Projeto #1

Tópicos de Matemática em Aprendizagem Automática
Mestrado em Inteligência Artificial & Mestrado em Ciência de Dados
Departamento de Matemática – ISCTE-IUL
Ano académico: 2025/2026

Data de entrega: 7 de novembro de 2025

Este projeto deverá ser feito em grupos de 3 ou 4 alunos, salvo exceções previamente acordadas. O trabalho deverá ser desenvolvido na linguagem Python, e o código (um único Jupyter notebook) enviado por email para `jorge.miguel.rocha@iscte-iul.pt` no formato `.ipynb`, devidamente comentado.

1. O objetivo deste projeto é usar análise de componentes principais (PCA) para realizar e estudar a compressão de imagens. Para tal, usem o ficheiro `eye_image.jpg`, a qual está disponível no Moodle, e que corresponde a uma imagem a preto e branco ("grayscale"). (Para imagens a cores será preciso separar as componentes RGB, repetir a PCA para cada uma das componentes, e no final combinar os resultados comprimidos numa só imagem.)

   Os passos essenciais do código deverão ser os seguintes:

   (a) Importar a imagem e convertê-la numa matriz 16×16, de acordo com o visto nas aulas laboratoriais 1 e 2. Designar esta "design matrix" por $\mathbf{X}$.

   (b) Tomar as linhas dessa matriz $\mathbf{X}$ como vetores em $\mathbb{R}^{16}$, calcular o vetor média, $\vec{\mu}$, e subtraír esse vetor a todas as linhas de $\mathbf{X}$, obtendo assim uma nova matriz, $\mathbf{Y}$, em que as linhas representam um conjunto de 16 vetores que estão centrados em torno da origem.

   (c) Implementar a decomposição em valores singulares de $\mathbf{Y}$, e calcular a matriz de descodificação $\mathbf{D}_i$ para $i = 2, 5$ e 10 componentes principais.

   (d) Codificar $\mathbf{Y}$ usando $i = 2$ componentes principais, multiplicando $\mathbf{Y}^\top$ à esquerda pela matriz de codificação $\mathbf{D}_i^\top$.

   (e) Descodificar, multiplicando à esquerda pela matriz $\mathbf{D}_i$. Chamar $\mathbf{Y}_i^\top$ à matriz obtida (também deverá ser 16×16).

   (f) Transpor, e voltar a somar o vetor média $\vec{\mu}$ a todas as linhas, obtendo assim a imagem "reconstruída", $\mathbf{X}_i$.

   (g) Repetir os passos (d)-(f) para $i = 5$ e $i = 10$.

   (h) Para $i = 2, 5$ e 10, calcular a norma de Frobenius da matriz $\mathbf{X}_i - \mathbf{X}$, o qual quantifica a distância entre a imagem original e a imagem reconstruída após compressão. Apresentar explicitamente os valores dessas normas e fazer uma breve comparação.