



Lógica Matemática

Prof. Julio Silveira

Tema 05

Álgebra

Proposicional

Lógica Matemática

- Propriedades das Operações
- Outras equivalências – Formas Normais:
 - FN da condicional
 - FN da Negação da Condicional
 - FN da Bicondicional
 - FN da Negação da Bicondicional

Propriedades das operações

- Para o estudo das propriedades das operações, considere:
 - Três proposições **p**, **q** e **r** quaisquer
 - Uma tautologia **t**. Ou seja, $v(t) = V$.
 - Uma contradição **c**. Ou seja $v(c) = F$.
- Como exercício
 - Construir as tabelas-verdade de todas as equivalências estudadas neste tema.

Propriedades da conjunção

1. PROPRIEDADES DA CONJUNÇÃO

a. Idempotência

$$p \wedge p \Leftrightarrow p$$

b. Comutatividade

$$p \wedge q \Leftrightarrow q \wedge p$$

c. Associatividade

$$(p \wedge q) \wedge r \Leftrightarrow p \wedge (q \wedge r)$$

| p | q | r | $p \wedge q$ | $(p \wedge q) \wedge r$ | $q \wedge r$ | $p \wedge (q \wedge r)$ | $(p \wedge q) \wedge r \leftrightarrow p \wedge (q \wedge r)$ |
|---|---|---|--------------|-------------------------|--------------|-------------------------|---|
| V | V | V | V | V | V | V | V |
| V | V | F | V | F | F | F | V |
| V | F | V | F | F | F | F | V |
| V | F | F | F | F | F | F | V |
| F | V | V | F | F | V | F | V |
| F | V | F | F | F | F | F | V |
| F | F | V | F | F | F | F | V |
| F | F | F | F | F | F | F | V |

Propriedades da conjunção

1. PROPRIEDADES DA CONJUNÇÃO

d. Elemento Neutro

ou

$$p \wedge t \Leftrightarrow p$$

$$p \wedge V \Leftrightarrow p$$

e. Elemento Absorvente

ou

$$p \wedge c \Leftrightarrow F$$

$$p \wedge F \Leftrightarrow F$$

f. Complemento

$$p \wedge \sim p \Leftrightarrow F$$

Propriedades da disjunção

2. PROPRIEDADES DA DISJUNÇÃO

a. Idempotência

$$p \vee p \Leftrightarrow p$$

b. Comutatividade

$$p \vee q \Leftrightarrow q \vee p$$

c. Associatividade

$$(p \vee q) \vee r \Leftrightarrow p \vee (q \vee r)$$

| p | q | r | $p \vee q$ | $(p \vee q) \vee r$ | $q \vee r$ | $p \vee (q \vee r)$ | $(p \vee q) \vee r \Leftrightarrow p \vee (q \vee r)$ |
|---|---|---|------------|---------------------|------------|---------------------|---|
| V | V | V | V | V | V | V | V |
| V | V | F | V | V | V | V | V |
| V | F | V | V | V | V | V | V |
| V | F | F | V | V | F | V | V |
| F | V | V | V | V | V | V | V |
| F | V | F | V | V | V | V | V |
| F | F | V | F | V | V | V | V |
| F | F | F | F | F | F | F | V |

Propriedades da disjunção

2. PROPRIEDADES DA DISJUNÇÃO

d. Elemento Neutro

ou

$$p \vee c \Leftrightarrow p$$

$$p \vee F \Leftrightarrow p$$

e. Elemento Absorvente

ou

$$p \vee t \Leftrightarrow V$$

$$p \vee V \Leftrightarrow V$$

f. Complemento

$$p \vee \sim p \Leftrightarrow V$$

Propriedades conjuntas

3. PROPRIEDADES DA CONJUNÇÃO E DISJUNÇÃO

a. Distributividade

$$i. \quad p \wedge (q \vee r) \Leftrightarrow (p \wedge q) \vee (p \wedge r)$$

$$ii. \quad p \vee (q \wedge r) \Leftrightarrow (p \vee q) \wedge (p \vee r)$$

b. Absorção

$$i. \quad p \wedge (p \vee q) \Leftrightarrow p$$

$$ii. \quad p \vee (p \wedge q) \Leftrightarrow p$$

Propriedades conjuntas

3. PROPRIEDADES DA CONJUNÇÃO E DISJUNÇÃO

c. Regras de *De Morgan*

i. $\sim(p \wedge q) \Leftrightarrow \sim p \vee \sim q$

ii. $\sim(p \vee q) \Leftrightarrow \sim p \wedge \sim q$



| p | q | $p \vee q$ | $\sim(p \vee q)$ | $\sim p$ | $\sim q$ | $\sim p \wedge \sim q$ | $\sim(p \vee q) \Leftrightarrow \sim p \wedge \sim q$ |
|---|---|------------|------------------|----------|----------|------------------------|---|
| V | V | V | F | F | F | F | V |
| V | F | V | F | F | V | F | V |
| F | V | V | F | V | F | F | V |
| F | F | F | V | V | V | V | V |

Formas Normais

4. FN DA CONDICIONAL

$$p \rightarrow q \Leftrightarrow \sim p \vee q$$

A proposição “*Se Paulo tem carro **então** tem moto*” equivale a:

*Paulo **não** tem carro **ou** Paulo tem moto.*

Formas Normais

5. FN DA NEGAÇÃO DA CONDICIONAL

$$\sim(p \rightarrow q) \Leftrightarrow \sim(\sim p \vee q)$$

FN da condicional

$$\Leftrightarrow \sim\sim p \wedge \sim q$$

De Morgan

$$\Leftrightarrow p \wedge \sim q$$

Dupla Negação

$$\sim(p \rightarrow q) \Leftrightarrow p \wedge \sim q$$

A proposição “*Se Paulo tem carro **então** tem moto*” é falsa. Logo:

*Paulo tem carro e Paulo **não** tem moto.*

Formas Normais

6. FN DA BICONDICIONAL

$$p \leftrightarrow q \quad \Leftrightarrow \quad (p \rightarrow q) \wedge (q \rightarrow p)$$

Definição

$$\Leftrightarrow (\sim p \vee q) \wedge (\sim q \vee p)$$

FN das condicionais

$$\Leftrightarrow ((\sim p \vee q) \wedge \sim q)$$

Distributividade

\vee

$$((\sim p \vee q) \wedge p)$$

$$\Leftrightarrow ((\sim p \wedge \sim q) \vee (q \wedge \sim q))$$

Distributividade

\vee

$$((\sim p \wedge p) \vee (q \wedge p))$$

Formas Normais

6. FN DA BICONDICIONAL (cont.)

$$\begin{aligned} p \leftrightarrow q &\Leftrightarrow ((\sim p \wedge \sim q) \vee (q \wedge \sim q)) \\ &\quad \vee \\ &\quad ((\sim p \wedge p) \vee (q \wedge p)) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &\Leftrightarrow ((\sim p \wedge \sim q) \vee F) \\ &\quad \vee \\ &\quad (F \vee (q \wedge p)) \end{aligned}$$

Complementos

$$\begin{aligned} &\Leftrightarrow (\sim p \wedge \sim q) \\ &\quad \vee \\ &\quad (q \wedge p) \end{aligned}$$

Elementos Neutros

Formas Normais

6. FN DA BICONDICIONAL (cont.)

$$p \leftrightarrow q \quad \Leftrightarrow \quad (\sim p \wedge \sim q) \vee (q \wedge p) \quad \text{Comutatividades}$$

$$p \leftrightarrow q \quad \Leftrightarrow \quad (p \wedge q) \vee (\sim p \wedge \sim q)$$

Afirmar que a biimplicação $p \leftrightarrow q$ é Verdadeira é o mesmo que afirmar que:

ou $(p \wedge q)$ ocorre **p** e ocorre **q**

ou $(\sim p \wedge \sim q)$ ocorre **não p** e ocorre **não q**

Formas Normais

7. FN DA NEGAÇÃO DA BICONDICIONAL

$$\sim(p \leftrightarrow q) \Leftrightarrow \sim((p \rightarrow q) \wedge (q \rightarrow p))$$

Definição

$$\Leftrightarrow \sim(p \rightarrow q) \vee \sim(q \rightarrow p)$$

De Morgan

$$\Leftrightarrow (p \wedge \sim q) \vee (q \wedge \sim p)$$

*Negação de ambas
as condicionais*

$$\sim(p \leftrightarrow q) \Leftrightarrow (p \wedge \sim q) \vee (\sim p \wedge q)$$

Comutatividade

Afirmar que a biimplicação $p \leftrightarrow q$ é Falsa é o mesmo que afirmar que:

ou $(p \wedge \sim q)$ ocorre **p** e ocorre **não p**

ou $(\sim p \wedge q)$ ocorre **não p** e ocorre **q**

Álgebra Proposicional

- EXERCÍCIOS DO AVA
 - Construir as tabelas-verdades
 - $(p \leftrightarrow q) \leftrightarrow r \Leftrightarrow p \leftrightarrow (q \leftrightarrow r)$?

| p | q | r | $p \leftrightarrow q$ | P $(p \leftrightarrow q) \leftrightarrow r$ | q \leftrightarrow r | Q $p \leftrightarrow (q \leftrightarrow r)$ | $P \leftrightarrow Q$ |
|---|---|---|-----------------------|--|-----------------------|--|-----------------------|
| V | V | V | | | | | |
| V | V | F | | | | | |
| V | F | V | | | | | |
| V | F | F | | | | | |
| F | V | V | | | | | |
| F | V | F | | | | | |
| F | F | V | | | | | |
| F | F | F | | | | | |

Álgebra Proposicional

- EXERCÍCIOS DO AVA

- Construir as tabelas-verdades

- $p \rightarrow q \wedge r \Leftrightarrow (p \rightarrow q) \wedge (p \rightarrow r)$

| | | | | P | | | Q | |
|---|---|---|--------------|------------------------------|-------------------|-------------------|--|-----------------------|
| p | q | r | $q \wedge r$ | $p \rightarrow (q \wedge r)$ | $p \rightarrow q$ | $p \rightarrow r$ | $(p \rightarrow q) \wedge (p \rightarrow r)$ | $P \leftrightarrow Q$ |
| V | V | V | | | | | | |
| V | V | F | | | | | | |
| V | F | V | | | | | | |
| V | F | F | | | | | | |
| F | V | V | | | | | | |
| F | V | F | | | | | | |
| F | F | V | | | | | | |
| F | F | F | | | | | | |

Álgebra Proposicional

- EXERCÍCIOS DO AVA

3. Escreva em português a negação da proposição

“Rosas são vermelhas e violetas são azuis”

usando as regras de *De Morgan*

Resposta:

Rosas não são vermelhas ou violetas não são azuis

Álgebra Proposicional

- EXERCÍCIOS DO AVA

4. Escreva em português a negação de cada proposição abaixo

- (a) É falso que não está frio ou que está chovendo.
- (b) Não é verdade que o pai de Marcos é pernambucano ou que a mãe é gaúcha.
- (c) Não é verdade que as vendas estão diminuindo e que os preços estão aumentando.
- (d) Não é verdade que Jorge estuda Física, mas não Química.

Resposta:

- (a) Está frio e não está chovendo.
- (b) O pai de Marcos não é pernambucano e a mãe não é gaúcha.
- (c) As vendas estão aumentando ou os preços estão diminuindo.
- (d) Jorge não estuda Física ou estuda Química.

Álgebra Proposicional

- EXERCÍCIOS
 - Construir as tabelas-verdade de todas as equivalências estudadas neste tema

Lógica Matemática

Dúvidas?

Obrigado!



UNICARIOCA.EDU.BR

MELHOR CENTRO UNIVERSITÁRIO DO RIO, SEGUNDO O MEC