



Lógica Matemática

Prof. Julio Silveira

Tema 04

Implicações Lógicas; Equivalências Lógicas

Lógica Matemática

- Implicações Lógicas
- Equivalências Lógicas

Implicação Lógica

- Exemplo
 - Se sabemos que Paulo tem carro e moto, podemos concluir que ele tem carro?
 - Se sabemos que Paulo tem carro, podemos concluir que ele tem carro e moto?

Implicação Lógica

- Exemplo

p: Paulo tem carro

q: Paulo tem moto

P: $p \wedge q$ Paulo tem carro e moto

Q: $p \vee q$ Paulo tem carro ou moto

Sempre que $v(P) = V$, podemos concluir que $v(Q) = V$?

Sim! Vamos conferir na tabela-verdade?

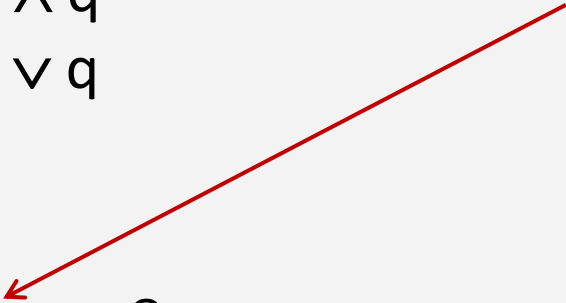
Implicação Lógica

- Exemplo (5.1)

P: $p \wedge q$

Q: $p \vee q$

Sempre que $v(P) = V$,
vemos que $v(Q) = V$



		P		Q	
p	q	$p \wedge q$		$p \vee q$	
V	V	V		V	
V	F	F		V	
F	V	F		V	
F	F	F		F	

Dizemos então que
P implica (logicamente) Q

Ou, de forma simbólica:

$$P \Rightarrow Q$$

Implicação Lógica

- Exemplo (5.1)

P: $p \wedge q$

Q: $p \vee q$

$P \Rightarrow Q$

ocorre **exatamente**
quando a condicional

$P \rightarrow Q$

é **tautológica**

		P	Q	$P \rightarrow Q$
p	q	$p \wedge q$	$p \vee q$	$p \wedge q \rightarrow p \vee q$
V	V	V	V	V
V	F	F	V	V
F	V	F	V	V
F	F	F	F	V

Implicação Lógica

- Para P e Q quaisquer:
 - Sempre que $v(P) = V$, teremos $v(Q) = V$?
 - Então dizemos que P **implica (logicamente)** Q
 - Notando $P \Rightarrow Q$
 - Em outras palavras
 - Podemos deduzir Q de P; ou
 - Que Q sempre é Verdadeira quando P também for V.

Implicação Lógica

- $P \Rightarrow Q$
 - Dizer que $P \Rightarrow Q$ é o mesmo que dizer que
 - A condicional $P \rightarrow Q$ é **tautológica**
 - Observe que \Rightarrow não é operador!
 - Não definimos uma tabela-verdade com vários possíveis valores para \Rightarrow

Implicação Lógica

- Exemplo (511)

P: $p \wedge q$

Q: $p \vee q$

$Q \Rightarrow P$?

Não

$Q \rightarrow P$

não é **tautológica**

		P		Q	$Q \rightarrow P$	
p	q	$p \wedge q$		$p \vee q$		$p \vee q \rightarrow p \wedge q$
V	V	V	←	V		V
V	F	F	←	V		F
F	V	F	←	V		F
F	F	F		F		V

Implicação Lógica

- Exemplo (5.4)

- Concluindo

- Temos $p \wedge q \Rightarrow p \vee q$

Se soubermos que Paulo tem carro e moto,
podemos deduzir que ele tem carro ou moto

- Mas não $p \vee q \Rightarrow p \wedge q$

Se soubermos que Paulo tem carro ou moto,
não podemos deduzir que ele tem carro e moto

Implicação Lógica

- Exemplo (5.2)

P: $p \wedge q$

Q: $p \leftrightarrow q$

$p \wedge q \Rightarrow p \leftrightarrow q$?

$p \leftrightarrow q \Rightarrow p \wedge q$?

		P	Q		
p	q	$p \wedge q$	$p \leftrightarrow q$	$P \rightarrow Q$	$Q \rightarrow P$
V	V	V	V	V	V
V	F	F	F	V	V
F	V	F	F	V	V
F	F	F	V	V	F

$P \Rightarrow Q$? SIM!

$Q \Rightarrow P$? NÃO!

$p \wedge q \rightarrow (p \leftrightarrow q)$ é uma tautologia.

$(p \leftrightarrow q) \rightarrow p \wedge q$ não é tautológica.

Implicação Lógica

- Exemplo (5.3)

$$P = p \leftrightarrow q$$

$$Q = p \rightarrow q$$

$$R = q \rightarrow p$$

		P	Q	R			
p	q	$p \leftrightarrow q$	$p \rightarrow q$	$q \rightarrow p$	$P \rightarrow Q$	$P \rightarrow R$	$Q \rightarrow R$
V	V	V	V	V	V	V	V
V	F	F	F	V	V	V	V
F	V	F	V	F	V	V	F
F	F	V	V	V	V	V	V

$P \Rightarrow Q$? SIM!

$P \Rightarrow R$? SIM!

$Q \Rightarrow R$? NÃO!

Implicação Lógica

- Exemplo (5.4)

$$(p \vee q) \wedge \sim p \Rightarrow q ?$$

p	q	$p \vee q$	$\sim p$	$(p \vee q) \wedge \sim p$	$(p \vee q) \wedge \sim p \rightarrow q$
V	V	V	F	F	V
V	F	V	F	F	V
F	V	V	V	V	V
F	F	F	V	F	V

SIM! $(p \vee q) \wedge \sim p \rightarrow q$ é uma tautologia.

Equivalência Lógica

- Exemplo

p: Paulo tem carro

q: Paulo tem moto

P: $\sim(p \wedge q)$ Paulo não tem carro e moto

Q: $\sim p \vee \sim q$ Paulo não tem carro ou não tem moto

P e Q são equivalentes ? Sim!
$$\left. \begin{array}{l} P \Rightarrow Q \\ Q \Rightarrow P \end{array} \right\} P \Leftrightarrow Q$$

Vamos conferir na tabela-verdade?

Equivalência Lógica

- Exemplo (5.5)

P: $\sim(p \wedge q)$ $P \Rightarrow Q$? SIM!

Q: $\sim p \vee \sim q$ $Q \Rightarrow P$? SIM!

$P \rightarrow Q$ é tautologia

$Q \rightarrow P$ é tautologia

$P \leftrightarrow Q$ é tautologia

$P \Leftrightarrow Q$

Complete		P	Q			
p	q	$\sim(p \wedge q)$	$\sim p \vee \sim q$	$P \rightarrow Q$	$Q \rightarrow P$	$P \leftrightarrow Q$
V	V	F	F	V	V	V
V	F	V	V	V	V	V
F	V	V	V	V	V	V
F	F	V	V	V	V	V

Equivalência Lógica

- Sejam X e Y tais que

$X \Rightarrow Y$ $X \rightarrow Y$ é tautológica

e

$Y \Rightarrow X$ $Y \rightarrow X$ é tautológica

–]

- Neste caso, dizemos que

X e Y são (logicamente) **equivalentes**

- Notação: $X \Leftrightarrow Y$

Equivalência Lógica

- Exemplo (5.7)

$$\sim\sim p \Leftrightarrow p ?$$

p	
V	
F	

Equivalência Lógica

- Exemplo (5.8)

$$\sim p \rightarrow p \Leftrightarrow p ?$$

p	
V	
F	

Equivalência Lógica

- Exemplo (5.9)

$$p \rightarrow p \wedge q \Leftrightarrow p \rightarrow q ?$$

p	q	
V	V	
V	F	
F	V	
F	F	

Equivalência Lógica

- Exemplo (7)

Forma Normal
da Condicional

$$p \rightarrow q \Leftrightarrow \sim p \vee q$$

p	q	
V	V	
V	F	
F	V	
F	F	

Equivalência Lógica

- Proposições associadas à condicional $P \rightarrow Q$

- Recíproca $Q \rightarrow P$

- Contrária $\sim P \rightarrow \sim Q$

- Contrapositiva $\sim Q \rightarrow \sim P$

Verifique que

$$P \rightarrow Q \Leftrightarrow \sim Q \rightarrow \sim P$$

$$Q \rightarrow P \Leftrightarrow \sim P \rightarrow \sim Q$$

p	q	
V	V	
V	F	
F	V	
F	F	

Equivalência Lógica

- EXERCÍCIO: Livro-texto, pág 61:
(5) Determine:
 - a) A contrapositiva da contrapositiva de $p \rightarrow q$
 - b) A contrapositiva da recíproca de $p \rightarrow q$
 - c) A contrapositiva da contrária de $p \rightarrow q$

Ver resposta no TEXTO DE APOIO

Equivalência Lógica

- EXERCÍCIO: Livro-texto, pág 64:
2. Expressar a bicondicional

$$p \leftrightarrow q$$

em função dos conectivos $\sim \wedge \vee$

Ver resposta no TEXTO DE APOIO

Lógica Matemática

Dúvidas?

Obrigado!



UNICARIOCA.EDU.BR

MELHOR CENTRO UNIVERSITÁRIO DO RIO, SEGUNDO O MEC