

MÓDULO 1 - PROCESSO MASSA MOLA

PEDRO HENRIQUE DE MENEZES COSME*

Email: pedrocosme@ufmg.br

Abstract— This work details the mathematical modeling of the ECP Model 210 mass-spring system to obtain a fourth-order model. Physical parameters of mass (m), spring constant (k), and damping (b) were experimentally identified through open-loop tests (step and free response) on simplified configurations. From the data, intermediate second-order models were estimated, which provided the basis for calculating the physical parameters. The final model, expressed in transfer functions, was validated by comparing its simulated response with experimental data, showing good agreement.

Keywords— Control Systems, Mass-spring, Position Control, Mathematical Model.

Resumo— Este trabalho detalha a modelagem matemática do sistema massa-mola ECP Model 210 para obter um modelo de quarta ordem. Parâmetros físicos de massa (m), constante elástica (k) e amortecimento (b) foram identificados experimentalmente através de ensaios em malha aberta (resposta ao degrau e livre) em configurações simplificadas. A partir dos dados, foram estimados modelos intermediários de segunda ordem, que serviram de base para o cálculo dos parâmetros físicos. O modelo final, expresso em funções de transferência, foi validado pela comparação de sua resposta simulada com dados experimentais, demonstrando boa correspondência.

Palavras-chave— Sistemas de controle, Massa-mola, Controle de posição, Modelo matemático

1 Introdução e Objetivo

2 Detalhes da Planta

3 Especificações de Desempenho Desejado

4 Modelagem Matemática

5 Identificação do Modelo do Sistema

O objetivo desta seção é determinar um modelo matemático linear que represente a dinâmica do sistema de levitação magnética em torno de um ponto de operação. A abordagem utilizada baseia-se na metodologia de identificação no domínio da frequência proposta por Kawakami et al.(2003).

5.1 Modelo Teórico Linearizado

A força eletromagnética F_M exercida pelo solenoide sobre a esfera metálica é intrinsecamente não-linear, sendo proporcional ao quadrado da corrente i e inversamente proporcional ao quadrado da distância x entre eles, conforme a Equação 1.

$$F_M = k \frac{i^2}{x^2} \quad (1)$$

onde k é um coeficiente de conversão eletromecânica. A dinâmica completa do sistema é descrita por uma equação diferencial não-linear. Para fins de projeto de controle, é conveniente linearizar o sistema em torno de um ponto de equilíbrio.

Seguindo o trabalho de Kawakami, o modelo linearizado que relaciona a variação da tensão de controle na entrada, $u(s)$, com a variação da tensão do sensor na saída, $y(s)$, pode ser representado pela seguinte função de transferência:

$$G(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = -\frac{A}{s^2 - \eta} \quad (2)$$

Neste modelo, A é um ganho positivo e η é um parâmetro relacionado à gravidade e à posição de equilíbrio da esfera ($\eta = 2g/H_0$). A presença de um polo em malha aberta em $s = +\sqrt{\eta}$ confirma a instabilidade inerente do sistema. O objetivo da identificação é, portanto, estimar os valores de A e η a partir de dados experimentais.

5.2 Metodologia de Identificação

A estimação dos parâmetros foi realizada no domínio da frequência. A resposta em frequência do modelo da Equação 2 é obtida substituindo $s = j\omega$:

$$G(j\omega) = \frac{A}{\omega^2 + \eta} \quad (3)$$

Note que $G(j\omega)$ é um valor puramente real, o que significa que a fase do sistema é de 0° ou 180° , dependendo do sinal do ganho. O módulo (ganho linear) da resposta em frequência é, portanto, $|G(j\omega)|$. Manipulando a Equação 3, podemos escrever uma relação linear para os parâmetros A e η :

$$A - \eta \cdot \text{Gain}(\omega_i) = \omega_i^2 \cdot \text{Gain}(\omega_i) \quad (4)$$

onde $\text{Gain}(\omega_i)$ é o ganho linear medido experimentalmente na frequência ω_i . Coletando medições para um conjunto de N frequências distintas, monta-se um sistema de equações lineares na forma matricial $P\theta = Q$, onde $\theta = [\eta, A]^T$. A solução de mínimos quadrados que minimiza o erro é dada por:

$$\hat{\theta} = (P^T P)^{-1} P^T Q \quad (5)$$

5.3 Procedimento Experimental e Análise de Dados

Para a coleta de dados, o sistema foi excitado com um sinal do chirp, abrangendo a faixa de

frequências de interesse. Os sinais de tensão de entrada (controle) e de saída (sensor de posição) foram registrados e correspondem ao ponto de operação de -1V.

Utilizando o MATLAB, a resposta em frequência do sistema foi calculada através da Fast Fourier Transform (FFT) dos sinais de saída e entrada ($H(j\omega) = \text{FFT}(y(t))/\text{FFT}(u(t))$). O Diagrama de Bode resultante, exibindo a magnitude e a fase da resposta em frequência experimental, é apresentado na Figura 1.

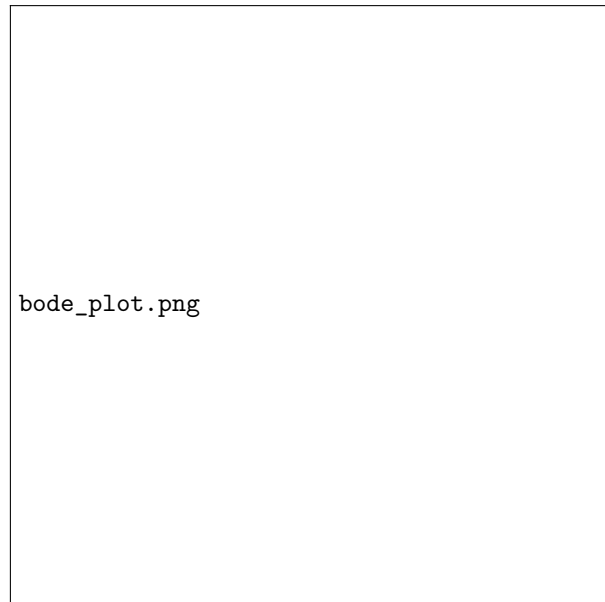


Figura 1: Diagrama de Bode experimental obtido a partir dos dados do ponto de operação -1V.

5.4 Resultados e Estimação dos Parâmetros

A partir do gráfico de magnitude do Diagrama de Bode, os ganhos lineares foram extraídos para um conjunto de frequências discretas, conforme listado na Tabela 1.

Tabela 1: Ganhos lineares extraídos da resposta em frequência experimental.

Frequência (Hz)	Ganho Linear
1.0	1.4872
2.0	20.4245
3.0	13.8815
4.0	5.4749
5.0	0.2491
6.0	1.4917
7.0	2.8305
8.0	1.9371
9.0	1.9371
10.0	1.9371

Aplicando o método dos mínimos quadrados com os dados da Tabela 1, obteve-se a seguinte

estimativa para os parâmetros do modelo:

- $\hat{\eta} = -27.2265$
- $\hat{A} = 3684.5816$

O valor estimado para η resultou negativo. Fisicamente, um η negativo implicaria em um sistema de malha aberta estável ($s^2 - \eta = s^2 + |\eta|$), o que contradiz a natureza instável do levitador magnético. Esse resultado pode ser atribuído a ruídos na medição ou a não-linearidades do sistema. Para garantir a coerência física do modelo, adotou-se o valor absoluto de η , ou seja, $\eta_{modelo} = |\hat{\eta}| = 27.2265$.

Com os parâmetros ajustados, a função de transferência estimada para o ponto de operação de -1V é:

$$G(s) = -\frac{3684.58}{s^2 - 27.23} \quad (6)$$

5.5 Validação do Modelo

Para validar a precisão do modelo identificado, a resposta em frequência teórica (Equação 3) foi plotada utilizando os parâmetros η_{modelo} e \hat{A} . A Figura 2 compara esta curva teórica com os pontos de ganho obtidos experimentalmente.

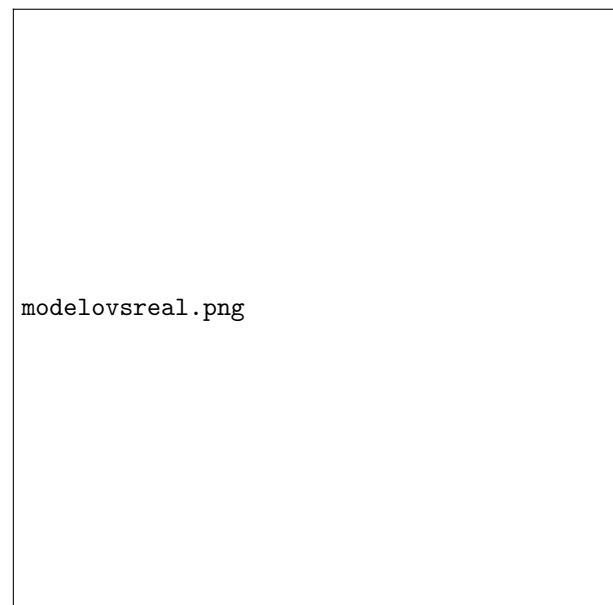


Figura 2: Comparação entre os ganhos experimentais (pontos em azul) e a resposta em frequência do modelo estimado (curva em vermelho).

Observa-se uma boa aderência entre o modelo estimado e os dados experimentais, especialmente nas frequências mais baixas, que são mais dominantes na dinâmica do sistema. A discrepância em frequências mais altas pode ser atribuída a ruídos e dinâmicas não modeladas. A validação visual confirma que o modelo obtido é uma representação adequada do sistema para a finalidade de projeto de controladores.

6 Projeto do Controlador e Simulação

Com a função de transferência da planta $G(s)$ identificada na seção anterior, o próximo passo é projetar um controlador $C(s)$ que estabilize o sistema em malha fechada. Para esta tarefa, foi utilizada a ferramenta interativa SISOTOOL do MATLAB.

6.1 Estratégia de Controle e Projeto no SISOTOOL

A planta identificada, dada pela Equação 6, possui um polo instável no semiplano direito ($s = \sqrt{27.23} \approx +5.22$), tornando o sistema de malha aberta instável. A estratégia de controle deve, primeiramente, alocar todos os polos de malha fechada no semiplano esquerdo.

Para alcançar a estabilização, foi projetado um controlador com a seguinte estrutura:

- **Dois zeros reais:** Zeros em $s = -1$ e $s = -2.8$ foram adicionados. No Lugar das Raízes, a função desses zeros é "puxar" o ramo do lugar geométrico que se inicia no polo instável para o semiplano esquerdo, forçando a estabilização do sistema.
- **Um integrador:** Um polo na origem ($s = 0$) foi incluído para garantir que o sistema em malha fechada tenha erro nulo em regime permanente para uma entrada do tipo degrau, uma característica desejável para sistemas de posicionamento.
- **Um polo distante:** Um polo em $s = -500$ foi adicionado para tornar o controlador estritamente próprio. Isso limita o ganho em altas frequências, o que reduz a sensibilidade do sistema a ruídos e torna o controlador fisicamente mais realizável.

Após a inserção desses polos e zeros, o ganho do controlador foi ajustado interativamente no SISOTOOL para posicionar os polos de malha fechada em uma região que fornecesse uma resposta transitória adequada.

6.2 Controlador Final Obtido

A função de transferência resultante é dada pela Equação 7.

$$C(s) = -54.918 \frac{(s + 2.8)(s + 1)}{s(s + 500)} \quad (7)$$

O sinal negativo do ganho é necessário para garantir que a realimentação do sistema seja negativa, uma vez que a planta $G(s)$ possui um ganho estático negativo.

6.2.1 Lugar das Raízes

O Lugar das Raízes da malha aberta ($L(s) = C(s)G(s)$) é apresentado na Figura 3. O gráfico confirma a eficácia da estratégia de controle: os zeros em -1 e -2.8 atraem o polo instável da planta para o semiplano esquerdo. Os quadrados roxos indicam a posição final dos polos de malha fechada para o ganho escolhido, todos localizados no semiplano esquerdo, o que garante a estabilidade do sistema.

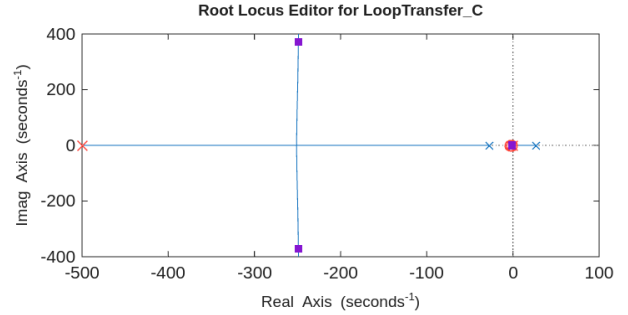


Figura 3: Lugar das Raízes para o sistema compensado. Todos os polos de malha fechada (quadrados roxos) estão no semiplano esquerdo.

6.2.2 Análise no Domínio da Frequência

O Diagrama de Bode da malha aberta é exibido na Figura 4. O sistema apresenta uma **Margem de Fase de 55.6 graus**, um valor robusto que indica boa tolerância a atrasos no sistema.

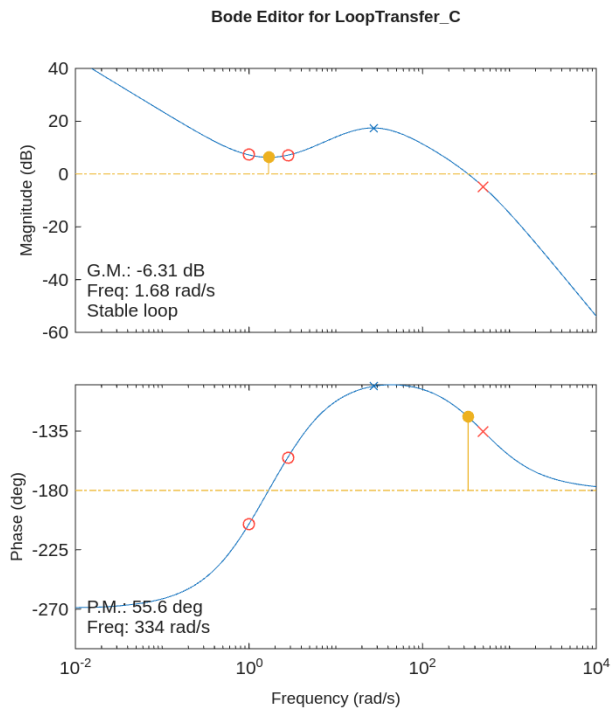


Figura 4: Diagrama de Bode do sistema em malha aberta ($L(s) = C(s)G(s)$).

Para uma análise de estabilidade definitiva, recorre-se ao Critério de Nyquist, mostrado na Figura 5. A planta $G(s)$ possui um polo no semiplano direito ($P=1$). Para que o sistema em malha fechada seja estável, o diagrama de Nyquist de $L(s)$ deve circular o ponto crítico $(-1, 0)$ uma vez no sentido anti-horário ($N=-1$). Como $Z = P + N = 1 + (-1) = 0$, a ausência de polos de malha fechada no semiplano direito é confirmada, e a estabilidade do sistema é garantida.

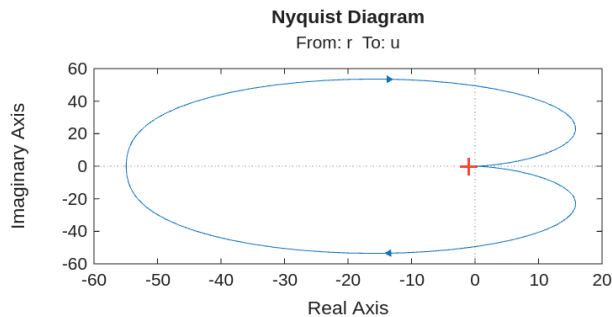


Figura 5: Diagrama de Nyquist confirmando a estabilidade do sistema (um enlace anti-horário em torno de -1).

6.2.3 Resposta ao Degrau

A Figura 6 mostra a resposta ao degrau para o sinal de controle (de referência 'r' para o atuador 'u'). A resposta é rápida, estabilizando-se em aproximadamente 0.015 segundos. O sobressinal observado no sinal de controle é uma consequência do esforço necessário para estabilizar rapidamente a planta inerentemente instável.

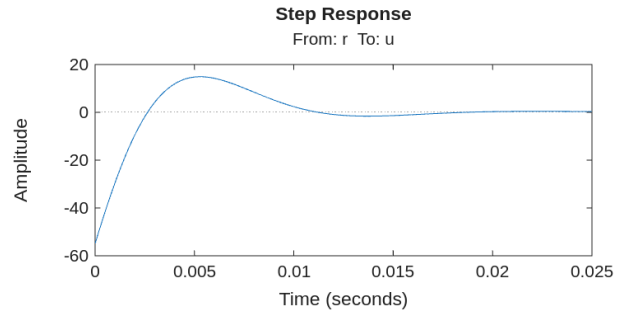


Figura 6: Resposta do sinal de controle (u) a uma entrada de referência em degrau (r).

Em conjunto, as análises demonstram que o controlador projetado estabiliza a planta de levitação magnética, também proporcionando um sistema em malha fechada com boa robustez e uma resposta rápida.

7 Identificação por Resposta em Frequência

(?) (?) (?)