consideramos as caixas sempre paralelas aos eixos).

1. Forneça a definição da função $calc\_origems$, que calcula as coordenadas iniciais das caixas no plano:

   $$calc\_origems :: (L2D, Origem) \rightarrow X\ (Caixa, Origem)\ ()$$

2. Forneça agora a definição da função $agrup\_caixas$, que agrupa todas as caixas e respectivas origens numa só lista:

   $$agrup\_caixas :: X\ (Caixa, Origem)\ () \rightarrow Fig$$

Um segundo problema neste projecto é *descobrir como visualizar a informação gráfica calculada por* $desenho$. A nossa estratégia para superar o problema baseia-se na biblioteca Gloss, que permite a geração de gráficos 2D. Para tal disponibiliza-se a função

$$crCaixa :: Origem \rightarrow Float \rightarrow Float \rightarrow String \rightarrow G.Color \rightarrow G.Picture$$

que cria um rectângulo com base numa coordenada, um valor para a largura, um valor para a altura, um texto que irá servir de etiqueta, e a cor pretendida. Disponibiliza-se também a função

$$display :: G.Picture \rightarrow \mathsf{IO}\ ()$$

que dado um valor do tipo $G.picture$ abre uma janela com esse valor desenhado. O objectivo final deste exercício é implementar então uma função

$$mostra\_caixas :: (L2D, Origem) \rightarrow \mathsf{IO}\ ()$$

que dada uma frase da linguagem $L2D$ e coordenadas iniciais apresenta o respectivo desenho no ecrã.
Sugestão: Use a função $G.pictures$ disponibilizada na biblioteca Gloss.

Problema 3

Nesta disciplina estudou-se como fazer programação dinâmica por cálculo, recorrendo à lei de recursividade mútua.[3]

Para o caso de funções sobre os números naturais ($\mathbb{N}_0$, com functor $\mathsf{F}\ X = 1 + X$) é fácil derivar-se da lei que foi estudada uma *regra de algibeira* que se pode ensinar a programadores que não tenham estudado Cálculo de Programas. Apresenta-se de seguida essa regra, tomando como exemplo o cálculo do ciclo-for que implementa a função de Fibonacci, recordar o sistema

$$\begin{aligned} &fib\ 0 = 1\\ &fib\ (n+1) = f\ n\\ &f\ 0 = 1\\ &f\ (n+1) = fib\ n + f\ n \end{aligned}$$

Obter-se-á de imediato

$$\begin{aligned} &fib' = \pi_1 \cdot \mathsf{for}\ loop\ init\ \mathbf{where}\\ &\quad loop\ (fib, f) = (f, fib + f)\\ &\quad init = (1, 1) \end{aligned}$$

usando as regras seguintes:

- O corpo do ciclo *loop* terá tantos argumentos quanto o número de funções mutuamente recursivas.
- Para as variáveis escolhem-se os próprios nomes das funções, pela ordem que se achar conveniente.[4]
- Para os resultados vão-se buscar as expressões respectivas, retirando a variável n.
- Em *init* coleccionam-se os resultados dos casos de base das funções, pela mesma ordem.

Mais um exemplo, envolvendo polinómios no segundo grau a $x^2 + bx + c$ em $\mathbb{N}_0$. Seguindo o método estudado nas aulas[5], de $f\ x = ax^2 + bx + c$ derivam-se duas funções mutuamente recursivas:

$$\begin{aligned} &f\ 0 = c\\ &f\ (n+1) = f\ n + k\ n\\ &k\ 0 = a + b\\ &k\ (n+1) = k\ n + 2\ a \end{aligned}$$

Seguindo a regra acima, calcula-se de imediato a seguinte implementação, em Haskell:

$$\begin{aligned} &f'\ a\ b\ c = \pi_1 \cdot \mathsf{for}\ loop\ init\ \mathbf{where}\\ &\quad loop\ (f, k) = (f + k, k + 2 * a)\\ &\quad init = (c, a + b) \end{aligned}$$

Qual é o assunto desta questão, então? Considerem fórmula que dá a série de Taylor da função coseno:

$$cos\ x = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{(-1)^i}{(2i)!} x^{2i}$$

Pretende-se o ciclo-for que implementa a função $cos'\ x\ n$ que dá o valor dessa série tomando i até n inclusivé:

$$cos'\ x = \cdots \cdot \mathsf{for}\ loop\ init\ \mathbf{where}\ \cdots$$

Sugestão: Começar por estudar muito bem o processo de cálculo dado no anexo B para o problema (semelhante) da função exponencial.

Propriedade QuickCheck 4 *Testes de que $cos'\ x$ calcula bem o coseno de π e o coseno de π / 2:*

$$\begin{aligned} &prop\_cos1\ n = n \geqslant 10 \Rightarrow abs\ (cos\ \pi - cos'\ \pi\ n) < 0.001\\ &prop\_cos2\ n = n \geqslant 10 \Rightarrow abs\ (cos\ (\pi\ /\ 2) - cos'\ (\pi\ /\ 2)\ n) < 0.001 \end{aligned}$$

[3] Lei (3.94) em [**?**], página 98.
[4] Podem obviamente usar-se outros símbolos, mas numa primeiraleitura dá jeito usarem-se tais nomes.
[5] Secção 3.17 de [**?**].

Valorização Transliterar cos' para a linguagem C; compilar e testar o código. Conseguia, por intuição apenas, chegar a esta função?

Problema 4

Pretende-se nesta questão desenvolver uma biblioteca de funções para manipular *sistemas de ficheiros* genéricos. Um sistema de ficheiros será visto como uma associação de *nomes* a ficheiros ou *directorias*. Estas últimas serão vistas como sub-sistemas de ficheiros e assim recursivamente. Assumindo que a é o tipo dos identificadores dos ficheiros e directorias, e que b é o tipo do conteúdo dos ficheiros, podemos definir um tipo indutivo de dados para representar sistemas de ficheiros da seguinte forma:

$$\mathbf{data}\ FS\ a\ b = FS\ [(a, Node\ a\ b)]\ \mathbf{deriving}\ (Eq, Show)$$
$$\mathbf{data}\ Node\ a\ b = File\ b \mid Dir\ (FS\ a\ b)\ \mathbf{deriving}\ (Eq, Show)$$

Um caminho (*path*) neste sistema de ficheiros pode ser representado pelo seguinte tipo de dados:

$$\mathbf{type}\ Path\ a = [a]$$

Assumindo estes tipos de dados, o seguinte termo

```
FS [("f1", File "Ola"),
  ("d1", Dir (FS [("f2", File "Ole"),
    ("f3", File "Ole")
    ]))
  ]
```

representará um sistema de ficheiros em cuja raíz temos um ficheiro chamado *f1* com conteúdo `"Ola"` e uma directoria chamada `"d1"` constituída por dois ficheiros, um chamado `"f2"` e outro chamado `"f3"`, ambos com conteúdo `"Ole"`. Neste caso, tanto o tipo dos identificadores como o tipo do conteúdo dos ficheiros é *String*. No caso geral, o conteúdo de um ficheiro é arbitrário: pode ser um binário, um texto, uma colecção de dados, etc.

A definição das usuais funções $inFS$ e $recFS$ para este tipo é a seguinte:

$$inFS = FS \cdot \mathsf{map}\ (id \times inNode)$$
$$inNode = [File, Dir]$$
$$recFS\ f = baseFS\ id\ id\ f$$

Suponha que se pretende definir como um *catamorfismo* a função que conta o número de ficheiros existentes num sistema de ficheiros. Uma possível definição para esta função seria:

$$conta :: FS\ a\ b \to Int$$
$$conta = cataFS\ (sum \cdot \mathsf{map}\ ([\underline{1}, id] \cdot \pi_2))$$

O que é para fazer:

1. Definir as funções $outFS$, $baseFS$, $cataFS$, $anaFS$ e $hyloFS$.
2. Apresentar, no relatório, o diagrama de $cataFS$.
3. Definir as seguintes funções para manipulação de sistemas de ficheiros usando, obrigatoriamente, catamorfismos, anamorfismos ou hilomorfismos:
   (a) Verificação da integridade do sistema de ficheiros (i.e. verificar que não existem identificadores repetidos dentro da mesma directoria).
   $check :: FS\ a\ b \to Bool$

   Propriedade QuickCheck 5 *A integridade de um sistema de ficheiros não depende da ordem em que os últimos são listados na sua directoria:*

   $$prop\_check :: FS\ String\ String \to Bool$$
   $$prop\_check = check \cdot (cataFS\ (inFS \cdot reverse)) \equiv check$$

(b) Recolha do conteúdo de todos os ficheiros num arquivo indexado pelo *path*.
$tar :: FS\ a\ b \to [(Path\ a, b)]$

Propriedade QuickCheck 6 *O número de ficheiros no sistema deve ser igual ao número de ficheiros listados pela função* tar.

$$
\begin{aligned}
&prop\_tar :: FS\ String\ String \to Bool\\
&prop\_tar = \mathsf{length}\ \cdot tar \equiv conta
\end{aligned}
$$

(c) Transformação de um arquivo com o conteúdo dos ficheiros indexado pelo *path* num sistema de ficheiros.
$untar :: [(Path\ a, b)] \to FS\ a\ b$
Sugestão: Use a função $joinDupDirs$ para juntar directorias que estejam na mesma pasta e que possuam o mesmo identificador.

Propriedade QuickCheck 7 *A composição* $tar \cdot untar$ *preserva o número de ficheiros no sistema.*

$$
\begin{aligned}
&prop\_untar :: [(Path\ String, String)] \to Property\\
&prop\_untar = validPaths \Rightarrow ((\mathsf{length}\ \cdot tar \cdot untar) \equiv \mathsf{length}\ )\\
&validPaths :: [(Path\ String, String)] \to Bool\\
&validPaths = (\equiv 0) \cdot \mathsf{length}\ \cdot (filter\ (\lambda(a, \_) \to \mathsf{length}\ \ a \equiv 0))
\end{aligned}
$$

(d) Localização de todos os *paths* onde existe um determinado ficheiro.
$find :: a \to FS\ a\ b \to [Path\ a]$

Propriedade QuickCheck 8 *A composição* $tar \cdot untar$ *preserva todos os ficheiros no sistema.*

$$
\begin{aligned}
&prop\_find :: String \to FS\ String\ String \to Bool\\
&prop\_find = curry\ \$\\
&\quad \mathsf{length}\ \cdot \widehat{find} \equiv \mathsf{length}\ \cdot \widehat{find} \cdot (id \times (untar \cdot tar))
\end{aligned}
$$

(e) Criação de um novo ficheiro num determinado *path*.
$new :: Path\ a \to b \to FS\ a\ b \to FS\ a\ b$

Propriedade QuickCheck 9 *A adição de um ficheiro não existente no sistema não origina ficheiros duplicados.*

$$
\begin{aligned}
&prop\_new :: ((Path\ String, String), FS\ String\ String) \to Property\\
&prop\_new = ((validPath \wedge notDup) \wedge (check \cdot \pi_2)) \Rightarrow\\
&\quad (checkFiles \cdot \widehat{\widehat{new}})\ \mathbf{where}\\
&\quad validPath = (\not\equiv 0) \cdot \mathsf{length}\ \cdot \pi_1 \cdot \pi_1\\
&\quad notDup = \neg \cdot \widehat{elem} \cdot (\pi_1 \times ((\mathsf{fmap}\ \pi_1) \cdot tar))
\end{aligned}
$$

Questão: *Supondo-se que no código acima se substitui a propriedade* $checkFiles$ *pela propriedade mais fraca* $check$*, será que a propriedade* $prop\_new$ *ainda é válida? Justifique a sua resposta.*

Propriedade QuickCheck 10 *A listagem de ficheiros logo após uma adição nunca poderá ser menor que a listagem de ficheiros antes dessa mesma adição.*

$$
\begin{aligned}
&prop\_new2 :: ((Path\ String, String), FS\ String\ String) \to Property\\
&prop\_new2 = validPath \Rightarrow ((\mathsf{length}\ \cdot tar \cdot \pi_2) \leqslant (\mathsf{length}\ \cdot tar \cdot \widehat{\widehat{new}}))\ \mathbf{where}\\
&\quad validPath = (\not\equiv 0) \cdot \mathsf{length}\ \cdot \pi_1 \cdot \pi_1
\end{aligned}
$$

(f) Duplicação de um ficheiro.
$cp :: Path\ a \to Path\ a \to FS\ a\ b \to FS\ a\ b$

Propriedade QuickCheck 11 *A listagem de ficheiros com um dado nome não diminui após uma duplicação.*

$$
\begin{aligned}
&prop\_cp :: ((Path\ String, Path\ String), FS\ String\ String) \to Bool\\
&prop\_cp = \mathsf{length}\ \cdot tar \cdot \pi_2 \leqslant \mathsf{length}\ \cdot tar \cdot \widehat{\widehat{cp}}
\end{aligned}
$$

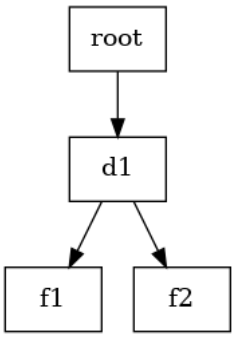


Figure 3: Exemplo de um sistema de ficheiros visualizado em Graphviz.

(g) Eliminação de um ficheiro.
$rm :: Path\ a \to FS\ a\ b \to FS\ a\ b$
Sugestão: Construir um anamorfismo $nav :: (Path\ a, FS\ a\ b) \to FS\ a\ b$ que navegue por um sistema de ficheiros tendo como base o $path$ dado como argumento.

Propriedade QuickCheck 12 *Remover duas vezes o mesmo ficheiro tem o mesmo efeito que o remover apenas uma vez.*

$$prop\_rm :: (Path\ String, FS\ String\ String) \to Bool$$
$$prop\_rm = \widehat{rm} \cdot \langle \pi_1, \widehat{rm} \rangle \equiv \widehat{rm}$$

Propriedade QuickCheck 13 *Adicionar um ficheiro e de seguida remover o mesmo não origina novos ficheiros no sistema.*

$$prop\_rm2 :: ((Path\ String, String), FS\ String\ String) \to Property$$
$$prop\_rm2 = validPath \Rightarrow ((\mathsf{length} \cdot tar \cdot \widehat{rm} \cdot \langle \pi_1 \cdot \pi_1, \widehat{\widehat{new}} \rangle)$$
$$\leqslant (\mathsf{length} \cdot tar \cdot \pi_2))\ \textbf{where}$$
$$validPath = (\not\equiv 0) \cdot \mathsf{length} \cdot \pi_1 \cdot \pi_1$$

Valorização Definir uma função para visualizar em Graphviz a estrutura de um sistema de ficheiros. A Figura 3, por exemplo, apresenta a estrutura de um sistema com precisamente dois ficheiros dentro de uma directoria chamada `"d1"`.

Para realizar este exercício será necessário apenas escrever o anamorfismo

$$cFS2Exp :: (a, FS\ a\ b) \to (Exp\ ()\ a)$$

que converte a estrutura de um sistema de ficheiros numa árvore de expressões descrita em Exp.hs. A função $dotFS$ depois tratará de passar a estrutura do sistema de ficheiros para o visualizador.

Anexos

A Como exprimir cálculos e diagramas em LaTeX/lhs2tex

Estudar o texto fonte deste trabalho para obter o efeito:[6]

$$
\begin{array}{ll}
& id = \langle f, g\rangle \\
\equiv & \quad \{\ \text{universal property}\ \} \\
& \left\{ \begin{array}{l} \pi_1 \cdot id = f \\ \pi_2 \cdot id = g \end{array} \right. \\
\equiv & \quad \{\ \text{identity}\ \} \\
& \left\{ \begin{array}{l} \pi_1 = f \\ \pi_2 = g \end{array} \right. \\
\Box &
\end{array}
$$

Os diagramas podem ser produzidos recorrendo à *package* LaTeX xymatrix, por exemplo:

$$
\begin{array}{ccc}
\mathbb{N}_0 & \xleftarrow{\ \mathsf{in}\ } & 1 + \mathbb{N}_0 \\
{\scriptstyle (\!|g|\!)}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle id + (\!|g|\!)} \\
B & \xleftarrow[g]{} & 1 + B
\end{array}
$$

B Programação dinâmica por recursividade múltipla

Neste anexo dão-se os detalhes da resolução do Exercício 3.30 dos apontamentos da disciplina[7], onde se pretende implementar um ciclo que implemente o cálculo da aproximação até $i = n$ da função exponencial $exp\ x = e^x$ via série de Taylor:

$$exp\ x \quad = \quad \sum_{i=0}^{\infty} \frac{x^i}{i!} \tag{1}$$

Seja $e\ x\ n = \sum_{i=0}^{n} \frac{x^i}{i!}$ a função que dá essa aproximação. É fácil de ver que $e\ x\ 0 = 1$ e que $e\ x\ (n+1) = e\ x\ n + \frac{x^{n+1}}{(n+1)!}$. Se definirmos $h\ x\ n = \frac{x^{n+1}}{(n+1)!}$ teremos $e\ x$ e $h\ x$ em recursividade mútua. Se repetirmos o processo para $h\ x\ n$ etc obteremos no total três funções nessa mesma situação:

$$
\begin{array}{l}
e\ x\ 0 = 1 \\
e\ x\ (n+1) = h\ x\ n + e\ x\ n \\
h\ x\ 0 = x \\
h\ x\ (n+1) = x\ /\ (s\ n) * h\ x\ n \\
s\ 0 = 2 \\
s\ (n+1) = 1 + s\ n
\end{array}
$$

Segundo a *regra de algibeira* descrita na página 3 deste enunciado, ter-se-á, de imediato:

$$
\begin{array}{l}
e'\ x = prj \cdot \mathsf{for}\ loop\ init\ \mathbf{where} \\
\quad init = (1, x, 2) \\
\quad loop\ (e, h, s) = (h + e, x\ /\ s * h, 1 + s) \\
\quad prj\ (e, h, s) = e
\end{array}
$$

[6] Exemplos tirados de [?].
[7] Cf. [?], página 102.

C Código fornecido

Problema 1

Tipos:

```
data Expr = Num Int
  | Bop Expr Op Expr deriving (Eq, Show)
data Op = Op String deriving (Eq, Show)
type Codigo = [String]
```

Functor de base:

```
baseExpr f g = id + (f × (g × g))
```

Instâncias:

```
instance Read Expr where
  readsPrec _ = readExp
```

Read para Exp's:

```
readOp :: String → [(Op, String)]
readOp input = do
  (x, y) ← lex input
  return ((Op x), y)
readNum :: ReadS Expr
readNum = (map (λ(x, y) → ((Num x), y))) · reads
readBinOp :: ReadS Expr
readBinOp = (map (λ((x, (y, z)), t) → ((Bop x y z), t))) ·
  ((readNum `ou` (pcurvos readExp))
    `depois` (readOp `depois` readExp))
readExp :: ReadS Expr
readExp = readBinOp `ou` (
  readNum `ou` (
  pcurvos readExp))
```

Combinadores:

```
depois :: (ReadS a) → (ReadS b) → ReadS (a, b)
depois _ _ [] = []
depois r1 r2 input = [((x, y), i2) | (x, i1) ← r1 input,
  (y, i2) ← r2 i1]
readSeq :: (ReadS a) → ReadS [a]
readSeq r input
  = case (r input) of
    [] → [([], input)]
    l → concat (map continua l)
      where continua (a, i) = map (c a) (readSeq r i)
        c x (xs, i) = ((x : xs), i)
ou :: (ReadS a) → (ReadS a) → ReadS a
ou r1 r2 input = (r1 input) ++ (r2 input)
senao :: (ReadS a) → (ReadS a) → ReadS a
senao r1 r2 input = case (r1 input) of
  [] → r2 input
  l  → l
readConst :: String → ReadS String
readConst c = (filter ((≡ c) · π1)) · lex
pcurvos = parentesis '(' ')'
```

```
prectos = parentesis '[' ']'
chavetas = parentesis '{' '}'
parentesis :: Char → Char → (ReadS a) → ReadS a
parentesis _ _ _ [] = []
parentesis ap pa r input
  = do
    ((_, (x, _)), c) ← ((readConst [ap]) `depois` (
      r `depois` (
      readConst [pa]))) input
    return (x, c)
```

Problema 2

Tipos:

```
type Fig = [(Origem, Caixa)]
type Origem = (Float, Float)
```

"Helpers":

```
col_blue = G.azure
col_green = darkgreen
darkgreen = G.dark (G.dark G.green)
```

Exemplos:

```
ex1Caixas = G.display (G.InWindow "Problema 4" (400, 400) (40, 40)) G.white $
  crCaixa (0, 0) 200 200 "Caixa azul" col_blue
ex2Caixas = G.display (G.InWindow "Problema 4" (400, 400) (40, 40)) G.white $
  caixasAndOrigin2Pict ((Comp Hb bbox gbox), (0.0, 0.0)) where
  bbox = Unid ((100, 200), ("A", col_blue))
  gbox = Unid ((50, 50), ("B", col_green))
ex3Caixas = G.display (G.InWindow "Problema 4" (400, 400) (40, 40)) G.white mtest where
  mtest = caixasAndOrigin2Pict $ (Comp Hb (Comp Ve bot top) (Comp Ve gbox2 ybox2), (0.0, 0.0))
  bbox1 = Unid ((100, 200), ("A", col_blue))
  bbox2 = Unid ((150, 200), ("E", col_blue))
  gbox1 = Unid ((50, 50), ("B", col_green))
  gbox2 = Unid ((100, 300), ("F", col_green))
  rbox1 = Unid ((300, 50), ("C", G.red))
  rbox2 = Unid ((200, 100), ("G", G.red))
  wbox1 = Unid ((450, 200), ("", G.white))
  ybox1 = Unid ((100, 200), ("D", G.yellow))
  ybox2 = Unid ((100, 300), ("H", G.yellow))
  bot = Comp Hb wbox1 bbox2
  top = (Comp Ve (Comp Hb bbox1 gbox1) (Comp Hb rbox1 (Comp H ybox1 rbox2)))
```

A seguinte função cria uma caixa a partir dos seguintes parâmetros: origem, largura, altura, etiqueta e côr de preenchimento.

```
crCaixa :: Origem → Float → Float → String → G.Color → G.Picture
crCaixa (x, y) w h l c = G.Translate (x + (w / 2)) (y + (h / 2)) $ G.pictures [caixa, etiqueta] where
  caixa = G.color c (G.rectangleSolid w h)
  etiqueta = G.translate calc_trans_x calc_trans_y $
    G.Scale calc_scale calc_scale $ G.color G.black $ G.Text l
  calc_trans_x = (−((fromIntegral (length l)) ∗ calc_scale) / 2) ∗ base_shift_x
  calc_trans_y = (−calc_scale / 2) ∗ base_shift_y
  calc_scale = bscale ∗ (min h w)
  bscale = 1 / 700
```

$$base\_shift\_y = 100$$
$$base\_shift\_x = 64$$

Função para visualizar resultados gráficos:

$$display = G.display\ (G.InWindow\ \texttt{"Problema 4"}\ (400,400)\ (40,40))\ G.white$$

Problema 4

Funções para gestão de sistemas de ficheiros:

$$concatFS = inFS \cdot \widehat{(+\!\!+)} \cdot (outFS \times outFS)$$
$$mkdir\ (x,y) = FS\ [(x, Dir\ y)]$$
$$mkfile\ (x,y) = FS\ [(x, File\ y)]$$
$$joinDupDirs :: (Eq\ a) \Rightarrow (FS\ a\ b) \to (FS\ a\ b)$$
$$joinDupDirs = anaFS\ (prepOut \cdot (id \times proc) \cdot prepIn)\ \textbf{where}$$
$$\quad prepIn = (id \times (\mathsf{map}\ \ (id \times outFS))) \cdot sls \cdot (\mathsf{map}\ \ distr) \cdot outFS$$
$$\quad prepOut = (\mathsf{map}\ \ undistr) \cdot \widehat{(+\!\!+)} \cdot ((\mathsf{map}\ \ i_1) \times (\mathsf{map}\ \ i_2)) \cdot (id \times (\mathsf{map}\ \ (id \times inFS)))$$
$$\quad proc = concat \cdot (\mathsf{map}\ \ joinDup) \cdot groupByName$$
$$\quad sls = \langle lefts, rights \rangle$$
$$joinDup :: [(a,[b])] \to [(a,[b])]$$
$$joinDup = cataList\ [nil, g]\ \textbf{where}\ g = return \cdot \langle \pi_1 \cdot \pi_1, concat \cdot (\mathsf{map}\ \ \pi_2) \cdot \widehat{(:)} \rangle$$
$$createFSfromFile :: (Path\ a, b) \to (FS\ a\ b)$$
$$createFSfromFile\ ([a], b) = mkfile\ (a, b)$$
$$createFSfromFile\ (a : as, b) = mkdir\ (a, createFSfromFile\ (as, b))$$

Funções auxiliares:

$$checkFiles :: (Eq\ a) \Rightarrow FS\ a\ b \to Bool$$
$$checkFiles = cataFS\ (\widehat{(\wedge)} \cdot \langle f, g \rangle)\ \textbf{where}$$
$$\quad f = nr \cdot (\mathsf{fmap}\ \pi_1) \cdot lefts \cdot (\mathsf{fmap}\ distr)$$
$$\quad g = and \cdot rights \cdot (\mathsf{fmap}\ \pi_2)$$
$$groupByName :: (Eq\ a) \Rightarrow [(a,[b])] \to [[(a,[b])]]$$
$$groupByName = (groupBy\ (curry\ p))\ \textbf{where}$$
$$\quad p = \widehat{(\equiv)} \cdot (\pi_1 \times \pi_1)$$
$$filterPath :: (Eq\ a) \Rightarrow Path\ a \to [(Path\ a, b)] \to [(Path\ a, b)]$$
$$filterPath = filter \cdot (\lambda p \to \lambda(a,b) \to p \equiv a)$$

Dados para testes:

- Sistema de ficheiros vazio:

$$efs = FS\ []$$

- Nível 0

$$f1 = FS\ [(\texttt{"f1"}, File\ \texttt{"hello world"})]$$
$$f2 = FS\ [(\texttt{"f2"}, File\ \texttt{"more content"})]$$
$$f00 = concatFS\ (f1, f2)$$
$$f01 = concatFS\ (f1, mkdir\ (\texttt{"d1"}, efs))$$
$$f02 = mkdir\ (\texttt{"d1"}, efs)$$

- Nível 1

$$f10 = mkdir\ (\texttt{"d1"}, f00)$$
$$f11 = concatFS\ (mkdir\ (\texttt{"d1"}, f00), mkdir\ (\texttt{"d2"}, f00))$$
$$f12 = concatFS\ (mkdir\ (\texttt{"d1"}, f00), mkdir\ (\texttt{"d2"}, f01))$$
$$f13 = concatFS\ (mkdir\ (\texttt{"d1"}, f00), mkdir\ (\texttt{"d2"}, efs))$$

- Nível 2

$$
\begin{aligned}
&f20 = mkdir\ (\texttt{"d1"}, f10)\\
&f21 = mkdir\ (\texttt{"d1"}, f11)\\
&f22 = mkdir\ (\texttt{"d1"}, f12)\\
&f23 = mkdir\ (\texttt{"d1"}, f13)\\
&f24 = concatFS\ (mkdir\ (\texttt{"d1"}, f10), mkdir\ (\texttt{"d2"}, f12))
\end{aligned}
$$

- Sistemas de ficheiros inválidos:

$$
\begin{aligned}
&ifs0 = concatFS\ (f1, f1)\\
&ifs1 = concatFS\ (f1, mkdir\ (\texttt{"f1"}, efs))\\
&ifs2 = mkdir\ (\texttt{"d1"}, ifs0)\\
&ifs3 = mkdir\ (\texttt{"d1"}, ifs1)\\
&ifs4 = concatFS\ (mkdir\ (\texttt{"d1"}, ifs1), mkdir\ (\texttt{"d2"}, f12))\\
&ifs5 = concatFS\ (mkdir\ (\texttt{"d1"}, f1), mkdir\ (\texttt{"d1"}, f2))\\
&ifs6 = mkdir\ (\texttt{"d1"}, ifs5)\\
&ifs7 = concatFS\ (mkdir\ (\texttt{"d1"}, f02), mkdir\ (\texttt{"d1"}, f02))
\end{aligned}
$$

Visualização em Graphviz:

$$
\begin{aligned}
&dotFS :: FS\ String\ b \to \mathsf{IO}\ ExitCode\\
&dotFS = dotpict \cdot bmap\ \underline{\texttt{""}}\ id \cdot (cFS2Exp\ \texttt{"root"})
\end{aligned}
$$

Outras funções auxiliares

Lógicas:

$$
\begin{aligned}
&\textbf{infixr}\ 0 \Rightarrow\\
&(\Rightarrow) :: (Testable\ prop) \Rightarrow (a \to Bool) \to (a \to prop) \to a \to Property\\
&p \Rightarrow f = \lambda a \to p\ a \Rightarrow f\ a\\
&\textbf{infixr}\ 0 \Leftrightarrow\\
&(\Leftrightarrow) :: (a \to Bool) \to (a \to Bool) \to a \to Property\\
&p \Leftrightarrow f = \lambda a \to (p\ a \Rightarrow property\ (f\ a))\ .\&\&.\ (f\ a \Rightarrow property\ (p\ a))\\
&\textbf{infixr}\ 4 \equiv\\
&(\equiv) :: Eq\ b \Rightarrow (a \to b) \to (a \to b) \to (a \to Bool)\\
&f \equiv g = \lambda a \to f\ a \equiv g\ a\\
&\textbf{infixr}\ 4 \leqslant\\
&(\leqslant) :: Ord\ b \Rightarrow (a \to b) \to (a \to b) \to (a \to Bool)\\
&f \leqslant g = \lambda a \to f\ a \leqslant g\ a\\
&\textbf{infixr}\ 4 \wedge\\
&(\wedge) :: (a \to Bool) \to (a \to Bool) \to (a \to Bool)\\
&f \wedge g = \lambda a \to ((f\ a) \wedge (g\ a))
\end{aligned}
$$

Compilação e execução dentro do interpretador:[8]

$$
run = \textbf{do}\ \{system\ \texttt{"ghc cp1819t"}; system\ \texttt{"./cp1819t"}\}
$$

D Soluções dos alunos

Os alunos devem colocar neste anexo as suas soluções aos exercícios propostos, de acordo com o "lay-out" que se fornece. Não podem ser alterados os nomes ou tipos das funções dadas, mas pode ser adicionado texto e/ou outras funções auxiliares que sejam necessárias.

[8] Pode ser útil em testes envolvendo Gloss. Nesse caso, o teste em causa deve fazer parte de uma função $main$.

Problema 1

Pergunta 1 - Definições base para o tipo de dados

$$
\begin{aligned}
&inExpr :: Int + (Op, (Expr, Expr)) \to Expr\\
&inExpr = [Num, bopCase]\\
&\quad \textbf{where } bopCase\ (a, (b, c)) = Bop\ b\ a\ c\\
&outExpr :: Expr \to Int + (Op, (Expr, Expr))\\
&outExpr\ (Num\ a) = i_1\ a\\
&outExpr\ (Bop\ a\ op\ b) = i_2\ (op, (a, b))\\
&recExpr\ f = baseExpr\ id\ f\\
&cataExpr\ g = g \cdot (recExpr\ (cataExpr\ g)) \cdot outExpr\\
&anaExpr\ g = inExpr \cdot (recExpr\ (anaExpr\ g)) \cdot g\\
&hiloExpr\ h\ g = cataExpr\ h \cdot anaExpr\ g
\end{aligned}
$$

Pergunta 2 - Calcular o valor de uma expressão

Calcular um valor de uma expressão passa por dois casos, explicitados no tipo de dados. Ou temos um *Num* ou um *Bop* e trata-se de uma operação de redução desse tipo a um número, daí a solução passar por um catamorfismo.

Segue-se o diagrama mais apropriado para descrever este catamorfismo:

$$
\begin{array}{ccc}
Expr & \xrightarrow[outExpr]{} & Num + Op \times Expr \times Expr\\
{\scriptstyle cataExpr\ g}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle id+id\times(cataExpr\ g)}\\
Int & \xleftarrow[g=[id,parseOp]]{} & Num + Op \times Int \times Int
\end{array}
$$

Aqui *parseOp* auxilia a função calcula em converter uma operação e um par de Inteiros no resultado respetivo.

$$
\begin{aligned}
&calcula :: Expr \to Int\\
&calcula = cataExpr\ [id, parseOp]\\
&\quad --\\
&parseOp :: (Op, (Int, Int)) \to Int\\
&parseOp\ (Op\ op, (a, b)) \mid op \equiv \texttt{"+"} = a + b\\
&\quad \mid op \equiv \texttt{"-"} = a - b\\
&\quad \mid op \equiv \texttt{"*"} = a * b\\
&\quad \mid op \equiv \texttt{"mod"} = mod\ a\ b
\end{aligned}
$$

Pergunta 3 - *Pretty printer* show' e a compile

Para converter um tipo de dados *Expr* na sua representação *String* basta-o converter para uma representação literal infixa. Um catamorfismo, mais uma vez, serviu para o caso.

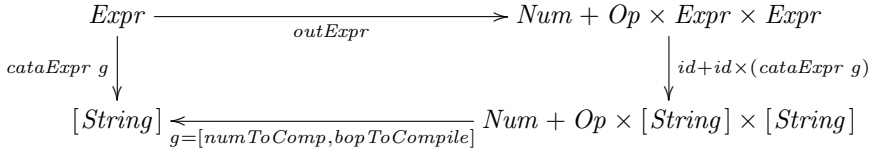
$$
\begin{aligned}
&show' = cataExpr\ [cnvNum, cnvPar]\\
&\quad --\\
&cnvNum :: (Num\ a, Ord\ a, Show\ a) \Rightarrow a \to String\\
&cnvNum\ a \mid a < 0 = \texttt{"("} +\!\!+ show\ a +\!\!+ \texttt{")"}\\
&\quad \mid otherwise = show\ a\\
&\quad --\\
&cnvPar :: (Op, (String, String)) \to String\\
&cnvPar\ (Op\ op, (s1, s2)) = \texttt{"("} +\!\!+ s1 +\!\!+ op +\!\!+ s2 +\!\!+ \texttt{")"}
\end{aligned}
$$

A operação de **compilar** uma *String* torna-se trivial após se conseguir obter a representação da *String* num *Expr*, tendo para isso, a função *readExp* fornecida.

Após isso, basta apenas fazer um catamorfismo sobre o tipo de modo a explorar a recursividade.

```
compile = cataExpr [numToComp, bopToCompile] · π1 · head · readExp
  where numToComp a = ["PUSH " ++ show a]
    bopToCompile (op, (s1, s2)) = s1 ++ s2 ++ [opToCodigo op]
  --
opToCodigo :: Op → String
opToCodigo (Op op) | op ≡ "+" = "ADD"
  | op ≡ "-" = "SUB"
  | op ≡ "*" = "MUL"
  | op ≡ "mod" = "MOD"
  --
```

Para melhor representar a operação de compile, ou seja, converter *Expr* em instruções **stack** segue-se o diagrama do catamorfismo implementado.



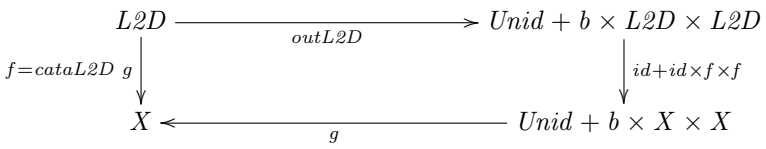
Incluem-se aqui alguns testes aplicavéis às funções implementadas anteriormente:

```
exp_test :: Expr
exp_test = Bop (Bop (Num 5) (Op "*") (Num 6)) (Op "+") (Num (−1))
string_codigo_1 :: String
string_codigo_1 = "2 + 3 * 4"
string_codigo_2 :: String
string_codigo_2 = "2 + 1 * 3 + 4"
```

Problema 2

Definições base do tipo de dados L2D

O diagrama que representa um catamorfismo para este tipo é o seguinte:




```
inL2D :: a + (b, (X a b, X a b)) → X a b
inL2D = [casoUnid, casoComp]
  where casoUnid a = Unid a
    casoComp (b, (l, r)) = Comp b l r
  --
outL2D :: X a b → a + (b, (X a b, X a b))
outL2D (Unid a) = i1 a
outL2D (Comp b l r) = i2 (b, (l, r))
  --
recL2D f = baseL2D id f
```

```
baseL2D f g = id + (f × (g × g))
cataL2D g = g · (recL2D (cataL2D g)) · outL2D
anaL2D g = inL2D · (recL2D (anaL2D g)) · g
```

Definições de funções dadas como undefined neste documento

```
collectLeafs (Unid a) = [a]
collectLeafs (Comp b l r) = (collectLeafs l) ++ (collectLeafs r)
  --
dimen :: X Caixa Tipo → (Float, Float)
dimen = ⊥
```

Pergunta 1

Nesta pergunta era pedido uma função que dada uma origem e um conjunto de figuras em L2D fossem calculadas associações das mesmas com a origem respetiva, dados os diferentes tipo de associações.

O padrão de recursividade segue mais casos e traz uma ligeira complexidade ao tipo de dados, mas contudo, este assemelha-se muito com uma BTree.

Seguem-se as definições da pergunta 1:

```
calcOrigins :: ((X Caixa Tipo), Origem) → X (Caixa, Origem) ()
calcOrigins fig = calcOriginsAux (π2 $ fig) fig
  --
calcOriginsAux :: (Float, Float) → ((X Caixa Tipo), Origem) → X (Caixa, Origem) ()
calcOriginsAux pos ((Unid ca), orig) = Unid (ca, pos)
calcOriginsAux pos (Comp b (Unid ca) r, orig) = Comp () (Unid (ca, pos))
  (calcOriginsAux proxPosOrig (r, orig))
  where proxPosOrig = calc b pos (convCoord (π1 $ ca))
calcOriginsAux pos (Comp b l (Unid ca), orig) = Comp () (calcOriginsAux proxPosOrig (l, orig))
  (Unid (ca, pos))
  where proxPosOrig = calc b pos (convCoord (π1 $ ca))
calcOriginsAux pos (Comp b l r, orig) = Comp () (π1 $ fromLeft)
  (calcOriginsAux proxPosOrig (r, orig))
  where fromLeft = (calcOriginsAux pos (l, orig), pos)
    lastOrigin = π2 fromLeft
    proxPosOrig = calc b pos lastOrigin
```

Seguem-se algumas funções auxiliares que foram necessárias ser implementadas.

```
  --
convCoord :: (Int, Int) → (Float, Float)
convCoord (x, y) = (fromIntegral x :: Float, fromIntegral y :: Float)
  --
calc :: Tipo → Origem → (Float, Float) → Origem
calc (Hb) orig (box_x, box_y) = ((π1 orig) + box_x, π2 orig)
calc (Ht) orig (box_x, box_y) = ((π1 orig) + box_x, (π2 orig) + box_y)
calc (H) orig (box_x, box_y) = ((π1 orig) + box_x, (π2 orig)
                              + (fromInteger $ round $ (box_y / 2) * (10 ↑ 5)) / (10.0 ↑↑ 5))
calc (V) orig (box_x, box_y) = ((π1 orig)
                              + (fromInteger $ round $ (box_x / 2) * (10 ↑ 5)) / (10.0 ↑↑ 5),
                                (π2 orig) + box_y)
calc (Ve) orig (box_x, box_y) = ((π1 orig), (π2 orig) + box_y)
calc (Vd) orig (box_x, box_y) = ((π1 orig) + box_x, (π2 orig) + box_y)
```

Pergunta 2 - Agrupar as caixas e as suas origens numa só lista

$$
\begin{aligned}
&agrup\_caixas :: X\ (Caixa, Origem)\ () \to Fig\\
&agrup\_caixas\ (Unid\ (ca, or)) = [(or, ca)]\\
&agrup\_caixas\ (Comp\ b\ l\ r) = (agrup\_caixas\ l) +\!\!+ (agrup\_caixas\ r)
\end{aligned}
$$

Display das caixas num gráfico 2D em gloss

Tendo as origems calculadas apenas é preciso agrupar as caixas com as suas origens, gerar as respetivas *G.Picture*, convertendo tudo para apenas uma *G.Picture* e apresentar na janela gloss o resultado. Para tal foi crucial ter funções como *crCaixa* e *display* para criar *G.Picture* e apresentá-las.

$$
\begin{aligned}
&mostra\_Caixas = display \cdot caixasAndOrigin2Pict\\
&caixasAndOrigin2Pict = G.pictures \cdot criaPict \cdot agrup\_caixas \cdot calcOrigins\\
&criaPict :: Fig \to [G.Picture]\\
&criaPict\ [\,] = [\,]\\
&criaPict\ (h : t) = [(crCaixa\ or\ width\ height\ text\ col)] +\!\!+ (criaPict\ t)\\
&\quad \textbf{where}\ or \quad = (\pi_1\ h)\\
&\qquad width \quad = (toFloat\ (\pi_1\ (\pi_1\ (\pi_2\ h))))\\
&\qquad height \quad = (toFloat\ (\pi_2\ (\pi_1\ (\pi_2\ h))))\\
&\qquad text \quad = (\pi_1\ (\pi_2\ (\pi_2\ h)))\\
&\qquad col \quad = (\pi_2\ (\pi_2\ (\pi_2\ h)))\\
&\qquad toFloat\ x = fromIntegral\ x :: Float
\end{aligned}
$$

Incluem-se aqui alguns testes aplicavéis às funções implementadas anteriormente:

$$
\begin{aligned}
&testeOrigens1 :: (X\ Caixa\ Tipo, Origem)\\
&testeOrigens1 = (caixasHb1, (0, 0))\\
&unidadeA :: X\ Caixa\ Tipo\\
&unidadeA = Unid\ ((100, 200), (\texttt{"A"}, col\_blue))\\
&unidadeB :: X\ Caixa\ Tipo\\
&unidadeB = Unid\ ((50, 50), (\texttt{"B"}, col\_green))\\
&caixasHb1 :: X\ Caixa\ Tipo\\
&caixasHb1 = Comp\ Hb\ unidadeA\ caixasHb2\\
&caixasHb2 :: X\ Caixa\ Tipo\\
&caixasHb2 = Comp\ Hb\ unidadeA\ unidadeB\\
&caixasBasico :: X\ Caixa\ Tipo\\
&caixasBasico = Comp\ Hb\ (Unid\ ((100, 200), (\texttt{"A"}, col\_blue)))\ (Unid\ ((50, 50), (\texttt{"B"}, col\_green)))
\end{aligned}
$$

Problema 3

Série de Taylor do cosseno - Uma aproximação...

O objetivo do problema era implementar a série de Taylor através de uma aproximação de *n* em vez de um somatório infinito, utilizando recursividade mútua.

$$cos\ x = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{(-1)^i}{(2i)!} x^{2i}$$

Primeiro consideramos o *cos x n* como sendo *c x n*, assim, podemos verificar, através do somatório que:

$$
\begin{aligned}
&c\ x\ 0 = 1\\
&c\ x\ (n+1) = c\ x\ n + ((-1) \uparrow (n+1) * x \uparrow (2*n+2))\ /\ ((2*n+2)!) = c\ x\ n + h\ x\ n\\
&h\ x\ 0 = ((-x) \uparrow 2)\ /\ 2
\end{aligned}
$$

$$h\ x\ (n+1) = (h\ x\ n) * (((-x) \uparrow 2)\ /\ ((2*n+4)*(2*n+3))) = (h\ x\ n) * ((-x) \uparrow 2)\ /\ (s\ n)$$
$$s\ 0 = 12$$
$$s\ (n+1) = s\ n + 8*n + 18 = s\ n + f\ n$$
$$f\ 0 = 18$$
$$f\ (n+1) = f\ n + 8$$

Agora, em termos de *Haskell*, podemos separar o problema em 3 funções, *loop* que representa o resultado recursivo para cada função (cujo funcionamento está descrito a cima), *init* que inicializa o caso base, ou seja, o caso de paragem de cada função e por fim prj que decide a função a apresentar quando se pretende mostrar o resultado da aproximação.

$$cos'\ x = prj \cdot \mathsf{for}\ loop\ init\ \mathbf{where}$$
$$loop\ (c,h,s,f) = (c+h, h*(-(x\uparrow 2)\ /\ s), s+f, f+8)$$
$$init = (1, -(x\uparrow 2)\ /\ 2, 12, 18)$$
$$prj\ (c,h,s,f) = c$$

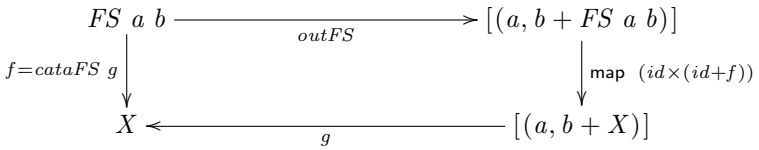
Problema 4

Triologia "ana-cata-hilo" - ***Sistema de ficheiros genéricos***

Seguindo a recomendação do enunciado deste problema, seguem-se as definições básicas para o tipo **FS a b**:

$$outFS :: FS\ a\ b \to [(a, (b) + (FS\ a\ b))]$$
$$outFS\ (FS\ [\,]) = [\,]$$
$$outFS\ (FS\ ((x,y):t)) = [(x, outNode\ y)] +\!\!+ outFS\ (FS\ t)$$
$$outNode :: Node\ a\ b \to b + (FS\ a\ b)$$
$$outNode\ (File\ b) = i_1\ (b)$$
$$outNode\ (Dir\ x) = i_2\ (x)$$
$$baseFS\ f\ g\ h = \mathsf{map}\ \ (f \times (g+h))$$
$$cataFS :: ([(a, b+c)] \to c) \to FS\ a\ b \to c$$
$$cataFS\ g = g \cdot (recFS\ (cataFS\ g)) \cdot outFS$$
$$anaFS :: (c \to [(a, b+c)]) \to c \to FS\ a\ b$$
$$anaFS\ g = inFS \cdot (recFS\ (anaFS\ g)) \cdot g$$
$$hyloFS\ g\ h = cataFS\ h \cdot anaFS\ g$$

E também o diagrama para um catamorfismo genérico para este tipo de dados:



Funções para manipulação de ficheiros

a) $check :: FS\ a\ b \to Bool$

$$check :: (Eq\ a) \Rightarrow FS\ a\ b \to Bool$$
$$check = cataFS\ geneCheck$$
$$--$$
$$geneCheck :: (Eq\ a) \Rightarrow [(a, b + Bool)] \to Bool$$
$$geneCheck\ [\,] = True$$
$$geneCheck\ ((x, i_1\ b) : t) = geneCheck\ t$$
$$geneCheck\ ((x, i_2\ b) : t) \mid b \equiv False = False$$
$$\mid otherwise = geneCheck\ t \wedge \neg\ (repetidos\ (paraLista\ ((x, i_2\ b) : t)))$$
$$--$$

$$
\begin{aligned}
&estaNaLista :: (Eq\ a) \Rightarrow a \to [a] \to Bool\\
&estaNaLista\ \_\ [\,] = False\\
&estaNaLista\ x\ (h : t) \mid x \equiv h = True\\
&\quad \mid otherwise = estaNaLista\ x\ t\\
&\quad --\\
&repetidos :: (Eq\ a) \Rightarrow [a] \to Bool\\
&repetidos\ [\,] = False\\
&repetidos\ (h : t) \mid estaNaLista\ h\ t \equiv True = True\\
&\quad \mid otherwise = repetidos\ t\\
&\quad --\\
&paraLista :: [(a, b + c)] \to Path\ a\\
&paraLista\ [\,] = [\,]\\
&paraLista\ ((x, y) : t) = [x] +\!\!+ paraLista\ t
\end{aligned}
$$

b) $tar :: FS\ a\ b \to [(Path\ a, b)]$

$$
\begin{aligned}
&tar :: FS\ a\ b \to [(Path\ a, b)]\\
&tar = cataFS\ geneTar\\
&geneTar :: [(a, b + [(Path\ a, b)])] \to [(Path\ a, b)]\\
&geneTar\ [\,] = [\,]\\
&geneTar\ ((a, i_1\ b) : t) = [([a], b)] +\!\!+ geneTar\ t\\
&geneTar\ ((a, i_2\ l) : t) = (addAllPaths\ a\ l) +\!\!+ (geneTar\ t)\\
&addAllPaths :: a \to [(Path\ a, b)] \to [(Path\ a, b)]\\
&addAllPaths\ a\ [\,] = [\,]\\
&addAllPaths\ a\ ((list, b) : t) = [([a] +\!\!+ list, b)] +\!\!+ addAllPaths\ a\ t
\end{aligned}
$$

c) $untar :: [(Path\ a, b)] \to FS\ a\ b$

$$
\begin{aligned}
&untar :: (Eq\ a) \Rightarrow [(Path\ a, b)] \to FS\ a\ b\\
&untar = joinDupDirs \cdot (anaFS\ geneUntar)\\
&\quad --\\
&geneUntar :: [(Path\ a, b)] \to [(a, b + ([(Path\ a, b)]))]\\
&geneUntar\ [\,] = [\,]\\
&geneUntar\ (([\,], b) : cauda) = geneUntar\ cauda\\
&geneUntar\ (([x], b) : cauda) = [(x, i_1\ b)] +\!\!+ geneUntar\ cauda\\
&geneUntar\ (((h : t), b) : cauda) = [(h, i_2\ [(t, b)])] +\!\!+ geneUntar\ cauda
\end{aligned}
$$

d) $find :: a \to FS\ a\ b \to [Path\ a]$

$$
\begin{aligned}
&find :: (Eq\ a) \Rightarrow a \to FS\ a\ b \to [Path\ a]\\
&find\ (a)\ (f) = findAux\ (a)\ (cataFS\ (gFind)\ (f))\\
&\quad --\\
&findAux :: (Eq\ a) \Rightarrow a \to [(a, Path\ a)] \to [Path\ a]\\
&findAux\ a\ [\,] = [\,]\\
&findAux\ a\ ((a1, l) : t) \mid (a \equiv a1) = [l] +\!\!+ (findAux\ a\ t)\\
&\quad \mid otherwise = (findAux\ a\ t)\\
&\quad --\\
&gFind :: [(a, b + [(a, Path\ a)])] \to [(a, Path\ a)]\\
&gFind\ [\,] = [\,]\\
&gFind\ ((a, i_1\ b) : t) = gFind\ t\\
&gFind\ ((a, i_2\ p) : t) = p +\!\!+ (gFind\ t)
\end{aligned}
$$

e) $new :: Path\ a \to b \to FS\ a\ b \to FS\ a\ b$

$$
\begin{aligned}
&gNewCata :: [(a, b + [(Path\ a, b)])] \to [(Path\ a, b)]\\
&gNewCata\ [\,] = [\,]
\end{aligned}
$$

$$gNewCata\ ((a, i_1\ b) : t) = [([a], b)] +\!\!+ (gNewCata\ t)$$
$$gNewCata\ ((a, i_2\ l) : t) = (addAllPaths\ a\ l) +\!\!+ (gNewCata\ t)$$
$$gNewAna :: [(Path\ a, b)] \to [(a, b + [(Path\ a, b)])]$$
$$gNewAna\ [\,] = [\,]$$
$$gNewAna\ (([x], b) : t) = [(x, i_1\ b)] +\!\!+ (gNewAna\ t)$$
$$gNewAna\ (((h : t), b) : t1) = [(h, i_2\ [(t, b)])] +\!\!+ (gNewAna\ t1)$$
$$new :: (Eq\ a) \Rightarrow Path\ a \to b \to FS\ a\ b \to FS\ a\ b$$
$$new\ p\ b\ fs = untar\ (tar\ (fs) +\!\!+ [(p, b)])$$

-- new (p) (b) (fs) = (anaFS(gNewAna) ((cataFS (gNewCata) (fs)) ++ [(p, b)]))

f) $cp :: Path\ a \to Path\ a \to FS\ a\ b \to FS\ a\ b$

$$encontraFile :: (Eq\ a) \Rightarrow Path\ a \to [(Path\ a, b)] \to b$$
$$encontraFile\ list\ ((x, y) : t) \mid list \equiv x = y$$
$$\mid otherwise = encontraFile\ list\ t$$
$$cp :: (Eq\ a) \Rightarrow Path\ a \to Path\ a \to FS\ a\ b \to FS\ a\ b$$
$$cp\ list1\ list2\ (FS\ list3) = new\ list2\ (encontraFile\ list1\ (tar\ (FS\ list3)))\ (FS\ list3)$$

g $rm :: Path\ a \to FS\ a\ b \to FS\ a\ b$

Sugestão de implementação, definição de *nav*:

$$gNav :: (Eq\ a) \Rightarrow (Path\ a, FS\ a\ b) \to [(a, b + (Path\ a, FS\ a\ b))]$$
$$gNav\ ((h : t), FS\ [\,]) = [\,]$$
$$gNav\ ((h : t), FS\ ((a, File\ b) : t1)) \mid (h \equiv a) = [(a, i_1\ b)]$$
$$\mid otherwise = gNav\ (h : t, FS\ t1)$$
$$gNav\ ((h : t), FS\ ((a, Dir\ f) : t1)) \mid (h \equiv a) = [(a, i_2\ (t, f))]$$
$$\mid otherwise = gNav\ (h : t, FS\ t1)$$
$$nav :: (Eq\ a) \Rightarrow (Path\ a, FS\ a\ b) \to FS\ a\ b$$
$$nav = anaFS\ gNav$$

Definição de *rm*:

$$rm :: (Eq\ a) \Rightarrow (Path\ a) \to (FS\ a\ b) \to FS\ a\ b$$
$$rm = \bot$$

c) Definições extras:

$$auxJoin :: ([(a, b + c)], d) \to [(a, b + (d, c))]$$
$$auxJoin = \bot$$
$$cFS2Exp :: a \to FS\ a\ b \to (Exp\ ()\ a)$$
$$cFS2Exp = \bot$$