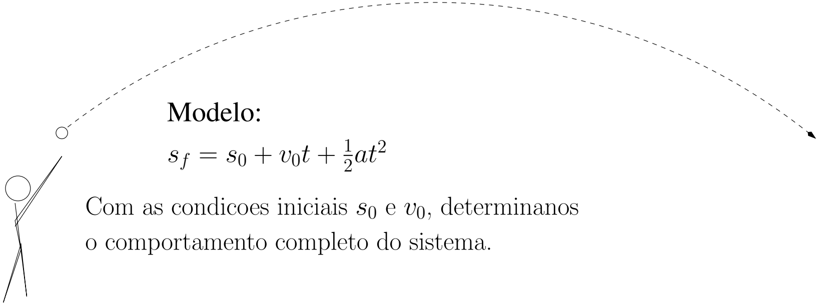
Simulações e Modelagem Estocástica

Saul Leite

Dept. Ciência da Computação - UFJF

Vamos considerar o problema abaixo:

Exemplo:



Modelo:

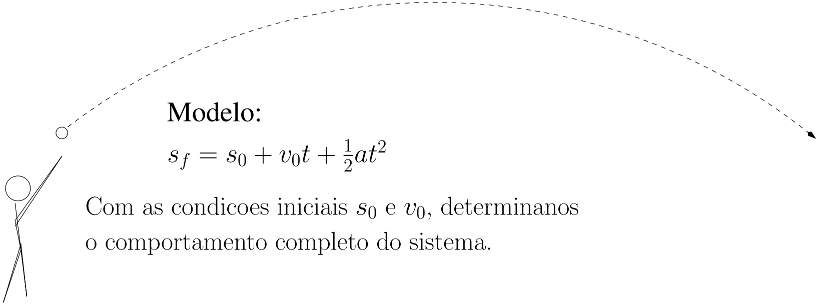
$s_f = s_0 + v_0 t + \frac{1}{2}at^2$

Com as condicoes iniciais s_0 e v_0, determinanos o comportamento completo do sistema.

Simulações e Modelagem Estocástica

Vamos considerar o problema abaixo:

Exemplo:



Modelo:

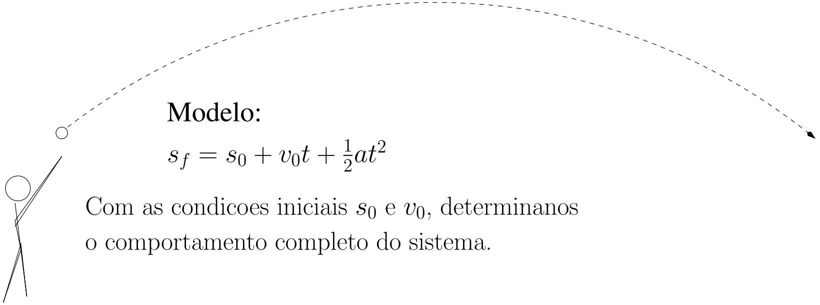
$s_f = s_0 + v_0 t + \frac{1}{2} a t^2$

Com as condicoes iniciais s_0 e v_0, determinanos o comportamento completo do sistema.

Conseguimos determinar o comportamento do sistema a partir de condições iniciais.

Simulações e Modelagem Estocástica

Vamos considerar o problema abaixo:
Exemplo:



Modelo:

$s_f = s_0 + v_0 t + \frac{1}{2}at^2$

Com as condicoes iniciais s_0 e v_0, determinanos o comportamento completo do sistema.

Conseguimos determinar o comportamento do sistema a partir de condições iniciais.

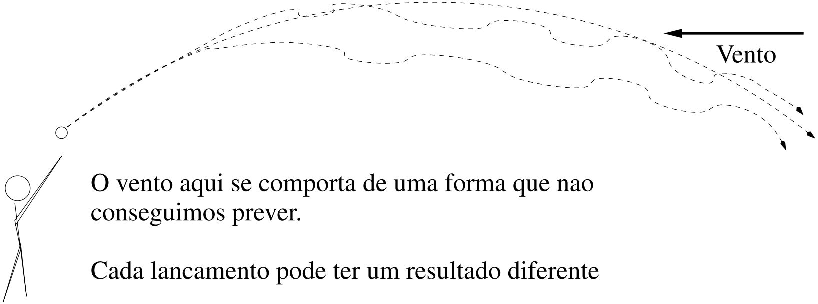
Contudo, existem muitos problemas onde **não é possível** determinar o comportamento completo do sistema que desejamos modelar.

Suponha que desejamos estudar esse problema em um campo com vento variável.

Simulações e Modelagem Estocástica

Suponha que desejamos estudar esse problema em um campo com vento variável.

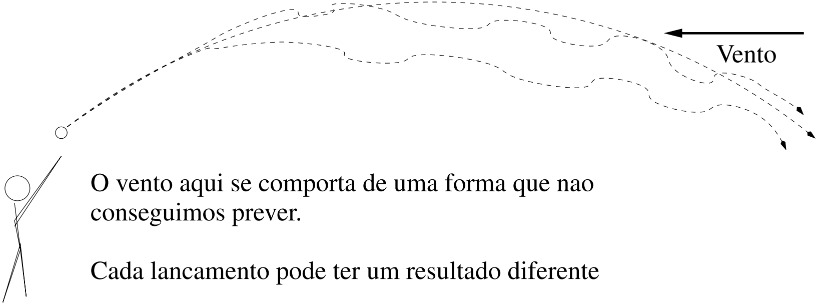
Cada lançamento da bola pode ter resultados diferente dependendo da força do vento:



Simulações e Modelagem Estocástica

Suponha que desejamos estudar esse problema em um campo com vento variável.

Cada lançamento da bola pode ter resultados diferente dependendo da força do vento:



Como tratar esse tipo de problema?? Onde existe a interferência de algo externo onde não conseguimos modelar completamente.

(A) Uma ideia é fazer uma estatística do comportamento do vento: **Ex:**

10% - velocidade média $5m/s$ $(\pm 1m/s)$;

30% - velocidade média $10m/s$ $(\pm 1m/s)$;

60% - velocidade média $15m/s$ $(\pm 1m/s)$;

(A) Uma ideia é fazer uma estatística do comportamento do vento: **Ex:**

10% - velocidade média $5m/s$ ($\pm 1m/s$);

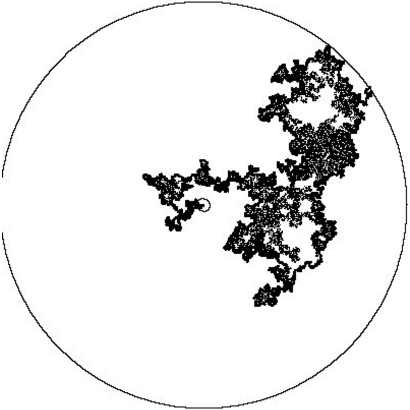
30% - velocidade média $10m/s$ ($\pm 1m/s$);

60% - velocidade média $15m/s$ ($\pm 1m/s$);

(B) Em alguns casos, a "estatística" do comportamento aleatório é derivada das hipóteses sobre o problema.

Ex1: Movimento Browniano.

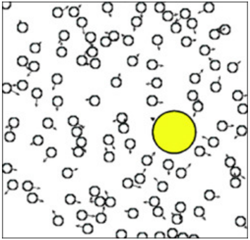
Em 1828 Robert Brown observou que um pequeno grão de pólen se movimentava em um copo de água sem que houvesse interferência externa:



- não se sabia explicar na época o motivo do movimento.
- pólen vivo?
- interferência externa impossível de evitar?

Ex1: Movimento Browniano.

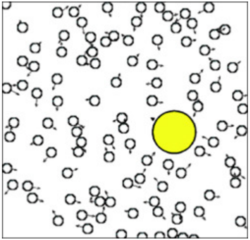
Primeiro modelo matemático desenvolvido por A. Einstein em 1905.



- durante esta época havia muita dúvida da existência do átomo e moléculas.
- modelo usado como argumento favorável a existência dos átomos.

Ex1: Movimento Browniano.

Primeiro modelo matemático desenvolvido por A. Einstein em 1905.

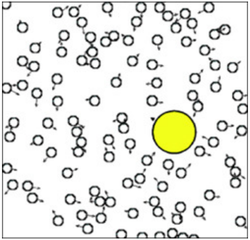


- durante esta época havia muita dúvida da existência do átomo e moléculas.
- modelo usado como argumento favorável a existência dos átomos.

Neste exemplo, a propriedade estocástica do modelo é *derivada* de suas propriedades físicas.

Ex1: Movimento Browniano.

Primeiro modelo matemático desenvolvido por A. Einstein em 1905.



- durante esta época havia muita dúvida da existência do átomo e moléculas.
- modelo usado como argumento favorável a existência dos átomos.

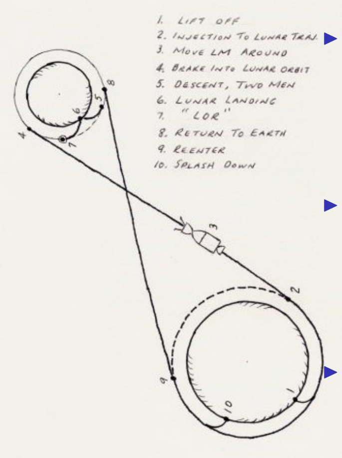
Neste exemplo, a propriedade estocástica do modelo é *derivada* de suas propriedades físicas.

Modelo mais comum usando hoje em dia é o de N. Wiener (década de 20).

- Atualmente usado como base para modelos em finanças e sistemas de filas.

Ex2: Projeto Apollo e Filtro de Kalman

Navegação da nave de extrema importância para manter a trajetória correta.



- Existem incertezas quanto a operação da máquina:

$$x_k = Ax_{k-1} + Bu_{k-1} + w_{k-1}$$

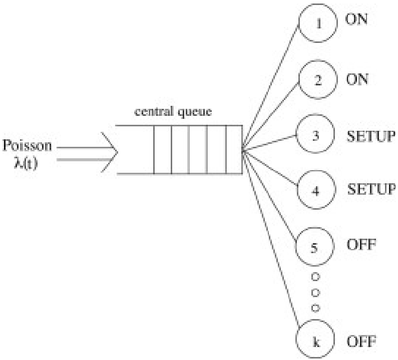
- Incertezas nos instrumentos usados para detectar o seu estado x_k:

$$y_k = Hx_k + v_k$$

- Filtro de Kalman usado para obter estimativa do estado atual $\hat{x}_k$ minimizando a interferência do ruído.

Ex3: Modelos para Sistemas de Filas

Figura abaixo mostra um sistema de processamento em paralelo (encontrados, por exemplo, em servidores Web como: google, yahoo, etc..)



- Incertezas aparecem porque não sabemos exatamente em que instante dada cliente entra no sistema.
  - Hipóteses sobre o comportamento da entrada de clientes podem determinar o processo de entrada.
- Um problema é determinar uma política de controle que economize energia e que atenda de forma adequada os clientes.

Simulações e Modelagem Estocástica

Modelos onde se pode determinar seu comportamento dado suas condições iniciais são chamados de **Determinísticos** e os que não podem ser de **Estocásticos**.

Simulações e Modelagem Estocástica

Modelos onde se pode determinar seu comportamento dado suas condições iniciais são chamados de **Determinísticos** e os que não podem ser de **Estocásticos**.

Quando se tratando de modelos estocásticos, podemos estudá-los através:

- *modelos matemáticos* - onde utiliza-se da teoria de processos estocásticos para determinar equações que descrevem o problema.
- *simulações computacionais* - onde simulamos o comportamento do sistema computacionalmente.

*Não são coisas independentes.

Monte Carlo

Métodos “**Monte Carlo**” são usados para medir certas quantidades de interesse através de simulações.

- Pioneiros: Von Neumann, N. Metropolis, e S, Stanislaw Ulm 1946 durante o Projeto Manhattan (bomba atômica).
- Fizeram para simular colisões entre nêutrons.
- Introduziram o nome Monte Carlo - casino em Mônaco.

Monte Carlo

Métodos "**Monte Carlo**" são usados para medir certas quantidades de interesse através de simulações.

- Pioneiros: Von Neumann, N. Metropolis, e S, Stanislaw Ulm 1946 durante o Projeto Manhattan (bomba atômica).
- Fizeram para simular colisões entre nêutrons.
- Introduziram o nome Monte Carlo - casino em Mônaco.

A ideia é simular o comportamento de um sistema várias vezes e medir a ocorrência de algum evento de interesse.

Monte Carlo

Métodos "**Monte Carlo**" são usados para medir certas quantidades de interesse através de simulações.

- Pioneiros: Von Neumann, N. Metropolis, e S, Stanislaw Ulm 1946 durante o Projeto Manhattan (bomba atômica).
- Fizeram para simular colisões entre nêutrons.
- Introduziram o nome Monte Carlo - casino em Mônaco.

A ideia é simular o comportamento de um sistema várias vezes e medir a ocorrência de algum evento de interesse.

- Exemplo da bola:
  - Distância média percorrida e sua variância.
  - Probabilidade da bola ultrapassar distância x.

Monte Carlo

Métodos "**Monte Carlo**" são usados para medir certas quantidades de interesse através de simulações.

- Pioneiros: Von Neumann, N. Metropolis, e S, Stanislaw Ulm 1946 durante o Projeto Manhattan (bomba atômica).
- Fizeram para simular colisões entre nêutrons.
- Introduziram o nome Monte Carlo - casino em Mônaco.

A ideia é simular o comportamento de um sistema várias vezes e medir a ocorrência de algum evento de interesse.

- Exemplo da bola:
  - Distância média percorrida e sua variância.
  - Probabilidade da bola ultrapassar distância x.

Monte Carlo: Calcular Área/Volume

Como exemplo, veremos métodos (Monte Carlo) que podem ser usados para *aproximar integrais*.

Monte Carlo: Calcular Área/Volume

Como exemplo, veremos métodos (Monte Carlo) que podem ser usados para *aproximar integrais*.

Nosso “sistema estocástico” consiste em números que aparecem de forma aleatória dentro de uma caixa - distribuídos de forma **uniforme**.

Monte Carlo: Calcular Área/Volume

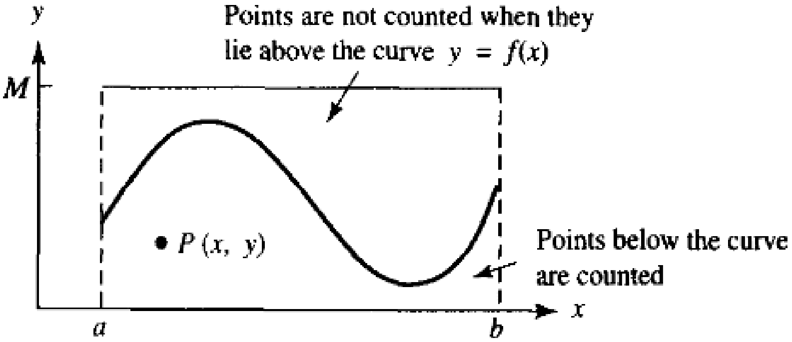
Como exemplo, veremos métodos (Monte Carlo) que podem ser usados para *aproximar integrais*.

Nosso “sistema estocástico” consiste em números que aparecem de forma aleatória dentro de uma caixa - distribuídos de forma **uniforme**.

Podemos medir áreas ou volumes através dessa simulação.

Monte Carlo: Calcular Área/Volume

A ideia é gerar vários números aleatórios em uma caixa e aproximar:



$$\frac{\text{área debaixo da curva}}{\text{área do quadrado}} \approx \frac{\text{número de pontos debaixo da curva}}{\text{total de pontos}}$$

Monte Carlo: Calcular Área/Volume

Algoritmo:

1) Entrada: $a, b, M, f(x)$, n (número de pontos a serem gerados)
2) $k = 0$
3) Para $i = 1$ até n:
   a. Gere números aleatórios x_i e y_i tais que:

   $$a \leq x_i \leq b \quad \text{e} \quad 0 \leq y_i \leq M$$

   b. Se$(y_i \leq f(x_i))$ $k++$ (pnto debaixo da curva)
4) retorne $Area = M(b-a)k/n$

Monte Carlo: Calcular Área/Volume

EX:

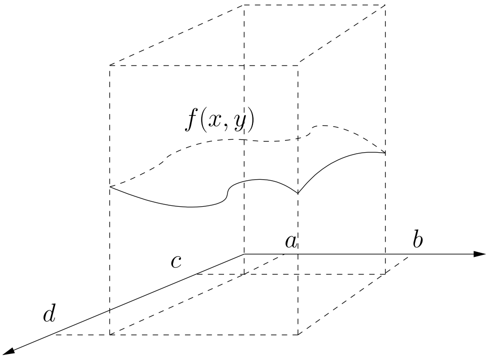
- $f(x) = cos(x)$
- $\frac{-\pi}{2} \leq x \leq \frac{\pi}{2}$
- $0 \leq cos(x) < 2.$

n	área
100	2.07345
400	2.12058
800	1.99491
2000	1.94465
10000	2.00873

Valor exato: área $= 2.0$.

Monte Carlo: Calcular Área/Volume

Para calcular o volume, temos uma forma similar:



$$\frac{\text{Vol. debaixo da curva}}{\text{vol. da caixa}} \approx \frac{\text{N. de pontos debaixo da curva}}{\text{N. total de pontos}}$$

Monte Carlo: Calcular Área/Volume

Algoritmo:

1) Entrada: $a, b, c, d, M, f(x, y)$, n (número de pontos a serem gerados)
2) $k = 0$
3) Para $i = 1$ até n:
   a. Gere números aleatórios x_i, y_i, e z_i tais que:

   $$a \leq x_i \leq b \quad , \quad c \leq y_i \leq d \quad \text{e} \quad 0 \leq z_i \leq M$$

   b. Se$(z_i \leq f(x_i, y_i))$ $k++$ (pnto debaixo da curva)
4) retorne $Volume = M(d - c)(b - a)k/n$

Monte Carlo: Calcular Área/Volume

EX:

- área debaixo de $x^2 + y^2 + z^2 \leq 1$
- $0 \leq x \leq 1$
- $0 \leq y \leq 1.$
- $0 \leq z \leq 1.$

Figure 5.3
Volume of a sphere $x^2 + y^2 + z^2 \leq 1$ that lies in the first octant, $x > 0$, $y > 0$, $z > 0$

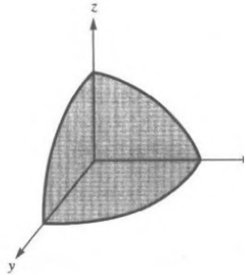


Table 5.2 Monte Carlo approximation to the volume in the first octant under the surface $x^2 + y^2 + z^2 \leq 1$

Number of points	Approximate volume
100	0.4700
200	0.5950
300	0.5030
500	0.5140
1,000	0.5180
2,000	0.5120
5,000	0.5180
10,000	0.5234
20,000	0.5242

Valor exato: volume ≈ 0.5236 $(\pi/6)$.

Gerador de Números “Aleatórios”

O método de Monte Carlo depende da geração de números aleatórios **Uniformemente** distribuídos.

Gerador de Números “Aleatórios”

O método de Monte Carlo depende da geração de números aleatórios **Uniformemente** distribuídos.

Mas como podemos gerar números aleatórios em uma máquina *determinística* como o computador?

Gerador de Números “Aleatórios”

O método de Monte Carlo depende da geração de números aleatórios **Uniformemente** distribuídos.

Mas como podemos gerar números aleatórios em uma máquina *determinística* como o computador?

A ideia é gerar uma sequência de números que parece aleatória. (números pseudo aleatórios).

Método “Meio do Quadrado” (*Middle-Square*)

Desenvolvido por Von Neumann, Metropolis, e Ulm   1946 durante o projeto Manhattan.

Método "Meio do Quadrado" (*Middle-Square*)

Desenvolvido por Von Neumann, Metropolis, e Ulm 1946 durante o projeto Manhattan.

Método:

1) Escolha uma semente x_0 (seed) de quatro dígitos.
2) Eleve o número ao quadrado e obtenha um número de oito dígitos.
3) Pegue os quatro números do meio como o próximo número aleatório (e próximo seed).

Método "Meio do Quadrado" (*Middle-Square*)

Desenvolvido por Von Neumann, Metropolis, e Ulm 1946 durante o projeto Manhattan.

Método:

1) Escolha uma semente x_0 (seed) de quatro dígitos.
2) Eleve o número ao quadrado e obtenha um número de oito dígitos.
3) Pegue os quatro números do meio como o próximo número aleatório (e próximo seed).

EX:

$$\begin{array}{lll} x_0 = 2041 & x_1 = 1656 & x_2 = 7423 \\ x_0^2 = 04\underbrace{1656}_{x_1}81 \;\Rightarrow & x_1^2 = 02\underbrace{7423}_{x_2}36 \;\Rightarrow & x_2^2 = 55\underbrace{1009}_{x_3}29 \end{array}$$

Método “Meio do Quadrado” (*Middle-Square*)

O problema deste método pe que ele tem a tendência de aproximar do zero com o uso repetido.

Método “Meio do Quadrado” (*Middle-Square*)

O problema deste método pe que ele tem a tendência de aproximar do zero com o uso repetido. Quando isso acontece, todos os números seguintes serão zeros!

Método "Meio do Quadrado" (*Middle-Square*)

O problema deste método pe que ele tem a tendência de aproximar do zero com o uso repetido. Quando isso acontece, todos os números seguintes serão zeros!

Continuando o exemplo acima teríamos:

n	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
x_n	2041	1656	7423	1009	0180	0324	1049	1004	80	64	40	16	2

O próximo número da sequencia seria o 0.

Método da Congruência Linear

- Introduzida por Lehmer in 1951.
- A maioria dos métodos para geração de números aleatórios são baseados neste método.

Método da Congruência Linear

- Introduzida por Lehmer in 1951.
- A maioria dos métodos para geração de números aleatórios são baseados neste método.

Método

1) Escolha três inteiros a, b e c que serão fixos.
2) Escolha uma semente inicial x_0.
3) Gere os números pseudo aleatórios da seguinte forma:

$$x_{k+1} = (a \cdot x_k + b) \bmod c$$

Método da Congruência Linear

Note que os números pseudo aleatórios x_k sempre estarão entre 0 e $c-1$, já que são o resto da divisão por c.

Método da Congruência Linear

Note que os números pseudo aleatórios x_k sempre estarão entre 0 e $c - 1$, já que são o resto da divisão por c.

Logo, se você gerar mais do que c números aleatórios eles irão se repetir.

Método da Congruência Linear

Note que os números pseudo aleatórios x_k sempre estarão entre 0 e $c - 1$, já que são o resto da divisão por c.

Logo, se você gerar mais do que c números aleatórios eles irão se repetir.

- Se um número da sequencia se repetir, toda a sequencia repetirá, já que é gerada pelo mesmo processo determinístico.

Método da Congruência Linear

Note que os números pseudo aleatórios x_k sempre estarão entre 0 e $c-1$, já que são o resto da divisão por c.

Logo, se você gerar mais do que c números aleatórios eles irão se repetir.

- Se um número da sequencia se repetir, toda a sequencia repetirá, já que é gerada pelo mesmo processo determinístico.

Ex. Com $x_0 = 7$, $a = 1$, $b = 7$, e $c = 10$, temos a sequencia:

$$7, 4, 1, 8, 5, 2, 9, 6, 3, 0, 7,$$

Método da Congruência Linear

Note que os números pseudo aleatórios x_k sempre estarão entre 0 e $c - 1$, já que são o resto da divisão por c.

Logo, se você gerar mais do que c números aleatórios eles irão se repetir.

- Se um número da sequencia se repetir, toda a sequencia repetirá, já que é gerada pelo mesmo processo determinístico.

Ex. Com $x_0 = 7$, $a = 1$, $b = 7$, e $c = 10$, temos a sequencia:

$$7, 4, 1, 8, 5, 2, 9, 6, 3, 0, 7, 4, 1, \ldots$$

Método da Congruência Linear

Para que os números não se repitam muito rápido podemos escolher um valor de c grande.

Método da Congruência Linear

Para que os números não se repitam muito rápido podemos escolher um valor de c grande.

Mas isso não é o suficiente!

- Dependendo da escolha de a e b a sequencia pode se repetir muito antes de c números.

Método da Congruência Linear

Para que os números não se repitam muito rápido podemos escolher um valor de c grande.

Mas isso não é o suficiente!

- Dependendo da escolha de a e b a sequencia pode se repetir muito antes de c números.

Existem vários estudos sobre a escolha de a, b e c.

Método da Congruência Linear

Para que os números não se repitam muito rápido podemos escolher um valor de c grande.

Mas isso não é o suficiente!

- Dependendo da escolha de a e b a sequencia pode se repetir muito antes de c números.

Existem vários estudos sobre a escolha de a, b e c. Uma escolha muito usada é:

$$
\begin{aligned}
&a = 7^5 = 16.807 \\
&b = 0 \\
&c = (2^{31} - 1) = 2.147.483.647
\end{aligned}
$$

sugerida por Park & Miller em 1988.

Método da Congruência Linear

Para que os números não se repitam muito rápido podemos escolher um valor de c grande.

Mas isso não é o suficiente!

- Dependendo da escolha de a e b a sequencia pode se repetir muito antes de c números.

Existem vários estudos sobre a escolha de a, b e c. Uma escolha muito usada é:

$$\begin{aligned} &a = 7^5 = 16.807 \\ &b = 0 \\ &c = (2^{31} - 1) = 2.147.483.647 \end{aligned}$$

sugerida por Park & Miller em 1988.

Nesse casso geramos números entre 1 e 2.147.483.646

Projeto

Sabendo que a área debaixo da curva $x^2 + y^2 \leq 1$ no eixo positivo é dada por $\frac{\pi}{4}$, use o método de Monte Carlo para estimar o número π.

Faça um gráfico com o valor estimado versus o número de iterações.

Para gerar os números aleatórios, use o método da congruência linear com os dados de Park & Miller.

Façam um relatóriox e enviem para mim até a próxima sexta via email (saul.leite@ufjf.br).

Projeto

Note que para gerar números aleatórios entre um intervalo $[l, L]$ (fechado) (usando os dados de Park & Miller) devemos fazer:

$$\tilde{x} = (L - l)\left(\frac{x - 1}{c - 2}\right) + l$$

Projeto

Note que para gerar números aleatórios entre um intervalo $[l, L]$ (fechado) (usando os dados de Park & Miller) devemos fazer:

$$\tilde{x} = (L - l)\left(\frac{x - 1}{c - 2}\right) + l$$

Para gerar números no intervalo (l, L) (aberto) devemos fazer:

$$\tilde{x} = (L - l)\left(\frac{x}{c}\right) + l$$

Simulando Comportamento Probabilístico

Suponha que desejamos simular o comportamento de um dado.

Simulando Comportamento Probabilístico

Suponha que desejamos simular o comportamento de um dado.

Caso 1: Vamos supor que queremos simular um dado justo (cada lado tem a mesma probabilidade.

1) Geramos um número pseudo aleatório x entre 0 e M (usando por exemplo o método da congruência linear).
2) Depois mudamos sua faixa:

$$\tilde{x} = x \bmod 6 + 1$$

Simulando Comportamento Probabilístico

Suponha que desejamos simular o comportamento de um dado.

Caso 1: Vamos supor que queremos simular um dado justo (cada lado tem a mesma probabilidade.

1) Geramos um número pseudo aleatório x entre 0 e M (usando por exemplo o método da congruência linear).
2) Depois mudamos sua faixa:

$$\tilde{x} = x \bmod 6 + 1$$

Caso 2: E se o dado for injusto? Cada face tem probabilidade diferente de sair, como por exemplo:

$$\begin{array}{ll} P(X=1)=0.1 & P(X=2)=0.1 \\ P(X=3)=0.1 & P(X=4)=0.1 \\ P(X=5)=0.2 & P(X=6)=0.4 \end{array}$$

Como simular esse dado?

Simulação de Variáveis Discretas

Podemos pensar na probabilidade de um certo evento E como sendo:

$$\frac{\text{Nro. de ocorrências em E}}{\text{Nro. total de ocorrências}} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} P(E).$$

Simulação de Variáveis Discretas

Podemos pensar na probabilidade de um certo evento E como sendo:

$$\frac{\text{Nro. de ocorrências em E}}{\text{Nro. total de ocorrências}} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} P(E).$$

Por exemplo, se jogarmos nosso dado injusto várias vezes, esperamos que:

$$\frac{\text{Nro. de vezes que sai 1}}{\text{Nro. total de ocorrências}} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0.1$$

Simulação de Variáveis Discretas

Podemos pensar na probabilidade de um certo evento E como sendo:

$$\frac{\text{Nro. de ocorrências em E}}{\text{Nro. total de ocorrências}} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} P(E).$$

Por exemplo, se jogarmos nosso dado injusto várias vezes, esperamos que:

$$\frac{\text{Nro. de vezes que sai 1}}{\text{Nro. total de ocorrências}} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0.1$$

Portanto, podemos simular esse evento "sair o número 1" da seguinte forma:

1) Geramos um número aleatório x entre $[0,1]$. E depois verificamos se o número está entre $[0,0.1]$.
2) Desta forma teremos que:

$$\frac{\text{Nro. de vezes que } x \in [0,0.1]}{\text{Nro. total de experimentos}} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0.1$$

Simulação de Variáveis Discretas

Para simular o dado todo, podemos fazer o seguinte:

1) Geramos um número aleatório x em $[0,1]$ em seguida fazemos:

2) Se $0 \leq x \leq 0.1$ o resultado é 1.

   Se $0.1 < x \leq 0.2$ o resultado é 2.

   Se $0.2 < x \leq 0.3$ o resultado é 3.

   Se $0.3 < x \leq 0.4$ o resultado é 4.

   Se $0.4 < x \leq 0.6$ o resultado é 5.

   Se $0.6 < x \leq 1$ o resultado é 6.

Simulação de Variáveis Discretas

Podemos estender essa ideia para qualquer variável aleatória discreta Y tomando valor em $\{y_1, y_2, \ldots, y_n\}$ com probabilidades dado por $p_1, p_2, \ldots, p_n$:

$$P(Y = y_1) = p_1$$

Simulação de Variáveis Discretas

Podemos estender essa ideia para qualquer variável aleatória discreta Y tomando valor em $\{y_1, y_2, \ldots, y_n\}$ com probabilidades dado por $p_1, p_2, \ldots, p_n$:

$$P(Y = y_1) = p_1$$

1) Geramos um número aleatório x em $[0, 1]$ em seguida fazemos:
2) Se $0 \leq x \leq p_1$ o resultado é y_1.
   Se $p_1 < x \leq p_1 + p_2$ o resultado é y_2.
   Se $p_1 + p_2 < x \leq p_1 + p_2 + p_3$ o resultado é y_3.

$$\vdots$$

Se $\sum_{k=1}^{i-1} p_k < x \leq \sum_{k=1}^{i} p_k$ o resultado é y_k.

$$\vdots$$

Se $\sum_{k=1}^{n-1} p_k < x \leq 1$ o resultado é y_n.

Exemplo 1: Problema de Controle de Estoque

Considere o problema de controlar a quantidade de produtos em estoque de uma loja ou armazém.

- Pedidos chegam com distribuição:

$$P(Y = y) = \begin{cases} 0.1 & \text{se } y = 1 \\ 0.2 & \text{se } y = 2 \\ 0.6 & \text{se } y = 3 \\ 0.1 & \text{se } y = 4 \end{cases}$$

- Tenho que pagar \$5 por cada produto no estoque por mês. Cada produto vende por \$20.
- Decido comprar mais produto para deixar no estoque quando o estoque está inferior a M e compro T produtos.
- O custo da compra é de \$10 por produto.

Vamos simular um estoque como esse para diferentes valores de T e M, para nos ajudar a escolher a melhor opção.

Exemplo 1: Problema de Controle de Estoque

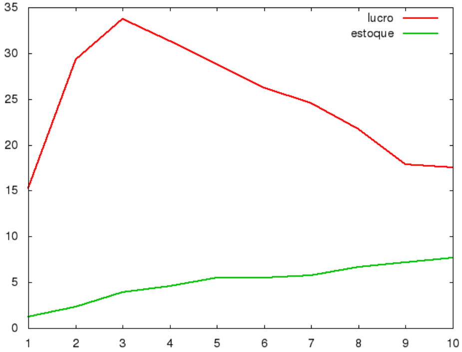
Algoritmo:

1) Entrada: T e M política de reposição, e R número de meses para simular.
2) Inicialize: estoque = 10, lucro = 0
3) Para $i = 1$ até R:
   a. Gere um número aleatório Y com distribuição $P(Y = y)$.
   b. lucro = lucro + 20*min(estoque,Y)
   c. estoque = max(0,estoque-Y)
   d. lucro = lucro - 5*estoque
   e. se (estoque $< M$)
      - estoque = estoque + T
      - lucro = lucro - 10*T
4) Imprimir lucro médio: lucro/R

Exemplo 1: Problema de Controle de Estoque

Resultado:

- Para esta simulação escolhi $M = 3$.
- Fiz a simulação com 100 meses para valores de T variando.

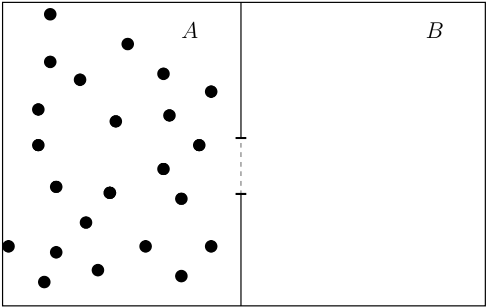


Exemplo 2: Urna de Ehrenfest

Nome vem dos Físicos Paul e Tatiana Ehrenfest (1907).

Modelo muito popular na área de probabilidade.

Proposto na época para argumentar o sentido da irreversibilidade na teoria de termodinâmica de Boltzman.



Exemplo 1: Urna de Ehrenfest

Modelo:

- Temos N partículas em duas caixas A e B.
- Sorteamos uma partícula $1, \ldots, N$ e trocamos ela de caixa.
- Queremos saber o que acontece com as partículas depois do sistema operar por um certo tempo.

Exemplo 1: Urna de Ehrenfest

Modelo:

- Temos N partículas em duas caixas A e B.
- Sorteamos uma partícula $1, \ldots, N$ e trocamos ela de caixa.
- Queremos saber o que acontece com as partículas depois do sistema operar por um certo tempo.

Esse problema é geralmente modelado via uma Cadeia de Markov.

Exemplo 1: Urna de Ehrenfest

Modelo:

- Temos N partículas em duas caixas A e B.
- Sorteamos uma partícula $1, \ldots, N$ e trocamos ela de caixa.
- Queremos saber o que acontece com as partículas depois do sistema operar por um certo tempo.

Esse problema é geralmente modelado via uma Cadeia de Markov.

A idéia é mostrar que a tendência das partículas é de se espalharem nas duas caixas.

Exemplo 1: Urna de Ehrenfest

Modelo:

- Temos N partículas em duas caixas A e B.
- Sorteamos uma partícula $1, \ldots, N$ e trocamos ela de caixa.
- Queremos saber o que acontece com as partículas depois do sistema operar por um certo tempo.

Esse problema é geralmente modelado via uma Cadeia de Markov.

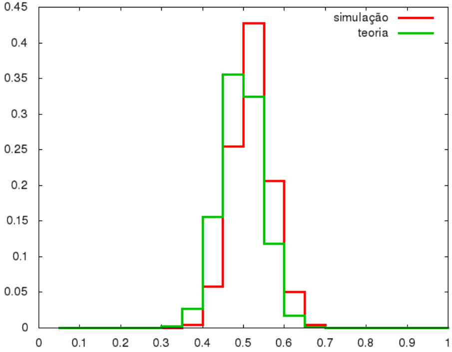
A idéia é mostrar que a tendência das partículas é de se espalharem nas duas caixas.

Mas com probabilidade positiva (mas MUITO pequena), você ainda consegue encontrar todas as partículas em uma só caixa.

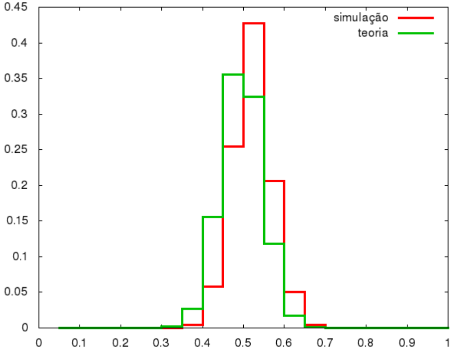
Exemplo 1: Urna de Ehrenfest

Algoritmo:

1) Entrada: R número de trocas, N número de partículas
2) Inicialize: $v = \{0, 0, \ldots, 0\}$ de tamanho N
3) Para $i = 1$ até R:
   a. Gere um número aleatório K de 1 a N
   b. Troque a bola correspondente de caixa: $v[k] = !v[k]$
   c. Após fazer várias trocas, calcule estatística para montar o histograma.
4) Retorne os dados do histograma.



Conseguimos ver que é muito difícil encontrar o sistema muito desequilibrado.



Conseguimos ver que é muito difícil encontrar o sistema muito desequilibrado.

Se supormos que cada transição de molécula leva 10^{-12} segundos, a teoria de Cadeia de Markov nos diz que em média você terá que assistir o sistema por um tempo na ordem de 401 milhões de anos para vê-lo voltar para o estado onde todas as moléculas estão na caixa A.