Introdução à Modelagem Computacional MAC024

Luis Paulo S. Barra e Elson M. Toledo

Departamento de Mecânica Aplicada e Computacional - MAC
Faculdade de Engenharia

Março 2012

Parte III

Equações de Diferenças

Mudança e Equações de Diferenças

$$valor futuro = valorpresente + mudanca$$

De outra forma:

$$mudanca = valor futuro - valorpresente$$

Equações de Diferenças

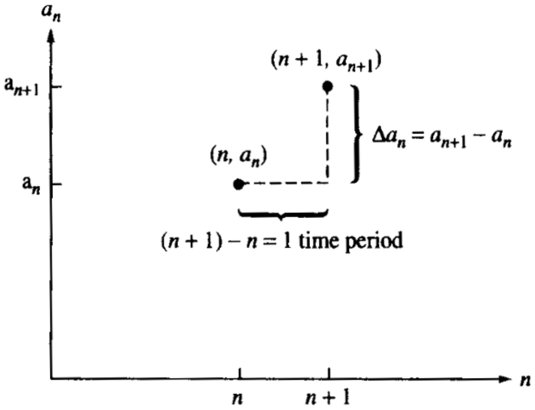
Para uma sequência de números $A = a_0, a_1, a_2, \ldots$ as primeiras diferenças são:

$$\begin{aligned}
\Delta a_0 &= a_1 - a_0 \\
\Delta a_1 &= a_2 - a_1 \\
\Delta a_2 &= a_3 - a_2 \\
&\vdots
\end{aligned}$$

Para cada n positivo a *n-ésima primeira diferença* é:

$$\Delta a_n = a_{n+1} - a_n$$

Primeira Diferença



Exemplo: Aplicação com Renda Fixa

Considere os rendimentos de uma aplicação financeira de renda fixa que remunera o capital aplicado a 1% ao mês. A sequência abaixo representa o valor atualizado a cada mês:

$$A = \{1000,00;\ 1010,00;\ 1020,10;\ 1030,30;\ \dots\}$$

As primeiras diferenças podem ser escritas como:

$$\Delta a_0 = a_1 - a_0$$

Exemplo: Aplicação com Renda Fixa

Considere os rendimentos de uma aplicação financeira de renda fixa que remunera o capital aplicado a 1% ao mês. A sequência abaixo representa o valor atualizado a cada mês:

$$A = \{1000,00;\ 1010,00;\ 1020,10;\ 1030,30;\ \ldots\}$$

As primeiras diferenças podem ser escritas como:

$$\begin{aligned}
\Delta a_0 = a_1 - a_0 &= 1010,00 - 1000,00 = 10,00 \\
\Delta a_1 = a_2 - a_1 &
\end{aligned}$$

Exemplo: Aplicação com Renda Fixa

Considere os rendimentos de uma aplicação financeira de renda fixa que remunera o capital aplicado a 1% ao mês. A sequência abaixo representa o valor atualizado a cada mês:

$$A = \{1000,00;\ 1010,00;\ 1020,10;\ 1030,30;\ \dots\}$$

As primeiras diferenças podem ser escritas como:

$$\begin{aligned}
\Delta a_0 = a_1 - a_0 &= 1010,00 - 1000,00 = 10,00 \\
\Delta a_1 = a_2 - a_1 &= 1020,10 - 1010,00 = 10,10 \\
\Delta a_2 = a_3 - a_2 &
\end{aligned}$$

Exemplo: Aplicação com Renda Fixa

Considere os rendimentos de uma aplicação financeira de renda fixa que remunera o capital aplicado a 1% ao mês. A sequência abaixo representa o valor atualizado a cada mês:

$$A = \{1000,00;\ 1010,00;\ 1020,10;\ 1030,30;\ \ldots\}$$

As primeiras diferenças podem ser escritas como:

$$\begin{aligned}
\Delta a_0 = a_1 - a_0 &= 1010,00 - 1000,00 = 10,00 \\
\Delta a_1 = a_2 - a_1 &= 1020,10 - 1010,00 = 10,10 \\
\Delta a_2 = a_3 - a_2 &= 1030,30 - 1020,10 = 10,20
\end{aligned}$$

Exemplo: Aplicação com Renda Fixa

Considere os rendimentos de uma aplicação financeira de renda fixa que remunera o capital aplicado a 1% ao mês. A sequência abaixo representa o valor atualizado a cada mês:

$$A = \{1000,00;\ 1010,00;\ 1020,10;\ 1030,30;\ \ldots\}$$

As primeiras diferenças podem ser escritas como:

$$\begin{aligned}
\Delta a_0 = a_1 - a_0 &= 1010,00 - 1000,00 = 10,00 \\
\Delta a_1 = a_2 - a_1 &= 1020,10 - 1010,00 = 10,10 \\
\Delta a_2 = a_3 - a_2 &= 1030,30 - 1020,10 = 10,20
\end{aligned}$$

Genericamente, a mudança, isto é, a remuneração mensal, pode ser representada pela primeira diferença:

$$\Delta a_n = a_{n+1} - a_n$$

Exemplo: Aplicação com Renda Fixa

Considere os rendimentos de uma aplicação financeira de renda fixa que remunera o capital aplicado a 1% ao mês. A sequência abaixo representa o valor atualizado a cada mês:

$$A = \{1000,00;\ 1010,00;\ 1020,10;\ 1030,30;\ \dots\}$$

As primeiras diferenças podem ser escritas como:

$$\begin{aligned}
\Delta a_0 = a_1 - a_0 &= 1010,00 - 1000,00 = 10,00 \\
\Delta a_1 = a_2 - a_1 &= 1020,10 - 1010,00 = 10,10 \\
\Delta a_2 = a_3 - a_2 &= 1030,30 - 1020,10 = 10,20
\end{aligned}$$

Genericamente, a mudança, isto é, a remuneração mensal, pode ser representada pela primeira diferença:

$$\Delta a_n = a_{n+1} - a_n = 0,01\, a_n$$

Exemplo: Aplicação com Renda Fixa

Considere os rendimentos de uma aplicação financeira de renda fixa que remunera o capital aplicado a 1% ao mês. A sequência abaixo representa o valor atualizado a cada mês:

$$A = \{1000,00;\ 1010,00;\ 1020,10;\ 1030,30;\ \ldots\}$$

As primeiras diferenças podem ser escritas como:

$$\begin{aligned}
\Delta a_0 = a_1 - a_0 &= 1010,00 - 1000,00 = 10,00 \\
\Delta a_1 = a_2 - a_1 &= 1020,10 - 1010,00 = 10,10 \\
\Delta a_2 = a_3 - a_2 &= 1030,30 - 1020,10 = 10,20
\end{aligned}$$

Genericamente, a mudança, isto é, a remuneração mensal, pode ser representada pela primeira diferença:

$$\Delta a_n = a_{n+1} - a_n = 0,01\, a_n$$

Ou alternativamente pela equação de diferença:

$$a_{n+1} = a_n + 0,01\, a_n$$

Exemplo: Aplicação com Renda Fixa

Equações de Diferenças e Sistemas Dinâmicos

A equação anterior e a condição inicial formam então um *modelo de sistema dinâmico* (discreto):

$$\begin{aligned} a_{n+1} &= 1,01\, a_n, \qquad n = 0,\, 1,\, 2, \ldots \\ a_0 &= 1000,00 \end{aligned}$$

onde a_n é o saldo depois de n meses.

Exemplo: Aplicação com Renda Fixa

Retiradas Mensais

Considerando a necessidade de um retirada mensal fixa, por exemplo de 50 Reais, pode-se modificar o exemplo inicial obtendo:

$$\Delta a_n = a_{n+1} - a_n = 0,01\, a_n - 50$$

De maneira geral:

$$mudanca = \Delta a_n = a_{n+1} - a_n = \text{função} f$$

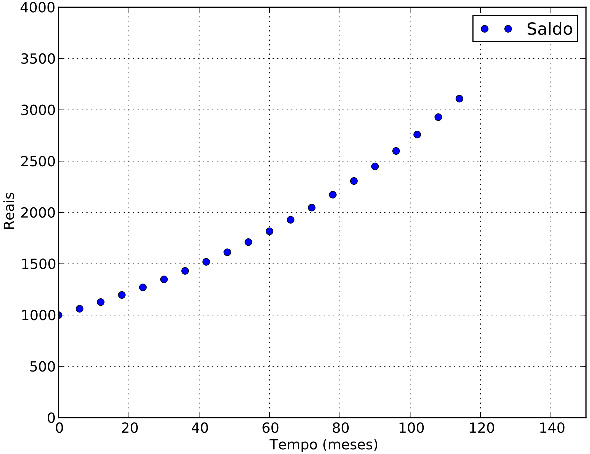
Na expressão acima a função f depende dos termos anteriores da sequência e de outros termos externos como no caso das retiradas mensais.

Observando o resultado graficamente

Gerando um gráfico simples em Python

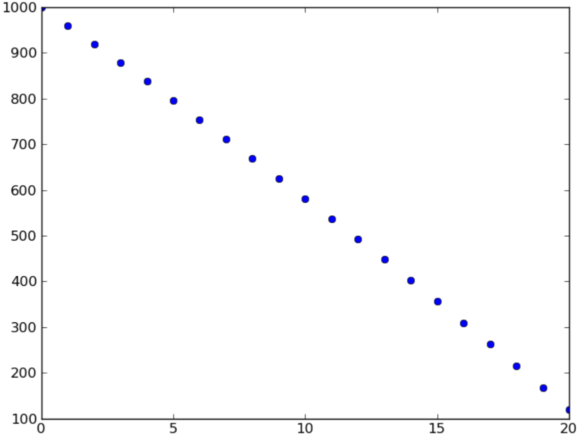
```
# Importando os pacotes
from numpy import *
from matplotlib.pylab import *

#  Definindo o numero de pontos
n = 120

# Inicializando e calculando o vetor
x = range(n)
a = zeros(n)
a[0] = 1000
for i in x[1:n]:
    a[i] = 1.01*a[i-1]

# Criação do grafico tomando os valores de 6 em 6 meses
plot(x[0: :6],a[0: :6], 'o', label= 'Saldo')

# Comando opcionais de formatação do gráfico
xlim(0.0,150)
ylim(0.0,4000.0)
grid()
legend(loc='best')
xlabel('Tempo (meses)')
ylabel('Reais')

# Exibição do grafico criado
show()
```

Observando o resultado graficamente



Exemplo 1: $a_{n+1} = 1.01 * a_n$, com $a_0 = 1000$, para 10 anos.

Observando o resultado graficamente



Ex. 1 modificado: $a_{n+1} = 1.01 * a_n - 50$, com $a_0 = 1000$, para 20 meses.

Aproximando mudanças com equações de diferenças

Quando a quantidade estudada varia continuamente pode-se *aproximar* sua variação por equações de diferenças.

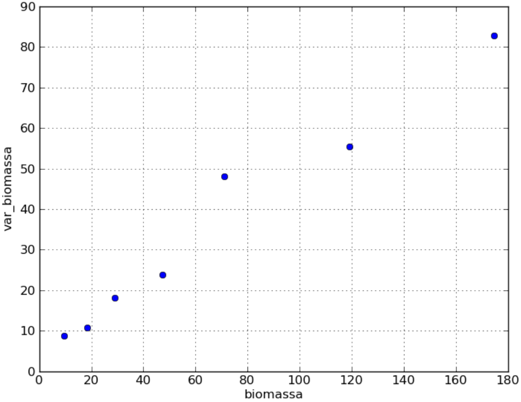
Crescimento Populacional

Dados experimentais[1]:

Tempo	Biomassa	Δ Biomassa
0	9,6	8,7
1	18,3	10,7
2	29,0	18,2
3	47,2	23,9
4	71,1	48,0
5	119,1	55,5
6	174,6	82,7
7	257,3	

[1] R.Pearl, *The Growth of Population*, Quart. Rev. Biol. 2(1927):532-584

Crescimento de Populacional

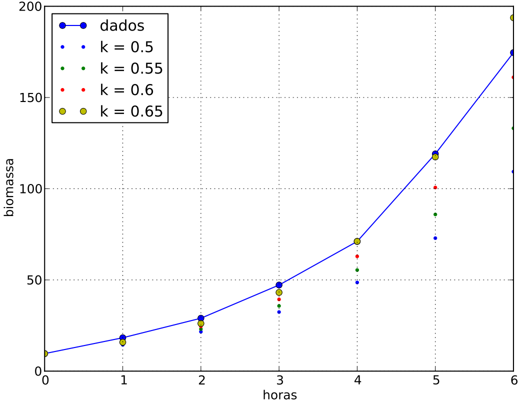


Do gráfico acima pode-se aproximar os dados por uma reta e estimar (graficamente) sua inclinação como $k = 0,5$. Logo:

$$\Delta p_n = p_{n+1} - p_n = 0,5 p_n \qquad \rightarrow \qquad p_{n+1} = 1,5 p_n$$

Crescimento de Populacional

Comparação do modelo $p_{n+1} = (1+k)p_n$ com os dados:



Limitação: modelo prevê crescimento ilimitado da população (*crescimento exponencial*).

Crescimento de Populacional - Revisitado

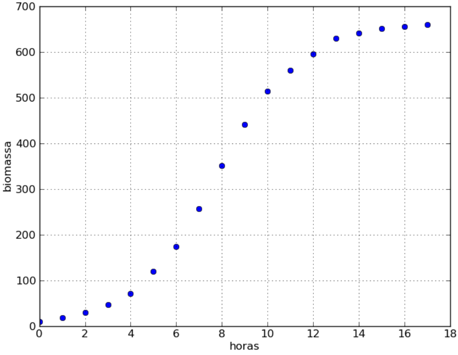
Além de nascimentos e mortes proporcionais à população, incluir limitação de recursos do meio (*crescimento logístico*).

[2] R.Pearl, *The Growth of Population*, Quart. Rev. Biol. 2(1927):532-584

Crescimento de Populacional - Revisitado

Além de nascimentos e mortes proporcionais à população, incluir limitação de recursos do meio (*crescimento logístico*).
Dados experimentais (continuação)[2]:

Hora	Biom.	Δ
7	257,3	93,4
8	350,7	90,3
9	441,0	72,3
10	513,3	46,4
11	559,7	35,1
12	594,8	34,6
13	629,4	11,4
14	640,8	10,3
15	651,1	4,8
16	655,9	3,7
17	659,6	2,2
18	661,8	

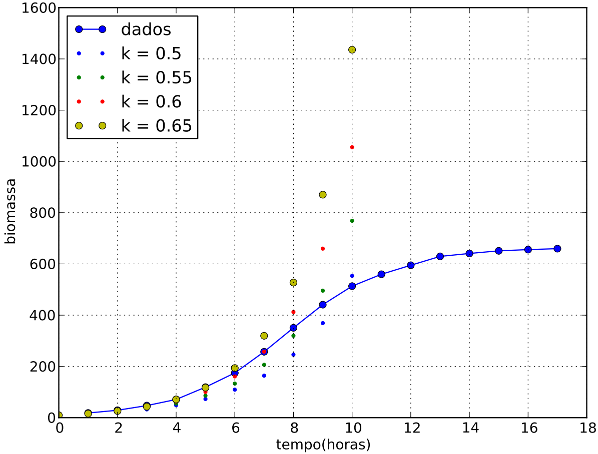


[2]R.Pearl, *The Growth of Population*, Quart. Rev. Biol. 2(1927):532-584

Crescimento de Populacional - Revisitado

Modelo Anterior icompatível

Comparação do modelo $p_{n+1} = (1 + k)p_n$ com os novos dados:



Crescimento de Populacional - Revisitado

Crescimento aumenta com a população mas decresce quando a população se aproxima de um valor limite, p_{lim}.

Crescimento de Populacional - Revisitado

Crescimento aumenta com a população mas decresce quando a população se aproxima de um valor limite, p_{lim}.
Isto leva a hipótese de que a variação da população, Δp_n seja proporcional a $p(p_{lim} - p)$, isto é:

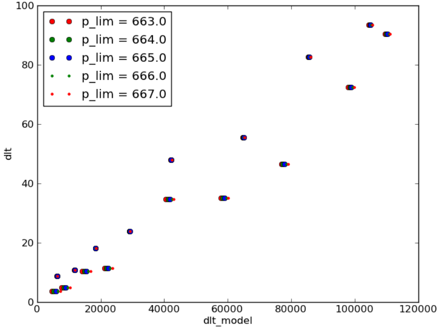
$$\Delta p_n = k\, p\, (p_{lim} - p)$$

Crescimento de Populacional - Revisitado

Crescimento aumenta com a população mas decresce quando a população se aproxima de um valor limite, p_{lim}.
Isto leva a hipótese de que a variação da população, Δp_n seja proporcional a $p(p_{lim} - p)$, isto é:

$$\Delta p_n = k\, p\, (p_{lim} - p)$$

O que pode ser verificado graficamente para diversos valores de p_{lim}:

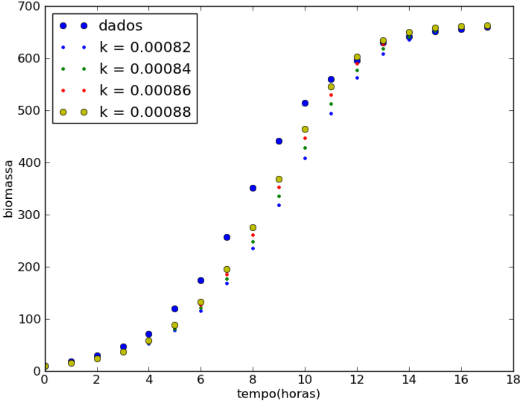


Crescimento de Populacional - Revisitado

O comportamento do modelo resultante:

$$p_{n+1} = k\, p_n\, (663 - p_n)$$

pode ser verificado graficamente para diversos valores de k:



Outro Exemplo

Disseminação por Doença Contagiosa

A disseminação de uma doença em uma população pode ser simplificadamente modelada como:

Outro Exemplo

Disseminação por Doença Contagiosa

A disseminação de uma doença em uma população pode ser simplificadamente modelada como:

- Número de indivíduos em uma população: P;

Outro Exemplo

Disseminação por Doença Contagiosa

A disseminação de uma doença em uma população pode ser simplificadamente modelada como:

- Número de indivíduos em uma população: P;
- Número de indivíduos contaminados no tempo n: i_n;

Outro Exemplo

Disseminação por Doença Contagiosa

A disseminação de uma doença em uma população pode ser simplificadamente modelada como:

- Número de indivíduos em uma população: P;
- Número de indivíduos contaminados no tempo n: i_n;
- Número de indivíduos sadios/susceptíveis: $P - i_n$;

Outro Exemplo

Disseminação por Doença Contagiosa

A disseminação de uma doença em uma população pode ser simplificadamente modelada como:

- Número de indivíduos em uma população: P;
- Número de indivíduos contaminados no tempo n: i_n;
- Número de indivíduos sadios/susceptíveis: $P - i_n$;
- Contaminação se dá por interação entre os indivíduos;

Outro Exemplo

Disseminação por Doença Contagiosa

A disseminação de uma doença em uma população pode ser simplificadamente modelada como:

- Número de indivíduos em uma população: P;
- Número de indivíduos contaminados no tempo n: i_n;
- Número de indivíduos sadios/susceptíveis: $P - i_n$;
- Contaminação se dá por interação entre os indivíduos;
- Numero de possíveis interações sadios/infectados: $i_n(P - i_n)$.

Outro Exemplo

Disseminação por Doença Contagiosa

A disseminação de uma doença em uma população pode ser simplificadamente modelada como:

- Número de indivíduos em uma população: P;
- Número de indivíduos contaminados no tempo n: i_n;
- Número de indivíduos sadios/susceptíveis: $P - i_n$;
- Contaminação se dá por interação entre os indivíduos;
- Numero de possíveis interações sadios/infectados: $i_n(P - i_n)$.

Admitido que uma proporção k dessas interações causarão contágios:

$$\Delta i_n = i_{n+1} - i_n = k\, i_n\, (P - i_n)$$

Disseminação por Doença Contagiosa

Refinamentos Possíveis

- Parte da população sadia não é susceptível;

Disseminação por Doença Contagiosa

Refinamentos Possíveis

- Parte da população sadia não é susceptível;
- O período de contaminação é limitado;

Disseminação por Doença Contagiosa

Refinamentos Possíveis

- Parte da população sadia não é susceptível;
- O período de contaminação é limitado;
- Remoção de infectados;

Disseminação por Doença Contagiosa

Refinamentos Possíveis

- Parte da população sadia não é susceptível;
- O período de contaminação é limitado;
- Remoção de infectados;
- A doença pode causar a redução da população;
- ...

Mais um exemplo

Aquecimento de um objeto

Suponha uma lata de cerveja gelada em um ambiente quente.
Admitamos as seguintes hipóteses:

- Ambiente grande $\rightarrow$ temperatura constante: T;

Mais um exemplo

Aquecimento de um objeto

Suponha uma lata de cerveja gelada em um ambiente quente.
Admitamos as seguintes hipóteses:

- Ambiente grande $\rightarrow$ temperatura constante: T;
- Temperatura uniforme na lata: t_n;

Mais um exemplo

Aquecimento de um objeto

Suponha uma lata de cerveja gelada em um ambiente quente.
Admitamos as seguintes hipóteses:

- Ambiente grande $\rightarrow$ temperatura constante: T;
- Temperatura uniforme na lata: t_n;
- Velocidade da troca de calor proporcional à diferença entre as temperaturas;

Mais um exemplo

Aquecimento de um objeto

Suponha uma lata de cerveja gelada em um ambiente quente.
Admitamos as seguintes hipóteses:

- Ambiente grande $\rightarrow$ temperatura constante: T;
- Temperatura uniforme na lata: t_n;
- Velocidade da troca de calor proporcional à diferença entre as temperaturas;

Logo:

$$\Delta t_n = t_{n+1} - t_n = k\,(T - t_n)$$

Mais um exemplo

Aquecimento de um objeto

Suponha uma lata de cerveja gelada em um ambiente quente.
Admitamos as seguintes hipóteses:

- Ambiente grande $\rightarrow$ temperatura constante: T;
- Temperatura uniforme na lata: t_n;
- Velocidade da troca de calor proporcional à diferença entre as temperaturas;

Logo:

$$\Delta t_n = t_{n+1} - t_n = k\,(T - t_n)$$

Refinamentos possíveis

- Variação na temperatura ambiente;

Mais um exemplo

Aquecimento de um objeto

Suponha uma lata de cerveja gelada em um ambiente quente.
Admitamos as seguintes hipóteses:

- Ambiente grande $\rightarrow$ temperatura constante: T;
- Temperatura uniforme na lata: t_n;
- Velocidade da troca de calor proporcional à diferença entre as temperaturas;

Logo:

$$\Delta t_n = t_{n+1} - t_n = k\,(T - t_n)$$

Refinamentos possíveis

- Variação na temperatura ambiente;
- Não uniformidade da temperatura da lata;

Mais um exemplo

Aquecimento de um objeto

Suponha uma lata de cerveja gelada em um ambiente quente.
Admitamos as seguintes hipóteses:

- Ambiente grande $\rightarrow$ temperatura constante: T;
- Temperatura uniforme na lata: t_n;
- Velocidade da troca de calor proporcional à diferença entre as temperaturas;

Logo:

$$\Delta t_n = t_{n+1} - t_n = k\,(T - t_n)$$

Refinamentos possíveis

- Variação na temperatura ambiente;
- Não uniformidade da temperatura da lata;
- ...

Soluções dos Sistemas Dinâmicos

Pretende-se determinar a expressão genérica para o valor da variável de interesse em um tempo n.

Soluções dos Sistemas Dinâmicos

Pretende-se determinar a expressão genérica para o valor da variável de interesse em um tempo n.

Método da Conjectura

1. Observar um padrão;
2. Conjecturar sobre a forma da solução;
3. Testar a conjectura por substituição;
4. Aceitar a conjectura caso a substituição seja uma identidade.

Soluções dos Sistemas Dinâmicos

Solução para o Sistema dinâmico na forma:

$$a_{n+1} = r\, a_n, \qquad r = \text{constante}$$

Procurando um padrão

Examinando os termos da sequência:

$$a_1 = r a_0$$

Soluções dos Sistemas Dinâmicos

Solução para o Sistema dinâmico na forma:

$$a_{n+1} = r\, a_n, \qquad r = \text{constante}$$

Procurando um padrão

Examinando os termos da sequência:

$$\begin{aligned} a_1 &= r a_0 \\ a_2 &= r a_1 = r(r a_0) = r^2 a_0 \end{aligned}$$

Soluções dos Sistemas Dinâmicos

Solução para o Sistema dinâmico na forma:

$$a_{n+1} = r\, a_n, \qquad r = \text{constante}$$

Procurando um padrão

Examinando os termos da sequência:

$$\begin{aligned} a_1 &= ra_0 \\ a_2 &= ra_1 = r(ra_0) = r^2 a_0 \\ a_3 &= ra_2 = r(r^2 a_0) = r^3 a_0 \end{aligned}$$

Soluções dos Sistemas Dinâmicos

Conjectura

O termo genérico é: $a_k = r^k a_0$

Teste da Conjectura

Subsitituindo a conjectura no sistema dinâmico:

$$\begin{aligned} a_{n+1} &= r\, a_n \\ r^{n+1}\, a_0 &= r\,(r^n\, a_0) \end{aligned}$$

Soluções dos Sistemas Dinâmicos

Conjectura

O termo genérico é: $a_k = r^k a_0$

Teste da Conjectura

Subsitituindo a conjectura no sistema dinâmico:

$$\begin{aligned} a_{n+1} &= r\, a_n \\ r^{n+1}\, a_0 &= r\,(r^n\, a_0) = r^{n+1}\, a_0 \end{aligned}$$

Soluções dos Sistemas Dinâmicos

Conjectura

O termo genérico é: $a_k = r^k a_0$

Teste da Conjectura

Subsitituindo a conjectura no sistema dinâmico:

$$\begin{aligned} a_{n+1} &= r\, a_n \\ r^{n+1}\, a_0 &= r\,(r^n\, a_0) = r^{n+1}\, a_0 \end{aligned}$$

Conjectura é aceita pois resultou numa identidade.

Comportamento de longo prazo

Para o sistema dinâmico:

$$a_{n+1} = r\, a_n, \qquad r = \text{constante}$$

o comportamento da solução depende de r.

$r = 0$	Solução constante com valor de equilíbrio em 0.
$r = 1$	Solução constante com valor de equilíbrio em a_0.
$r < 0$	Solução apresenta oscilação
$\lvert r\rvert < 1$	Solução decrescente em módulo, tendendo para 0.
$\lvert r\rvert > 1$	Solução crescendo indefinidamente.

Valor de equilíbrio

ou Ponto Fixo de um sistema dinâmico $a_{n+1} = f(a_n)$ é o número a para o qual $a_k = a$ para qualquer valor de k.

Soluções de Sistemas Dinâmicos

Consideramos agora o caso:

$$a_{n+1} = r\, a_n + b, \qquad\qquad r \text{ e } b \text{ constantes.}$$

Exemplo: Prescrição de Medicamento

Suponha que um medicamento é administrado diretamente na corrente sanguínea. Ao longo do tempo o medicamento é processado/absorvido pelo corpo e sua concentração original cai.

Soluções de Sistemas Dinâmicos

Consideramos agora o caso:

$$a_{n+1} = r\,a_n + b, \qquad r \text{ e } b \text{ constantes.}$$

Exemplo: Prescrição de Medicamento

Suponha que um medicamento é administrado diretamente na corrente sanguínea. Ao longo do tempo o medicamento é processado/absorvido pelo corpo e sua concentração original cai.
Deseja-se aplicar uma dose em um intervalo de tempo de modo que o nível de concentração do medicamento fique entre níveis aceitáveis (seguro e efetivo).

Soluções de Sistemas Dinâmicos

Consideramos agora o caso:

$$a_{n+1} = r\,a_n + b, \qquad r \text{ e } b \text{ constantes.}$$

Exemplo: Prescrição de Medicamento

Suponha que um medicamento é administrado diretamente na corrente sanguínea. Ao longo do tempo o medicamento é processado/absorvido pelo corpo e sua concentração original cai.
Deseja-se aplicar uma dose em um intervalo de tempo de modo que o nível de concentração do medicamento fique entre níveis aceitáveis (seguro e efetivo).
Supondo que a cada aplicação uma dose b é administrada e no período entre administrações a concentração varia de um fator k da dose no início do período. Tem-se:

$$\Delta a_n = a_{n+1} - a_n = k a_n + b$$

Soluções de Sistemas Dinâmicos

Consideramos agora o caso:

$$a_{n+1} = r\,a_n + b, \qquad r \text{ e } b \text{ constantes.}$$

Exemplo: Prescrição de Medicamento

Suponha que um medicamento é administrado diretamente na corrente sanguínea. Ao longo do tempo o medicamento é processado/absorvido pelo corpo e sua concentração original cai.

Deseja-se aplicar uma dose em um intervalo de tempo de modo que o nível de concentração do medicamento fique entre níveis aceitáveis (seguro e efetivo).

Supondo que a cada aplicação uma dose b é administrada e no período entre administrações a concentração varia de um fator k da dose no início do período. Tem-se:

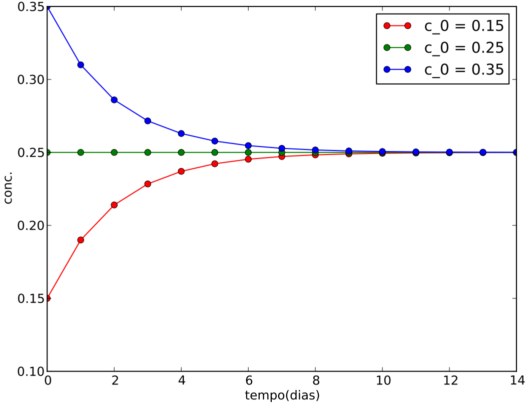
$$\Delta a_n = a_{n+1} - a_n = k a_n + b$$

ou, de forma equivalente:

$$a_{n+1} = r\,a_n + b \quad \text{onde} \quad r = 1 + k$$

Exemplos Numéricos

Considere um decaimento de 40% entre aplicações($r = 0.6$), uma dose diária de $0,1mg$ e três doses iniciais distintas: $a_0 =$ 0,1 ; 0,2 e 0,3.

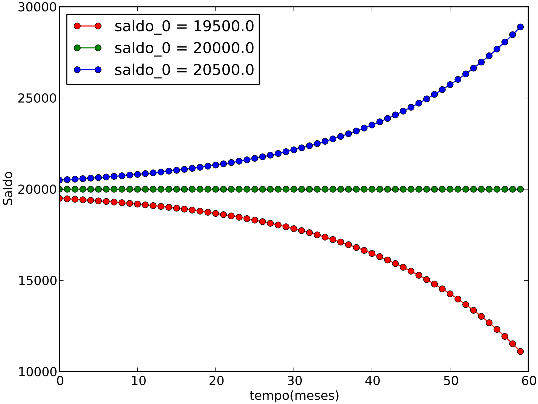


$a_{n+1} = r\, a_n + b$, com $0 < r < 1$ e $b > 0$ para diferentes valores de a_0.

Exemplos Numéricos

Renda Fixa com Retiradas Fixas

Como já foi visto, os juros ($k = 5\%$) são acrescidos ao montante mensalmente e em seguida são realizadas as retiradas (b= -1000.).



$a_{n+1} = r\, a_n + b$, com $r > 1$ e $b < 0$ para diferentes valores de a_0.

Achando e Classificando Valores de Equilíbrio

Determinação

O valor de equilíbrio, a, do sistema dinâmico $a_{n+1} = r\, a_n + b$ deve satisfazer:

$$a_{n+1} = a \quad \text{e} \quad a_n = a$$

Logo $a = r\, a + b$

Achando e Classificando Valores de Equilíbrio

Determinação

O valor de equilíbrio, a, do sistema dinâmico $a_{n+1} = r\,a_n + b$ deve satisfazer:

$$a_{n+1} = a \quad \text{e} \quad a_n = a$$

Logo $a = r\,a + b$, ou ainda, com $r \neq 1$:

$$a = \frac{b}{1-r}$$

Achando e Classificando Valores de Equilíbrio

Determinação

O valor de equilíbrio, a, do sistema dinâmico $a_{n+1} = r\,a_n + b$ deve satisfazer:

$$a_{n+1} = a \quad \text{e} \quad a_n = a$$

Logo $a = r\,a + b$, ou ainda, com $r \neq 1$:

$$a = \frac{b}{1-r}$$

Aplicando-se o resultado acima nos exemplos anteriores temos, respectivamente, que:

$$a = \frac{0,1}{1-0,6} = 0,25$$

e

$$a = \frac{-1000}{1-1,05} = 20.000$$

Classificação dos Valores de Equilíbrio

$$a_{n+1} = r\, a_n + b$$

Valor de r	Class. Equilíbrio
$\|r\| < 1$	Equilíbrio Estável
$\|r\| > 1$	Equilíbrio Instável
$r = 1$	Sem equilíbrio (reta)

Solução - Método da Conjectura

Procurando um padrão

Tendo em vista a solução estável mostrada anteriormente:

$$r^k = (0,6)^k \to 0 \quad \text{quando} \quad k \to \infty$$

Solução - Método da Conjectura

Procurando um padrão

Tendo em vista a solução estável mostrada anteriormente:

$$r^k = (0,6)^k \to 0 \quad \text{quando} \quad k \to \infty$$

Conjectura

Logo pode-se conjecturar uma solução da forma:

$$a_k = r^k\, c + \frac{b}{1-r}$$

Solução - Método da Conjectura

Teste da Conjectura

$$a_{n+1} = r\, a_n + b$$

Solução - Método da Conjectura

Teste da Conjectura

$$
\begin{aligned}
a_{n+1} &= r\, a_n + b \\
r^{n+1}\, c + \frac{b}{1-r} &= r\left(r^n\, c + \frac{b}{1-r}\right) + b
\end{aligned}
$$

Solução - Método da Conjectura

Teste da Conjectura

$$
\begin{aligned}
a_{n+1} &= r\,a_n + b \\
r^{n+1}\,c + \frac{b}{1-r} &= r\left(r^n\,c + \frac{b}{1-r}\right) + b \\
r^{n+1}\,c + \frac{b}{1-r} &= r^{n+1}\,c + \frac{rb}{1-r} + b
\end{aligned}
$$

Solução - Método da Conjectura

Teste da Conjectura

$$
\begin{aligned}
a_{n+1} &= r\, a_n + b \\
r^{n+1}\, c + \frac{b}{1-r} &= r\left(r^n\, c + \frac{b}{1-r}\right) + b \\
r^{n+1}\, c + \frac{b}{1-r} &= r^{n+1}\, c + \frac{rb}{1-r} + b \\
\frac{b}{1-r} &= \frac{rb}{1-r} + b
\end{aligned}
$$

Solução - Método da Conjectura

Teste da Conjectura

$$\begin{aligned}
a_{n+1} &= r\,a_n + b \\
r^{n+1}\,c + \frac{b}{1-r} &= r\left(r^n\,c + \frac{b}{1-r}\right) + b \\
r^{n+1}\,c + \frac{b}{1-r} &= r^{n+1}\,c + \frac{rb}{1-r} + b \\
\frac{b}{1-r} &= \frac{rb}{1-r} + b \\
b &= rb + b(1-r)
\end{aligned}$$

Solução - Método da Conjectura

Teste da Conjectura

$$
\begin{aligned}
a_{n+1} &= r\,a_n + b \\
r^{n+1}\,c + \frac{b}{1-r} &= r\left(r^n\,c + \frac{b}{1-r}\right) + b \\
r^{n+1}\,c + \frac{b}{1-r} &= r^{n+1}\,c + \frac{rb}{1-r} + b \\
\frac{b}{1-r} &= \frac{rb}{1-r} + b \\
b &= rb + b(1-r) \\
b &= b
\end{aligned}
$$

Como resultou em uma identidade, pode-se concluir que a solução do sistema dinâmico $a_{n+1} = r\,a_n + b$, com $r \neq 1$ é:

$$a_k = r^k\,c + \frac{b}{1-r}$$

onde a constante c depende da condição inicial.

Solução

A solução geral para a equação $a_{n+1} = ra_n + b$ pode ser obtida alternativamente como:

Procura do padrão

$$\begin{aligned} a_1 &= r\,a_0 + b \\ a_2 &= r\,a_1 + b \end{aligned}$$

Solução

A solução geral para a equação $a_{n+1} = ra_n + b$ pode ser obtida alternativamente como:

Procura do padrão

$$\begin{aligned} a_1 &= r\,a_0 + b \\ a_2 &= r\,a_1 + b = r\,(r\,a_0 + b) + b \end{aligned}$$

Solução

A solução geral para a equação $a_{n+1} = ra_n + b$ pode ser obtida alternativamente como:

Procura do padrão

$$
\begin{aligned}
a_1 &= r\,a_0 + b \\
a_2 &= r\,a_1 + b = r\,(r\,a_0 + b) + b = r^2\,a_0 + (1 + r)b \\
a_3 &= r\,a_2 + b
\end{aligned}
$$

Solução

A solução geral para a equação $a_{n+1} = ra_n + b$ pode ser obtida alternativamente como:

Procura do padrão

$$
\begin{aligned}
a_1 &= r\,a_0 + b \\
a_2 &= r\,a_1 + b = r\,(r\,a_0 + b) + b = r^2\,a_0 + (1+r)b \\
a_3 &= r\,a_2 + b = r\,(r^2\,a_0 + (1+r)b) + b
\end{aligned}
$$

Solução

A solução geral para a equação $a_{n+1} = ra_n + b$ pode ser obtida alternativamente como:

Procura do padrão

$$\begin{aligned} a_1 &= r\,a_0 + b \\ a_2 &= r\,a_1 + b = r\,(r\,a_0 + b) + b = r^2\,a_0 + (1+r)b \\ a_3 &= r\,a_2 + b = r\,(r^2\,a_0 + (1+r)b) + b = r^3\,a_0 + (1+r+r^2)b \end{aligned}$$

Conjectura

$$a_k = r^k a_0 + (1 + r + r^2 + \cdots + r^{k-1})b$$

Solução

Observando que:

$$(1 + r + r^2 + \cdots + r^{k-1}) = \begin{cases} \frac{1-r^k}{1-r}, & \text{se} \quad r \neq 1 \\ n, & \text{se} \quad r = 1 \end{cases}$$

Obtém-se para o caso de $r \neq 1$:

$$a_k = r^k a_0 + \frac{1 - r^k}{1 - r} b$$

Solução

Observando que:

$$(1 + r + r^2 + \cdots + r^{k-1}) = \begin{cases} \frac{1-r^k}{1-r}, & \text{se} \quad r \neq 1 \\ n, & \text{se} \quad r = 1 \end{cases}$$

Obtém-se para o caso de $r \neq 1$:

$$\begin{aligned} a_k &= r^k a_0 + \frac{1-r^k}{1-r} b \\ &= a_0 r^k - \frac{b}{1-r} r^k + \frac{b}{1-r} \end{aligned}$$

Solução

Observando que:

$$(1 + r + r^2 + \cdots + r^{k-1}) = \begin{cases} \frac{1-r^k}{1-r}, & \text{se} \quad r \neq 1 \\ n, & \text{se} \quad r = 1 \end{cases}$$

Obtém-se para o caso de $r \neq 1$:

$$\begin{aligned} a_k &= r^k a_0 + \frac{1-r^k}{1-r} b \\ &= a_0 r^k - \frac{b}{1-r} r^k + \frac{b}{1-r} \\ &= \left[a_0 - \frac{b}{1-r} \right] r^k + \frac{b}{1-r} \end{aligned}$$

Que pode ser escrita como anteriormente:

$$a_k = r^k c + \frac{b}{1-r}, \qquad \text{onde} \qquad c = \left[a_0 - \frac{b}{1-r} \right]$$

Classificação das Equações de Diferenças

São classificadas de modo análogo às equações diferenciais:

Quanto a ordem

De primeira ordem quando está associada apenas à diferença de primeira ordem $\Delta a = a_{n+1} - a_n$, ou, de outra forma,o termo seguinte só depende do imediatamente anterior, isto é:

$$a_{n+1} = f(a_n)$$

Classificação das Equações de Diferenças

São classificadas de modo análogo às equações diferenciais:

Quanto a ordem

De primeira ordem quando está associada apenas à diferença de primeira ordem $\Delta a = a_{n+1} - a_n$, ou, de outra forma,o termo seguinte só depende do imediatamente anterior, isto é:

$$a_{n+1} = f(a_n)$$

Lineares

$a_{n+1} = f(a_n)$ e $f(a_n)$ é linear em relação à a_n. Por exemplo:

$$\begin{aligned} a_{n+1} &= ra_n \\ a_{n+1} &= ra_n + b \end{aligned}$$

Não-Lineares

$a_{n+1} = f(a_n)$ e $f(a_n)$ é não-linear em relação à a_n. Por exemplo:

$$a_{n+1} = r(1 - a_n)a_n$$

Sistemas Dinâmicos Não Lineares

Sistemas dinâmicos não-lineares podem apresentar comportamentos muito mais complexos que os lineares.
A eq. do crescimento logístico é um exemplo.

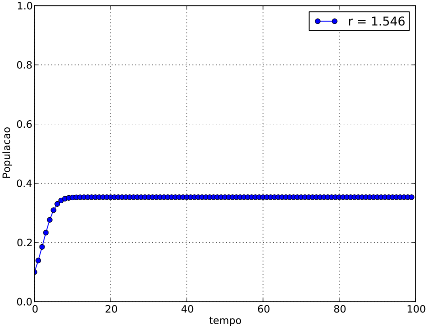
$$
\begin{aligned}
p_{n+1} &= p_n + k(p_{lim} - p_n)\, p_n \\
&= (1 + kp_{lim})p_n - kp_n^2 \\
&= (1 + kp_{lim}) \left(1 - \frac{kp_n}{(1 + kp_{lim})}\right) p_n
\end{aligned}
$$

E por fim chega-se a:

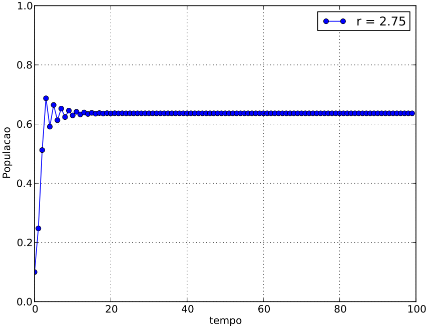
$$
a_{n+1} = r(1 - a_n)\, a_n \qquad \text{onde:} \qquad r = 1 + kp_{lim} \quad \text{e} \quad a_n = \frac{k}{r} p_n
$$

Pode-se, então, observar a variedade de comportamentos obtidos com pequena variação de r.

Sistemas Dinâmicos Não Lineares

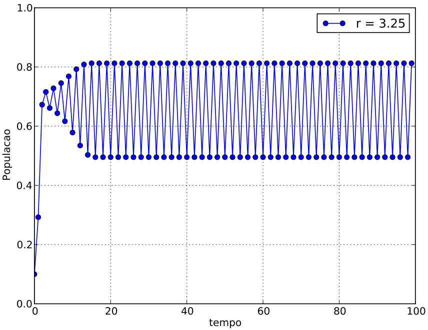


Valor limite aprox. 0,35.

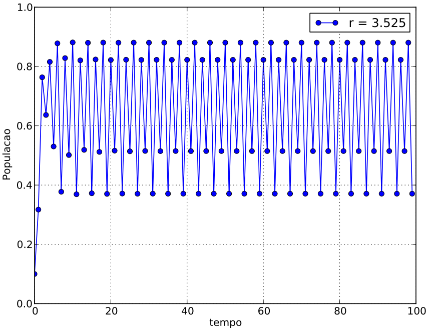


Depois de oscilar, valor limite aprox. 0,65.

Sistemas Dinâmicos Não Lineares

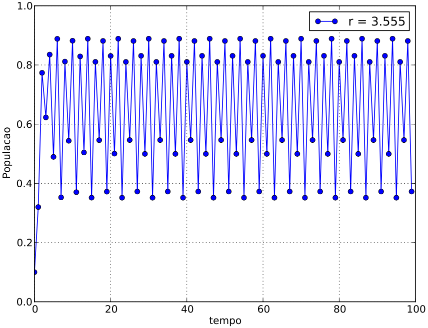


Oscila entre dois valores.

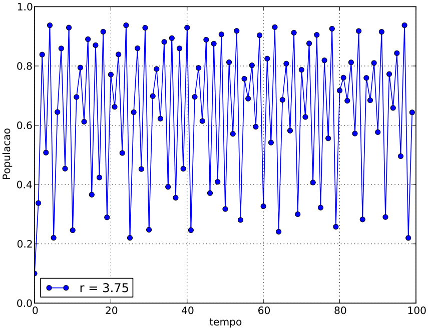


Oscila entre quatro valores.

Sistemas Dinâmicos Não Lineares



Oscila entre oito valores.

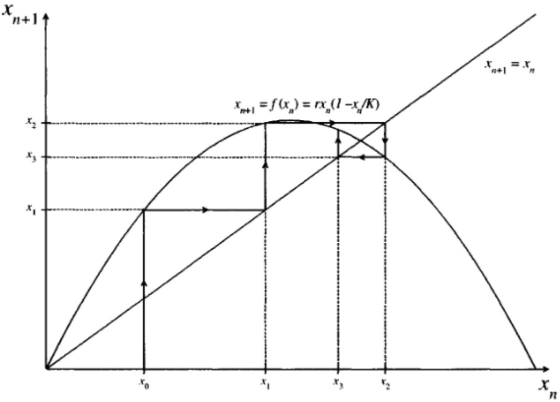


Comportamento caótico.

Análise de Sistemas Dinâmicos

Método Gráfico Recursivo - Cobwebbing

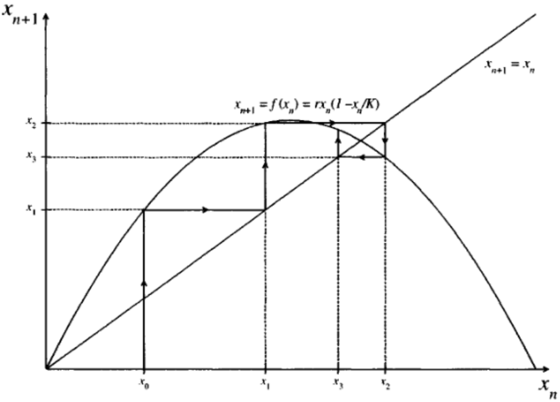
Podemos evidenciar graficamente a evolução das iterações representando no eixo horizontal e vertical, respectivamente, x_n e x_{n+1} e representando neste gráfico a função $x_{n+1} = f(x_n)$ e $x_{n+1} = x_n$.



Análise de Sistemas Dinâmicos

Método Gráfico Recursivo - Cobwebbing

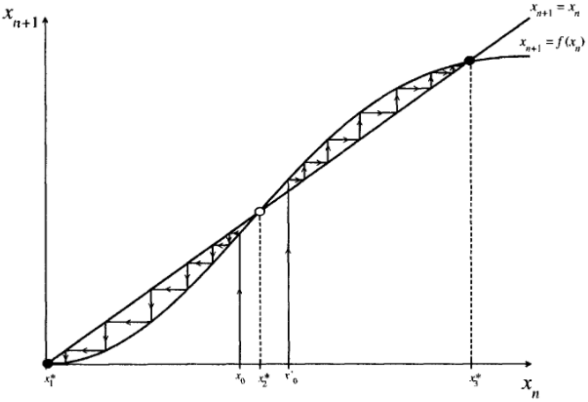
Podemos evidenciar graficamente a evolução das iterações representando no eixo horizontal e vertical, respectivamente, x_n e x_{n+1} e representando neste gráfico a função $x_{n+1} = f(x_n)$ e $x_{n+1} = x_n$.



O encontro entro entre as duas curvas define um ponto de equilíbrio.

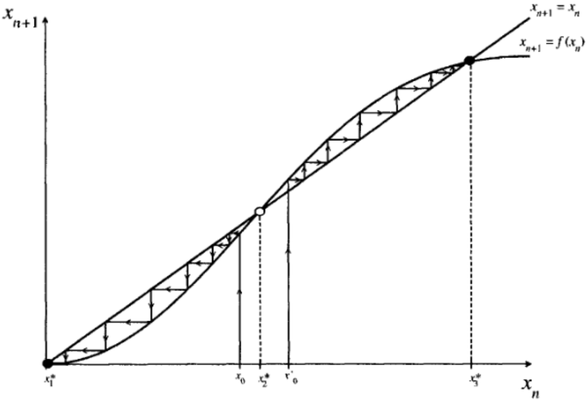
Análise de Sistemas Dinâmicos

Equilíbrio Estável e Instável



Análise de Sistemas Dinâmicos

Equilíbrio Estável e Instável



Ponto cheio $\rightarrow$ Equilíbrio Estável.

Análise de Sistemas Dinâmicos

Análise de Estabilidade Linear

Seja a n-ésima iteração, próxima a um ponto fixo x^* de $x_{n+1} = f(x_n)$:

$$x_n = x^* + y_n$$

Análise de Sistemas Dinâmicos

Análise de Estabilidade Linear

Seja a n-ésima iteração, próxima a um ponto fixo x^* de $x_{n+1} = f(x_n)$:

$$x_n = x^* + y_n$$

Tem-se estabilidade se y_n decresce a medida que se itera.

$$x^* + y_{n+1} = f(x^* + y_n)$$

Análise de Sistemas Dinâmicos

Análise de Estabilidade Linear

Seja a n-ésima iteração, próxima a um ponto fixo x^* de $x_{n+1} = f(x_n)$:

$$x_n = x^* + y_n$$

Tem-se estabilidade se y_n decresce a medida que se itera.

$$x^* + y_{n+1} = f(x^* + y_n)$$

Expandindo em série de Taylor pode-se estabelecer a seguinte aproximação:

$$x^* + y_{n+1} = f(x^*) + f'(x^*)y_n$$

Análise de Sistemas Dinâmicos

Análise de Estabilidade Linear

Seja a n-ésima iteração, próxima a um ponto fixo x^* de $x_{n+1} = f(x_n)$:

$$x_n = x^* + y_n$$

Tem-se estabilidade se y_n decresce a medida que se itera.

$$x^* + y_{n+1} = f(x^* + y_n)$$

Expandindo em série de Taylor pode-se estabelecer a seguinte aproximação:

$$x^* + y_{n+1} = f(x^*) + f'(x^*)y_n$$

Lembrando que x^* é um ponto fixo e fazendo $\lambda = f'(x^*)$:

$$y_{n+1} = \lambda y_n$$

Análise de Estabilidade Linear

A expressão acima é uma equação de diferenças cuja solução é:

$$y_k = \lambda^k y_0$$

Logo o comportamento da estabilidade do ponto fixo pode ser definido pelo valor de λ.

Análise de Sistemas Dinâmicos

Análise de Estabilidade Linear

A expressão acima é uma equação de diferenças cuja solução é:

$$y_k = \lambda^k y_0$$

Logo o comportamento da estabilidade do ponto fixo pode ser definido pelo valor de λ.

$$\begin{array}{rcl}
\lambda > 1 & \rightarrow & \text{Crescimento geométrico, equilíbrio instável.} \\
0 < \lambda < 1 & \rightarrow & \text{Decaimento geométrico, equilíbrio estável.} \\
-1 < \lambda < 0 & \rightarrow & \text{Decaimento geométrico oscilante, equilíbrio estável.} \\
\lambda < -1 & \rightarrow & \text{Crescimento geométrico oscilante, equilíbrio instável.}
\end{array}$$

Análise do Crescimento Populacional Logístico Discreto

Queremos determinar o comportamento da solução com a variação do parâmetro r.
Como já foi visto, temos:

$$x_{n+1} = f(x_n) = rx_n(1 - x_n)$$

Como $x_n > 1$ implica que $x_{n+1} < 0$ o que não é razoável, impõe-se a restrição $0 \leq r \leq 4$.

Análise do Crescimento Populacional Logístico Discreto

Queremos determinar o comportamento da solução com a variação do parâmetro r.
Como já foi visto, temos:

$$x_{n+1} = f(x_n) = rx_n(1 - x_n)$$

Como $x_n > 1$ implica que $x_{n+1} < 0$ o que não é razoável, impõe-se a restrição $0 \leq r \leq 4$.
Os pontos fixos podem ser determinados fazendo $f(x^*) = x^*$:

$$\begin{aligned} rx^*(1 - x^*) &= x^* \\ ((r-1) - rx^*)x^* &= 0 \end{aligned}$$

Cujas soluções são $x^* = 0$, que sempre existe, e $x^* = \frac{r-1}{r}$ que só é positiva quando $r > 1$.

Análise do Crescimento Populacional Logístico Discreto

Para analisar a estabilidade precisamos de f':

$$f'(x) = r(1 - 2x)$$

Análise do Crescimento Populacional Logístico Discreto

Para analisar a estabilidade precisamos de f':

$$f'(x) = r(1 - 2x)$$

$x^* = 0$

Neste caso $\lambda = f'(0) = r$, portanto:

$$\begin{array}{rl} \text{Equilíbrio estável se} & 0 \leq r < 1 \\ \text{Equilíbrio instável se} & 1 < r \leq 4 \end{array}$$

Análise do Crescimento Populacional Logístico Discreto

Para analisar a estabilidade precisamos de f':

$$f'(x) = r(1 - 2x)$$

$x^* = 0$

Neste caso $\lambda = f'(0) = r$, portanto:

$$\begin{array}{rl} \text{Equilíbrio estável se} & 0 \leq r < 1 \\ \text{Equilíbrio instável se} & 1 < r \leq 4 \end{array}$$

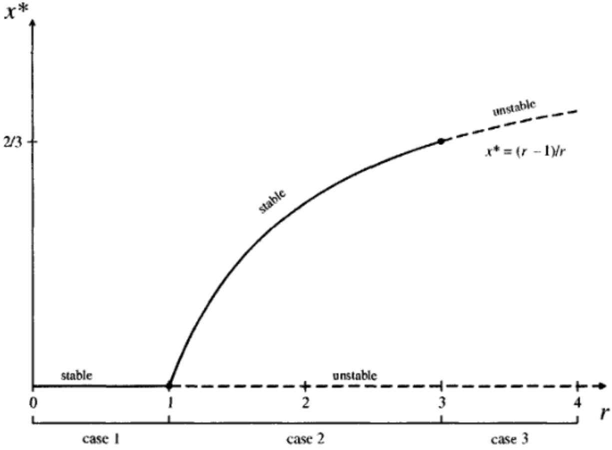
$x^* = \frac{r-1}{r}$

Neste caso $\lambda = f'(\frac{r-1}{r}) = 2 - r$, portanto:

$$\begin{array}{rl} \text{Equilíbrio estável se} & 1 < r < 3 \\ \text{Equilíbrio instável se} & 3 < r \leq 4 \end{array}$$

Análise do Crescimento Populacional Logístico Discreto

Este comportamento pode ser resumido pelo gráfico abaixo chamado *diagrama de bifurcação*:

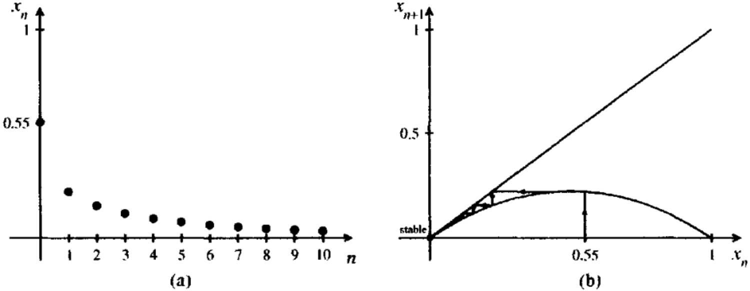


$r = 1$ e $r = 3$ são pontos de bifurcação, isto é, parâmetros para os quais o comportamento do sistema se altera qualitativamente.

Análise do Crescimento Populacional Logístico Discreto

Caso 1: $0 < r < 1$

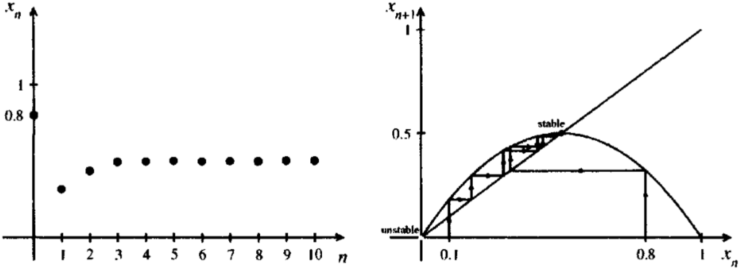
Extinção da população, independentemente da população original.



Análise do Crescimento Populacional Logístico Discreto

Caso 2: $1 < r < 3$

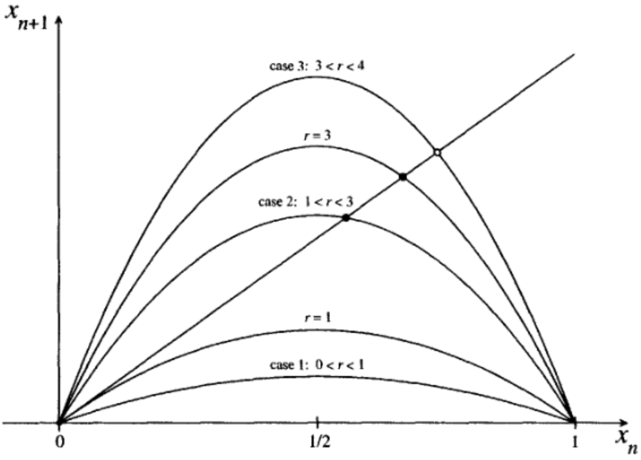
$x^* = 0$ é instável e a população tende para um valor permanente não nulo, $x^* = \frac{r-1}{r}$, que aumenta com r.



(c) (d)

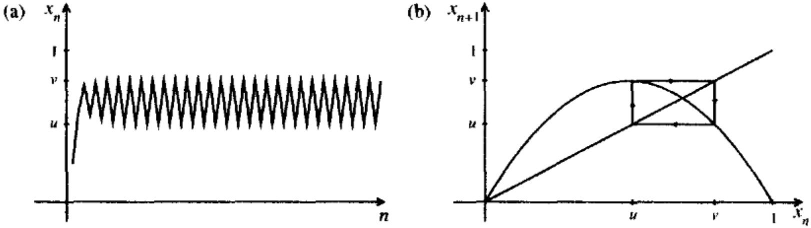
Análise do Crescimento Populacional Logístico Discreto

Uma outra visão:



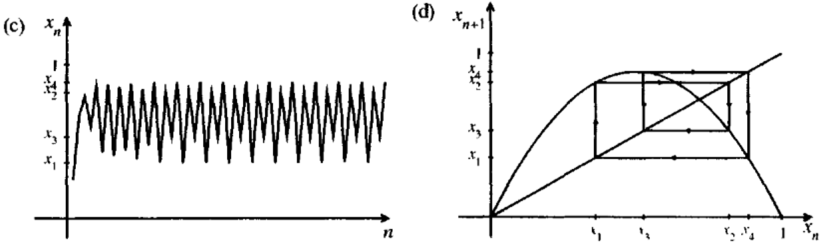
Análise do Crescimento Populacional Logístico Discreto

Caso 3 ($3 < r \leq 4$) - Ciclo com dois pontos, $r = 3.2$



Análise do Crescimento Populacional Logístico Discreto

Caso 3 ($3 < r \leq 4$) - Ciclo com quatro pontos, $r = 3.55$



Análise do Crescimento Populacional Logístico Discreto

Origem do Ciclo de dois pontos

Em relação ao dois pontos no ciclo, u e v, temos:

$$\begin{aligned} f(u) &= v \\ f(v) &= u \end{aligned}$$

Análise do Crescimento Populacional Logístico Discreto

Origem do Ciclo de dois pontos

Em relação ao dois pontos no ciclo, u e v, temos:

$$\begin{aligned} f(u) &= v \\ f(v) &= u \end{aligned}$$

Ou, de forma equivalente:

$$\begin{aligned} f(f(u)) &= u \\ f(f(v)) &= v \end{aligned}$$

Análise do Crescimento Populacional Logístico Discreto

Origem do Ciclo de dois pontos

Em relação ao dois pontos no ciclo, u e v, temos:

$$\begin{aligned} f(u) &= v \\ f(v) &= u \end{aligned}$$

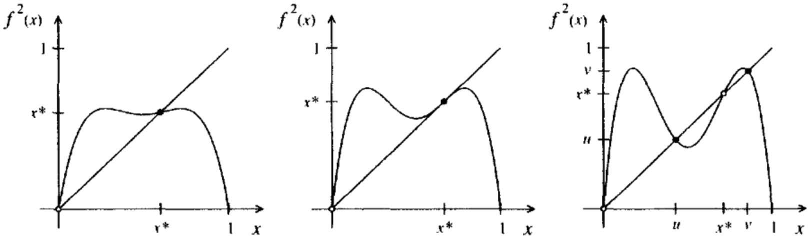
Ou, de forma equivalente:

$$\begin{aligned} f(f(u)) &= u \\ f(f(v)) &= v \end{aligned}$$

Isto é, o ciclo de dois pontos é um ponto fixo da composição de $f(x)$ com ela mesma, $f(x_{n+2}) = f(f(x)) = f^2(x)$ (não confundir com o quadrado da função f).

Análise do Crescimento Populacional Logístico Discreto

Ciclo de dois pontos

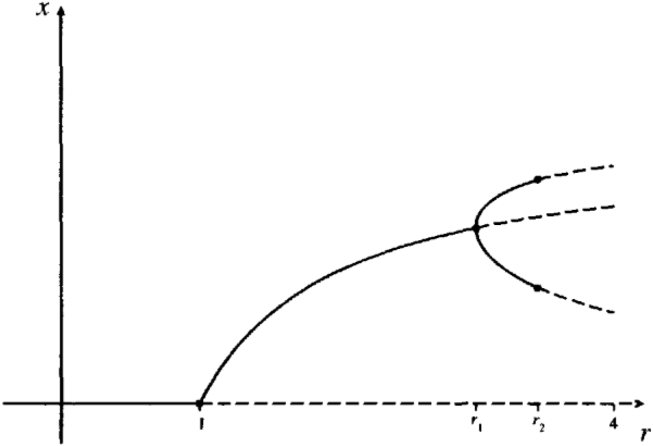


(a) (b) (c)

1. $r < 3$, pontos fixos: $x^* = 0$ e $x^* = \frac{r-1}{r}$ (mesmos pontos fixos de f).
2. $r = 3$, situação limite.
3. $r > 3$, ponto fixo $x^* = \frac{r-1}{r}$ se torna instável; surgem dois estáveis.

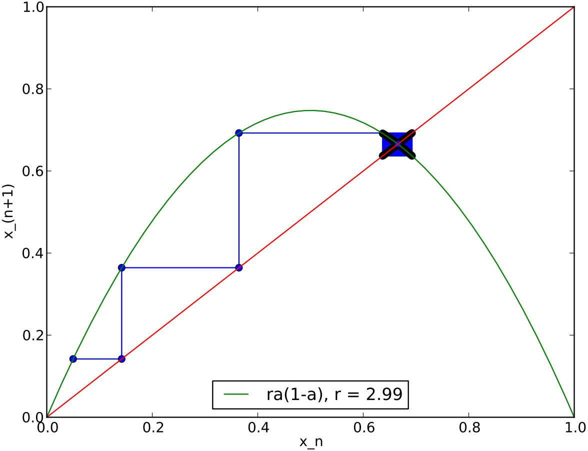
Análise do Crescimento Populacional Logístico Discreto

Ciclo de dois pontos



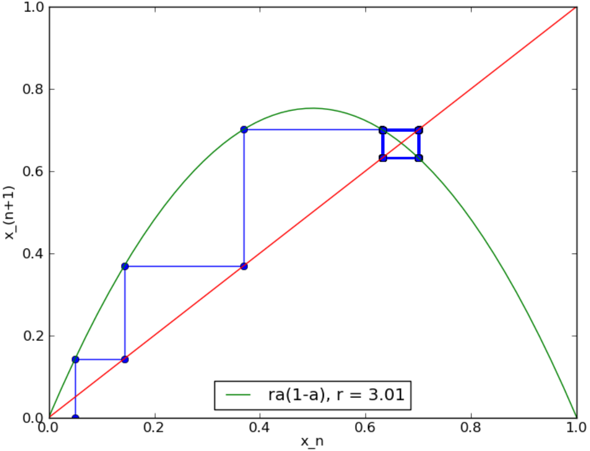
Análise do Crescimento Populacional Logístico Discreto

Limite - Ciclo de dois pontos



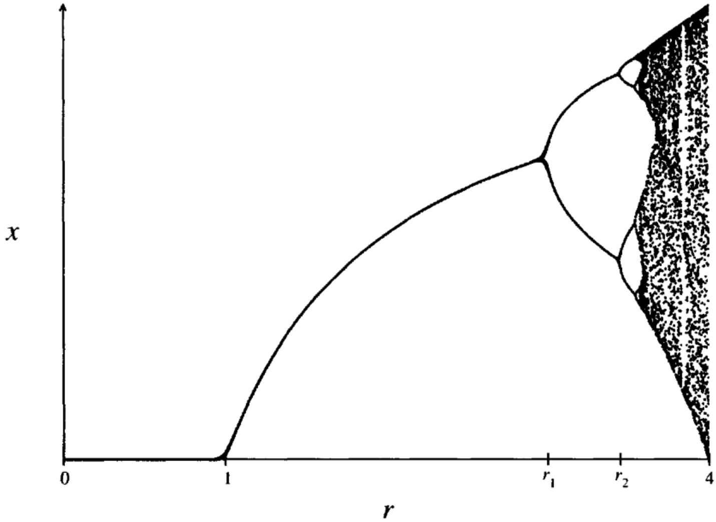
Análise do Crescimento Populacional Logístico Discreto

Limite - Ciclo de dois pontos



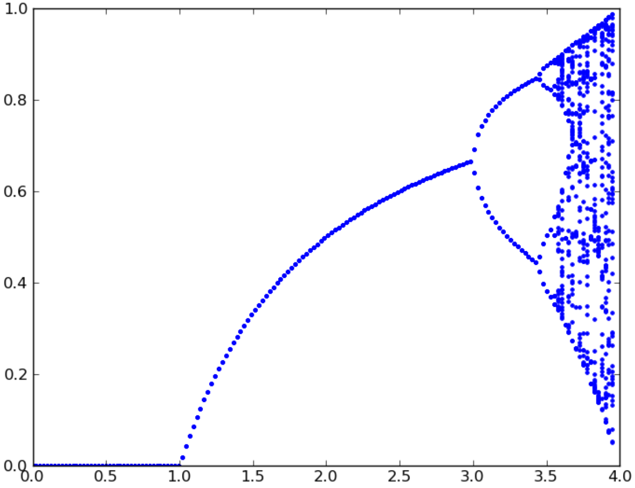
Análise do Crescimento Populacional Logístico Discreto

Continuando ...



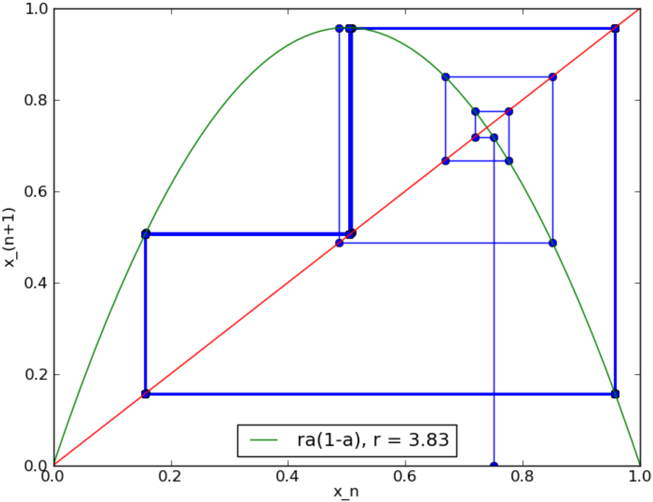
Análise do Crescimento Populacional Logístico Discreto

Continuando ...



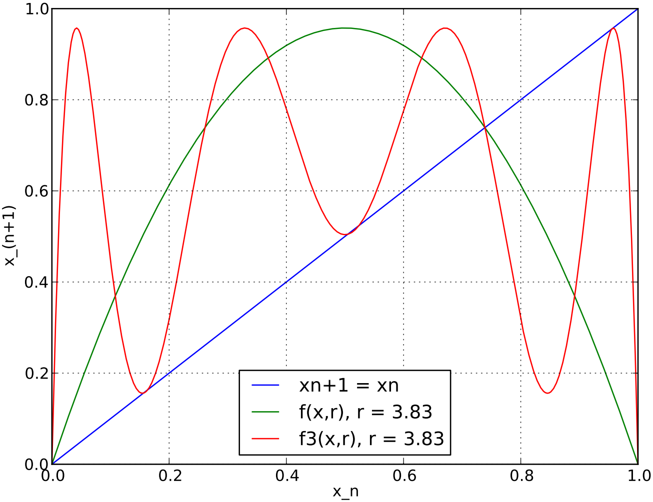
Análise do Crescimento Populacional Logístico Discreto

Ciclo 3 Pontos



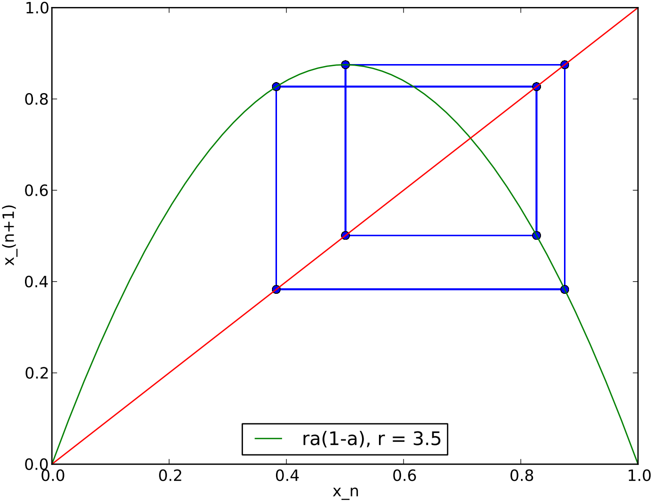
Análise do Crescimento Populacional Logístico Discreto

Ciclo 3 Pontos



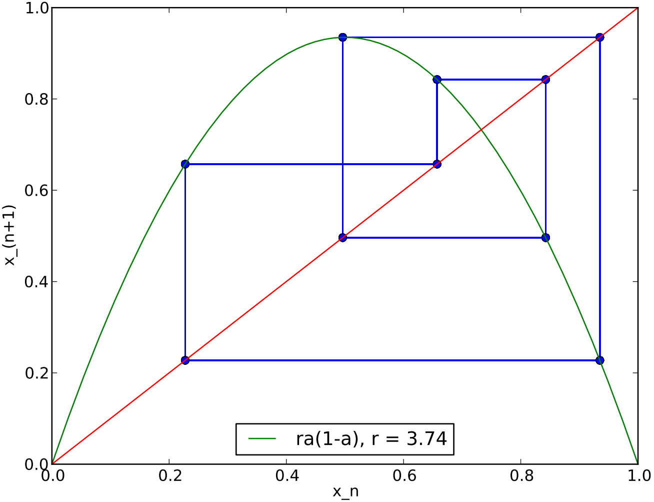
Análise do Crescimento Populacional Logístico Discreto

Ciclo 4 Pontos



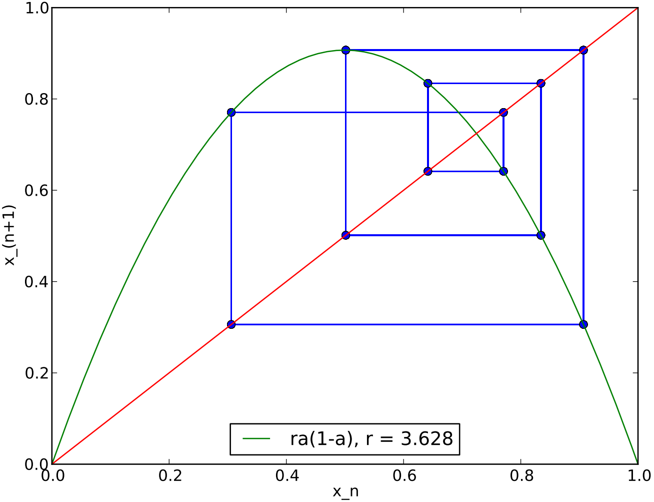
Análise do Crescimento Populacional Logístico Discreto

Ciclo 5 Pontos



Análise do Crescimento Populacional Logístico Discreto

Ciclo 6 Pontos



Análise do Crescimento Populacional Logístico Discreto

Ciclo 6 Pontos