Métodos Determinísticos de Investigação Operacional

Trabalho Prático

Diogo Sobral, a82523
Henrique Pereira, a80261
Pedro Moreira, a82364
Pedro Ferreira, a81135

2018/2019

Questão 1

a)

Parâmetros:

n - número de nodos existentes
c_{ij} - tempo de propagação no arco ij
i=1,...,n e j=1,...n

Variáveis de Decisão:

x_{ij} - número de caminhos a que o arco que une os nodos i e j pertence
i=1,...,n e j=1,...n

Função Objetivo:

$$min\ Z = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} c_{ij}x_{ij}$$

Sujeito a:

(i)

$$x_{ii} = 0, \forall i \in 1, ..., n$$

(ii)

$$\sum_{j=2}^{n}(x_{1j} - x_{j1}) = n - 1$$

(iii)

$$\sum_{j=1}^{n}(x_{ij} - x_{ji}) = -1, \forall i \in 2, ..., n$$

(iv)

$$x_{ij} \geq 0, \forall i \in 1, ..., n, \forall j \in 1, ..., n$$

Neste modelo, a função objetivo procura que o tempo de chegada do fogo a cada um dos nodos seja o mínimo possível pois serão considerados os arcos de menor custo. Uma vez que a variável de decisão representa o número de caminhos a que o arco ij pertence, o conjunto dos arcos com origem no nodo de ignição, ou seja, no nodo 1, têm de necessariamente pertencer a todos os caminhos existentes. A restrição (ii) expressa esta condição. Nos restantes nodos, o conjunto dos arcos com origem num determinado nodo i pertencem a menos um caminho que o conjunto dos nodos que chegam a i. Esta situação é definida pela restrição (iii). A equação (i) representa o facto de não existirem arcos cuja origem e destino sejam o mesmo nodo. Por fim, a restrição (iv) estabelece a não negatividade das variáveis.
Falta exemplificar com a instância

b)

Parâmetros:

n - número de nodos existentes

c_{ij} - tempo de propagação no arco ij

i=1,...,n e j=1,...n

Variáveis de Decisão:

t_i - tempo decorrido desde a ignição aquando da chegada do fogo ao nodo i

i=1,...,n

Função Objetivo:

$$max\ Z = \sum_{i=1}^{n} t_i$$

Sujeito a:

(i)

$$t_1 = 0$$

(ii)

$$t_j \leq t_i + t_{ij}, \forall i \in 1, ..., n, \forall j \in 2, ..., n$$

(iii)

$$t_i \geq 0, \forall i \in 1, ..., n$$

Enquanto que o modelo primal tinha em consideração o número de caminhos a que um determinado arco pertencia, no modelo duas a variável de decisão representa o momento em que o fogo atinge um determinado nodo. Considerando a ignição no nodo 1, surge a restrição (i). Em conjunto com a função objetivo, a restrição (ii) garante que o tempo de chegada a cada nodo é o mínimo possível, tendo em conta a formulação do problema. Por um lado, queremos maximizar o tempo de chegada a cada nodo (função objetivo), por outro, pela restrição (ii), garante-se que o momento de chegada a um nodo j não é anterior ao menor dos tempos chegada ao conjunto dos nodos adjacentes a j, somado do custo de propagação para este. Por fim, a restrição (iii) estabelece a não negatividade das variáveis.

Falta exemplificar com a instância

c)

Obtenha as soluções óptimas primal e dual através da resolução do modelo primal.

d)

Obtenha as soluções óptimas primal e dual através da resolução do modelo dual. Confirme que as soluções são as mesmas que as obtidas na alínea anterior, ou, caso não sejam, apresente uma justificação.

Questão 2

a)

Parâmetros:

n - número de nodos existentes
c_{ij} - tempo de propagação no arco ij
i=1,...,n e j=1,...n
b - número de recursos disponíveis
Δ - constante de retardação
ignição - célula de ignição do fogo
objetivo - célula a que se pretende atrasar a chegada do fogo

Variáveis de Decisão:

$$x_i = \begin{cases} 1, & \text{se é aplicado um recurso de proteção na célula i} \\ 0, & \text{caso contrário} \end{cases}$$

i=1,...,n

t_i - tempo decorrido desde a ignição aquando da chegada do fogo ao nodo i
i=1,...,n

Função Objetivo:

$$max\ Z = t_{objetivo}$$

Sujeito a:

(i)

$$t_{\text{ignição}} = 0$$

(ii)

$$t_j \leq t_i + t_{ij} + \Delta x_i, \forall i \in 1, ...n, \forall j \in 1, ..., n$$

(iii)

$$\sum_{i=1}^{n} x_i \leq b$$

(iv)

$$t_i \geq 0, \forall i \in 1, ..., n$$

O objetivo do problema é escolher onde aplicar recursos de proteção, que atrasam a propagação do fogo, de forma a retardar o máximo possível o momento de chegada do fogo a um determinado nodo (nodo objetivo). Para alcançar esse fim, consideramos como variável de decisão o tempo de chegada do fogo a cada nodo. Logo, a função objetivo procura maximizar o tempo de chegada ao nodo objetivo. Uma vez que a célula de ignição é um parâmetro do problema e não um valor fixo, temos de associar matematicamente o início do fogo ao nodo de ignição. A restrição (i) garante essa associação. A restrição (ii), em conjunto com a função objetivo, assegura a correta aplicação dos recursos de proteção, em função da célula que queremos proteger. Uma vez que o tempo de chegada do fogo a um certo nodo é definido por recorrência, isto é, o momento de chegada a um nodo j defni-se à custa do tempo de chegada a outro nodo e assim sucessivamente até alcançarmos o nodo de ignição, único que se define a si mesmo, o modelo optará por colocar proteções em células que façam parte do caminho percorrido pelo fogo até ao nodo que queremos proteger, maximizando o tempo de chegada a este. A restrição(iii) limita o número de recursos aplicados e a restrição (iv) define a não negatividade das variáveis. A função objetivo traduz a finalidade pretendida.

b)

Para a instância de sete por sete células e os tempos de propagação em anexo, obtenha uma solução através do IBM ILOG CPLEX Optimization Studio (link para versão gratuita no final do enunciado) com uma ignição na célula (1,1) e pretendendo-se proteger a célula (7,7). Represente a solução de forma adequada e interprete-a.

c)

Represente graficamente o tempo de chegada do fogo à célula de protecção em função do número de recursos usados. Interprete e comente.

Questão 3

a)

Parâmetros:

n - número de nodos existentes
c_{ij} - tempo de propagação no arco ij
i=1,...,n e j=1,...n
t_{max} - intervalo de tempo considerado
b - número de recursos disponíveis
Δ - constante de retardação
p_s - probabilidade de ignição na célula s
s=1,...n

Variáveis de Decisão:

$$\mathrm{x_i} = \begin{cases} 1, & \text{se é aplicado um recurso de proteção no nodo i} \\ 0, & \text{caso contrário} \end{cases}$$

i=1,...,n

$\mathrm{t_{sj}}$ - tempo decorrido aquando da chegada de um fogo, com origem em s, ao nodo i

s=1,...,n e i=1,...,n

$$\mathrm{y_{si}} = \begin{cases} 1, & \text{se o fogo com início no nodo } s \text{ chega a } i \text{ num tempo inferior a } \mathrm{t_{max}} \\ 0, & \text{caso contrário} \end{cases}$$

s=1,...,n e i=1,...,n

Função Objetivo:

$$min\ Z = \sum_{s=1}^{n}\sum_{i=1}^{n} p_s y_{si}$$

Sujeito a:

(i)

$$t_{\mathrm{ss}} = 0, \forall s \in 1,...,n$$

(ii)

$$t_{sj} \leq t_{si} + d_{ij} + \Delta x_i, \forall s \in 1,...n, \forall i \in 1,...,n, \forall j \in 1,...,n$$

(iii)

$$y_{si} \geq \frac{t_{\mathrm{max}} - t_{si}}{t_{\mathrm{max}}}, \forall s \in 1,...,n, \forall i \in 1,...,n$$

(iv)

$$\sum_{i=1}^{n} x_i \leq b$$

b)

Para a instância em anexo, obtenha uma solução através do IBM ILOG CPLEX Optimization Studio com probabilidade de ignição na célula (i, j) dada por (14 - i - j)/500 e intervalo de 12 unidades de tempo. Represente a solução de forma adequada e interprete-a.

c)

Represente graficamente o valor esperado da área ardida em função do intervalo de tempo considerado. Interprete e comente.