1 Introdução

Neste material estudaremos alguns dos principais tópicos da Teoria dos Grafos.

2 Desenvolvimento

2.1 Intuição Há muitas situações do mundo real que podem ser representadas por um diagrama que consiste de

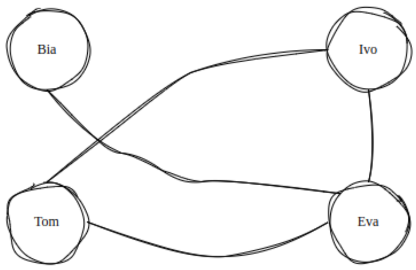
- pontos
- ligações entre alguns desses pontos

Na Teoria dos Grafos, chamamos os pontos de **vértices** e as ligações entre eles de **arestas**.

Veja alguns exemplos.

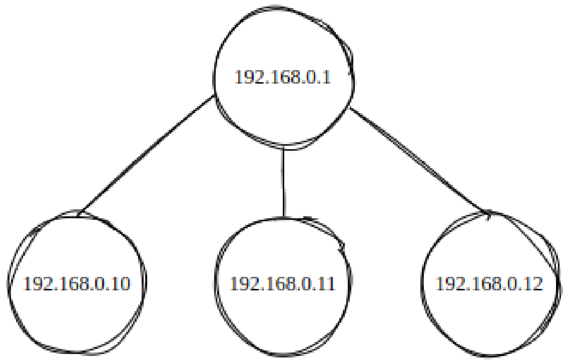
Redes sociais

Uma rede social possui usuários que podem ser amigos entre si. O relacionamento amizade é mútuo. Cada pessoa é representada por um vértice e a amizade entre duas pessoas é representada por uma aresta. Veja um diagrama.



Rede de computadores

Uma rede de computadores possui computadores conectados entre si. Cada computador é representado por um vértice e a conexão entre dois computadores é representada por uma aresta. Veja.



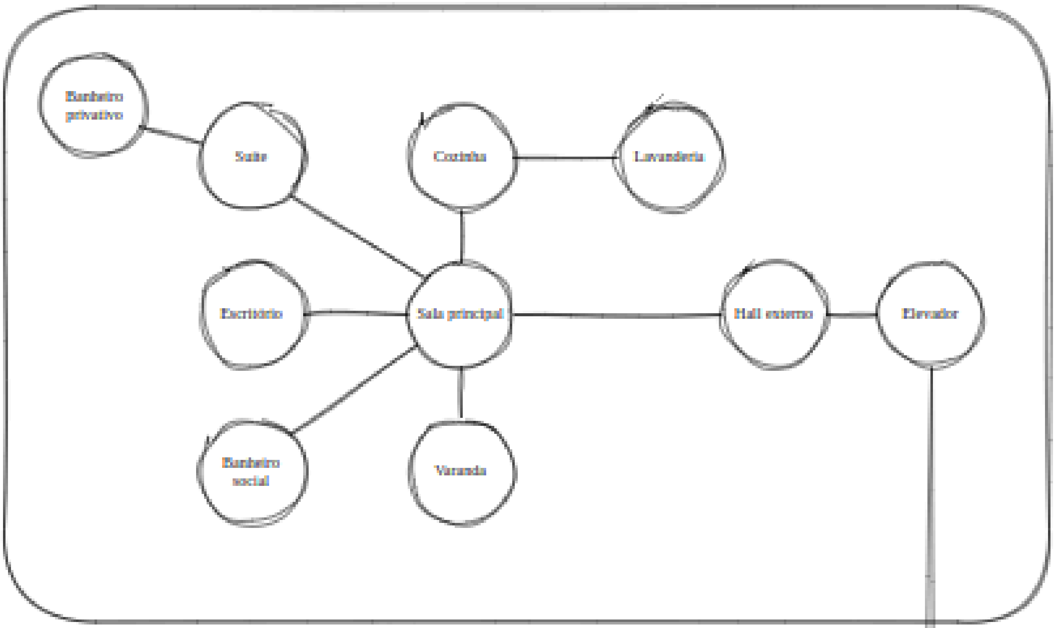
Apartamentos de um prédio

Digamos que um prédio possui três andares. Cada andar possui um único apartamento. Um apartamento é constituído de cômodos. Existem portas entre alguns dos cômodos.

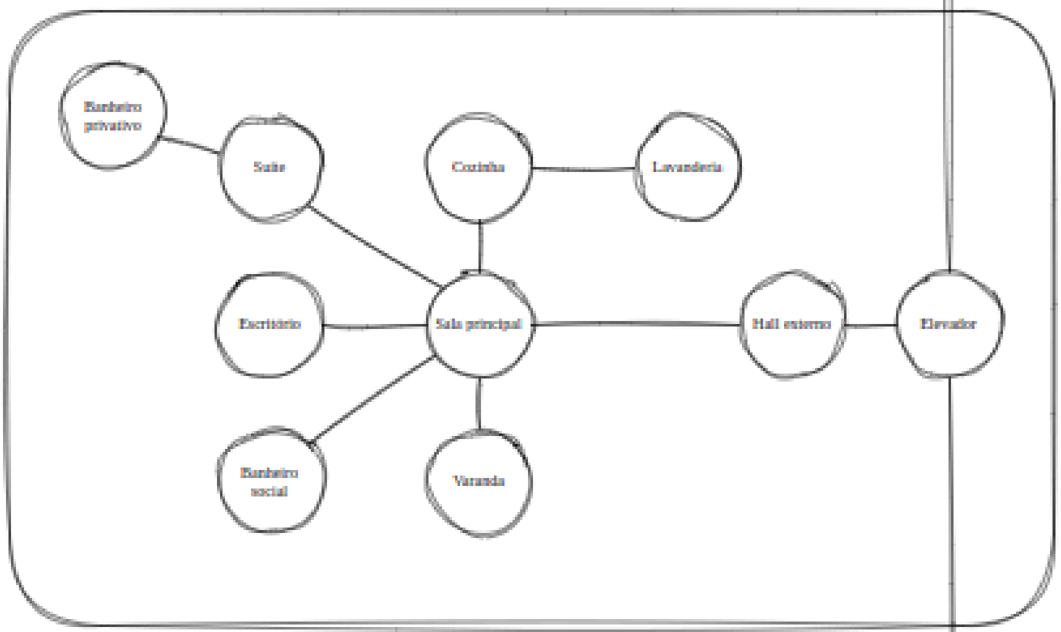
Neste exemplo, cada andar pode ser representado por um vértice. A possibilidade de se mover de um andar a outro pode ser representada por uma aresta.

Além disso, cada cômodo pode ser representado por um vértice e as portas podem ser representadas por arestas. Observe.

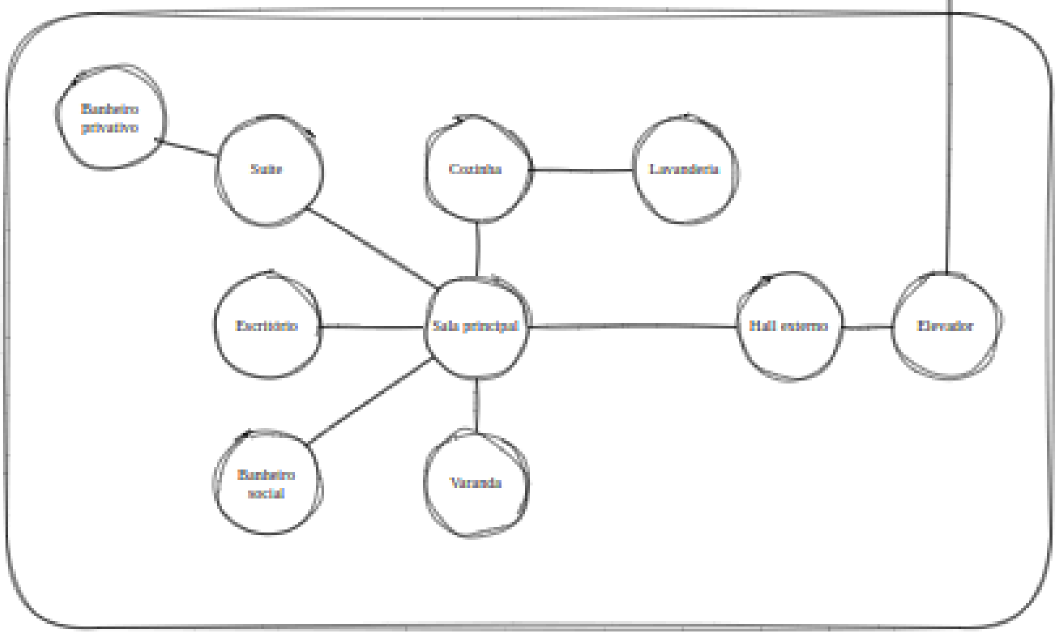
3 Andar



2 Andar



1 Andar



É importante observar que a representação visual (vértices como círculos, por exemplo) ou a forma das arestas (curvas ou retas, por exemplo) não tem real importância.

2.2 Definições formais e exemplos Um grafo G é um **par ordenado**

$$G = (V(G), E(G))$$

em que $V(G)$ é seu conjunto de vértices e $E(G)$ é seu conjunto de arestas. Claro, são conjuntos disjuntos entre si.

Nota. Em inglês, vértice se escreve **vertex** (plural: **vertices**). Aresta se escreve **edge** (plural: **edges**). Daí as letras escolhidas para representar os conjuntos.

Além disso, uma função de incidência

$$\varphi(e) = \{u, v\}$$

associa, a cada aresta e de G, um par não ordenado de vértices u e v.

O número de vértices de um grafo G pode ser representado como

$$v(G)$$

ou ainda

$$|V(G)|$$

Também vale usar somente a letra **n** para representar o número de vértices de um grafo. Assim

$$v(G) = |V(G)| = n$$

Dizemos que este número é a **ordem** de G.

O número de arestas de um grafo G pode ser representado assim

$$e(G)$$

e assim também

$$|E(G)|$$

Também vale usar apenas a letra **m** para representar o número de arestas de um grafo. Assim

$$e(G) = |E(G)| = m$$

Esse número é o **tamanho** de G.

> **Nota**. Dependendo do contexto, pode ser que estejamos trabalhando com um único grafo e seu nome (na maioria das vezes G) esteja implícito. Nestes casos, podemos escrever coisas como
>
> $$|V|$$
>
> e
>
> $$|E|$$
>
> para nos referirmos ao número de vértices e ao número de arestas do grafo em questão, respectivamente.

A título de exemplo, veja a definição de um grafo G a seguir.

$$G = (V(G), E(G))$$

Seu conjunto de vértices é

$$V(G) = \{a, b, c, d, e\}$$

Seu conjunto de arestas é

$$E(G) = \{e_1, e_2, e_3, e_4, e_5, e_6\}$$

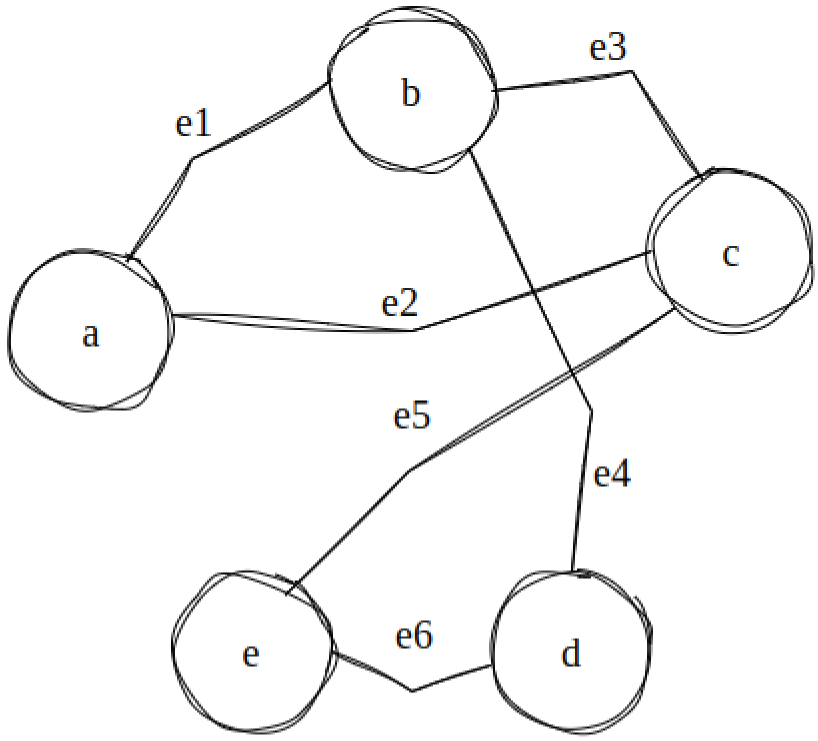
E a sua função de incidência

$$\varphi \colon E(G) \to \{\{u, v\} \mid u, v \in V(G)\}$$

é

$$\begin{aligned}
\varphi(e_1) &= \{a, b\} \\
\varphi(e_2) &= \{a, c\} \\
\varphi(e_3) &= \{b, c\} \\
\varphi(e_4) &= \{b, d\} \\
\varphi(e_5) &= \{c, e\} \\
\varphi(e_6) &= \{d, e\}
\end{aligned}$$

Desta forma, o diagrama que representa G é



A fim de simplificar a notação, pode-se também utilizar

$$\varphi(e) = uv$$

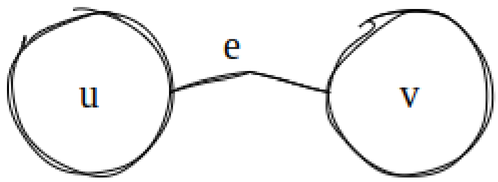
em vez de

$$\varphi(e) = \{u, v\}$$

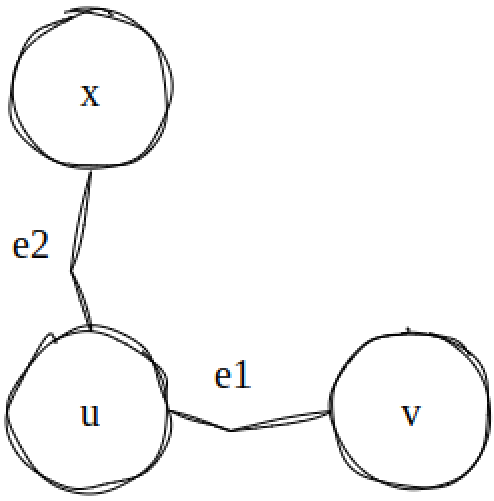
Se e é uma aresta, u e v são vértices tais que

$$\varphi(e) = uv$$

dizemos que e **liga**, **une** ou **conecta** u e v. Neste caso, dizemos que u e v são as **extremidades** de e. Diz-se que as extremidades de uma aresta são **incidentes** a ela. A aresta também é **incidente** aos vértices que ela conecta. Dois vértices que são incidentes a uma mesma aresta são **adjacentes**. Veja.



Duas arestas e_1 e e_2 que incidem sobre um mesmo vértice u também são adjacentes. Veja.



Dois vértices u e v adjacentes e **distintos entre si** (observe que a definição dada até então não exije $u \neq v$) são **vizinhos**. O conjunto de vizinhos de um vértice v de um grafo G é denotado por

$$N_G(v)$$

Quando o grafo em questão for evidente a partir do contexto, poderemos simplificar escrevendo

$$N(v)$$

em vez de

$$N_G(v)$$

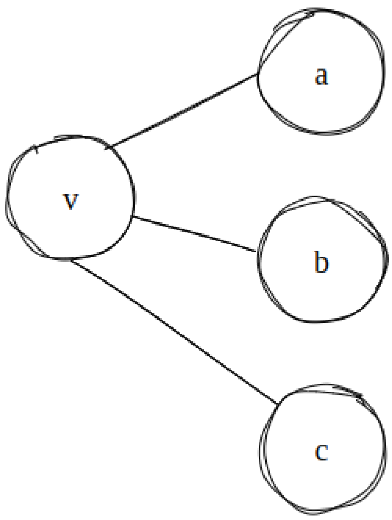
No diagrama a seguir,

$$N_G(v) = \{a, b, c\}$$

e

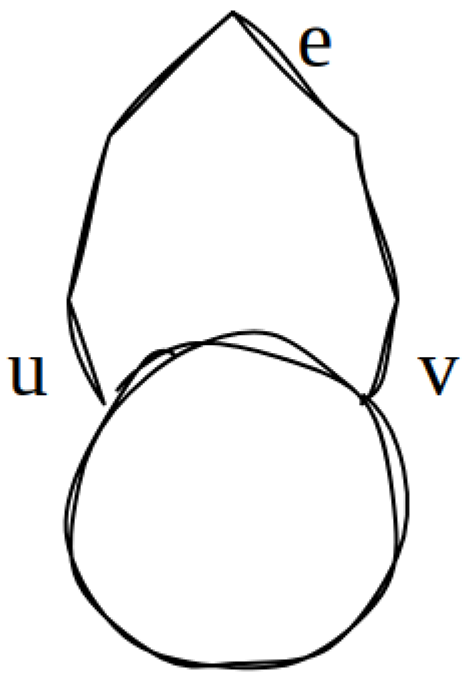
$$|N_G(v)| = 3$$

Veja.

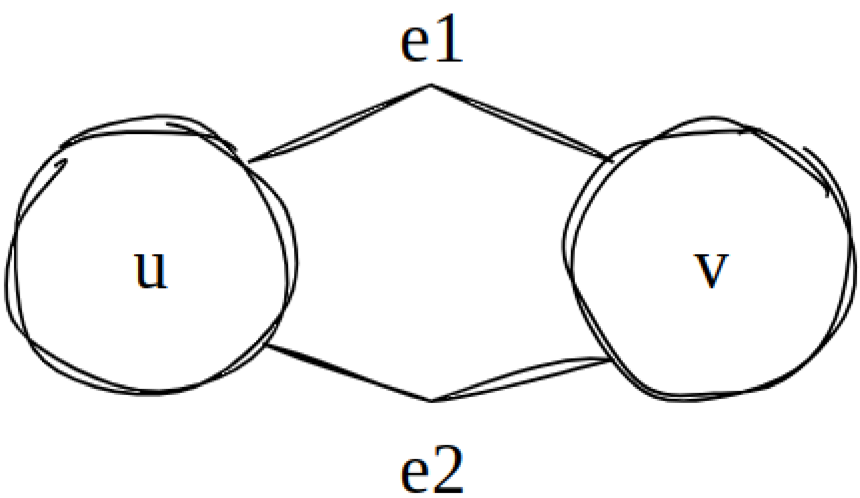


Também dizemos que o vértice v tem **grau** 3.

Se uma aresta e tem extremidades u e v idênticas, então e é um **loop**. Para simplificar o entendimento, entenda as letras u e v como rótulos que aplicamos aos vértices. Não necessariamente elas são aplicadas a vértices diferentes. Veja.



Se duas arestas e_1 e e_2 incidem sobre u e v com $u \neq v$, elas são paralelas. Veja.



Se um grafo não possui loops nem arestas paralelas, ele é um **grafo simples**.

Um grafo é **finito** se seus conjuntos de vértices e arestas são ambos finitos.

Nota. A menos que no contexto apareça uma informação contrária, focaremos os estudos apenas em grafos finitos e simples.

Se

$$G = (V(G), E(G))$$

e

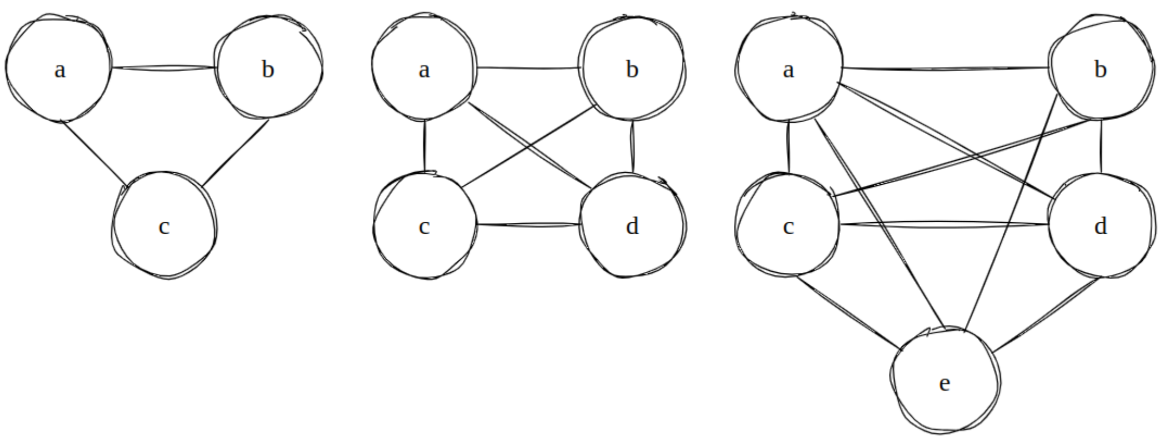
$$V(G) = E(G) = \emptyset$$

G é o **grafo nulo**.

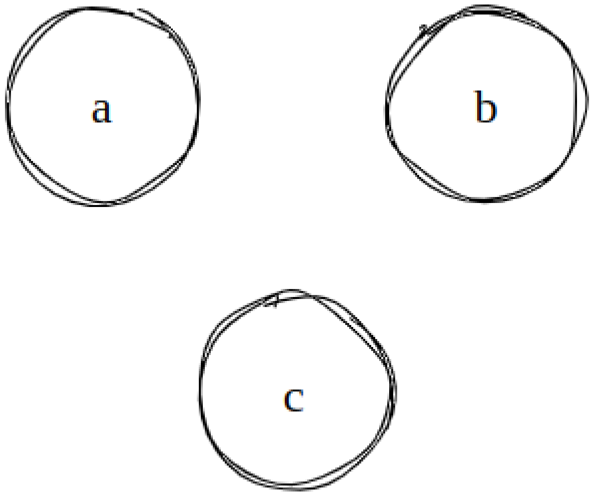
Se um grafo possui um único vértice, ele - o grafo - é **trivial**. Qualquer outro grafo é **não trivial**.

2.3 Famílias de grafos Há alguns tipos de grafos que se destacam e que pertencem a famílias que levam nomes especiais.

Um grafo é **completo** quando todos os seus vértices são adjacentes entre si. Veja.



Um grafo é vazio quando não possui aresta alguma. Veja.



Um grafo é **bipartido** se seu conjunto de vértices V pode ser particionado em dois subconjuntos X e Y de tal modo que cada aresta e tenha uma extremidade em X e outra em Y. Tal partição

$$(X, Y)$$

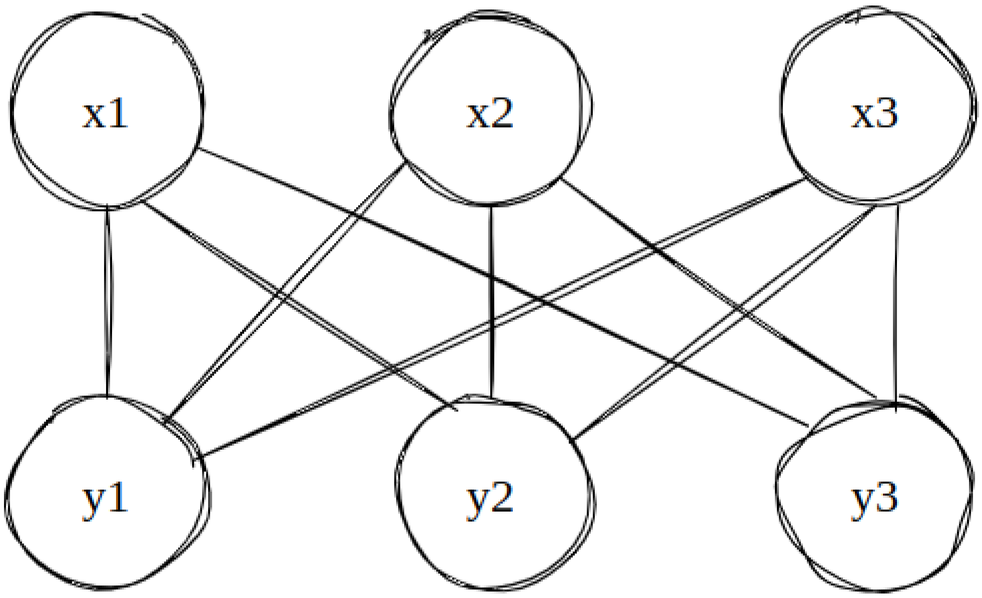
é dita uma **bipartição do grafo**, X e Y são as suas **partes** e denotamos o grafo assim

$$G[X, Y]$$

Se

$$G[X, Y]$$

é simples e cada vértice de X é conectado a cada vértice de Y, então G é um **grafo bipartido completo**. Veja.



Uma **estrela** é um grafo bipartido

$$G[X, Y]$$

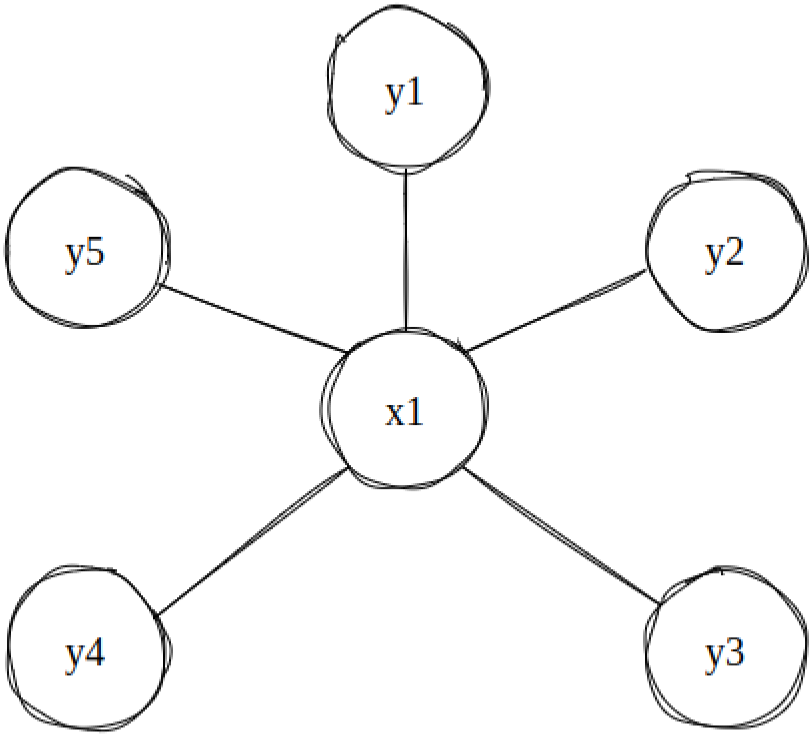
com

$$|X| = 1$$

ou

$$|Y| = 1$$

Veja.



Essa família de grafos (os bipartidos em geral) é importante por servir de modelo para inúmeras situações do mundo real. Por exemplo

- Recomendações em plataformas de streaming

Aqui, os vértices de uma parte do grafo representam usuários. Os vértices da outra parte representam filmes. Uma aresta representa uma recomendação de um filme feita para um usuário.

- Alocação de tarefas ou recursos

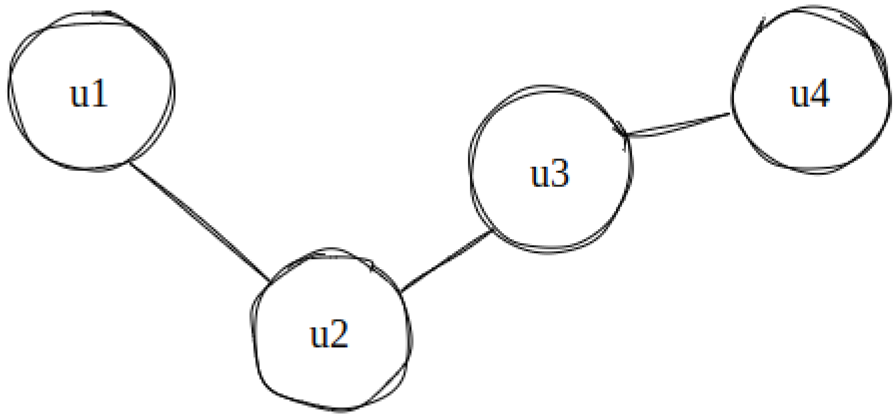
Os vértices de uma parte do grafo representam funcionários. Os vértices da outra parte representam tarefas. Uma aresta representa que um funcionário pode representar determinada tarefa.

- Relacionamento entre autores e publicações

Os vértices de uma parte do grafo representam autores. Os vértices da outra parte representam publicações. Uma aresta indica que um autor participou da criação de uma publicação.

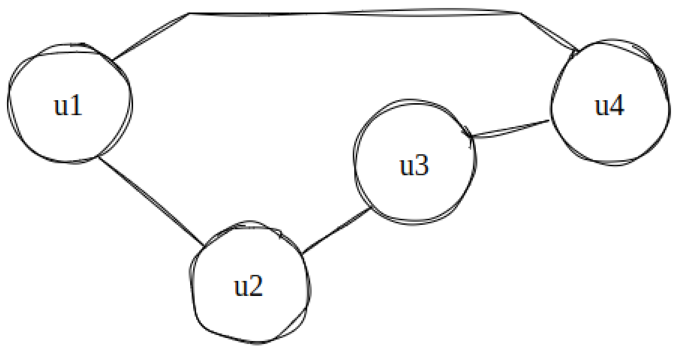
Um **caminho** (=path) é um grafo cujos vértices podem ser organizados numa **sequência linear** de tal modo que dois vértices são adjacentes se são consecutivos na sequência e não são adjacentes caso contrário.

Veja.



Da mesma forma, um **ciclo** é um grafo cujos vértices podem ser organizados numa **sequência cíclica** de tal modo que dois vértices são adjacentes se são consecutivos na sequência e não são adjacentes caso contrário. Observe que um ciclo tem, pelo menos, 3 vértices.

Veja.



Veja alguns nomes comuns

3-ciclo: triângulo

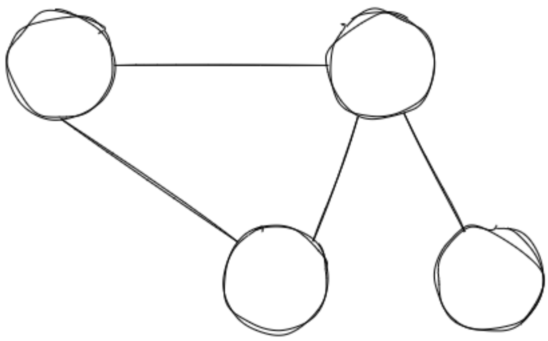
4-ciclo: quadrilátero

5-ciclo: pentágono

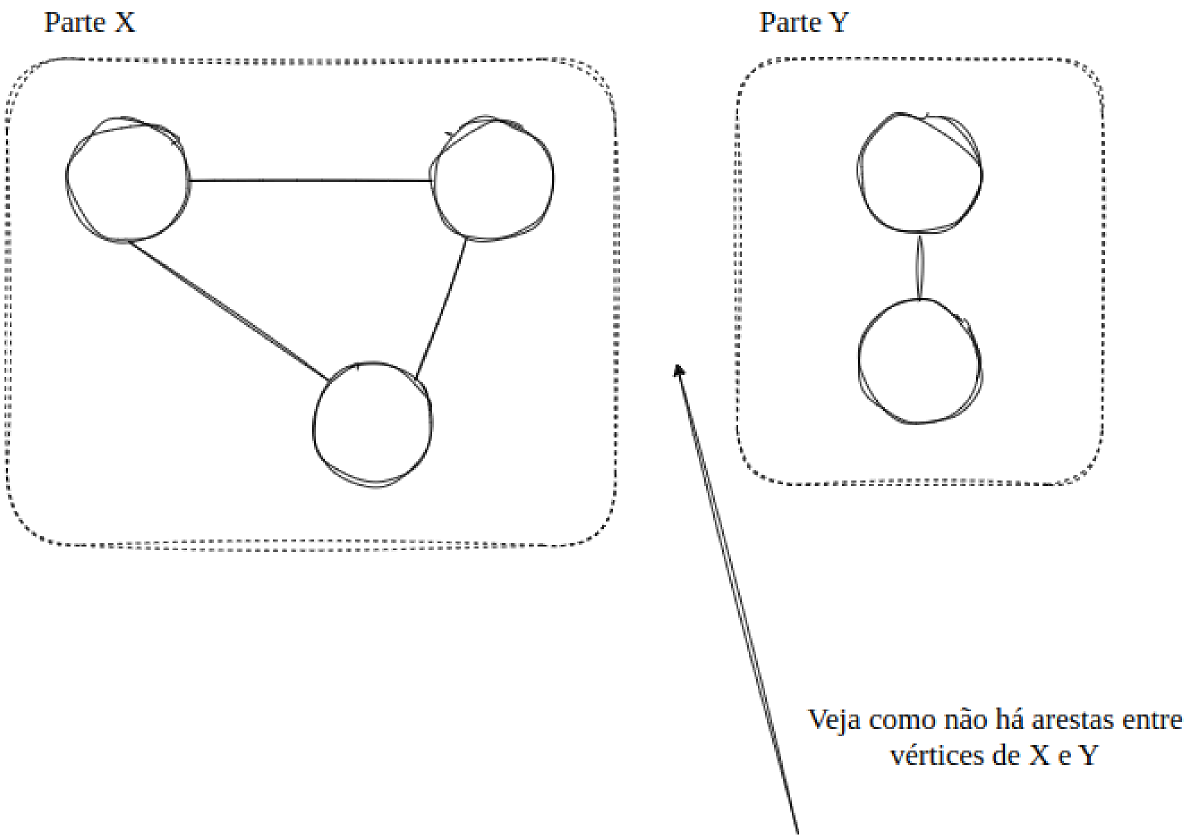
6-ciclo: hexágono

O **comprimento** de um caminho ou de um ciclo é igual ao seu número de arestas. Um caminho ou ciclo com **k** arestas é um **k-caminho** ou **k-ciclo**, respectivamente. Um caminho ou ciclo pode ser **par** ou **ímpar**, a depender da paridade de seu comprimento.

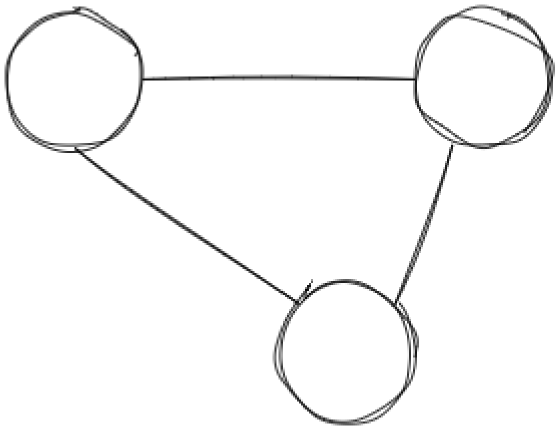
Um grafo é **conexo** se, para cada partição de seu conjunto de vértices em dois conjuntos não vazios X e Y existe pelo menos uma aresta com uma extremidade em X e outra em Y. Veja.



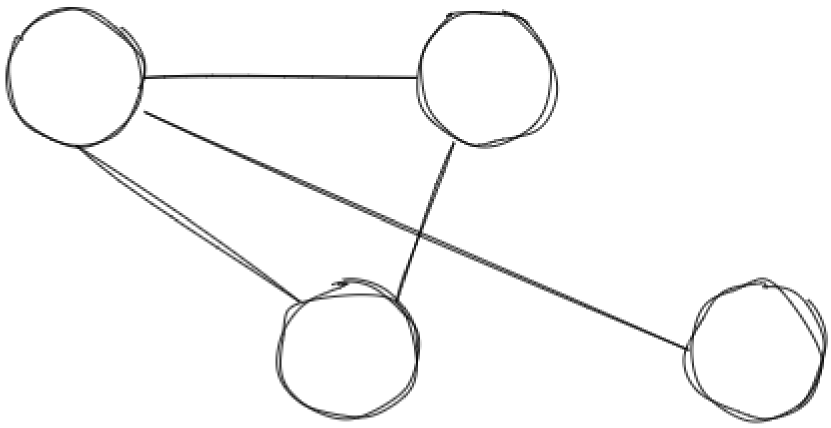
Caso contrário o grafo é **desconexo** ou **"não conexo"**. Veja.



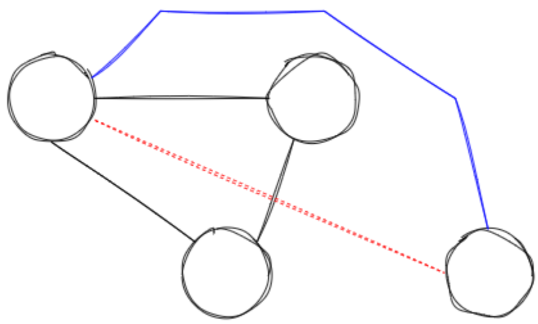
Um grafo é **planar** se ele pode ter seu diagrama desenhado no plano de tal modo que suas arestas “se encontram” apenas em suas extremidades em comum. Intuitivamente, as suas arestas não se cruzam entre si. Veja.



O grafo a seguir também é planar, muito embora tenha sido desenhado com arestas cruzando-se entre si.



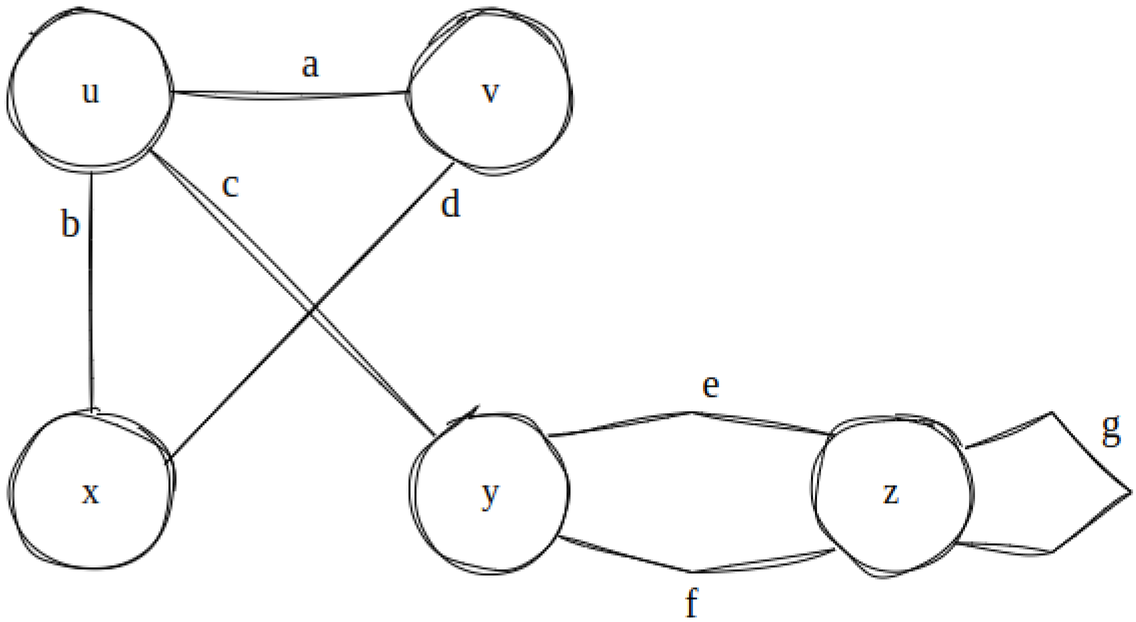
Ele é planar pois o seguinte diagrama é equivalente.



2.4 Matrizes de incidências, matrizes de adjacências e listas de adjacências

Os diagramas apresentados são intuitivos e ótimos para estudos em alto nível de abstração. Entretanto, não são apropriados para o armazenamento em computadores. Como representar um grafo em um programa de computador, de modo que seja possível executar algoritmos sobre ele? Há algumas formas. Considere o seguinte grafo G.

> **Nota**. Nesta seção, estamos considerando a existência de grafos com loops e arestas paralelas.



A sua **matriz de incidências**

$$M_G = (m_{ve})$$

é uma matriz $n \, x \, m$ em que

$$m_{ve}$$

é o número de vezes (0, 1 ou 2) que o vértice v e a aresta e incidem entre si. Veja.

	a	b	c	d	e	f	g
u	1	1	1	0	0	0	0
v	1	0	0	1	0	0	0
x	0	1	0	1	0	0	0
y	0	0	1	0	1	1	0
z	0	0	0	0	1	1	2

A sua **matriz de adjacências**

$$A_G = (a_{uv})$$

é uma matriz $n \, x \, n$ em que

$$a_{uv}$$

é o número de arestas que ligam u a v, sendo que loops são contados duas vezes. Veja.

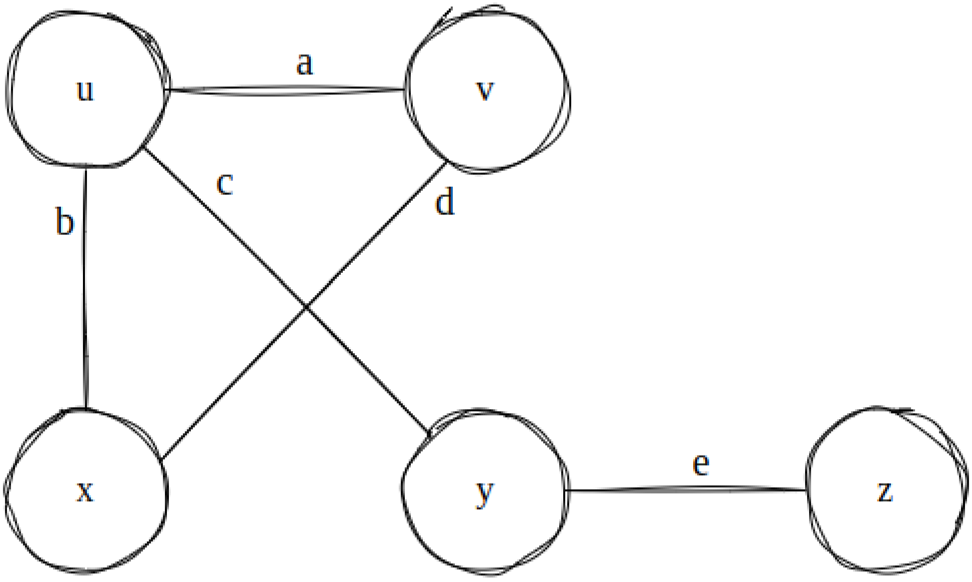
	u	v	x	y	z
u	0	1	1	1	0
v	1	0	1	0	0
x	1	1	0	0	0
y	1	0	0	0	2
z	0	0	0	2	2

Quando lidamos com grafos simples, podemos fazer a sua representação usando **listas de adjacências**. Para cada vértice v, seus vizinhos são listados em alguma ordem específica.

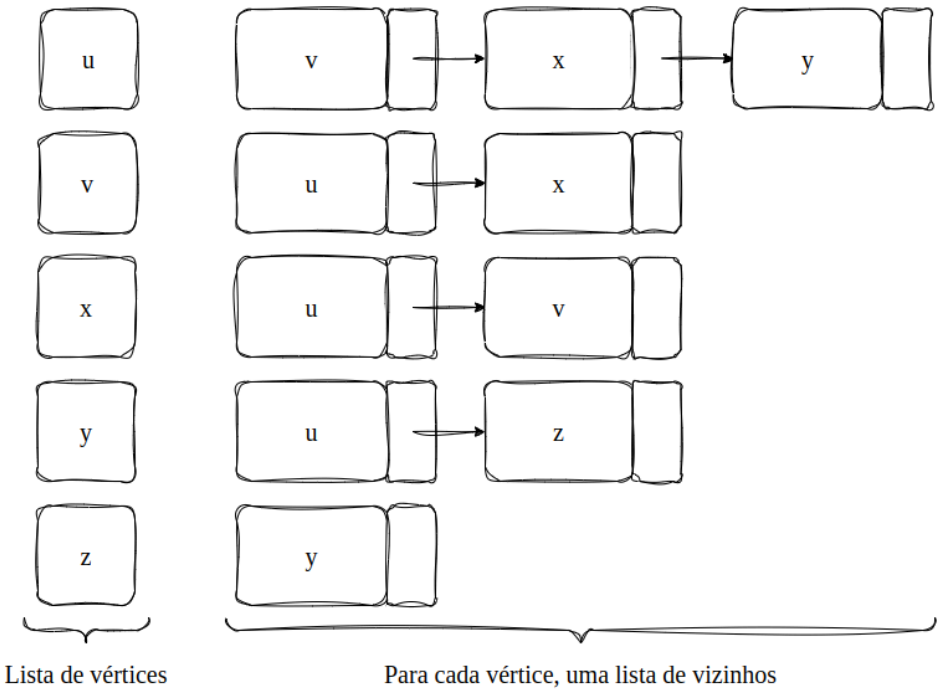
Uma lista de listas

$$(N(v) \mid v \in V_G)$$

desse tipo é uma lista de adjacências de G. Considere o grafo a seguir.



Veja a sua lista de adjacências.



Professor Rodrigo Bossini <professorbossini@gmail.com>
Produção: 2025

Referências

BONDY, J. A.; MURTY, U. S. R. **Graph theory**. New York: Springer, 2008. (Graduate Texts in Mathematics, v. 244).

CORMEN, Thomas H. et al. **Introduction to Algorithms**. 3. ed. Cambridge: MIT Press, 2009.

FEOFILOFF, Paulo. **Análise de Algoritmos**. Disponível em: https://www.ime.usp.br/~pf/analise_de_algoritmos/. Acesso em: março de 2025.

KLEINBERG, Jon; TARDOS, Éva. **Algorithm Design**. Boston: Pearson, 2006.