Introdução à Modelagem Computacional
MAC024

Luis Paulo S. Barra e Elson M. Toledo

Departamento de Mecânica Aplicada e Computacional - MAC
Faculdade de Engenharia

Março 2012

Parte III

Sistemas de Equações de Diferenças

Sistemas de Equações de Diferenças

Casos de Amor - Romeu e Julieta

Seja R_n a medida do sentimento de Romeu por Julieta no dia n e J_n a medida correspondente relativa de Julieta em relação a Romeu.

- $R_n > 0 \rightarrow$ Romeu ama Julieta
- $R_n = 0 \rightarrow$ Romeu é indiferente a Julieta
- $R_n < 0 \rightarrow$ Romeu odeia Julieta

Sistemas de Equações de Diferenças

Casos de Amor - Romeu e Julieta

Seja R_n a medida do sentimento de Romeu por Julieta no dia n e J_n a medida correspondente relativa de Julieta em relação a Romeu.

- $R_n > 0 \to$ Romeu ama Julieta
- $R_n = 0 \to$ Romeu é indiferente a Julieta
- $R_n < 0 \to$ Romeu odeia Julieta

É razoável supor que:

$$\begin{aligned} R_{n+1} &= a_R R_n \\ J_{n+1} &= a_J J_n \end{aligned}$$

com $a_R, a_J > 0$.

Sistemas de Equações de Diferenças

Casos de Amor - Romeu e Julieta

Seja R_n a medida do sentimento de Romeu por Julieta no dia n e J_n a medida correspondente relativa de Julieta em relação a Romeu.

- $R_n > 0 \rightarrow$ Romeu ama Julieta
- $R_n = 0 \rightarrow$ Romeu é indiferente a Julieta
- $R_n < 0 \rightarrow$ Romeu odeia Julieta

É razoável supor que:

$$\begin{aligned} R_{n+1} &= a_R R_n \\ J_{n+1} &= a_J J_n \end{aligned}$$

com $a_R, a_J > 0$.
Logo:
se $a > 1$ o sentimento incial se intensifica e
se $0 < a < 1$ o sentimento inicial tende a neutralidade.

Romeu e Julieta

Mais alguns termos lineares

Dependência do sentimento em relação ao sentimento do outro:

$$\begin{aligned} R_{n+1} &= a_R R_n + p_R J_n \\ J_{n+1} &= a_J J_n + p_J R_n \end{aligned}$$

se $p_R > 0$ o amor de Julieta estimula Romeu e o ódio dela desencoraja-o;
se $p_R < 0$ o ódio de Julieta estimula Romeu e o amor dela desestimula-o

Romeu e Julieta

Mais alguns termos lineares

Dependência do sentimento em relação ao sentimento do outro:

$$
\begin{aligned}
R_{n+1} &= a_R R_n + p_R J_n \\
J_{n+1} &= a_J J_n + p_J R_n
\end{aligned}
$$

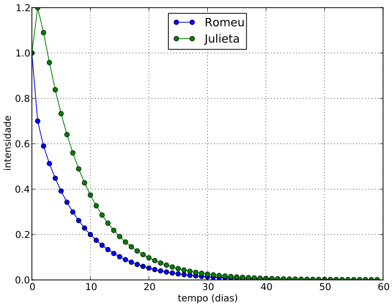
se $p_R > 0$ o amor de Julieta estimula Romeu e o ódio dela desencoraja-o;
se $p_R < 0$ o ódio de Julieta estimula Romeu e o amor dela desestimula-o

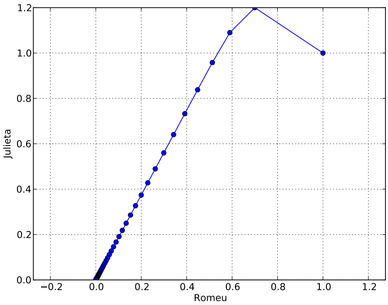
Estilos Românticos

$$
\begin{array}{ccc}
0 < a < 1 & \text{e} & p < 0 \\
a > 1 & \text{e} & p < 0 \\
0 < a < 1 & \text{e} & p > 0 \\
a > 1 & \text{e} & p > 0
\end{array}
$$

Romeu e Julieta

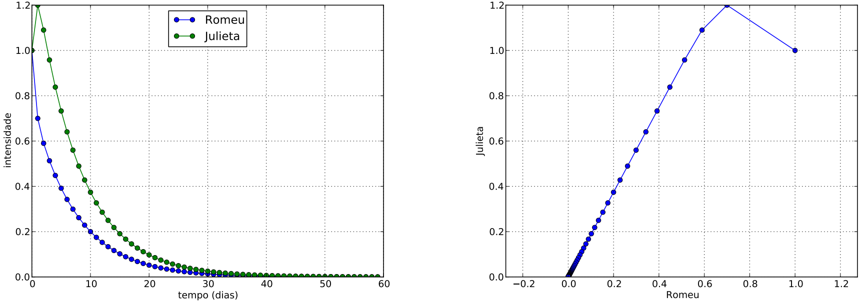
Caso 1: $a_R = 0.5$, $a_J = 0.7$, $p_R = 0.2$, $p_J = 0.5$





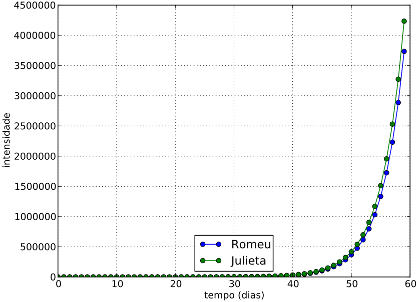
Romeu e Julieta

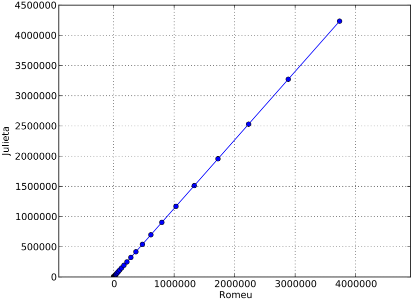
Caso 1: $a_R = 0.5$, $a_J = 0.7$, $p_R = 0.2$, $p_J = 0.5$



Romeu e Julieta

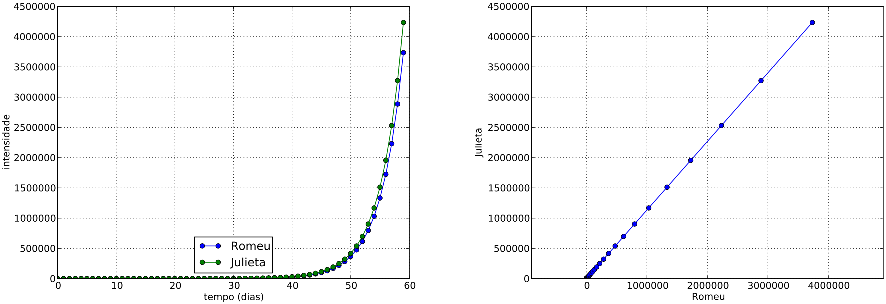
Caso 2: $a_R = 0.5$, $a_J = 0.7$, $p_R = 0.7$, $p_J = 0.9$





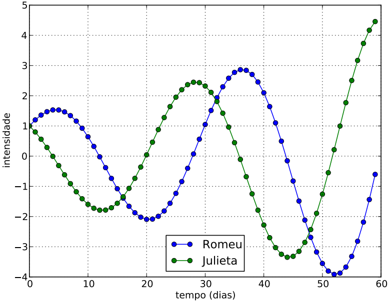
Romeu e Julieta

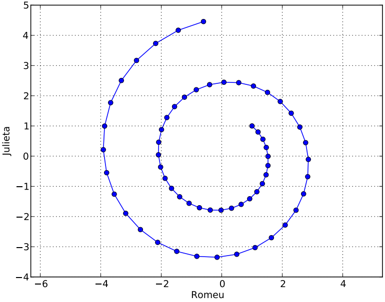
Caso 2: $a_R = 0.5$, $a_J = 0.7$, $p_R = 0.7$, $p_J = 0.9$



Romeu e Julieta

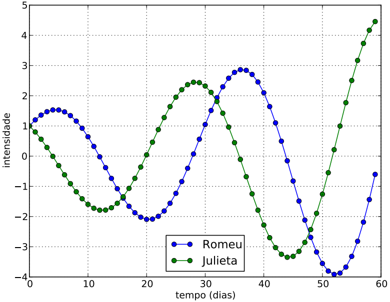
Caso 3: $a_R = 1.0$, $a_J = 1.0$, $p_R = 0.2$, $p_J = -0.2$

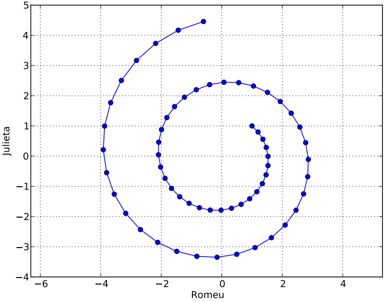




Romeu e Julieta

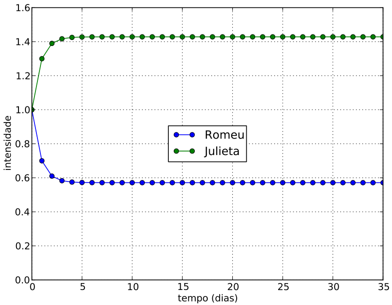
Caso 3: $a_R = 1.0$, $a_J = 1.0$, $p_R = 0.2$, $p_J = -0.2$





Romeu e Julieta

Caso 4: $a_R = 0.5$, $a_J = 0.8$, $p_R = 0.2$, $p_J = 0.5$



Pontos Fixos e Análise de Estabilidade

Considere o sistema discreto;

$$\begin{aligned} x_{n+1} &= f(x_n, y_n) \\ y_{n+1} &= g(x_n, y_n) \end{aligned}$$

Pontos Fixos e Análise de Estabilidade

Considere o sistema discreto;

$$\begin{aligned} x_{n+1} &= f(x_n, y_n) \\ y_{n+1} &= g(x_n, y_n) \end{aligned}$$

Os pontos fixos (x^*, y^*) deste sistema satisfazem:

$$\begin{aligned} x^* &= f(x^*, y^*) \\ y^* &= g(x^*, y^*) \end{aligned}$$

Pontos Fixos e Análise de Estabilidade

Considere o sistema discreto;

$$\begin{aligned} x_{n+1} &= f(x_n, y_n) \\ y_{n+1} &= g(x_n, y_n) \end{aligned}$$

Os pontos fixos (x^*, y^*) deste sistema satisfazem:

$$\begin{aligned} x^* &= f(x^*, y^*) \\ y^* &= g(x^*, y^*) \end{aligned}$$

Como no caso unidimensional, para determinar a estabilidade de um ponto fixo, considermos pequenas perturbações:

$$\begin{aligned} x_n &= x^* + u_n \\ y_n &= y^* + v_n \end{aligned}$$

Pontos Fixos e Análise de Estabilidade

Considere o sistema discreto;

$$\begin{aligned} x_{n+1} &= f(x_n, y_n) \\ y_{n+1} &= g(x_n, y_n) \end{aligned}$$

Os pontos fixos (x^*, y^*) deste sistema satisfazem:

$$\begin{aligned} x^* &= f(x^*, y^*) \\ y^* &= g(x^*, y^*) \end{aligned}$$

Como no caso unidimensional, para determinar a estabilidade de um ponto fixo, considermos pequenas perturbações:

$$\begin{aligned} x_n &= x^* + u_n \\ y_n &= y^* + v_n \end{aligned}$$

O que acontece com u_n e v_n a medida que as iterações avançam ?

Pontos Fixos e Análise de Estabilidade

Para responder esta pergunta consideremos o avanço temporal de um ponto na vizinhança do ponto fixo:

$$\begin{aligned} x^* + u_{n+1} &= f(x^* + u_n, y^* + v_n) \\ y^* + v_{n+1} &= g(x^* + u_n, y^* + v_n) \end{aligned}$$

Pontos Fixos e Análise de Estabilidade

Para responder esta pergunta consideremos o avanço temporal de um ponto na vizinhança do ponto fixo:

$$\begin{aligned} x^* + u_{n+1} &= f(x^* + u_n, y^* + v_n) \\ y^* + v_{n+1} &= g(x^* + u_n, y^* + v_n) \end{aligned}$$

Expandindo o lado direito usando uma série de Taylor em torno de (x^*, y^*) podemos obter a seguinte aproximação linear:

$$\begin{aligned} x^* + u_{n+1} &= f(x^*, y^*) + \frac{\partial f}{\partial x}(x^*, y^*)\, u_n + \frac{\partial f}{\partial y}(x^*, y^*)\, y_n \\ y^* + v_{n+1} &= g(x^*, y^*) + \frac{\partial g}{\partial x}(x^*, y^*)\, u_n + \frac{\partial g}{\partial y}(x^*, y^*)\, y_n \end{aligned}$$

Análise de Estabilidade

Lembrando que (x^*, y^*) é um ponto fixo sistema de equações anterior se simplifica:

$$\begin{aligned} u_{n+1} &= \frac{\partial f}{\partial x}(x^*, y^*)\, u_n + \frac{\partial f}{\partial y}(x^*, y^*)\, y_n \\ v_{n+1} &= \frac{\partial g}{\partial x}(x^*, y^*)\, u_n + \frac{\partial g}{\partial y}(x^*, y^*)\, y_n \end{aligned}$$

Análise de Estabilidade

Lembrando que (x^*, y^*) é um ponto fixo sistema de equações anterior se simplifica:

$$
\begin{aligned}
u_{n+1} &= \frac{\partial f}{\partial x}(x^*, y^*)\, u_n + \frac{\partial f}{\partial y}(x^*, y^*)\, y_n \\
v_{n+1} &= \frac{\partial g}{\partial x}(x^*, y^*)\, u_n + \frac{\partial g}{\partial y}(x^*, y^*)\, y_n
\end{aligned}
$$

Uma vez que as derivadas são tomadas em relação ao ponto fixo, são constantes. Logo pode-se reescrever o sistema como:

$$
\mathbf{w}_{n+1} = \mathbf{J}\mathbf{w}_n \qquad \text{onde:} \qquad \mathbf{w}_n = \begin{pmatrix} u_n \\ v_n \end{pmatrix}
$$

Análise de Estabilidade

Lembrando que (x^*, y^*) é um ponto fixo sistema de equações anterior se simplifica:

$$\begin{aligned} u_{n+1} &= \frac{\partial f}{\partial x}(x^*, y^*)\, u_n + \frac{\partial f}{\partial y}(x^*, y^*)\, y_n \\ v_{n+1} &= \frac{\partial g}{\partial x}(x^*, y^*)\, u_n + \frac{\partial g}{\partial y}(x^*, y^*)\, y_n \end{aligned}$$

Uma vez que as derivadas são tomadas em relação ao ponto fixo, são constantes. Logo pode-se reescrever o sistema como:

$$\mathbf{w}_{n+1} = \mathbf{J}\mathbf{w}_n \qquad \text{onde:} \qquad \mathbf{w}_n = \begin{pmatrix} u_n \\ v_n \end{pmatrix}$$

e $\mathbf{J}$ é a matriz Jacobiana, constante, dada por:

$$\mathbf{J} = \begin{bmatrix} \frac{\partial f}{\partial x}(x^*, y^*) & \frac{\partial f}{\partial y}(x^*, y^*) \\ \frac{\partial g}{\partial x}(x^*, y^*) & \frac{\partial g}{\partial y}(x^*, y^*) \end{bmatrix}$$

Análise de Estabilidade

Pode-se concluir que:

$$\mathbf{w}_n = \mathbf{J}^n \mathbf{w}_0$$

Para analisar o comportamento da equação anterior recorre-se aos autovalores e autovetores da matriz $\mathbf{J}$, que no caso geral pode ter dimensão m.

Pode-se construir uma matriz em que as colunas são os autovetores de $\mathbf{J}$:

$$P = [\mathbf{p}_1 \, \mathbf{p}_2 \, \ldots \, \mathbf{p}_m]$$

E pela definição de autovalores, pode-se escrever:

$$\mathbf{J}P = P\Lambda$$

Análise de Estabilidade

Pode-se concluir que:

$$\mathbf{w}_n = \mathbf{J}^n \mathbf{w}_0$$

Para analisar o comportamento da equação anterior recorre-se aos autovalores e autovetores da matriz $\mathbf{J}$, que no caso geral pode ter dimensão m.

Pode-se construir uma matriz em que as colunas são os autovetores de $\mathbf{J}$:

$$P = [\mathbf{p}_1 \, \mathbf{p}_2 \, \ldots \, \mathbf{p}_m]$$

E pela definição de autovalores, pode-se escrever:

$$\mathbf{J}P = P\Lambda \quad \text{ou ainda} \quad \mathbf{J} = P\Lambda P^{-1}$$

Análise de Estabilidade

Pode-se concluir que:

$$\mathbf{w}_n = \mathbf{J}^n \mathbf{w}_0$$

Para analisar o comportamento da equação anterior recorre-se aos autovalores e autovetores da matriz $\mathbf{J}$, que no caso geral pode ter dimensão m.

Pode-se construir uma matriz em que as colunas são os autovetores de $\mathbf{J}$:

$$P = [\mathbf{p}_1 \, \mathbf{p}_2 \, \ldots \, \mathbf{p}_m]$$

E pela definição de autovalores, pode-se escrever:

$$\mathbf{J}P = P\Lambda \quad \text{ou ainda} \quad \mathbf{J} = P\Lambda P^{-1}$$

onde, supondo $\mathbf{J}$ diagonalizável:

$$\Lambda = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 & & \vdots \\ \vdots & \vdots & & \ddots & \\ 0 & 0 & & \ldots & \lambda_m \end{bmatrix}$$

Análise de Estabilidade

Logo:

$$\mathbf{J}^n = \left(P\Lambda P^{-1}\right)^n$$

Análise de Estabilidade

Logo:

$$\mathbf{J}^n = \left(P\Lambda P^{-1}\right)^n = P\Lambda^n P^{-1}$$

Análise de Estabilidade

Logo:

$$\mathbf{J}^n = \left(P\Lambda P^{-1}\right)^n = P\Lambda^n P^{-1}$$

Portanto $\mathbf{w}_n = \mathbf{J}^n\mathbf{w}_0$ pode ser escrita como:

$$\mathbf{w}_n = P\Lambda^n P^{-1}\mathbf{w}_0$$

Análise de Estabilidade

Logo:

$$\mathbf{J}^n = \left(P\Lambda P^{-1}\right)^n = P\Lambda^n P^{-1}$$

Portanto $\mathbf{w}_n = \mathbf{J}^n \mathbf{w}_0$ pode ser escrita como:

$$\mathbf{w}_n = P\Lambda^n P^{-1}\mathbf{w}_0 = P\Lambda^n \mathbf{c}$$

onde $\mathbf{c} = P^{-1}\mathbf{w}_0$.

Análise de Estabilidade

Logo:

$$\mathbf{J}^n = \left(P\Lambda P^{-1}\right)^n = P\Lambda^n P^{-1}$$

Portanto $\mathbf{w}_n = \mathbf{J}^n \mathbf{w}_0$ pode ser escrita como:

$$\mathbf{w}_n = P\Lambda^n P^{-1}\mathbf{w}_0 = P\Lambda^n \mathbf{c}$$

onde $\mathbf{c} = P^{-1}\mathbf{w}_0$.
Desta forma pode-se escrever:

$$\mathbf{w}_n = c_1\lambda_1^n \mathbf{p}_1 + c_2\lambda_2^n \mathbf{p}_2 + \cdots + c_m\lambda_m^n \mathbf{p}_m$$

Conclusão:

- $\mathbf{x}^*$ é estável ($\mathbf{w}_n$ é limitado) se *todos* os autovalores têm valor absoluto *menor* do que 1;
- $\mathbf{x}^*$ é instável ($\mathbf{w}_n$ é ilimitado) se *pelo menos* um dos autovalores têm valor absoluto *maior* do que 1.

Análise de Estabilidade

Voltando ao problema em questão:

$$\mathbf{w}_n = c_1\lambda_1^n\mathbf{p}_1 + c_2\lambda_2^n\mathbf{p}_2$$

Conclusão

$$\begin{array}{llccl} \mathbf{x}^* & \text{é estável se} & |\lambda_1| & \text{e} & |\lambda_2| < 1 \\ \mathbf{x}^* & \text{é instável se} & |\lambda_1| & \text{ou} & |\lambda_2| > 1 \end{array}$$

Análise de Estabilidade

Voltando ao problema em questão:

$$\mathbf{w}_n = c_1\lambda_1^n\mathbf{p}_1 + c_2\lambda_2^n\mathbf{p}_2$$

Conclusão

$$\begin{array}{cccccc} \mathbf{x}^* & \text{é estável se} & |\lambda_1| & \text{e} & |\lambda_2| < 1 \\ \mathbf{x}^* & \text{é instável se} & |\lambda_1| & \text{ou} & |\lambda_2| > 1 \end{array}$$

As condições acima podem ser reescritas sob a

Análise de Estabilidade

Condições de Jury

Para que um sistema de duas equações e duas incógnitas o polinômio característico se escreve:

$$\lambda^2 - \mathsf{tr}\,\mathbf{J}\lambda + \det \mathbf{J} = 0$$

Análise de Estabilidade

Condições de Jury

Para que um sistema de duas equações e duas incógnitas o polinômio característico se escreve:

$$\lambda^2 - \operatorname{tr} \mathbf{J} \lambda + \det \mathbf{J} = 0$$

Para que os autovalores sejam todos menores que 1, isto é, para que o ponto fixo $\mathbf{x}^*$ seja estável, a desigualdade abaixo deve ser satisfeita:

$$|\operatorname{tr} \mathbf{J}| < (1 + \det \mathbf{J}) < 2$$

Análise de Estabilidade

Condições de Jury

Para que um sistema de duas equações e duas incógnitas o polinômio característico se escreve:

$$\lambda^2 - \mathrm{tr}\,\mathbf{J}\lambda + \det \mathbf{J} = 0$$

Para que os autovalores sejam todos menores que 1, isto é, para que o ponto fixo $\mathbf{x}^*$ seja estável, a desigualdade abaixo deve ser satisfeita:

$$|\mathrm{tr}\,\mathbf{J}| < (1 + \det \mathbf{J}) < 2$$

Que podem ser escritas como duas condições:

Primeira Condição:

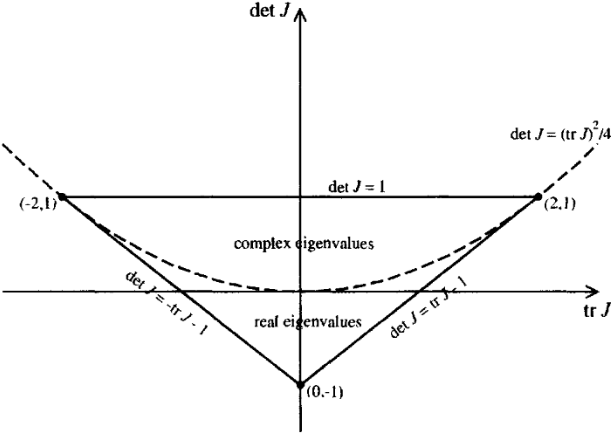
$$\det \mathbf{J} < 1$$

Segunda Condição:

$$|\mathrm{tr}\,\mathbf{J}| < (1 + \det \mathbf{J}) = \begin{cases} \text{se} \quad \mathrm{tr}\,\mathbf{J} > 0 & \rightarrow \quad \det \mathbf{J} > \mathrm{tr}\,\mathbf{J} - 1 \\ \text{se} \quad \mathrm{tr}\,\mathbf{J} < 0 & \rightarrow \quad \det \mathbf{J} > -\mathrm{tr}\,\mathbf{J} - 1 \end{cases}$$

Análise de Estabilidade

Condições de Jury - Forma gráfica



No interior do triângulo tem-se a estabilidade e no contorno bifurcações.

Caso Amoroso: Análise do Modelo

Pontos Fixos

$$\begin{aligned} R^* &= a_R\, R^* + p_R\, J^* \\ J^* &= p_J\, R^* + a_J\, J^* \end{aligned}$$

Caso Amoroso: Análise do Modelo

Pontos Fixos

$$
\begin{aligned}
R^* &= a_R\, R^* + p_R\, J^* \\
J^* &= p_J\, R^* + a_J\, J^*
\end{aligned}
$$

Reescrevendo:

$$
\begin{aligned}
(a_R - 1)\, R^* + p_R\, J^* &= 0 \\
p_J\, R^* + (a_J - 1)\, J^* &= 0
\end{aligned}
$$

Caso Amoroso: Análise do Modelo

Pontos Fixos

$$\begin{aligned} R^* &= a_R\, R^* + p_R\, J^* \\ J^* &= p_J\, R^* + a_J\, J^* \end{aligned}$$

Reescrevendo:

$$\begin{aligned} (a_R - 1)\, R^* + p_R\, J^* &= 0 \\ p_J\, R^* + (a_J - 1)\, J^* &= 0 \end{aligned}$$

ou ainda:

$$\begin{bmatrix} (a_R - 1) & p_R \\ p_J & (a_J - 1) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} R^* \\ J^* \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Caso Amoroso - Pontos Fixos

Definindo:

$$A = \begin{bmatrix} (a_R - 1) & p_R \\ p_J & (a_J - 1) \end{bmatrix}$$

Caso Amoroso - Pontos Fixos

Definindo:

$$A = \begin{bmatrix} (a_R - 1) & p_R \\ p_J & (a_J - 1) \end{bmatrix}$$

Soluções do Sistema

- $\det A \neq 0$ implica ponto fixo único: $(R^*, J^*) = (0, 0)$;
- $\det A = 0$ implica existência de infinitos pontos fixos.

Nos três primeiros exemplos $\det A \neq 0$.
No quarto exemplo $\det A = 0$ o que demanda uma análise mais detalhada.

Caso Amoroso - Pontos Fixos

Análise Linear da Estabilidade

A matriz Jacobiana do sistema é:

$$\mathbf{J} = \begin{bmatrix} a_R & p_R \\ p_J & a_J \end{bmatrix}$$

Caso Amoroso - Pontos Fixos

Análise Linear da Estabilidade

A matriz Jacobiana do sistema é:

$$\mathbf{J} = \begin{bmatrix} a_R & p_R \\ p_J & a_J \end{bmatrix}$$

onde:

$$\begin{aligned} \text{tr}\,\mathbf{J} &= a_R + a_J \\ \det\mathbf{J} &= a_R\,a_J - p_R\,p_J \end{aligned}$$

Caso Amoroso - Pontos Fixos

Análise Linear da Estabilidade

A matriz Jacobiana do sistema é:

$$\mathbf{J} = \begin{bmatrix} a_R & p_R \\ p_J & a_J \end{bmatrix}$$

onde:

$$\begin{aligned} \text{tr}\,\mathbf{J} &= a_R + a_J \\ \det \mathbf{J} &= a_R\, a_J - p_R\, p_J \end{aligned}$$

As condições de Jury demandam que

$$|a_R + a_J| < (1 + a_R\, a_J - p_R\, p_J) < 2$$

para que o ponto $(R^*, J^*) = (0, 0)$ seja estável.

Caso Amoroso - Análise Linear da Estabilidade

Caso 1: $a_R = 0.5$, $a_J = 0.7$, $p_R = 0.2$, $p_J = 0.5$

$$\mathbf{J} = \left[\begin{array}{cc} 0,5 & 0,2 \\ 0,5 & 0,7 \end{array}\right]; \quad A = \left[\begin{array}{cc} -0.5 & 0.2 \\ 0.5 & -0.3 \end{array}\right]; \quad \begin{array}{lcl} \det A & = & 0,05 \\ \det \mathbf{J} & = & 0,25 \\ \mathsf{tr}\,\mathbf{J} & = & 1,2 \end{array}$$

Caso Amoroso - Análise Linear da Estabilidade

Caso 1: $a_R = 0.5$, $a_J = 0.7$, $p_R = 0.2$, $p_J = 0.5$

$$\mathbf{J} = \begin{bmatrix} 0,5 & 0,2 \\ 0,5 & 0,7 \end{bmatrix}; \quad A = \begin{bmatrix} -0.5 & 0.2 \\ 0.5 & -0.3 \end{bmatrix}; \quad \begin{array}{lcl} \det A & = & 0,05 \\ \det \mathbf{J} & = & 0,25 \\ \text{tr}\, \mathbf{J} & = & 1,2 \end{array}$$

Como $\det A \neq 0$ tem-se apenas um ponto fixo $(R^*, J^*) = (0,0)$.
Condições de Estabilidade de Jury:

Primeira Condição

Verificada: $\det \mathbf{J} < 1$;

Segunda Condição

Verificada: $\det \mathbf{J} > \text{tr}\, \mathbf{J} - 1$;

Logo o ponto de equilíbrio é estável.

Caso Amoroso - Análise Linear da Estabilidade

Caso 2: $a_R = 0,5$, $a_J = 0,7$, $p_R = 0,7$, $p_J = 0,9$

$$\mathbf{J} = \begin{bmatrix} 0,5 & 0,7 \\ 0,9 & 0,7 \end{bmatrix}; \quad A = \begin{bmatrix} -0,5 & 0,7 \\ 0,9 & -0,3 \end{bmatrix}; \quad \begin{array}{lcl} \det A & = & -0,48 \\ \det \mathbf{J} & = & -0,28 \\ \operatorname{tr} \mathbf{J} & = & 1,2 \end{array}$$

Caso Amoroso - Análise Linear da Estabilidade

Caso 2: $a_R = 0,5$, $a_J = 0,7$, $p_R = 0,7$, $p_J = 0,9$

$$\mathbf{J} = \begin{bmatrix} 0,5 & 0,7 \\ 0,9 & 0,7 \end{bmatrix}; \quad A = \begin{bmatrix} -0,5 & 0,7 \\ 0,9 & -0,3 \end{bmatrix}; \quad \begin{array}{lcl} \det A & = & -0,48 \\ \det \mathbf{J} & = & -0,28 \\ \mathrm{tr}\, \mathbf{J} & = & 1,2 \end{array}$$

Como $\det A \neq 0$ tem-se apenas um ponto fixo $(R^*, J^*) = (0,0)$.
Condições de Estabilidade de Jury:

Primeira Condição

Verificada: $\det \mathbf{J} < 1$;

Segunda Condição

Violada: $\det \mathbf{J} \not> -\mathrm{tr}\, \mathbf{J} - 1$;

Logo o ponto de equilíbrio é instável.

Caso Amoroso - Análise Linear da Estabilidade

Caso 3: $a_R = 1,0$, $a_J = 1,0$, $p_R = 0,2$, $p_J = -0,2$

$$\mathbf{J} = \begin{bmatrix} 1,0 & 0,2 \\ -0,2 & 1,0 \end{bmatrix}; \quad A = \begin{bmatrix} 0,0 & 0,2 \\ -0,2 & 0,0 \end{bmatrix}; \quad \begin{array}{lcl} \det A & = & 0,04 \\ \det \mathbf{J} & = & 1,04 \\ \mathrm{tr}\,\mathbf{J} & = & 2,0 \end{array}$$

Caso Amoroso - Análise Linear da Estabilidade

Caso 3: $a_R = 1,0$, $a_J = 1,0$, $p_R = 0,2$, $p_J = -0,2$

$$\mathbf{J} = \begin{bmatrix} 1,0 & 0,2 \\ -0,2 & 1,0 \end{bmatrix}; \quad A = \begin{bmatrix} 0,0 & 0,2 \\ -0,2 & 0,0 \end{bmatrix}; \quad \begin{array}{lcl} \det A & = & 0,04 \\ \det \mathbf{J} & = & 1,04 \\ \operatorname{tr} \mathbf{J} & = & 2,0 \end{array}$$

Como $\det A \neq 0$ tem-se apenas um ponto fixo $(R^*, J^*) = (0,0)$.
Condições de Estabilidade de Jury:

Primeira Condição

Violada: $\det \mathbf{J} \not< 1$;

Segunda Condição

Verificada: $\det \mathbf{J} > \operatorname{tr} \mathbf{J} - 1$;

Logo o ponto de equilíbrio é instável.

Caso Amoroso - Análise Linear da Estabilidade

Caso 4: $a_R = 0,5$, $a_J = 0,8$, $p_R = 0,2$, $p_J = 0,5$

$$\mathbf{J} = \begin{bmatrix} 0,5 & 0,2 \\ 0,5 & 0,8 \end{bmatrix}; \quad A = \begin{bmatrix} -0,5 & 0,2 \\ 0,5 & -0,2 \end{bmatrix}; \quad \begin{array}{lcl} \det A & = & 0,0 \\ \det \mathbf{J} & = & 0,3 \\ \mathrm{tr}\,\mathbf{J} & = & -0,7 \end{array}$$

Como $\det A = 0,0$ o ponto de equilíbrio não é único.

$$\begin{bmatrix} -0,5 & 0,2 \\ 0,5 & -0,2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} R^* \\ J^* \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

O sistema tem como solução geral:

$$(R^*, J^*) = (R^*; 2,5R^*)$$

Isto é, se houver um ponto de equilíbrio estável ele ocorrerá em uma situação em que os sentimentos de Julieta são 2,5 os de Romeu.

Caso Amoroso - Análise Linear da Estabilidade

Caso 4: $a_R = 0,5$, $a_J = 0,8$, $p_R = 0,2$, $p_J = 0,5$

No caso geral os pontos de equilíbrio são dados por:

$$(R^*, J^*) = (R^*; \frac{(1 - a_R)}{p_R} R^*)$$

O sistema original se escreve como:

$$\begin{aligned} R_{n+1} &= a_R\, R_n + p_R\, J_n \\ R_{n+1} &= p_J\, R_n + a_J\, J_n \end{aligned}$$

Neste caso $a_R + p_J = 0,5 + 0,5 = 1$ e da mesma forma $p_R + a_J = 0,2 + 0,8 = 1$ isto é, a quantidade de sentimento que Romeu e Julieta sentem é constante, logo:
Pode-se mostrar que quando esta condição é satisfeita $\det A = 0$.

Caso Amoroso - Análise Linear da Estabilidade

Caso 4: $a_R = 0,5$, $a_J = 0,8$, $p_R = 0,2$, $p_J = 0,5$

A condição de *quantidade de sentimento constante* implica que:

$$R^* + J^* \quad = \quad R^* + \frac{(1 - a_R)}{p_R} R^*$$

Caso Amoroso - Análise Linear da Estabilidade

Caso 4: $a_R = 0,5$, $a_J = 0,8$, $p_R = 0,2$, $p_J = 0,5$

A condição de *quantidade de sentimento constante* implica que:

$$\begin{aligned} R^* + J^* &= R^* + \frac{(1 - a_R)}{p_R} R^* \\ &= R^* + \frac{(p_J)}{p_R} R^* \end{aligned}$$

Caso Amoroso - Análise Linear da Estabilidade

Caso 4: $a_R = 0,5$, $a_J = 0,8$, $p_R = 0,2$, $p_J = 0,5$

A condição de *quantidade de sentimento constante* implica que:

$$\begin{aligned} R^* + J^* &= R^* + \frac{(1 - a_R)}{p_R} R^* \\ &= R^* + \frac{(p_J)}{p_R} R^* \\ &= \frac{(p_R + p_J)}{p_R} R^* \end{aligned}$$

Caso Amoroso - Análise Linear da Estabilidade

Caso 4: $a_R = 0,5$, $a_J = 0,8$, $p_R = 0,2$, $p_J = 0,5$

A condição de *quantidade de sentimento constante* implica que:

$$
\begin{aligned}
R^* + J^* &= R^* + \frac{(1 - a_R)}{p_R} R^* \\
&= R^* + \frac{(p_J)}{p_R} R^* \\
&= \frac{(p_R + p_J)}{p_R} R^* = R_0 + J_0
\end{aligned}
$$

Caso Amoroso - Análise Linear da Estabilidade

Caso 4: $a_R = 0,5$, $a_J = 0,8$, $p_R = 0,2$, $p_J = 0,5$

A condição de *quantidade de sentimento constante* implica que:

$$\begin{aligned} R^* + J^* &= R^* + \frac{(1-a_R)}{p_R} R^* \\ &= R^* + \frac{(p_J)}{p_R} R^* \\ &= \frac{(p_R + p_J)}{p_R} R^* = R_0 + J_0 \end{aligned}$$

Logo:

$$\begin{aligned} R^* &= \frac{p_R}{(p_R + p_J)} (R_0 + J_0) \\ J^* &= (R_0 + J_0) - R^* \end{aligned}$$

Para o caso dos parâmetros escolhidos neste exemplo:

$$R^* = 0,571429 \qquad J^* = 1,428571$$

Caso Amoroso - Análise Linear da Estabilidade

Caso 4: $a_R = 0,5$, $a_J = 0,8$, $p_R = 0,2$, $p_J = 0,5$

A estabilidade dos pontos fixos, como já foi mostrado, é determinada pela magnitude dos autovalores.
Pode-se mostrar que os dois autovalores da matriz Jacobiana são dados por:

$$\begin{aligned} \lambda_1 &= 1 \\ \lambda_2 &= a_R + a_J - 1 \end{aligned}$$

O primeiro autovalor

Romeu e Julieta

Caso 4: $a_R = 0.5$, $a_J = 0.8$, $p_R = 0.2$, $p_J = 0.5$